

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

DESTINATARI: I anno del liceo scientifico PNI come consigliato nella **Circolare Ministeriale n. 24 del 6 febbraio 1991** dove l'argomento trattato in questa unità didattica è il **punto 2.e – Equazioni, disequazioni e sistemi di primo e secondo grado** - del **Tema n. 2 – Insiemi numerici e calcolo**; lo svolgimento dell'attività, inizierà nel secondo quadrimestre. Le ore settimanali di matematica previste per tale indirizzo sono 5.

PREREQUISITI

- Conoscenza degli insiemi numerici N, Z, Q .
- Conoscenza di base logica.
- Conoscenza del calcolo letterale.
- Saper risolvere equazioni di primo grado.
- Risolvere sistemi di equazioni di primo grado.
- Conoscenza delle disuguaglianze numeriche e loro proprietà.
- Conoscenza del concetto di intervallo.
- Conoscenza della diretta proporzionalità e la sua rappresentazione grafica.
- Conoscenza della funzione lineare e la sua rappresentazione grafica.
- Elementi di geometria analitica: la retta.
- Uso del software *Derive*.

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dall'unità didattica.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze

- ♦ Conoscere il concetto di disequazione algebrica.
- ♦ Conoscere il concetto di disequazioni equivalenti.
- ♦ Conoscere il concetto di disequazione di primo grado ad una incognita e tecniche di risoluzione (disequazioni intere e disequazioni frazionarie).
- ♦ Il metodo di risoluzione grafica di una disequazione di primo grado.

- ◆ Svolgere esperienze interessanti con il software *Derive* a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

Competenze

- ◆ Saper definire una disequazione algebrica e conoscerne le caratteristiche.
- ◆ Saper verificare se due equazioni sono equivalenti.
- ◆ Saper enunciare e applicare i principi di equivalenza.
- ◆ Saper risolvere disequazioni di primo grado ad una incognita intera.
- ◆ Saper risolvere disequazioni di primo grado ad una incognita frazionarie.
- ◆ Risolvere graficamente le disequazioni di primo grado.
- ◆ Impostare e risolvere problemi mediante l'uso delle disequazioni di primo grado.
- ◆ Saper risolvere sistemi di disequazioni di primo grado.
- ◆ Saper risolvere una disequazione di primo grado in una incognita in cui compaia qualche espressione in valore assoluto.

Capacità

- ◆ Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- ◆ Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso di disequazioni di primo grado.
- ◆ Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

CONTENUTI

- Le disequazioni.
- Le disequazioni equivalenti e i principi di equivalenza.
- Disequazioni di primo grado ad una incognita.
- Procedimento di risoluzione delle disequazioni di primo grado ad una incognita: disequazioni intere e disequazioni frazionarie.
- Risoluzione grafica di disequazioni di primo grado.
- Problemi risolubili con disequazioni di primo grado ad una incognita.
- Sistemi di disequazioni di primo grado.
- Disequazioni con i valori assoluti.

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO

2 ore di accertamento dei prerequisiti, 9 - 10 ore di lezioni frontali e svolgimento di esercizi, 2 ore di attività di laboratorio, 2 ore per la verifica sommativa, 1 ora di consegna e correzione verifica sommativa per un totale di 16 - 17 ore di lezione che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa tre settimane e mezzo di lavoro.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Per affrontare gli argomenti di questo percorso didattico si farà uso di *lezioni frontali-dialogiche* per introdurre i nuovi concetti, svolgere gli esercizi più significativi, per verificare in itinere l'acquisizione dei contenuti, cercando di ottenere in questo modo un maggior coinvolgimento degli alunni.

Per mantenere elevato il livello di attenzione ed interesse della classe verranno proposte attività coinvolgenti e motivanti ed in quest'ottica è interessante sviluppare un approccio storico sulla risoluzione delle equazioni algebriche. Attraverso la storia della matematica si potrebbero creare situazioni problematiche, in cui stimolare i ragazzi a scoprire procedimenti risolutivi stimolando così lo spirito della ricerca e della scoperta.

