DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

DESTINATARI: III anno del liceo scientifico PNI come consigliato nella **Circolare Ministeriale n. 615 del 27 settembre 1996** dove l'argomento trattato in questa unità didattica è il **punto 3.a** – *Equazioni e sistemi di secondo grado. Disequazioni di secondo grado* - del **Tema n. 3** – *Funzioni ed equazioni*; lo svolgimento dell'attività, inizierà nel primo quadrimestre. Le ore settimanali di matematica previste per tale indirizzo sono 5.

PREREQUISITI
- Conoscenza degli insiemi numerici **N**, **Z**, **Q**.
- Conoscenza di base logica.
- Conoscenza del calcolo letterale.
- Saper risolvere equazioni e disequazioni di primo grado, equazioni di secondo grado.
- Risolvere sistemi di equazioni di primo e secondo grado.
- Risolvere sistemi di disequazioni di primo grado.
- Conoscenza dell'insieme dei numeri reali.
- Conoscenza del calcolo con i radicali.
- Elementi di geometria analitica: la retta e la parabola.
- Uso del software *Cabri Géomètre II Plus* e *Derive*.

OBIETTIVI GENERALI
- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dall'unità didattica.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI

<u>Conoscenze</u>
- ♦ Conoscere il concetto di segno di un trinomio di secondo grado.
- ♦ Conoscere il metodo di risoluzione di una disequazione di secondo grado per via algebrica.
- ♦ Conoscere il metodo di risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado.
- ♦ Conoscere il concetto di disequazioni fratte.
- ♦ Conoscere il concetto di disequazioni parametriche.

- Conoscenza del software *Cabri Géomètre II Plus* e *Derive* necessaria allo svolgimento di esperienze a sostegno e chiarimento dei concetti e degli esercizi proposti.

Competenze
- Saper operare con i trinomi di secondo grado.
- Saper risolvere le disequazioni di secondo grado.
- Saper risolvere disequazioni fratte di secondo grado.
- Saper risolvere disequazioni parametriche di secondo grado.
- Saper risolvere un problema attraverso una disequazione di secondo grado.
- Saper risolvere sistemi di secondo grado.
- Saper risolvere graficamente una disequazione di secondo grado.

Capacità

- Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso di disequazioni di secondo grado.
- Applicare la risoluzione grafica di disequazioni di secondo grado a problemi riguardanti altri argomenti.
- Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

CONTENUTI
- Le disequazioni di secondo grado.
- Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado.
- Il segno di un trinomio di secondo grado.
- Terminologia e principi di equivalenza.
- Disequazioni di secondo grado ad una incognita.
- Disequazioni fratte.
- Formalizzare e risolvere problemi con disequazioni di secondo grado ad una incognita.
- Sistemi di disequazioni di secondo grado e misti (primo e secondo grado).
- Disequazioni parametriche di secondo grado.
- Applicazioni delle disequazioni di secondo grado.

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO
1 ora di accertamento dei prerequisiti, 10 - 11 ore di lezioni frontali e svolgimento di esercizi, 2 ore di attività di laboratorio, 2 ore per la verifica sommativa, 1 ora di consegna e correzione verifica sommativa per un totale di 16 - 17 ore di lezione che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa quattro settimane di lavoro.

METODOLOGIE DIDATTICHE
Per affrontare gli argomenti di questo percorso didattico si farà uso di *lezioni frontali-dialogiche* per introdurre i nuovi concetti, svolgere gli esercizi più significativi, per verificare in itinere l'acquisizione dei contenuti, cercando di ottenere in questo modo un maggior coinvolgimento degli alunni.
Per mantenere elevato il livello di attenzione ed interesse della classe verranno proposte attività coinvolgenti e motivanti ed in quest'ottica è interessante sviluppare un approccio storico sulla risoluzione delle equazioni algebriche. Attraverso la storia della matematica si potrebbero creare situazioni problematiche, in cui stimolare i ragazzi a scoprire procedimenti risolutivi stimolando così lo spirito della ricerca e della scoperta.
Infine, mediante l'utilizzo del software *Cabri Géomètre II Plus e Derive* , o analoghi, si cercherà di stimolare la creatività degli studenti, facendo presente che il laboratorio sarà utilizzato come parte integrante dell'attività didattica, dal processo intuitivo a quello della formalizzazione.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1 PASSO: RISOLUZIONE GRAFICA DI UNA DISEQUAZIONE DI SECONDO GRADO

Al fine di giungere alla miglior comprensione di un oggetto matematico, ritengo opportuno che il docente inizi a risolvere graficamente una disequazione di secondo grado. In questo modo si cerca di individuare una “relazione” tra algebra e geometria; agli occhi degli studenti le disequazioni diventano “oggetti concreti”.

