EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

DESTINATARI: II anno del liceo scientifico PNI come consigliato nella **Circolare Ministeriale n. 24 del 6 febbraio 1991** dove l'argomento trattato in questa unità didattica è il **punto 2.e** - *Equazioni, disequazioni e sistemi di primo e secondo grado* - del **Tema n. 2** – *Insiemi numerici e calcolo*; lo svolgimento dell'attività, inizierà nel secondo quadrimestre. Le ore settimanali di matematica previste per tale indirizzo sono 5.

PREREQUISITI

- Conoscenza degli insiemi numerici **N**, **Z**, **Q**.
- Conoscenza di base logica.
- Conoscenza del calcolo letterale.
- Saper risolvere equazioni e disequazioni di primo grado.
- Risolvere sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.
- Conoscenza dell'insieme dei numeri reali.
- Conoscenza del calcolo con i radicali.
- Elementi di geometria analitica: la retta e la parabola.
- Uso del software *Cabri Géomètre II Plus* e *Derive*.

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dall'unità didattica.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI

<u>Conoscenze</u>

- ♦ Conoscere il concetto di equazione di secondo grado.
- ♦ Conoscere il concetto di un'equazione di secondo grado incompleta (pura, spuria, monomia).
- ♦ Conoscere la formula risolutiva.
- ♦ Conoscere il concetto di un'equazione di secondo grado completa e tecniche di risoluzione di equazioni frazionarie e di equazioni intere letterali.
- ♦ Particolari equazioni di grado superiore al secondo: binomie, trinomie.
- ♦ Conoscere il metodo di risoluzione grafica di un'equazione di secondo grado.

- Conoscenza del software *Cabri Géomètre II Plus* e *Derive* necessaria allo svolgimento di esperienze a sostegno e chiarimento dei concetti e degli esercizi proposti.

Competenze
- Saper riconoscere un’equazione di secondo grado.
- Saper distinguere tra equazioni di secondo grado incomplete ed equazioni di secondo grado complete.
- Saper risolvere equazioni di secondo grado numeriche incomplete, numeriche complete, numeriche fratte e letterali.
- Saper scrivere una equazione di secondo grado conoscendone le soluzioni.
- Risolvere equazioni di grado superiore al secondo: binomie, trinomie.
- Risolvere equazioni di grado superiore al secondo componendole in polinomi di 1° e 2° grado.
- Saper risolvere equazioni parametriche.
- Saper risolvere un problema attraverso un’equazione di secondo grado.
- Saper risolvere sistemi di secondo grado.

Capacità

- Saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- Saper individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l’uso di equazioni di secondo grado.
- Saper applicare la risoluzione grafica di equazioni di secondo grado a problemi riguardanti altri argomenti.
- Saper applicare le conoscenze e le competenze acquisite a contesti diversi, in particolare a quello della fisica.

CONTENUTI
- Equazioni di secondo grado.
- Risoluzione di un’equazione incompleta di secondo grado: spuria, pura e monomia.
- Risoluzione di un’equazione completa di secondo grado.
- Equazioni numeriche intere.
- Equazioni numeriche fratte.
- Relazioni tra i coefficienti e le soluzioni di un’equazione di secondo grado.
- Formalizzare e risolvere problemi di secondo grado ad una incognita.
- Risoluzione e interpretazione grafica di un’equazione di secondo grado.

TEMPI DELL’INTERVENTO DIDATTICO
1 ora di accertamento dei prerequisiti, 12 ore di lezioni frontali e svolgimento di esercizi, 2 ore di attività di laboratorio, 2 ore per la verifica sommativa, 1 ora di consegna e correzione verifica sommativa per un totale di 18 ore di lezione che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa quattro settimane di lavoro.

