"GEOMETRIA DELLO SPAZIO. SUPERFICI E VOLUMI DEI SOLIDI NOTEVOLI"

DESTINATARI

Allievi della classe IV di un liceo scientifico ad indirizzo PNI. L'argomento è inserito nel Tema n. 1 "Geometria". Si cita in particolare il punto f "Incidenza, parallelismo, ortogonalità nello spazio. Angoli di rette e piani; angoli diedri, triedri" ed il punto g "Poliedri regolari. Solidi notevoli". L'argomento verrà trattato nell'ultimo periodo dell'anno scolastico quindi la parte che riguarda il calcolo del volume di solidi di rotazione tramite il calcolo integrale si svilupperà nella classe quinta. Le ore settimanali di matematica previste per tale indirizzo sono 5.

PREREQUISITI

Gli studenti devono conoscere la geometria euclidea nel piano in particolare

- Assiomi della geometria piana.
- Proprietà delle figure piane.
- Teorema di Talete nel piano.

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dall'unità didattica.
- Comprendere le finalità e acquisire il metodo della geometria sintetica dello spazio.
- Condurre gli studenti ad essere in grado di affrontare un problema di geometria sintetica nello spazio.
- Contribuire a sviluppare e soddisfare l'interesse degli studenti per gli aspetti storico-epistemologici della matematica e della geometria sintetica in particolare e condurli ad inquadrare storicamente l'argomento affrontato.
- Riconoscere il contributo dato dalla matematica e dalla geometria sintetica allo sviluppo delle scienze sperimentali.
- Acquisire consapevolezza del contributo della logica e fornire contesti di applicazione delle sue regole.
- Affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici e degli algoritmi più adatti alla loro rappresentazione.
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico specifico della matematica.
- Imparare ad operare con il simbolismo matematico in situazioni diverse.

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
  - Perseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
  - Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
  - Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Nei Programmi Ministeriali, nel commento al Tema n. 1 dove è presente il riferimento a questa unità didattica si legge: *"Le dimostrazioni delle principali proprietà dello spazio euclideo tridimensionale e dei solidi notevoli, completano gli argomenti di geometria elementare; nello sviluppo dei vari argomenti l'intuizione avrà un ruolo determinante."*

Prendendo spunto da questo suggerimento, la metodologia usata in tutta l'unità didattica è prettamente quella dialogica in modo da cercare il più possibile di spronare gli studenti all'intuizione. Non si daranno mai definizioni e teoremi o concetti in generale senza aver cercato prima di invogliare gli studenti a dare il loro contributo nella creazione del proprio sapere; solo dopo, l'insegnante formalizzerà i concetti affinché gli studenti siano condotti ad utilizzare un linguaggio formale.
Purtroppo la geometria dello spazio, sebbene affascinante, ha dei caratteri, che per uno studente del quarto anno di un liceo scientifico possono apparire alquanto noiosi e difficili. L'essere noiosa deriva dalla presenza di parecchie dimostrazioni che spesso agli studenti non piacciono; per alleviare questa percezione cercherò di presentare le dimostrazioni delle varie proprietà (a seconda della ricettività della classe) in maniera da accentuare la visione che ogni affermazione và verificata piuttosto che la dimostrazione stessa. La difficoltà deriva dalla scarsa attitudine degli studenti a questo livello ad immaginare ed astrarre concetti nello spazio quindi per ovviare ciò, utilizzerò un software specifico (CABRI 3D) che oltre a costituire una soluzione di continuità ad una esposizione che per i contenuti ha scarsa possibilità di entusiasmare, costituisce un valido ausilio per "vedere" nello spazio. La visualizzazione dei concetti permette un migliore apprendimento e di conseguenza potrebbe essere anche utile per migliorare l'esposizione orale.