Risolvere la graficamente la disequazione

$ax^2 + bx + c > 0 \quad (ax^2 + bx + c < 0)$

significa trovare per quali valori dell’ascissa i punti della parabola hanno ordinata $y = ax^2 + bx + c$ positiva (o negativa), cioè per quali valori di *x* la parabola sta “sopra” (o “sotto”) l’asse *x*, in altre parole il tutto equivale a risolvere il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases}$$

Esaminiamo il metodo da seguire:

Innanzitutto si devono trovare le intersezioni della parabola con l’asse delle ascisse. Per far questo si pone $ax^2 + bx + c = 0$ e con la formula risolutiva si trovano le eventuali radici. A questo punto si devono distinguere tre casi, se $\Delta = b^2 - 4ac$

1° caso $\Delta > 0$; **2° caso** $\Delta = 0$; **3° caso** $\Delta < 0$.

Nel primo caso si hanno due radici reali e distinte, nel secondo due coincidenti, nel terzo non ci sono radici reali, cioè la parabola non incontra l’asse delle ascisse.

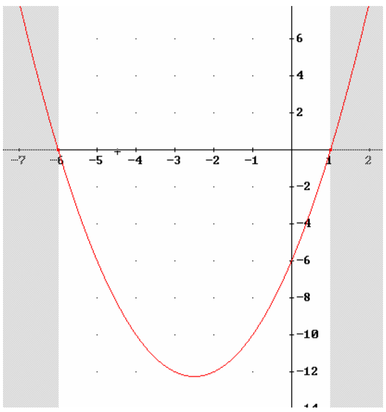
Inoltre si deve tener presente del segno del coefficiente di x^2 e confrontarlo con quello di Δ per trovare i valori per cui è soddisfatta la disequazione $y > 0 \;\; (y < 0)$.

A questo punto è possibile sapere quali sono i rami che giacciono nel semipiano delle ordinate positive o negative.

Vediamo con un esempio ciò che abbiamo appena illustrato. Ricordiamo che l’esercizio verrà sfruttato per fare ulteriori applicazioni del software *Derive*.

Esempio. Risolvere la disequazione $x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

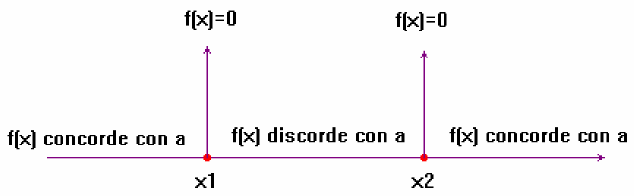
Risoluzione. Si devono quindi determinare i punti della parabola $y = x^2 + 5x - 6$ che giacciono nel semipiano delle ordinate positive o nulle (l’asse *x* compreso). Tale parabola incontra l’asse delle *x* nei punti la cui ascissa è data dalla soluzione dell’equazione $x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \vee x = -6$. I punti della parabola che si trovano nel semipiano delle ordinate positive sono quelli che hanno ascissa minore di –6 e maggiore di 1, ossia quelli per cui si ha: $x \leq -6 \vee x \geq 1$. L’insieme delle soluzioni è quindi costituito dall’unione dei due intervalli chiusi e illimitati: $\left]-\infty, -6\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.



Solo dopo aver a lungo insistito su questa analisi grafica delle disequazioni di secondo grafico, si potrà fornire agli studenti la classica tabella riassuntiva delle soluzioni di una disequazione di secondo grado.

2 PASSO: IL SEGNO DI UN TRINOMIO DI SECONDO GRADO

1. Condizione necessaria e sufficiente affinché un trinomio di secondo grado, avente il $\Delta>0$, assuma valori di segno uguale a quello del suo primo coefficiente, è che si attribuisca alla sua variabile x valori esterni all'intervallo delle sue radici e, affinché assuma segno contrario a quello del primo coefficiente, è che si attribuisca alla variabile x valori interni all'intervallo delle radici. Il trinomio si annulla se si danno alla x i valori x_1 o x_2.



2. Ogni trinomio di secondo grado, a $\Delta=0$, assume valori di segno uguale a quello del suo primo coefficiente, qualunque valore si dia alla variabile x, eccetto $x=x_1$, valore per il quale il trinomio si annulla.
3. Ogni trinomio di secondo grado, a $\Delta<0$, ha sempre il segno del suo primo coefficiente (e non si annulla mai).