METODOLOGIE DIDATTICHE
Per affrontare gli argomenti di questo percorso didattico si farà uso di *lezioni frontali-dialogiche* per introdurre i nuovi concetti, svolgere gli esercizi più significativi, per verificare in itinere l’acquisizione dei contenuti, cercando di ottenere in questo modo un maggior coinvolgimento degli alunni.
Per mantenere elevato il livello di attenzione ed interesse della classe verranno proposte attività coinvolgenti e motivanti ed in quest’ottica è interessante sviluppare un approccio storico sulla risoluzione delle equazioni algebriche. Attraverso la storia della matematica si potrebbero creare

situazioni problematiche, in cui stimolare i ragazzi a scoprire procedimenti risolutivi stimolando così lo spirito della ricerca e della scoperta.
Infine, mediante l'utilizzo del software *Cabri Géomètre II Plus e Derive* , o analoghi, si cercherà di stimolare la creatività degli studenti, facendo presente che il laboratorio sarà utilizzato come parte integrante dell'attività didattica, dal processo intuitivo a quello della formalizzazione.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1 PASSO: EQUAZIONI DI SECONDO GRADO
Per introdurre le equazioni di secondo grado, in particolare per motivare il loro studio, si propone agli studenti un problema geometrico dividendo la classe in gruppi. La formalizzazione di questo in forma algebrica, li condurrà a scrivere un'equazione di secondo grado, che risolveranno attraverso la legge di annullamento del prodotto, componendo il polinomio con la regola della "somma e del prodotto" introdotta nella classe prima.
Problema. Determinare le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo sapendo che la loro somma è 21 *cm* e che l'ipotenusa misura 15 *cm*.

Nota didattica. Da questo problema si prenderà spunto per introdurre tutto il discorso sulle equazioni di secondo grado e la loro risoluzione. In questa fase potranno essere utili dei riferimenti alla storia delle equazioni algebriche e della ricerca di metodi generali per la loro risoluzione. Si potrà ad esempio accennare ad alcuni problemi che già si sapevano risolvere nell'antichità e ad altri risolti da matematici arabi fino a scoprire una "formula risolutiva" valida per tutte le equazioni di secondo grado.

Un'equazione di secondo grado nell'incognita x si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad con \; a \neq 0 \quad b, c \in R$$

detta **forma tipica** o **forma normale.**
Una equazione di secondo grado, ridotta alla forma tipica, si dice ***completa*** quando i coefficienti a, b, c sono tutti diversi da zero; si dice ***incompleta*** quando i coefficienti b e c (uno o entrambi) sono uguali a zero.
Distinguendo i casi in cui b e c sono entrambi nulli, oppure uno nullo e l'altro diverso da zero, oppure entrambi diversi da zero, una equazione di secondo grado può presentare una delle forme seguenti:

1°)	$ax^2 = 0$	equazione monomia.
2°)	$ax^2 + c = 0$	equazione "pura".
3°)	$ax^2 + bx = 0$	equazione "spuria".
4°)	$ax^2 + bx + c = 0$	equazione completa.

Vediamo ora degli esempi per ogni forma considerata:

Esempio 1.	$6x^2 = 0$	è un'equazione monomia.
Esempio 2.	$9x^2 - 4 = 0$	è un'equazione pura.
Esempio 3.	$2x^2 + 7x = 0$	è un'equazione spuria.
Esempio 4.	$2x^2 - 5x - 3 = 0$	è un'equazione completa.

2 PASSO: RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE INCOMPLETA DI SECONDO GRADO: SPURIA, PURA E MONOMIA
Equazione spuria
Un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \; a \neq 0$$

è incompleta **spuria** se $c = 0$ e $b \neq 0$, cioè manca il termine noto, e si presenta dunque nella forma $ax^2 + bx = 0.$ Le soluzioni della data equazione sono:

$$x_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

e sono sempre reali di cui una nulla.

Equazione pura

Un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

è incompleta **pura** se $c \neq 0$ e $b = 0$, cioè manca il termine di primo grado in *x*, e si presenta dunque nella forma $ax^2 + c = 0.$ Isolando x^2 si ottiene: $x^2 = -\frac{c}{a}.$

Per la risoluzione dell'equazione pura dobbiamo allora distinguere i due casi seguenti:

1° caso: *a* e *c* sono concordi

Se *a* e *c* sono concordi, $-\frac{c}{a}$ è negativo; poiché x^2 è positivo o nullo in quanto potenza pari di un numero reale, l'equazione non ha soluzioni reali.