OBIETTIVI SPECIFICI

<u>Conoscenze</u>
CONOSCERE
- Gli elementi primitivi della geometria dello spazio.
- Gli assiomi.
- Rette complanari e sghembe.
- Parallelismo nello spazio, proprietà.
- Teorema di Talete nello spazio.
- Perpendicolarità nello spazio.
- Teorema delle tre perpendicolari.
- Distanza nello spazio.
- Angoli tra rette sghembe e tra retta e piano.
- Definizione di diedro, di angoloide di poliedro.
- Definizione di prisma.
- Superficie del prisma.
- Definizione di piramide.
- Superficie laterale e totale della piramide e del tronco di piramide.
- Definizione poliedri regolari.
- Teorema di Eulero.
- Definizione di cilindro.
- Superficie del cilindro.
- Definizione di cono e tronco di cono.
- Superficie del cono e del tronco di cono.
- Principio di Cavalieri.
- Volume del prisma e del cilindro.
- Volume del cono.
- Volume della piramide.
- Volume del tronco di cono e del tronco di piramide.
- Volume e superficie della sfera.

Competenze
SAPER
- Individuare proprietà di rette e piani nello spazio
- Individuare al posizione di rette e piani nello spazio
- Calcolare le distanze nello spazio
- Eseguire semplici calcoli in funzione di quanto acquisito
- Calcolare la superficie di un prisma
- Calcolare la superficie laterale e totale della piramide e del tronco di piramide
- Riconoscere le principali caratteristiche dei poliedri regolari
- Calcolare la superficie del cilindro
- Calcolare la superficie del cono e del tronco di cono
- Calcolare il volume di un prisma e di un cilindro
- Calcolare il volume del cono, della piramide, del tronco di cono, del tronco di piramide
- Calcolare il volume e la superficie della sfera

Capacità
SAPER
- Applicare ciò che è stato acquisito per la risoluzione di problemi.

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO
Si prevede di impiegare circa 20/25 ore comprensive di spiegazione, esercitazioni, laboratorio di Cabri 3D e interrogazioni; 1 ora per una eventuale verifica formativa, 2 ore per la verifica sommativa e ½ ore per la consegna e la correzione della verifica sommativa, Per un totale di max 30 ore quindi per la durata di poco più di un mese, poiché in un liceo scientifico PNI, per cui è stata progettata questa unità didattica, le ore di matematica sono 5 a settimana.
Questa previsione è indicativa, da ritenersi elastica, poiché bisogna tener conto delle necessità degli studenti.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1 PASSO: INTRODUZIONE INTUITIVA DI SPAZIO
Introduciamo il nuovo argomento facendo osservare agli studenti che lo studio di geometria fatto fino a questo punto ha preso in esame solo figure giacenti in un piano, ossia figure piane, caratterizzate da due dimensioni: la lunghezza e la larghezza. Invece nella realtà, queste figure non esistono, perché tutto ciò che ci circonda ha una terza dimensione. Il mondo reale non è piatto quindi per misurare gli oggetti concreti occorrono 3 dimensioni: lunghezza, larghezza (già usate nel piano) e spessore o profondità o altezza. È allora necessario introdurre un nuovo ambiente di lavoro chiamato **spazio.** Ogni oggetto che occupa una parte di spazio è detto figura solida o solido.

2 PASSO: COSTRUZIONE DEL NUOVO AMBIENTE
Dobbiamo costruire questo nuovo ambiente come è stato fatto per la geometria euclidea nel piano. Sin dall'inizio faremo osservare agli studenti che verrà eseguito lo studio dello spazio analogamente a quello che è stato per il piano; di conseguenza tante definizioni o teoremi saranno analoghi a quelli del piano. Verrà fatto costantemente riferimento e saranno fatti richiami della geometria euclidea nel piano. Quindi se gli studenti hanno ben chiara questa geometria non faranno fatica a comprendere questi nuovi concetti.
- Analogamente al piano partiremo dall'enunciare gli **assiomi dello spazio** dopo aver sottolineato che il <u>concetto di spazio è primitivo</u> come quelli di punto, retta e piano.

