Titolo: Funzioni Logaritmiche
Specializzanda: Serena Bezzan

Classe destinataria:

L'unità didattica è rivolta ad una classe terza di un Liceo Scientifico ad indirizzo PNI.

I logaritmi rappresentano un prerequisito fondamentale nello studio della termodinamica. Tuttavia, molti libri di testo affrontano tale unità didattica nei volumi del quarto anno. Questo potrebbe creare problemi agli studenti; in qual caso si provvederà a fornire il materiale necessario.

Inquadramento nei programmi ministeriali:

■ ***I programmi di ordinamento***

LICEO CLASSICO

II CLASSE Le ore di Matematica previste sono due.

"Equazioni [esponenziali] e logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo di espressioni numeriche."

LICEO SCIENTIFICO TRADIZIONALE

III CLASSE Le ore di Matematica previste sono tre.

"Equazioni [esponenziali] e logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo di valore di espressioni numeriche. Cenno sull'uso del regolo calcolatore"

■ ***Piano Nazionale per l'Informatica (PNI)***

Circolare Ministeriale n. 615 del 27 Settembre 1996

LICEO SCIENTIFICO PNI

III CLASSE Le ore di Matematica sono cinque.

Tema n.3 "**Funzioni ed equazioni**": "Logaritmo e sue proprietà. [Funzione esponenziale] e logaritmica"

Nel commento al tema leggiamo:

"*Gli esercizi di applicazione ai concetti di esponenziale e logaritmo saranno limitati ai casi più semplici; anche per il calcolo del logaritmo di un numero o del numero di dato logaritmo si farà ricorso a strumenti automatici di calcolo. Dei suddetti concetti –* [*esponenziale*] *e logaritmo – andranno invece poste in rilievo sia l'importanza teorica sia le applicazioni (modellizzazioni ai fenomeni di accrescimento)*".

■ ***Progetto Brocca***

LICEO SCINTIFICO – TECNOLOGICO

IV CLASSE Le ore di matematica sono 4 (compresa informatica).

Tema n.3 "**Funzioni ed equazioni**": "Logaritmo e sue proprietà. Funzioni [esponenziale] e logaritmica."

A differenza del PNI, ma anche degli altri indirizzi, il Progetto Brocca è l'unico che prevede i logaritmi al 4^anno.

Inoltre il tema e i contenuti del progetto brocca sono gli stessi del PNI (infatti il progetto Brocca nasce proprio dal PNI)

■ ***Proposte dell'UMI (Matematica 2003)***
NUCLEO TEMATICO: "Relazioni e funzioni"; Secondo biennio

Abilità	Conoscenze
Avere familiarità con crescenza, descrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione; funzione inversa. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi.	La funzione [esponenziale]; la funzione logaritmica; (le funzioni seno, coseno, tangente). I loro grafici.
Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita esponenziale, di andamenti periodici.	[…] Il numero *e*.

■ ***Indicazioni Nazionali per i piani di studio personalizzati dei percorsi liceali; Piani di studio e Obiettivi specifici di apprendimento (OSA)***

Gli Osa riguardanti gli argomenti dell'unità didattica presa in esame fanno parte del nucleo *Relazioni e funzioni* del Secondo Biennio e sono

- Funzione [esponenziale], funzione logaritmo e modelli di accrescimento e decadimento
- Utilizzare in casi semplici, operazioni funzionali per costruire nuove funzioni e disegnarne i grafici, a partire dalle funzioni elementari
- Riconoscere crescenza, decrescenza, positività, [massimi e minimi] di una funzione

Prerequisiti

- Numeri reali;
- Potenze ad esponente razionale;
- Equazioni e disequazioni algebriche;
- Concetto di funzione e relativo grafico;
- Funzioni e grafici elementari (somma e prodotto di funzioni, funzioni inverse), tra cui la funzione valore assoluto;
- Simmetrie e traslazioni.

Obiettivi specifici

Gli obiettivi specifici sono suddivisi in *conoscenze* e *abilità*.

Conoscenze:

- Conoscere la definizione di logaritmo;
- Conoscere le proprietà fondamentali dei logaritmi: logaritmo di un prodotto, di un quoziente, di una potenza e il cambiamento di base;
- Conoscere la definizione di funzione logaritmica, dominio e immagine della funzione;
- Conoscere le proprietà della funzione logaritmica e il suo grafico;
- Conoscere le definizioni di equazione e disequazione logaritmiche;
- Conoscere il numero di Nepero e.