2° caso: *a* e *c* sono discordi

Se *a* e *c* sono discordi, $-\frac{c}{a}$ è positivo; pertanto l'equazione ammette due radici opposte reali e distinte:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Equazione monomia

Un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

è incompleta **monomia** se $c = 0$ e $b = 0$, cioè mancano sia il termine di primo grado in *x* sia il termine noto, e si presenta dunque nella forma:

$ax^2 = 0$ che è evidentemente soddisfatta solo per $x = 0.$ Si dice però che l'equazione ha *due soluzioni reali coincidenti* entrambe uguale a zero.

3 PASSO: RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE COMPLETA DI SECONDO GRADO

Risolvendo l'equazione completa di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0,$ possono presentarsi tre casi, che dipendono dal valore del discriminante che si suole indicare con la lettera greca maiuscola Δ (*delta*):

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

La parola *discriminante* è dovuta al fatto che l'essere $b^2 - 4ac$ positivo, nullo o negativo rende differenziate, cioè discrimina, le soluzioni dell'equazione completa.

1° caso. $\Delta > 0$ l'equazione ha *due soluzioni reali e distinte*:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

<u>Osservazione didattica</u>. Se *a* e *c* hanno segni contrari le radici esistono sempre, perché in tal caso il prodotto *ac* è negativo, quindi $-4ac$ è positivo ed è perciò positivo anche il discriminante $b^2 - 4ac$.

2° caso. $\Delta = 0$ l'equazione ha *due soluzioni reali* e *coincidenti:*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{0}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{0}}{2a}$$

ossia: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

3° caso. $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni in **R,** cioè è **impossibile.**

Se il coefficiente di *x*, cioè *b*, è divisibile per 2, per risolvere l'equazione si può applicare l'**espressione ridotta**:

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Nota didattica. Personalmente ho potuto notare che gli studenti "si rifiutano di capire" l'utilità di questa formula, quindi non la usano. E poiché non c'è nulla da imparare, ma semplicemente basta capire quando nei calcoli è più comodo usare *b* o *b/*2, si insisterà per farla applicare, richiedendo che negli esercizi, quando è possibile, venga usata al fine di evitare, alle volte, calcoli esorbitanti.

4 PASSO: EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

Un'equazione di secondo grado si dice numerica se oltre alla lettera che rappresenta l'incognita, non contiene altre lettere. Si dice *intera* se l'incognita non compare al denominatore.

Per determinare l'insieme delle soluzioni di una equazione numerica intera si procede nel seguente modo:

- si riduce l'equazione data in forma normale seguendo il procedimento indicato per le espressioni algebriche e applicando i principi di equivalenza già noti per la risoluzione delle equazioni di primo grado;
- si trasformano i coefficienti *a, b, c,* qualora non lo fossero, in numeri interi moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune multiplo;
- si stabilisce se l'equazione ottenuta è completa o incompleta e si proceda alla risoluzione a seconda dei casi;
- nel caso dell'equazione completa:
    - si consiglia di rendere il coefficiente del termine di secondo grado, cioè il primo coefficiente *a* sempre positivo (per evitare errori nell'applicazione della formula);
    - si consiglia di applicare, quando è possibile, la formula ridotta.

5 PASSO: EQUAZIONI NUMERICHE FRATTE

Un'equazione è **frazionaria** o **fratta** se anche in uno solo dei suoi denominatori compare l'incognita.

Prima di procedere alla risoluzione di un'equazione fratta è indispensabile porre le condizioni di esistenza delle singole frazioni. Dopo aver ridotto l'equazione a forma intera e dopo averla risolta, è necessario escludere dal gruppo delle eventuali soluzioni trovate, quei valori che dovessero annullare anche uno solo dei denominatori.

Nota didattica. Gli esercizi affrontati in classe con gli alunni, potrebbero essere risolti anche in laboratorio attraverso l'uso del software *Derive*. Lo studente dopo aver impostato l'equazione e risolta "carta e penna", potrebbe verificare l'esattezza del risultato facendola risolvere al programma.