Infine, mediante l'utilizzo del software *Derive*, o analoghi, si cercherà di stimolare la creatività degli studenti, facendo presente che il laboratorio sarà utilizzato come parte integrante dell'attività didattica, dal processo intuitivo a quello della formalizzazione.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1 PASSO: DISEQUAZIONI EQUIVALENTI E PRINCIPI DI EQUIVALENZA

DEFINIZIONE. Due disequazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Questa definizione di disequazioni equivalenti, che viene riportata nella maggior parte dei libri scolastici, potrebbe risultare ambigua.

Sarebbe necessario dichiarare l'insieme numerico in cui si cercano le soluzioni per affermare se due disequazioni sono equivalenti oppure no.

Per risolvere una disequazione bisogna in primo luogo trasformarla in un'altra equivalente e più semplice, applicando i seguenti due principi di equivalenza, fondati sulle proprietà delle disuguaglianze.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. **Addizionando o sottraendo ad ambo i membri di una disequazione uno stesso numero, o una stessa espressione algebrica, contenente l'incognita, risulta una disequazione equivalente alla data.**

Conseguenza del primo principio di equivalenza

REGOLA DEL TRASPORTO. Un termine di una disequazione può venire trasportato da un membro all'altro, purché venga cambiato di segno.

In particolare: si può sempre fare in modo, col trasporto di termini dal 2° membro al 1°, che il 2° membro di una disequazione sia zero.

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA. **Moltiplicando o dividendo** ambo i membri di una disequazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una disequazione equivalente se tale numero è positivo, si ottiene una disequazione nel verso opposto della disuguaglianza, se tale numero è negativo.

Osservazione didattica. I principi di equivalenza (quello *additivo* e quello *moltiplicativo*) non sono semplici da memorizzare, perché la loro formulazione varia a seconda che si abbia a che fare, come si è visto, con equazioni o disequazioni. Ma non si tratta di regole nuove, calate improvvisamente dall'alto. La loro validità è assicurata dal fatto che, nell'ambito numerico nel quale si opera, le trasformazioni codificate nei "principi di equivalenza" sono invertibili. Per esempio, nel caso delle disequazioni si deve tenere conto della proprietà che impone di invertire il verso di una disuguaglianza quando la si moltiplica per un fattore negativo.

2 PASSO: DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO AD UNA INCOGNITA

Il docente fa capire alla classe cosa si intende per grado di una disequazione algebrica.

Il grado di una disequazione algebrica in un'incognita, ridotta in forma normale, è la massima potenza dell'incognita stessa.

Come le equazioni, anche le disequazioni di primo grado possono essere sempre trasformate in modo tale che si arrivi alla forma $ax \geq b$ (oppure $ax \leq b$) e a sia un numero reale non negativo.

Si possono allora verificare tre casi:

I. $a \neq 0$

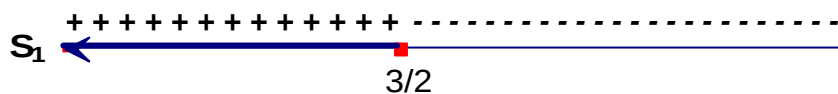
In tale caso è soluzione ogni numero reale x tale che $x \geq \frac{b}{a}$ (oppure $x \leq \frac{b}{a}$).

La disequazione si dice **propria**, l'insieme delle soluzioni è infinito e può essere rappresentato con una semiretta.

Per esempio:

$$\frac{1}{2}(x-1) + 2 \geq \frac{3}{2}x \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Dato S_1 l'insieme delle sue soluzioni, si avrà $S_1 = \left\{ x \in R / x \leq \frac{3}{2} \right\}$. Rappresentiamo sulla retta reale le soluzioni S_1 .