1. Per tre punti non allineati dello spazio, passa sempre uno ed un sol <u>piano</u>

2. La <u>retta</u> passante per due punti di un piano giace interamente nel piano
3. Una retta giacente in un piano lo divide in due regioni, ciascuna delle quali si chiama <u>semipiano</u>
4. Un piano divide lo spazio in due parti, chiamate <u>semispazi;</u> il piano è la loro origine o il loro contorno. I due semispazi si dicono opposti l'uno all'altro.
5. Il <u>segmento</u> che unisce due punti di uno stesso semispazio non ha alcun punto in comune col piano che determina il semispazio, mentre il segmento che unisce due punti appartenenti a semispazi opposti incontra il piano in un punto.
(li ho riportati per un ripasso ma io non li scriverei all'esame)

Posizione di due rette nello spazio
Si introdurrà la posizione di 2 rette nello spazio, chiedendo agli studenti cosa sanno a riguardo della posizione di due rette nella geometria euclidea; a partire dalle loro risposte di arriverà a parlarne nello spazio.
A riguardo, prima si darà la definizione di **rette complanari** (rette che appartengono allo stesso piano) e poi si metterà in evidenza come mentre, nella geometria che conoscono, due rette possono essere solo incidenti o parallele, nello spazio si parlerà di **rette complanari e incidenti**, **complanari e parallele** e **sghembe** (non hanno punti in comune e non esiste un piano che le contenga entrambe). Tutto sarà messo bene in evidenza con dei chiari disegni o fatti alla lavagna, o guardati dal libro di testo, o in laboratorio di informatica utilizzando Cabri 3D. Essendo un software nato per la geometria solida è utilissimo per la visualizzazione dinamica delle figure solide che spesso alla lavagna si fa fatica a disegnare e che sul libro sono statiche. Se la classe non conosce questo software e non si ha tempo di spiegarlo, potrebbe comunque essere utilizzato solo dall'insegnante in modo che gli studenti possano almeno vedere per una acquisizione migliore della teoria ed incuriosirsi.

Posizione di una retta e di un piano nello spazio
Prima di dare le definizioni, mediante la visualizzazione (per cui vale il discorso sul cabri 3D fatto prima) si cercherà dialogicamente di ricavarle; poi si formalizzeranno con la terminologia rigorosa la definizione di retta parallela ad un piano, di retta incidente un piano e di retta perpendicolare ad un piano .

Posizione di due piani nello spazio
Con analoga metodologia precedente, daremo la definizione di due piani incidenti, e faremo riferimento alla possibilità di formazione del fascio proprio di piani tra i quali ci sono i piani perpendicolari; inoltre daremo la definizione di piani paralleli e parleremo di fascio di piani paralleli.
Si darà il concetto di perpendicolarità nello spazio sia tra retta e piano sia tra retta e piano fra di loro e il concetto di distanza nello spazio punto da un piano e retta da un piano e tra due piani paralleli.

Il parallelismo nello spazio è una relazione di equivalenza?
Essendo state date tutte queste definizioni, potrebbe essere utile iniziare ad utilizzare questi nuovi concetti per dimostrare alcuni teoremi e proprietà che nello spazio non sono così ovvie.
Si potrebbe chiedere agli studenti: *"il parallelismo nello spazio è una relazione di equivalenza?"*
Ovviamente sarà necessario riprendere dialogicamente il significato di relazione di equivalenza e magari anche ciò che è stato visto per il parallelismo tra rette nel piano. Dopo di che si inizierà a verificare se il <u>parallelismo tra rette nello spazio è una relazione di equivalenza</u>. Per verificare questa proprietà sarà necessario introdurre e dimostrare alcuni teoremi.