6 PASSO: RELAZIONI TRA I COEFFICIENTI E LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO.

Consideriamo un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ e $\Delta \geq 0$. In queste condizioni gli alunni sanno già che le soluzioni dell'equazione saranno due, reali e distinte (o coincidenti se $\Delta = 0$):

Somma delle radici

Indichiamo con *s* la somma delle radici $x_1 + x_2$:

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Prodotto delle radici

Indichiamo con *p* il prodotto delle radici $x_1 \cdot x_2$:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Le formule appena introdotte consentono tra l'altro di risolvere tre tipi importanti di problemi:

1. *Dati la somma s e il prodotto p delle radici di una equazione di secondo grado, costruire l'equazione stessa.*

2. *Determinare due numeri conoscendo la loro somma s e il loro prodotto p.*

3. *Scomporre un trinomio di secondo grado in un prodotto di fattori di primo grado.*

7 PASSO: FORMALIZZARE E RISOLVERE PROBLEMI DI SECONDO GRADO AD UNA INCOGNITA

Le equazioni di secondo grado trovano applicazione nella risoluzione di diverse specie di problemi. Poiché le soluzioni che si possono presentare sono dei tipi più svariati, non è possibile formulare un metodo generale per la risoluzione di qualsiasi problema.

In classe assieme agli alunni, si affronteranno diversi esempi e si noterà che "alcuni passaggi" sono ancora praticamente obbligatori.

Dopo una lettura attenta del problema, si individuerà *l'incognita*, se ne definirà il *dominio* e si cercherà di esprimere le relazioni tra la grandezza rappresentata dall'incognita e gli altri dati del problema, mediante una *disequazione*, che si dovrà poi risolvere. L'insieme delle *soluzioni* dovrà poi essere messo a confronto con il dominio e vedere quali soluzioni sono accettabili.

Nota didattica. La scelta dell'incognita, spesso, non è obbligata: uno stesso problema può essere risolto scegliendo l'incognita in modi diversi; una scelta oculata può però semplificare i calcoli che si dovranno eseguire.

8 PASSO: RISOLUZIONE E INTERPRETAZIONE GRAFICA DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

Nella risoluzione di un'equazione di secondo grado si cercherà di dare un'impostazione principalmente di tipo grafico. Questo tipo di approccio, permetterà una maggior comprensione delle cose, evitando inutili memorizzazioni di formule e schemi.

Risolvere graficamente l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

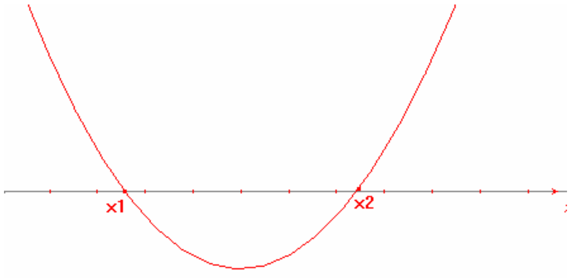
che traduce analiticamente il problema di determinare le intersezioni tra la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e l'asse delle ascisse di equazione $y = 0$.

Perciò le soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sono le ascisse degli eventuali punti comuni alla parabola e all'asse delle *x*.

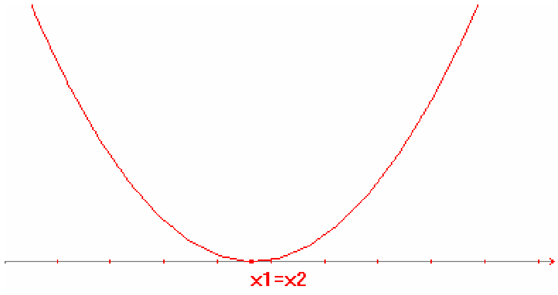
Ora che gli alunni conoscono il discriminante, si può far notare come le coordinate del vertice della parabola possano essere scritte: $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Pertanto possono presentarsi tre casi diversi e, a seconda che $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$, il vertice avrà posizioni diverse e la parabola intersecherà l'asse delle *x* in due punti reali distinti, oppure in un sol punto (due punti reali coincidenti) oppure in nessun punto.

- **1° caso.** $\Delta > 0$ l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ ha due radici reali e distinte x_1 e x_2 che sono le ascisse dei punti d'intersezione con l'asse *x*;



- **2° caso.** $\Delta = 0$ l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ ammette due radici reali e coincidenti $x_1 \equiv x_2$, ascissa del punto di *tangenza* della parabola con l'asse *x*;



- **3° caso.** $\Delta < 0$ l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ non ammette radici reali. La parabola non interseca l'asse delle *x*.