# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

**SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

Classe di Specializzazione A049-A059

Unità Didattica

# LIMITI E CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI REALI A VARIABILE REALE

*Genny Mazzo*

VIII° Ciclo - Anno Accademico 2007-2008

## *COLLOCAZIONE DEL TEMA "LIMITI E CONTINUITA'" NEL CONTESTO DEI PROGRAMMI MINISTERIALI DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE*

L'insegnamento della matematica nei **licei di ordinamento** si basa sui programmi ministeriali redatti nel 1952, che però ricalcano sostanzialmente i programmi della Riforma Gentile, risalente al 1923. Nell'attesa di una riforma della scuola secondaria superiore, molti licei hanno adottato progetti di sperimentazione, tra cui uno dei più seguiti è il **Piano Nazionale per l'Informatica (PNI)**. I suoi programmi sono stati elaborati nel 1985, allo scopo di introdurre l'informatica nelle scuole secondarie superiori; in realtà il progetto coinvolse solo la scuola secondaria superiore, con l'inserimento di elementi di informatica all'interno di nuovi e più corposi programmi di matematica e fisica.

Nella Circolare Ministeriale del 27 settembre 1996, n. 615. Indicazioni programmatiche relative all'insegnamento della matematica nel triennio del liceo scientifico, si afferma che:

" […] *nel corso del triennio l'insegnamento della matematica prosegue ed amplia il processo di preparazione scientifica e culturale dei giovani già avviato nel biennio; concorre insieme alle altre discipline allo sviluppo dello spirito critico ed alla loro promozione umana ed intellettuale."*

Relativamente all'inquadramento dell'argomento "Limiti e continuità delle funzioni" nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, l'argomento in questione è trattato nel Tema n° 7 "Analisi infinitesimale", al punto b, in cui consiglia di introdurre il concetto di limite accompagnandolo da un ventaglio quanto più ampio possibile di suoi impieghi in ambiti matematici ed extramatematici, arricchendo la trattazione presentando ed illustrando opportuni controesempi che serviranno a chiarire i concetti. I programmi aggiungono che, qualora l'insegnante lo ritenesse opportuno, i concetti di limite e derivata, legati ai classici problemi della tangente a una curva e della velocità, possono essere anticipati negli anni precedenti, recuperando solo alla fine un'impostazione rigorosa.

I successivi programmi elaborati dalla Commissione Brocca negli anni 1991 e 1992, che rientravano in un progetto più ampio di riordino della Scuola secondaria superiore, non hanno sostanzialmente modificato i programmi PNI di Matematica e Fisica. Essi sono stati adottati dai vari istituti di istruzione secondaria come progetti di sperimentazione su proposta dello stesso Ministero della Pubblica Istruzione.

Tra il 2000 e il 2004 si collocano invece le proposte di riforma dei curricoli di Matematica da parte dell'UMI, Unione Matematica Italiana; scopo di questo lavoro era quello di rinnovare i programmi alla luce dei cambiamenti intervenuti nella società e nelle tecnologie. Si voleva proporre, infatti, una "matematica per il cittadino", cioè un corpus di conoscenze e abilità fondamentali da acquisire

indipendentemente dalla varietà degli indirizzi della scuola secondaria, perché ritenute necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società. Anche in queste proposte si consiglia di presentare un approccio intuitivo al concetto di limite, mediante l'introduzione di semplici esempi di successioni, nel secondo biennio del liceo scientifico. Questa conoscenza fa parte del nucleo tematico "relazioni e funzioni"; come abilità si richiede di possedere il senso intuitivo di limite di una successione.
Nella lettera inviata alle scuole da Fioroni, Ministro della Pubblica Istruzione, il 27 dicembre 2007, si esplicita che la richiesta fatta alla scuola dalla società italiana è quella di "corrispondere ai bisogni crescenti e nuovi che l'attuale fase di sviluppo tecnico-scientifico e di complessità sociale rende evidenti". Il quadro normativo a cui far riferimento è rappresentato dall'art. 1, comma 622, della L. 296/2006 e dal conseguente regolamento approvato con D. M. 139 del 22 agosto 2007. In allegato a tale decreto vengono indicati gli indirizzi relativi ai saperi e alle competenze, alle conoscenze e alle abilità che gli studenti dovrebbero acquisire. Gli ambiti di insegnamento sono suddivisi in "assi", noi ci interesseremo dell'asse matematico. Tale asse "ha l'obiettivo di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongano nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo […] La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero e di rappresentazione grafica e simbolica, la capacità di esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali." La finalità dell'asse matematico è quella di riuscire a far acquisire agli studenti le abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano (casa e lavoro).