Abilità:

- Saper rappresentare una funzione composta da traslazioni e dilatazioni di una funzione data;
- Saper acquisire familiarità con la lettura di un grafico di funzione;
- Acquisire familiarità con l'uso dei logaritmi e delle loro proprietà;
- Saper riconoscere e rappresentare le funzioni logaritmiche;

- Saper osservare i rapporti esistenti tra la funzione esponenziale e la funzione logaritmica;
- Acquisire le tecniche per la risoluzione di equazioni e disequazioni logaritmiche;
- Saper utilizzare la calcolatrice scientifica e software per determinare valori delle funzioni logaritmiche.

Tempi previsti per l'intervento didattico

- Accertamento dei prerequisiti 1h
- Logaritmi e proprietà 1h
- Curva logaritmica 2h
- Cenni storici 1h
- Equazioni e disequazioni logaritmiche 3h
- Verifica sommativa 2h
- Correzione verifica 1h
- Ore di laboratorio 1h

Per un totale di 13 - 14 ore di lavoro.

Metodologia didattica e strumenti

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.
Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).
Verranno discussi e confrontati insieme gli esercizi che hanno apportato incertezze e problemi.
Si svolgerà attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Derive e come Excel; in queste occasioni si preferirà il lavoro di gruppo, le esercitazioni guidate ma anche quelle autonome.

Strumenti utilizzati:

- Libro di testo
- Lavagna e gessi
- Calcolatrice scientifica
- Riga
- Fotocopie
- Software didattici come Derive ed Excel.

Controllo dell'apprendimento:

Il controllo dell'apprendimento sarà effettuato mediante *verifiche formative* e *verifica sommativa*.
Le *verifiche formative* consistono nel controllo degli esercizi assegnati per casa, la correzione alla lavagna degli stessi, effettuato dagli allievi, la discussione in classe dei problemi incontrati nello svolgimento degli esercizi e nello studio della teoria, qualche domanda durante le lezioni, lo svolgimento di qualche esercizio alla lavagna.
Le *verifiche sommative* consistono in prove orali e prove scritte.
Le *prove orali* serviranno al docente per valutare non solo la teoria appresa dai ragazzi, ma verrà chiesto anche lo svolgimento di qualche esercizio e verranno fatte domande riguardanti le attività di laboratorio.
La *prova scritta*, della durata di due ore, sarà svolta al termine dell'unità didattica e ha soprattutto il compito di valutare le abilità e permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti.

Contenuti

La funzione logaritmica

1. Introduzione ai logaritmi
2. Proprietà dei logaritmi
3. Logaritmi decimali e naturali
4. La funzione logaritmica e il suo grafico
5. Le equazioni logaritmiche
6. Le disequazioni logaritmiche

Considerazioni Didattiche (sui contenuti, approfondimenti e attività eventuali di laboratorio)

La funzione strumentale e quella culturale della matematica rappresentano lo strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altra un sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambi gli aspetti sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco si segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. Dentro a competenze strumentali come eseguire i calcoli, risolvere equazioni e disequazioni è importante tenere sempre presente l'aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà.
Per questo si ritiene inoltre opportuno, far presente ai ragazzi il motivo per il quale i logaritmi hanno avuto un grande successo quando sono stati introdotti: venivano utilizzati dagli astronomi e dai fisici per semplificare i loro calcoli. Ancora una volta la matematica viene applicata alla realtà, per risolvere problemi quotidiani.

Introduzione al concetto di logaritmo:

Facciamo capire alla classe che non tutte le equazioni (e disequazioni) esponenziali si possono ridurre alla forma canonica e quindi non tutte si possono risolvere con i metodi già visti durante lo studio delle funzioni esponenziali.
Un esempio è la seguente equazione: $2^x=3$. È evidente che, in base alle conoscenze fin qui acquisite, il secondo membro di tale equazione non può essere scritto come potenza di 2. Ma è anche evidente, che tale equazione ammette una e una sola soluzione in quanto la funzione esponenziale è biunivoca. Possiamo inoltre convincerci di questo, interpretando graficamente la suddetta equazione; essa infatti equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = 3 \end{cases}$$

e quindi la risoluzione dell'equazione corrisponde alla ricerca del punto di intersezione tra la curva di equazione $y = 2^x$ (grafico della funzione esponenziale di base 2) e la retta di equazione $y = 3$.
Facciamo vedere con derive il grafico e possiamo notare che il punto d'intersezione esiste ed è unico; la sua ascissa rappresenta quindi la soluzione dell'equazione considerata.
Come si può calcolare in modo immediato e preciso la soluzione di un'equazione esponenziale non ridotta in forma canonica? La risposta a questa domanda, sono i **logaritmi.**
I logaritmi infatti nascono proprio dall'esigenza di risolvere equazioni esponenziali del tipo $2^x = 3$.