II. $a = 0$ e la proposizione $0 \geq b$ (oppure $0 \leq b$) risulta vera.

Ogni numero reale è soluzione: l'insieme delle soluzioni è R .

Per esempio: $2x - 3 \leq 2(x - 1) \Rightarrow 0 \leq 1$.

III. $a = 0$ e la proposizione $0 \geq b$ (oppure $0 \leq b$) risulta falsa.

Nessun numero reale è, allora, soluzione della disequazione: l'insieme delle soluzioni è vuoto.

Per esempio: $2x - 3 \geq 2(x - 1) \Rightarrow 0 \geq 1$.

3 PASSO: RISOLUZIONE ALGEBRICA DI UNA DISEQUAZIONE DI PRIMO GRADO INTERA E FRAZIONARIA

Risoluzione algebrica di una disequazione di primo grado intera

Per risolvere una disequazione **intera** (cioè priva di denominatori in cui figura x) di primo grado, si può procedere in modo analogo alle equazioni intere di 1° grado, con la sola avvertenza di mutare il verso quando i due membri vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero negativo.

Nota didattica. Gli esercizi affrontati in classe con gli alunni, potrebbero essere risolti anche in laboratorio attraverso l'uso del software *Derive*. Lo studente dopo aver impostato l'equazione e risolta "carta e penna", potrebbe verificare l'esattezza del risultato facendola risolvere al programma.

Risoluzione algebrica di una disequazione di primo grado frazionaria

Una disequazione si dice **fratta**, o frazionaria, se la variabile x compare almeno in uno dei denominatori. Essa può essere espressa nella forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad [1-1] \quad \text{oppure} \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad [1-2]$$

o in quelle analoghe con i segni $\geq$ e $\leq$.

Osservazione didattica. $f(x)$, $g(x)$, sono due polinomi di primo grado nella variabile x .

La disequazione [1-1] è soddisfatta per quei valori della x per i quali i due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ assumono valori dello stesso segno, in modo tale che il loro rapporto, nel complesso, risulti positivo.

Il discorso è analogo nella [1-2] solo che questa volta, la disequazione è soddisfatta per quei valori della x per i quali i due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ assumono valori di segno contrario, in modo tale che il loro rapporto, nel complesso, risulti negativo.

La risoluzione di una disequazione fratta si rende più spedita ricorrendo alla rappresentazione geometrica. Precisamente sopra una retta orientata, si segna con tratto continuo l'intervallo (o gli intervalli) ove il segno del polinomio al numeratore risulta negativo. La stessa cosa si fa sopra una seconda retta per il polinomio al denominatore. Dopo aver fatto ciò, si rivelano subito quali sono gli intervalli dove i due polinomi assumono valori dello stesso segno e quali sono quelli dove assumono valori di segno contrario.

Illustriamo con un esempio concreto il procedimento:

Esempio. Risolvere la disequazione:

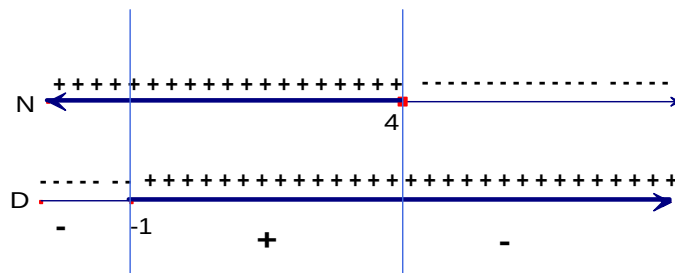
$$\frac{4-x}{x+1} \geq 0.$$

Risoluzione. Per studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D) si pone il polinomio al numeratore ≥ 0 , (questo anche se la disequazione avesse avuto segno > 0 o $\geq$), e il polinomio al denominatore sempre > 0 e non ≥ 0 , altrimenti si andrebbero a considerare anche quelle radici che annullano il denominatore, e questo sarebbe insensato.