La dimostrazione di questi teoremi non è banale perché richiede un grande sforzo di immaginazione e di ragionamento da parte degli studenti. Il primo di questi due ostacoli potrebbe essere superato sempre utilizzando Cabri 3D mentre il secondo non sarà un problema insuperabile se gli studenti sono già stati in parte preparati a questo di lavoro mentale e dialogico.
Poi si passerà a verificare che il parallelismo tra rette e piani **non** è una relazione di equivalenza perché non vale la proprietà transitiva e infine che il parallelismo tra piani è una relazione di equivalenza

Teorema di Talete nello spazio
Prima di enunciare il teorema di Talete nello spazio ritengo che sia necessario fare un breve ripasso del teorema di Talete nel piano in quanto verrà utilizzato nella dimostrazione.
Teorema di Talete nello spazio: *un fascio di piani paralleli tagliati da 2 rette trasversali individua 2 insiemi di segmenti direttamente proporzionali.*
Ovviamente accanto all'enunciato del teorema sarà fatto un disegno che sarà utile anche per la dimostrazione.

Perpendicolarità nello spazio
Si richiameranno i concetti di geometria nel piano, di perpendicolarità tra rette, per poterli estendere nello spazio; si parlerà di perpendicolarità nello spazio tra retta e piano e fra due piani.
Si darà la **definizione**: *data una retta r e un piano α, diremo che* $r \perp \alpha$ *se r è perpendicolare ad ogni retta del piano* $\alpha \perp r$ e *se in α esistono almeno due rette perpendicolari a r.*
A questa seguiranno i teoremi dei quali si deciderà opportunamente (a seconda della classe) se fare o meno la dimostrazione.
A seguire si darà il concetto di distanza nello spazio parlando di distanza di un punto da un piano, distanza di una retta da un piano, di distanza tra due piani paralleli, di distanza tra due rette sghembe.

Angoli nello spazio
Per poter iniziare a parlare di diedri, sarà opportuno dare la **definizione di angolo nello spazio tra una retta e un piani:** *si chiama angolo tra una retta e un piano l'angolo formato dalla retta e dalla sua proiezione ortogonale sul piano.*
A partire da questa si analizzeranno i vari angoli che si formano tra retta e piano.
Si parlerà anche di **angolo tra due rette sghembe:** *chiameremo angolo fra due rette sghembe a e b, l'angolo determinato da due rette a' e b', uscenti da uno stesso punto P, tale che a' sia parallela ad a e b' parallela a b.*

3 PASSO: DIEDRI
Dialogicamente, mediante dei modellini di carta o semplicemente utilizzando, ad esempio il loro libro (il quale può essere considerato un diedro) si potrà condurre gli studenti a comprendere intuitivamente cos'è un diedro. Dopo aver dato la definizione di diedro, cioè la regione di spazio compresa tra due semipiani uscenti dalla stessa semiretta, si analizzeranno tutte le proprietà e le caratteristiche che possono avere: si daranno i nomi alle varie parti del diedro (facce, spigolo), si parlerà di diedro piatto, diedro giro e diedro nullo, diedro convesso e concavo, diedro congruente e disuguale, diedri consecutivi, somma di più diedri consecutivi, diedri supplementari, misura del diedro mediante la sezione normale di un diedro, diedro retto, diedri acuti e ottusi, diedri complementari.

Angoloidi
Ai diedri seguiranno gli angoloidi; si descriverà la costruzione che potrebbe essere anche essere riprodotta visivamente in classe con un modellino, in modo che gli studenti siano condotti con la

terminologia appropriata a costruire autonomamente la definizione di angoloide: *la figura formata da una superficie piramidale e da tutti i suoi punti interni si chiama angoloide. L'insieme delle facce costituisce la superficie o contorno dell'angoloide.* Si farà osservare agli studenti che un angoloide si dice triedro, tetraedro, pentaedro, secondo che abbia tre, quattro, cinque facce.

Poliedri

Ritengo che sia fondamentale far comprendere agli studenti il collegamento tra ciò che è stato studiato fin'ora e lo studio dei solidi che ci accingiamo a fare. Gli argomenti svolti costituiscono la base fondamentale e necessaria per poter comprendere a fondo ciò che si dirà in seguito. Poiché non è così semplice cogliere questo collegamento, è necessario che costantemente, l'insegnante sottolinei agli studenti la presenza della parte teorica appena affrontata anche nella trattazione di degli argomenti successivi.