La soluzione di equazioni del tipo $a^x = b$ viene proprio indicata introducendo il logaritmo ossia:

$$x = \log_a b\,.$$

In tale espressione a è detta **base** del logaritmo, mentre b è detto **argomento** del logaritmo.

Nota Didattica: facciamo notare ai ragazzi che

- nel caso in cui b < 0 oppure b = 0, l'equazione non ammette soluzione, perché tutti i punti della curva esponenziale hanno ordinata positiva.

- $a \neq 1$ poiché per a = 1 l'equazione esponenziale diventa $1^x = 1 \quad \forall x \in \Re$; quindi se $b = 1$, l'equazione ha infinite soluzioni, mentre se $b \neq 1$, l'equazione sarebbe impossibile.

Dopo quanto appena osservato possiamo concludere che se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, si ha per definizione

$$\boxed{x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b}$$

Nota didattica: Facciamo ragionare i ragazzi sull'esistenza del logaritmo di un numero minore, oppure uguale a 0. I ragazzi dovrebbero dedurre che tale logaritmo non può esistere perché per definizione $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ e se $b \leq 0$ tale uguaglianza non può sussistere.

Dopodiché si introducono le proprietà dei logaritmi con relative dimostrazioni.

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a a^c = c$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Nota didattica: allo scopo di imparare a riconoscere ed applicare le proprietà dei logaritmi si proporranno alcuni semplici esercizi. Si propone inoltre di non insistere troppo con questi esercizi in quanto torneranno ripetutamente (come già detto) nello studio di equazioni e disequazioni.

Nota Didattica: dopo aver introdotto due logaritmi "speciali" ossia i logaritmi naturali e i logaritmi decimali, facciamo notare ai ragazzi che le calcolatrici scientifiche consentono il calcolo sia dei logaritmi naturali sia dei logaritmi decimali. A tale proposito occorre ricordare che, conformemente alla notazione anglosassone, sulle calcolatrici scientifiche i logaritmi naturali sono solitamente denotati con il simbolo ln, mentre i logaritmi decimali sono denotati con il simbolo log.

A questo punto introduciamo a definizione di funzione logaritmica:
Definizione: Sia dato un numero reale $a > 0, a \neq 1$, è possibile associare, a un qualsiasi numero reale $x > 0$, il $\log_a x$ come segue

$$x \to \log_a x \qquad (a, x \in \Re^+ \setminus \{0\})$$

Viene così definita una funzione reale di variabile reale, di equazione $y = \log_a x$, che si chiama **funzione logaritmica di base *a*, il cui dominio è $\Re^+ \setminus \{0\}$.**

Poi rappresentiamo i grafici (a mano) con i ragazzi, e deduciamo con loro le opportune proprietà (dominio, immagine, crescenza, cosa succede se x va verso valori "molto piccoli", si potrebbe introdurre in modo intuitivo il concetto di limite). È opportuno poi portare i ragazzi in laboratorio e far vedere i grafici attraverso Derive.

Infine, in un sistema di riferimento cartesiano disegniamo il grafico della funzione $y = \log_2 x$. Nello stesso sistema di riferimento disegnare, senza fare calcoli, i grafici delle funzioni $y = \log_2 (-x)$, $y = \log_2 (x-1)$, $y = 1 + \log_2 x$.

Note Didattiche:

- Dopo aver fatto disegnare ai ragazzi i grafici degli esercizi 1 e 2, si consiglia di riproporre gli stessi esercizi con Derive, in quanto dà la visualizzazione immediata delle caratteristiche richieste.
- Dopo aver studiato i grafici della funzione logaritmica, e precedentemente quelli della funzione esponenziale, è bene sottolineare ancora che la funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale e banalmente, allo stesso modo, la funzione esponenziale è l'inversa della funzione logaritmica.
- Facciamo anche notare ai ragazzi che poiché la funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, il suo grafico si ottiene sottoponendo i punti della curva esponenziale a una simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante:

Equazioni logaritmiche

Definizione: Si definiscono **equazioni logaritmiche** quelle equazioni in cui l'incognita compare nell'argomento di uno o più logaritmi.