DESTINATARI:

L'unità didattica è destinata ad una classe quarta di un liceo scientifico con sperimentazione PNI e viene inserita nello studio delle funzioni reali di variabile reale. Lo svolgimento dell'attività inizierà nel primo quadrimestre.
Le ore settimanali di matematica previste sono 5 e comprendono anche il laboratorio di informatica.

PREREQUISITI:

**Lo studente deve possedere le seguenti nozioni:**

- Conoscenze di base di logica: uso dei quantificatori esistenziali ed universali;
- Nozioni di numeri irrazionali e trascendenti; numero di Nepero;
- Conoscenza degli elementi fondamentali del piano cartesiano;
- Concetto di funzione, dominio e codominio di una funzione;

- Definizione di funzioni pari e dispari e relative simmetrie;
- Definizione di funzione crescente e decrescente (funzioni monotòne);
- Funzioni polinomiali, funzioni razionali e irrazionali, funzione segno, funzione valore assoluto, funzione radice, funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni trigonometriche;
- Conoscenze minime di topologia: intervallo, intorno, punto di accumulazione;
- Conoscenza minime del software didattico Derive.

## ACCERTAMENTO DEI PREREQUISITI:

Prima dell'inizio di questo nuovo percorso didattico è opportuno accertarsi che gli allievi abbiano acquisito determinati concetti e proprietà e si provvederà a tale accertamento mediante un colloquio con la classe e lo svolgimento di alcuni esercizi come ripasso.
Gli studenti verranno quindi chiamati alla lavagna per dimostrare le conoscenze su tali prerequisiti. Inoltre verranno assegnati esercizi per casa.
Si cercherà, ogniqualvolta questi verranno utilizzati, di richiamare proprietà e concetti ad essi legati.

## OBIETTIVI GENERALI:

- Acquisire le conoscenze e le abilità previste dal percorso didattico
- Operare con il simbolismo matematico riconoscendo le regole sintattiche di trasformazioni di formule
- Condurre ad un appropriato lessico matematico
- Rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura;
- Affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione
- Sviluppare la capacità di leggere un grafico
- Sviluppare la capacità di abbozzare sul foglio un grafico sommario delle funzioni studiate
- Costruire procedure di soluzione di un problema sapendo argomentare i passaggi utilizzati
- Inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali
- Saper lavorare con i vari software didattici

## OBIETTIVI TRASVERSALI:

- Acquisire abilità di studio
- Sviluppare capacità logiche, argomentative e intuitive
- Sviluppare lo spirito critico e potenziare il ragionamento

- Sviluppare la capacità di riesaminare criticamente e sistemare logicamente le conoscenze acquisite
- Sviluppare l'attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra il docente e l'allievo e tra gli allievi stessi per abituare alla comunicazione scientifica e al confronto di idee
- Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti;
- Valutare l'opportunità di ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili per ragionare sulle situazioni problematiche proposte
- Abituare a rispettare i tempi di consegna dei lavori
- Perseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti

## OBIETTIVI SPECIFICI:

Gli obiettivi specifici sono suddivisi in *conoscenze* e *abilità*.

**OBIETTIVI SPECIFICI**

*Conoscenze:*

- Conoscere l'origine storica del concetto di limite
- Conoscere il concetto intuitivo di limite e le definizioni rigorose di limite (Limite finito di una funzione in un punto, limite infinito di una funzione in un punto, limite finito di una funzione all'infinito, limite infinito di una funzione all'infinito);
- Conoscere i teoremi fondamentali sui limiti (Unicità del limite, confronto, permanenza del segno);
- Conoscere i teoremi sul calcolo dei limiti;
- Conoscere le forme indeterminate;
- Conoscere i limiti notevoli delle funzioni $\frac{senx}{x}$ per $x \to 0$ e $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ per $x \to \infty$;
- Conoscere la definizione di asintoto;
- Conoscere il concetto di funzione continua in un punto e in un intervallo;
- Conoscere la continuità delle funzioni elementari;
- Conoscere le operazioni tra funzioni continue;
- Conoscere la definizione di punto di discontinuità e la differenza tra i tre tipi (discontinuità di prima, seconda e terza specie);
- Conoscere i principali teoremi sulle funzioni continue in un intervallo (Weierstrass, valori intermedi, esistenza degli zeri).