3 PASSO: TERMINOLOGIA E PRINCIPI DI EQUIVALENZA

DEFINIZIONE. Due disequazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Questa definizione di disequazioni equivalenti, che viene riportata nella maggior parte dei libri scolastici, potrebbe risultare ambigua.
Sarebbe necessario dichiarare l'insieme numerico in cui si cercano le soluzioni per affermare se due disequazioni sono equivalenti oppure no.

Per risolvere una disequazione bisogna in primo luogo trasformarla in un'altra equivalente e più semplice, applicando i seguenti due principi di equivalenza, fondati sulle proprietà delle disuguaglianze.
PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. Addizionando **o** sottraendo **ad ambo i membri di una disequazione uno stesso numero, o una stessa espressione algebrica, contenente l'incognita, risulta una disequazione equivalente alla data.**

Conseguenza del primo principio di equivalenza
REGOLA DEL TRASPORTO. Un termine di una disequazione può venire trasportato da un membro all'altro, purché venga cambiato di segno.

In particolare: si può sempre fare in modo, col trasporto di termini dal 2° membro al 1°, che il 2° membro di una disequazione sia zero.

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. Moltiplicando o **dividendo** ambo i membri di una disequazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una disequazione equivalente se tale numero è positivo, si ottiene una disequazione nel verso opposto della disuguaglianza, se tale numero è negativo.
<u>**Osservazione didattica**</u>. I princìpi di equivalenza (quello *additivo* e quello *moltiplicativo)* non sono

semplici da memorizzare, perché la loro formulazione varia a seconda che si abbia a che fare, come si è visto, con equazioni o disequazioni. Ma non si tratta di regole nuove, calate improvvisamente dall'alto. La loro validità è assicurata dal fatto che, nell'ambito numerico nel quale si opera, le trasformazioni codificate nei "princìpi di equivalenza" sono invertibili. Per esempio, nel caso delle disequazioni si deve tenere conto della proprietà che impone di invertire il verso di una disuguaglianza quando la si moltiplica per un fattore negativo.

4 PASSO: DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO AD UNA INCOGNITA

Una disequazione di secondo grado ad una incognita è rappresentata dalla seguente **forma normale**:

$$ax^2+bx+c\ge 0 \quad \text{oppure} \quad ax^2+bx+c\le 0 \quad con\ a\in R_0 \quad b,c\in R$$

Lo studio del segno del trinomio di secondo grado preso in esame precedentemente ci permette di risolvere le disequazioni quando sono scritte in forma normale.
Per determinare l'insieme delle soluzioni di una disequazione di secondo grado in una incognita si procede nel seguente modo:

1) si eseguono i calcoli indicati e si riduce la disequazione a forma intera;
2) si scrive l'equazione associata e la si risolve;
3) si applicano le considerazioni espresse nel paragrafo precedente relative al segno del trinomio di secondo grado.

Dopo aver risolto una disequazione può essere necessario rappresentare graficamente l'intervallo (o gli intervalli) in cui essa è verificata. Si indicano gli intervalli con una linea **continua** delimitata ad ogni estremo da un **punto** che è pieno se tale estremo è incluso e vuoto se esso è escluso.

5 PASSO: DISEQUAZIONI FRATTE

Una disequazione si dice **fratta**, o frazionaria, se la variabile *x* compare almeno in uno dei denominatori. Essa può essere espressa nella forma:

$$\frac{F(x)}{G(x)}>0 \quad \text{oppure} \quad \frac{F(x)}{G(x)}<0$$

o in quelle analoghe con i segni $\ge$ e $\le$.
<u>Osservazione didattica</u>. $F(x)$, $G(x)$, sono due polinomi di secondo grado nella variabile *x*.