Nota didattica. Sarà opportuno sottolineare che non si sta ponendo una condizione sul numeratore e sul denominatore, ma se ne sta studiando il segno per capire per quali valori di x sono positivi e per quali sono negativi.

Si studia il segno del numeratore, ponendo $N \geq 0 \rightarrow 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$.

Si studia il segno del denominatore, ponendo $D > 0 \rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$



Le x che appartengono agli intervalli che hanno lo stesso segno rendono la disequazione fratta positiva.

Le x che appartengono agli intervalli che hanno segno contrario rendono la disequazione fratta negativa. **Si conclude quindi che per $-1 \leq x \leq 4$ la disequazione data è soddisfatta.**

4 PASSO: RISOLUZIONE GRAFICA DI DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Una disequazione lineare di primo grado in una incognita assume sempre la forma

$$ax + b \geq 0 \quad (a) \quad \text{oppure} \quad ax + b \leq 0 \quad (b)$$

Risolvere le disequazioni di questo tipo, corrisponde a risolvere il sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = ax + b \\ y \leq 0 \end{cases}$$

La funzione $y = ax + b$ con $a \neq 0$ è rappresentata nel piano cartesiano da una retta che incontra l'asse delle ascisse nel punto $P\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

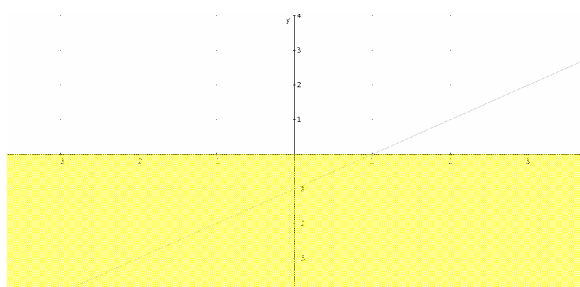
Stabilire per quali valori di x l'espressione $ax + b$ è positiva o negativa, cioè risolvere la disequazione graficamente, significa trovare per quali valori dell'ascissa i punti della retta hanno ordinata $y = ax + b$ positiva o negativa. Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Risolvere la seguente disequazione $5x - 4 \leq 2x - 1$.

Risoluzione. Dopo aver applicato i principi di equivalenza e alcuni calcoli si trova $x - 1 \leq 0$, che è equivalente al sistema $\begin{cases} y = x - 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono date dall'intersezione della retta $y = x - 1$

con il semipiano negativo delle ordinate.

Il risultato è visualizzabile col software *Derive* riportato di seguito:



Il software colora il semipiano $x \leq 1$.

5 PASSO: PROBLEMI RISOLUBILI CON DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO AD UNA INCOGNITA

Le disequazioni di primo grado trovano applicazione nella risoluzione di diverse specie di problemi. Poiché le soluzioni che si possono presentare sono dei tipi più svariati, non è possibile formulare un metodo generale per la risoluzione di qualsiasi problema.

In classe assieme agli alunni, si affronteranno diversi esempi e si noterà che “alcuni passaggi” sono ancora praticamente obbligatori.

Dopo una lettura attenta del problema, si individuerà *l'incognita*, se ne definirà il *dominio* e si cercherà di esprimere le relazioni tra la grandezza rappresentata dall'incognita e gli altri dati del problema, mediante una *disequazione*, che si dovrà poi risolvere. L'insieme delle *soluzioni* dovrà poi essere messo a confronto con il dominio e vedere quali soluzioni sono accettabili.

Nota didattica. La scelta dell'incognita, spesso, non è obbligata: uno stesso problema può essere risolto scegliendo l'incognita in modi diversi; una scelta oculata può però semplificare i calcoli che si dovranno eseguire.

6 PASSO: SISTEMI DI DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Sottolineo alcuni punti sull'argomento, a mio avviso cruciali.