***Abilità:***

- Saper dare la definizione di limite nei quattro casi e la rispettiva interpretazione grafica;
- Saper enunciare e dimostrare i teoremi fondamentali sui limiti (Teorema dell'unicità del limite, Teorema del confronto, Teorema di permanenza del segno);
- Saper riconoscere i limiti fondamentali;
- Saper applicare i limiti fondamentali nella risoluzione di limiti dai più semplici ai più complessi;
- Saper applicare con correttezza e consapevolezza le varie tecniche risolutive al fine di rimuovere le forma indeterminate per poter effettuare il calcolo del limite;
- Saper riconoscere quando una funzione riporta degli asintoti e determinarne l'equazione;
- Saper definire una funzione continua in un punto ed in un intervallo;
- Saper riconoscere e rappresentare graficamente i punti di discontinuità di una funzione (discontinuità di prima, seconda e terza specie)
- Saper interpretare graficamente il significato dei teoremi fondamentali delle funzioni continue.

## METODOLOGIE DIDATTICHE

Si introdurrà l'argomento utilizzando un approccio storico-epistemologico che, per tanti argomenti di matematica, è fondamentale per far capire agli studenti che ciò che si sta ha delle origini ed è frutto di una evoluzione.

Nelle lezioni in classe si cercherà di dare prima un'interpretazione intuitiva dei concetti per poi passare alla formalizzazione rigorosa in modo da avvicinare **gradualmente** al concetto un po' astratto di limite. Si partirà quasi sempre da esempi che verranno commentati opportunamente con l'aiuto dell'insegnante per poter poi trarre definizioni e teoremi. Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti. Quindi nella stessa ora di lezione si farà uso dell'approccio dialogato e dell'approccio frontale; le lezioni non saranno mai solo frontali in modo da creare discussioni guidate che stimoleranno gli alunni a dare il loro contributo attivo mediante osservazioni e domande. Gli esempi e gli esercizi, come anche la spiegazione teorica, verranno sistematicamente **affiancati da grafici** che possono aiutare molto gli studenti a chiarire concetti che potrebbero sembrare astratti.

Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).
Verranno discussi e confrontati insiemi gli esercizi che hanno apportato incertezze e problemi. Si svolgerà attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Derive; in queste occasioni si preferirà il lavoro di gruppo, le esercitazioni guidate ma anche quelle autonome.

## STRUMENTI UTILIZZATI:

- ✓ Libro di testo
- ✓ Lavagna e gessi
- ✓ Calcolatrice scientifica
- ✓ Riga e squadre
- ✓ Fotocopie
- ✓ Software didattici come Derive.

## CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO:

Il controllo dell'apprendimento sarà effettuato mediante *verifiche formative* e *verifica sommativa*.
Le *verifiche formative* consistono nel controllo degli esercizi assegnati per casa, la correzione alla lavagna degli stessi, effettuato dagli allievi, la discussione in classe dei problemi incontrati nello svolgimento degli esercizi e nello studio della teoria, qualche domanda durante le lezioni, lo svolgimento di qualche esercizio alla lavagna.
Le *verifiche sommative* consistono in prove orali e prove scritte.
Le *prove orali* serviranno al docente per valutare non solo la teoria appresa dai ragazzi, ma verrà chiesto anche lo svolgimento di qualche esercizio e verranno fatte domande riguardanti le attività di laboratorio.
La *prova scritta* sarà svolta al termine dell'unità didattica e ha soprattutto il compito di valutare le abilità e permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti.

## VALUTAZIONE:

Per determinare il voto della verifica sommativa attribuiamo ad ogni esercizio un punteggio.
La diversità di punteggio rappresenta un diverso livello di difficoltà in termini di conoscenze e abilità.