Si darà la **definizione di superficie poliedrica**: *la figura formata da più poligoni convessi situati in piani diversi e disposti in modo che ciascun lato sia comune a due di essi e che il piano di ogni poligono lasci tutti gli altri da una medesima parte.*

I poligoni, i loro vertici e i loro lati si dicono rispettivamente facce, vertici, spigoli della superficie poliedrica.

Dalla quale seguirà la definizione di **poliedro:** *la figura formata da una superficie poliedrica e da tutti i suoi punti interni.*

In questa occasione, per richiamare lo studio precedente si farà fare agli studenti stessi le seguenti osservazioni: l'insieme delle facce del poliedro costituisce il contorno o la superficie del poliedro e che quest'ultimo è formato da diedri che si dicono diedri del poliedro; e così pure che si dicono angoloidi del poliedro gli angoloidi che hanno i vertici nei vertici del poliedro e spigoli le semirette che contengono gli spigoli del poliedro uscenti dal vertice che si considera.

Prismi

Si potrebbero portare in classe diversi prismi (<u>anche non retti</u> per evitare che negli studenti si crei la misconcezione che prismi obliqui non esistano) e analizzare insieme agli studenti le caratteristiche per poi giungere a dare la **definizione di prisma***: è un solido che ha per basi due poligoni posti su piani paralleli e per facce laterali dei parallelogrammi.*

In particolare se questi ultimi sono retti (rettangoli o quadrati), il prisma prende il nome di parallelepipedo o di cubo.

Dopo aver definito cosa si intende per superficie di base, superficie laterale e superficie totale, si chiederà agli studenti stessi di calcolarle, per diversi prismi, per poi giungere alla generalizzazione delle formule. Si faranno esercizi di applicazione delle formule.

Piramidi

Analogamente a quanto fatto per i prismi, si potrebbero portare in classe delle piramidi (anche non retti per evitare che negli studenti si crei la misconcezione che piramidi oblique non esistano) si analalizzano e riprendendo anche il concetto di angoloide si arriverà a dare la **definizione di piramide**: *se si taglia un angoloide con un piano non passante per il vertice e non parallelo ad alcuno dei suoi spigoli, si divide l'angoloide in due parti, di cui quella contenente il vertice dicesi piramide.*

Associata alla piramide, si parlerà del tronco di piramide che si ottiene sezionando la piramide con un piano parallelo alla propria base, non passante per il vertice.

Analogamente a quanto è stato fatto per i prismi, gli studenti saranno spronati a pensare al metodo per calcolare la superficie laterale e totale delle piramidi e dei tronchi di piramide. Si faranno esercizi di applicazione delle formule.

Poliedri regolari

Introduciamo i poliedri regolari dicendo subito cosa si intende per regolari (cioè costituiti da facce che sono poligoni regolari tutti congruenti con gli angoloidi pure congruenti tra di loro), che sono 5 e con una discussione guidata cercheremo di far capire agli studenti il perché si ritiene che siano solo 5, i quali prendono i nomi seguenti:
1) tetraedro regolare (4 facce triangolari – angoloidi triedri)
2) ottaedro regolare (8 facce triangolari – angoloidi tetraedri)
3) icosaedro regolare (20 facce triangolari – angoloidi pentaedri)
4) esaedro regolare o cubo (6 facce quadrate – angoloidi triedri)
5) pentadodecaedro regolare (12 facce pentagonali – angoloidi triedri)

I poliedri regolari prendono il nome di **poliedri platonici** a causa del significato simbolico attribuitogli dal filosofo greco Platone; secondo la filosofia dell'epoca, l'universo era costituto da 4 elementi fondamentali acqua, aria ,terra, fuoco a cui si associavano i 5 solidi regolari: fuoco-tetraedro, terra-cubo, aria-ottaedro- acqua-icosaedro e in particolare il dodecaedro rappresentava l'Universo.