Per risolvere una disequazione fratta si deve studiare il segno del numeratore $F(x)$, e il segno del denominatore $G(x)$ e quindi stabilire il segno del rapporto $\frac{F(x)}{G(x)}$. In ogni caso si deve tener presente che è necessario ***escludere dalle soluzioni quei valori di x che annullano anche un solo denominatore.***

La risoluzione di una disequazione fratta si rende più spedita ricorrendo alla rappresentazione geometrica. Precisamente sopra una retta orientata, si segna con tratto continuo l'intervallo (o gli intervalli) ove il segno del polinomio al numeratore risulta negativo. La stessa cosa si fa sopra una seconda retta per il polinomio al denominatore. Dopo aver fatto ciò, si rivelano subito quali sono gli intervalli dove i due polinomi assumono valori dello stesso segno e quali sono quelli dove assumono valori di segno contrario.
Illustriamo con un esempio concreto il procedimento:
<u>*Esempio*</u>. Risolvere la disequazione:

$$\frac{x^2-2x-3}{4x-x^2}\le 0.$$

<u>*Risoluzione*</u>. Per studiare il segno del numeratore (*N*) e del denominatore (*D*) si pone il polinomio al numeratore ≥ 0, (questo anche se la disequazione avesse avuto segno $>$ o $\ge$), e il polinomio al

denominatore sempre >0 e non ≥ 0, altrimenti si andrebbero a considerare anche quelle radici che annullano il denominatore, e questo sarebbe insensato.

Nota didattica. Sarà opportuno sottolineare che non si sta ponendo una condizione sul numeratore e sul denominatore, ma se ne sta studiando il segno per capire per quali valori di x sono positivi e per quali sono negativi.

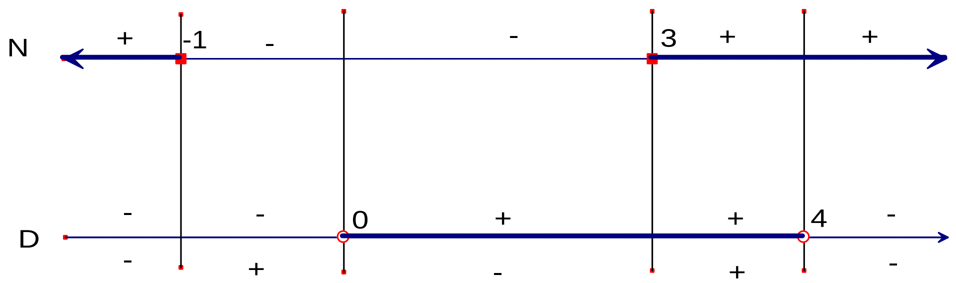
Si studia il segno del numeratore, ponendo $N = x^2 - 2x - 3 \geq 0$.

La disequazione è soddisfatta per $x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 3$.

Si studia il segno del denominatore, ponendo $D = 4x - x^2 > 0$.

la disequazione è soddisfatta per $0 < x < 4$.

Prepariamo lo schema grafico risolutivo che permette di confrontare gli intervalli di soluzione delle due disequazioni:



La disequazione è perciò verificata per: $x \leq -1 \quad \vee \quad 0 < x \leq 3 \quad \vee \quad x > 4$.

6 PASSO: SISTEMI DI DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO E MISTI (PRIMO E SECONDO GRADO)

Sottolineo alcuni punti sull'argomento, a mio avviso cruciali.

- Il docente deve insistere sul significato di sistema e chiarire il perché le soluzioni di un sistema siano i valori comuni alle disequazioni prese in esame richiamando il concetto insiemistico di intersezione.

- Molto spesso gli alunni confondono il metodo risolutivo di una disequazione (principalmente le razionali fratte, ma anche lo studio del segno del trinomio) con quello dei sistemi di disequazioni.
  Il problema nasce dal fatto che in entrambi si utilizza il metodo grafico di riportare le soluzioni sulla retta orientata, e se non è stato compreso il perché si usi la regola dei segni per le disequazioni, mentre si prendano i valori comuni per un sistema, il disastro è assicurato.

L'insieme di due o più disequazioni in una incognita soggette alla condizione di essere soddisfatte contemporaneamente, costituisce un *sistema di disequazioni.*

Risolvere un sistema di disequazioni significa trovare *ogni soluzione comune a tutte* le disequazioni del sistema. Se non esistono soluzioni comuni si usa dire che il sistema è **impossibile** e che le disequazioni che lo compongono sono *incompatibili* tra loro.

Per risolvere un sistema di disequazioni è opportuno seguire il seguente procedimento:

1) si risolvono separatamente le disequazioni che compongono il sistema;
2) si rappresenta in un unico grafico l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione;
3) mediante l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni, si determinano, se esistono, le soluzioni comuni a **tutte** le disequazioni: esse formano **l'insieme delle soluzioni del sistema**.