Per attribuire il punteggio teniamo conto dei seguenti indicatori:

- Conoscenze specifiche
- Competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti
- Capacità logiche ed argomentative
- Completezza della risoluzione
- Correttezza della risoluzione e dell'esposizione

Naturalmente, nel caso di errore nello svolgimento dell'esercizio, verrà attribuito solo parte del punteggio completo. Per fare questo, si stabilirà di volta in volta, a seconda della gravità dell'errore commesso, quanto farlo pesare e di quanto abbassare il punteggio.
Fatto questo, applicheremo la stessa diminuzione di punteggio a ciascun studente che avrà fatto lo stesso errore.

Riportiamo ora una griglia che verrà utilizzata nella valutazione della verifica sommativi finale. È stato attribuito un punto per ogni richiesta che viene fatta nell'esercizio non distinguendo gli esercizi in base alla difficoltà ritenendoli generalmente tutti di difficoltà analoga.
A seconda del numero e del tipo di esercizi si attribuirà punteggio diverso.
Esempio:

| **Esercizio** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Punti** | 2 | 3 | 1 | 3 | 8 | 3 | 4 | 6 | 4 |
| **Punti Assegnati** | | | | | | | | | |
| **Totale** | /34 | | | | | | | | |

Tabella di valutazione per l'intero compito in decimi

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | 4 |

| | |
|---|---|
| 11 | |
| 12 | |
| 13 | |
| 14 | 5 |
| 15 | |
| 16 | |
| 17 | 6 |
| 18 | |
| 19 | |
| 20 | |
| 21 | 7 |
| 22 | |
| 23 | |
| 24 | |
| 25 | 8 |
| 26 | |
| 27 | |
| 28 | |
| 29 | 9 |
| 30 | |
| 31 | |
| 32 | |
| 33 | 10 |
| 34 | |

RECUPERO:

Per gli studenti che trovano difficoltà nell'apprendimento, verranno svolte attività pomeridiane, ossia gli "sportelli", che consistono in esercitazioni mirate al singolo studente.

TEMPI PREVISTI PER L'INTERVENTO DIDATTICO:

Per svolgere l'unità didattica sulla parabola si prevedono i seguenti tempi:

- Accertamento dei prerequisiti: 1h
- Introduzione storica ai limiti e definizioni di limite nei 4 casi (limite finito di una funzione in un punto etc.): 2h
- Teoremi sui limiti e operazioni con i limiti: 2h
- Limiti notevoli; esempi di calcolo delle forme indeterminate: 3h

- Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo; continuità di alcune funzioni elementari: 2h
- Operazioni tra funzioni continue; definizione i tre tipi di discontinuità: 2h
- Definizione e determinazione degli asintoti; teorema di Weierstrass: 2h
- Teorema dei valori intermedi: 1h
- Teorema di esistenza degli zeri: 1h
- Verifica sommativa: 2h
- Consegna e correzione verifica sommativa: 1h

Tot.: 19 ore

Le ore indicate sopra sono da intendersi di pura spiegazione e presentazione degli argomenti, seguita da esempi chiarificativi; a queste lezioni si devono aggiungere dalle 10 alle 15 ore (dipende dalla reazione e dalla partecipazione della classe) dedicate allo svolgimento di esercizi applicativi degli argomenti svolti. Queste ore di esercitazione NON saranno fatte tutte alla fine ma saranno equamente distribuite alla fine delle spiegazioni.
Poiché le ore settimanali di matematica previste dai programmi ministeriali, per questa classe, sono 5, si stima di riuscire a svolgere l'argomento in questione in 2 mesi abbondanti.

SVILUPPO DEI CONTENUTI:

1. Approccio storico-epistemologico: la nascita del calcolo infinitesimale
2. Concetto intuitivo di limite
3. Limite finito di una funzione in un punto
4. Limite infinito di una funzione in un punto
5. Limite finito di una funzione all'infinito
6. Limite infinito di una funzione all'infinito
7. Teoremi sui limiti (Unicità del limite, confronto, permanenza del segno)
8. Calcolo dei limiti
9. Calcolo delle forme indeterminate e limiti notevoli
10. Funzioni continue e operazioni tra funzioni continue
11. Punti di discontinuità (I, II e III specie)
12. Teoremi fondamentali sulle funzioni continue (Weierstrass, esistenza degli zeri, valori intermedi)

## 1. Approccio storico epistemologico: la nascita del calcolo infinitesimale

Il concetto generale di "limite" sembra abbastanza intuitivo ed è usato quotidianamente nel linguaggio parlato; dobbiamo però cercare di definirlo con precisione e capire come il concetto si possa applicare alla matematica.