Dopo questa introduzione si passerà ad analizzarli singolarmente mettendo in evidenza le caratteristiche di ciascuno.
Infine di darà l'enunciato del **teorema di Eulero:** se indichiamo con f , v , s , rispettivamente , il numero delle facce , dei vertici e degli spigoli di una superficie poliedrica , vale la relazione

$$f + v = s + 2$$

Nota didattica. E' importante sottolineare tutti i collegamenti interdisciplinari che possono essere fatti e non darli per scontato perché non è detto che gli allievi siano in grado di farlo da soli, almeno non all'inizio ma è importante che si abituino a sistemare e organizzare le loro conoscenze in modo non troppo settorializzato.
Collegamento interdisciplinare con scienze della terra: molti minerali cristallini hanno una struttura modellizzabile con poliedri regolari.

Solidi di rotazione
Si inizierà a spiegare il **cilindro** e il **cono**, come si generano e quali sono le principali proprietà. Come è stato fatto per i prismi e le piramidi, anche in questo caso si sottolineerà che non esistono solo cilindri o coni retti (che sono quelli che gli studenti solitamente associano alla parola cilindro o cono). Ciò è importante per evitare si crei la misconcezione che i cilindri e i coni siano solo retti. Negli maggior parte degli esercizi vengono utilizzati cilindri e coni retti per particolari proprietà che posso essere applicate, ma non perché sono gli unici che esistano.
Dopo sempre in analogia ai prismi e alle piramidi si chiederà agli studenti, con l'aiuto dell'insegnante, di calcolare la superficie laterale e totale del cilindro e del cono.
Nel caso del cono si farà un particolare riferimento al tronco di cono e al calcolo della sua superficie laterale e totale, in analogia a quanto è stato fatto per il tronco di piramidi.

Quando gli studenti hanno studiato le coniche, hanno già affrontato l'argomento "intersezioni di un cono con un piano", dove era stato messo in evidenza come al variare dell'angolazione del piano secante si generino una parabola, un'ellisse e un'iperbole, questa potrebbe essere un occasione per fare un breve ripasso.

Come ultimo solido di rotazione si parlerà della **sfera,** ottenuta dalla rotazione di una semicirconferenza o di una circonferenza attorno al suo diametro.

4 PASSO: VOLUME DEI SOLIDI
Fino a questo punto abbiamo calcolato solo le superfici laterali e totali dei solidi che abbiamo studiato ma dobbiamo anche calcolarne il volume.

Il Principio di Cavalieri può essere facilmente ricostruito in classe utilizzando semplicemente due blocchetti uguali di post-it dei quali uno viene deformato. Ovviamente ciò che otteniamo sono sempre due parallelepipedi di cui uno è deformato. Se si sezionano questi due blocchetti, le aree delle sezioni sarà sempre la stessa, come anche l'altezza quindi anche il volume sarà equivalente (il numero di foglietti di cui sono costituiti i due blocchetti, anche se uno dei due è stato deformato, è sempre uguale) il che prova il **Principio di Cavalieri** che a questo punto può essere enunciato: *se due solidi si possono disporre rispetto a un dato piano in modo che le sezioni fatte nei due solidi con un piano qualunque parallelo al dato siano equivalenti , allora essi sono equivalenti*

Dopo ciò, dialogicamente l'insegnante condurrà gli studenti al calcolo del volume di tutti i solidi studiati: prismi, piramidi, tronco di piramidi, cilindro, cono e tronco di cono.

Invece per il calcolo del volume della sfera si partirà dalla costruzione di un nuovo solido chiamato **scodella di Galileo** (formato da un cilindro con raggio di base e altezza uguali ad *r*, a questo cilindro sottraiamo una semisfera di raggio *r* con base una delle basi del cilindro) e con il Principio di Cavalieri si proverà il seguente teorema: *una scodella di Galileo di raggio r è equivalente ad un cono di raggio r ed altezza isometrici ad r* dal quale si dedurrà che il volume della sfera è $V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. Infine si parlerà della superficie della sfera.