Nota didattica: anche in questo caso facciamo notare ai ragazzi che $\ln(x+3) = 5$ è un'equazione logaritmica, mentre $(x-5)\ln 3 = 0$ non è un'equazione logaritmica.

Cominciamo a presentare delle equazioni esponenziali risolubili per mezzo dei logaritmi e mostriamo la possibilità data dai logaritmi di risolvere equazioni esponenziali i cui membri siano prodotti e quozienti di basi diverse.

Infatti, in generale, se $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ sono due funzioni che rappresentano prodotti e quozienti di termini positivi, in cui l'incognita compare solo nell'esponente di alcuni di essi, allora sono definiti i logaritmi di tali funzioni in una certa base $a > 0, a \neq 1$ e si ha

$$\boxed{f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x)}.$$

A questo punto facciamo ragionare i ragazzi su alcuni esempi concreti come ad esempio $6^{x-1} = 3 \cdot 7^{x+1}$ oppure $15 + 4^x = 2^{x+3}$.

Nota Didattica: Si passerà ora allo studio delle equazioni logaritmiche insistendo sul fatto che prima di risolvere l'equazione occorre innanzitutto studiare le condizioni di esistenza della soluzione; è meglio sottolineare che tali condizioni sono espresse dai valori di x che appartengono al dominio, ossia dai valori di x per i quali l'equazione assume significato.

Dopo aver studiato le condizioni di esistenza si procederà alla sua riduzione alla forma canonica

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$$

da cui si potrà poi passare agli argomenti cioè *f(x)* = *g(x)*. Una volta trovata la soluzione si dovrà verificare se essa è accettabile in base alle condizioni studiate all'inizio.

Esempi:

- $3^{x-1} = 7^{1+x}$
- $\ln(x-2) + \ln x = \ln (9-2x)$.

Disequazioni logaritmiche

Definizione: Si chiamano **disequazioni logaritmiche** quelle disequazioni in cui l'incognita compare nell'argomento di qualche logaritmo.

Facciamo vedere la possibilità, sotto certe condizioni, di passare da una disequazione esponenziale (con basi diverse), a una disequazione logaritmica. In questo caso si dovrà ricordare di porre grande attenzione alla monotonia della funzione logaritmica e quindi che vale:

$$\begin{array}{ll} \text{Se } a>1,\ f(x), g(x)>0 & f(x)<g(x) \to \log_a f(x) < \log_a g(x) \\ \text{Se } 0<a<1,\ f(x), g(x)>0 & f(x)<g(x) \to \log_a f(x) > \log_a g(x) \end{array}$$

Passiamo ora allo studio delle disequazioni logaritmiche vere e proprie, per le quali non devono essere tenute presenti solo le proprietà di monotonia ma anche le condizioni di esistenza della disequazione.
Dopo aver studiato le condizioni di esistenza si procederà alla riduzione della disequazione alla forma canonica

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

da cui si potrà passare alla disuguaglianza degli argomenti, ricordando che **si deve cambiar il verso della disequazione quando la base dei logaritmi è <1.**

Esempi:

- $3^{x+1}+2\cdot 3^{2-x}>29$.
- $\log_2 (x-1) < 1$
- $\log_3 x + \log_3 (x-8) > 2$

Esercizi (tratti dalla verifica formativa e sommativa)

Esercizio 1: Conoscendo l'andamento del grafico $y = \log_{½}(x)$, disegna i grafici delle funzioni $y = \log_{½}(-x)$, $y = \log_{½}(x-1)$, $y = 1+\log_{½}(x)$

Esercizio 2: Determina il dominio della seguente funzione:

$$y = \frac{\log_4(x^2-1)}{\log_5(4-x^2)}$$

Esercizio 3: Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

- $2 \log_a (x+4) = \log_a (2-x)$
- $2 \log_a (x-1) + \log_a (x-2) = \log_a (x^2-3x+2)$
- $\ln^2 x+\ln x = 0$

Esercizio 4: Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche:

- $\log_2(x-1)<1$
- $\log_{1/2}(4^x-2^x)>1$