- Il docente deve insistere sul significato di sistema e chiarire il perché le soluzioni di un sistema siano i valori comuni alle disequazioni prese in esame richiamando il concetto insiemistico di intersezione.
- Molto spesso gli alunni confondono il metodo risolutivo di una disequazione (principalmente le razionali fratte, ma anche lo studio del segno del trinomio) con quello dei sistemi di disequazioni.

Il problema nasce dal fatto che in entrambi si utilizza il metodo grafico di riportare le soluzioni sulla retta orientata, e se non è stato compreso il perché si usi la regola dei segni per le disequazioni, mentre si prendano i valori comuni per un sistema, il disastro è assicurato.

- Se un'equazione, o disequazione, o sistema è privo di soluzioni si usa dire che è **impossibile**.
Se un'equazione, o un sistema di equazioni ammette infinite soluzioni si usa dire che l'equazione è **indeterminata** o rispettivamente che il sistema di equazioni è **indeterminato**.
Invece nel caso di disequazioni o sistemi di disequazioni non si adopera tale locuzione, poiché la presenza di infinite soluzioni è la norma, non l'eccezione che merita una menzione specifica.

Nota didattica. Al termine di una lezione frontale in cui si sono svolti esercizi alla lavagna guidando gli studenti nella risoluzione e nella spiegazione del metodo, si può proporre come ulteriore potenziamento di risolverli attraverso l'uso del software *Derive*.

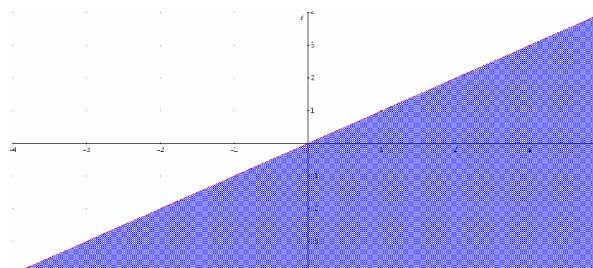
UTILIZZO DEL SOFTWARE *DERIVE*

Esempio1. Rappresentare nel piano cartesiano le soluzioni del sistema di disequazioni:

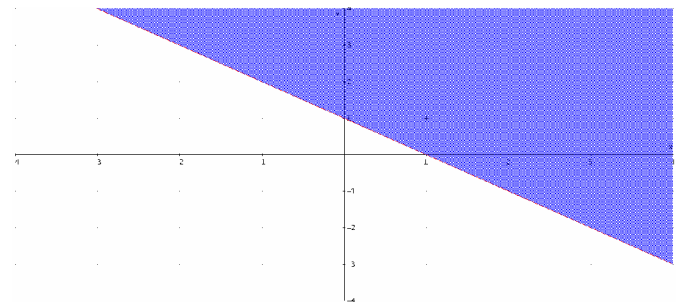
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di disequazioni in due incognite: ciascuna di esse individua una regione di piano. Consideriamo ciascuna disequazione:

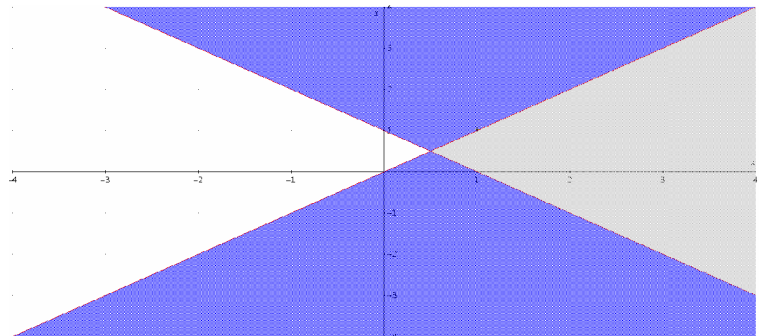
$$x - y \geq 0$$



$$x + y - 1 \geq 0$$



L'intersezione delle regioni individuate è la seguente:



I suoi punti rappresentano le soluzioni del sistema di disequazioni perché le loro coordinate soddisfano *tutte* le disequazioni del sistema.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.