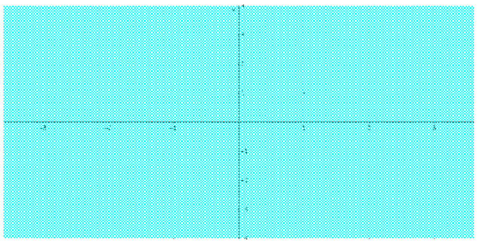
<u>Nota didattica</u>. Al termine di una lezione frontale in cui si sono svolti esercizi alla lavagna guidando gli studenti nella risoluzione e nella spiegazione del metodo, si può proporre come ulteriore potenziamento di risolverli attraverso l'uso del software *Derive*.

UTILIZZO DEL SOFTWARE *DERIVE*

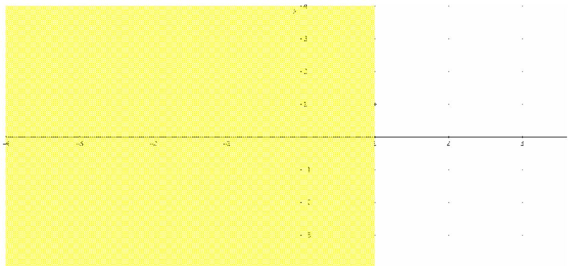
<u>Esercizio</u> . Si risolva il seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} x^2+1>0 \\ x-1<0 \\ x^2-4<0 \end{cases}$

<u>Risoluzione</u>. Si tratta di disequazioni di 1° e 2° grado ad una incognita: ciascuna di esse individua una regione di piano. Consideriamo ciascuna disequazione:

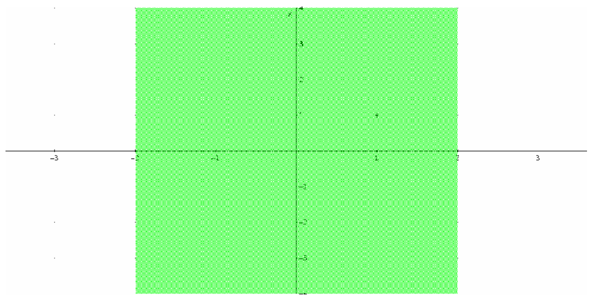
$x^2+1>0$ verificata $\forall x \in R$



$x-1<0$ verificata per $x<1$

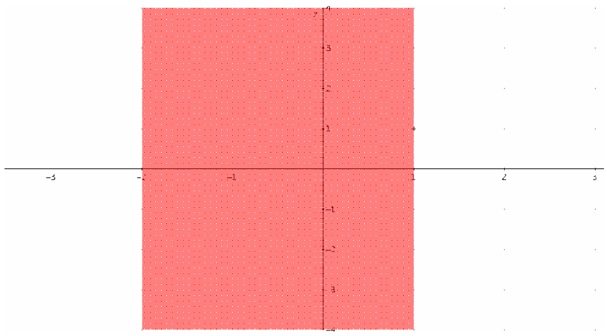


$x^2-4<0$ verificata per $-2<x<2$



L'intersezione delle regioni individuate è la seguente:

$-2<x<1$



7 PASSO: DISEQUAZIONI PARAMETRICHE DI SECONDO GRADO

L’argomento verrà svolto sviluppando diversi esercizi in classe, in modo da presentare una vasta casistica.

Esempio. Risolvere la disequazione $x^2 - 2kx + k^2 - k > 0$ con $k \in \mathbf{R}$.

Il discriminante del trinomio a primo membro cambia di segno al variare di k e precisamente, essendo $\frac{\Delta}{4} = k$, e $\Delta \geq 0$ per $k \geq 0$.

Si distinguono perciò tre casi:

1. $k < 0$. Il Δ è negativo e perciò il trinomio è in questo caso sempre concorde con il primo coefficiente, cioè positivo. Quindi se $k < 0$, la disequazione è verificata per qualsiasi valore reale di x.

2. $k = 0$. Il Δ è nullo e il trinomio, che in questo caso ha radici $x_1 = x_2 = 0$, è positivo per qualsiasi valore reale di $x \neq 0$. Quindi per $k = 0$, la disequazione è verificata per $x \neq 0$.

3. $k > 0$. Il Δ è positivo e le radici del trinomio sono $x_{1,2} = +k \pm \sqrt{k}$. Affinché la disequazione sia verificata, il trinomio deve risultare concorde col primo coefficiente e pertanto si deve sostituire a x i valori esterni all’intervallo delle radici x_1 e x_2. Quindi per $k > 0$, la disequazione è soddisfatta per $x < +k - \sqrt{k} \quad \vee \quad x > +k + \sqrt{k}$.