Il "limite" in matematica è solo una tortura in più per gli studenti o è stato studiato anche nell'antichità? A quale scopo?

I "limiti" e le loro applicazioni hanno permesso di dare la risposta ad alcuni problemi che erano rimasti irrisolti fino al '600; tra questi problemi ricordiamo quello del calcolo della velocità di un corpo in ogni singolo istante, la determinazione del massimo e del minimo di una funzione, la determinazione della tangente a una curva e il calcolo della lunghezza di una curva, delle aree delimitate da curve, delle superfici e dei volumi. Soprattutto i due problemi, legati alla fisica, dovrebbero essere stati introdotti, almeno intuitivamente, nella classe terza; ora si provvederà a dare una impostazione rigorosa. Tutto questo verrà fatto seguendo le indicazioni dei programmi ministeriali: *"... se il docente lo ritiene opportuno, un'idea intuitiva dei concetti di limite e di derivata, legati ai classici problemi della tangente ad una curva e della velocità, può essere data negli anni precedenti, recuperando solo alla fine una impostazione rigorosa..."*

a) **come si definisce la velocità in un determinato istante?**

In un moto accelerato la velocità e l'accelerazione di un corpo cambiano in ogni istante, quindi, dovendo calcolare la velocità istantanea, considerando che, sia lo spazio percorso che il tempo necessario sono nulli, si avrà un'espressione del tipo $\frac{0}{0}$, che non ha significato.

Ma gli oggetti che si muovono hanno una velocità in ogni istante del loro cammino, quindi si deve poterla calcolare.

La velocità istantanea viene perciò definita come un rapporto tra quantità tendenti a zero, dette *infinitesime* o per usare le parole di **Isaac Newton**[1] come l'*"ultimo rapporto di quantità evanescenti"*. Newton spiegava che l'ultimo rapporto di due quantità evanescenti: "*...è da intendersi il rapporto delle quantità non prima che esse svaniscono, né dopo che sono svanite, ma con il quale esse svaniscono..."* Newton sembra voler dire che bisogna considerare il rapporto nel preciso istante in cui il numeratore e il denominatore diventano zero cioè proprio quell'istante in cui la frazione si presenta come $0/0$.

1 Newton, matematico del 600, nel suo capolavoro principale, "Philosophiae naturalis principia mathematica", oltre ad esporre i risultati delle sue indagini in campo meccanico e astronomico, getta le basi del calcolo infinitesimale.

**Leibniz**[2] tendeva ad affrontare la questione con la discussione delle *"quantità infinitamente piccole"*. Con ciò egli intendeva delle quantità che, per quanto non nulle non potevano essere ulteriormente diminuite (come gli atomi della chimica), le sue quantità infinitamente piccole erano i mattoni, le unità indivisibili che costituivano la matematica, le cose più vicine allo zero che ci fossero.

**Augustin-Louis Cauchy** , nel 1821, propose questa definizione di limite: "*Allorché i valori successivi assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato in modo da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà quest'ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre."*

Cauchy evita termini come "infinitamente piccolo"; notiamo invece l'uso di espressioni come "valori successivi" o "avvicinarsi indefinitamente" o " tanto poco quanto si vorrà". Egli dice semplicemente che un certo valore è il limite di una variabile se possiamo fare in modo che la variabile differisca dal limite tanto poco quanto vogliamo. Tutto quello che importa è la possibilità di arrivare tanto vicino al limite quanto si vuole.

Il successo della definizione si basò in larga misura sul fatto che per suo tramite Cauchy riuscì a dimostrare i più importanti teoremi dell'analisi. Ma anche l'asserzione di Cauchy aveva bisogno di essere messa a punto.

**Karl Weierstrass** ha contribuito al consolidamento delle fondamenta dell'analisi matematica (un processo che va sotto il nome di "aritmetica dell'analisi" ). Nelle sue lezioni definiva il limite della funzione $f(x)$ nel punto $x_0$ nel modo seguente:

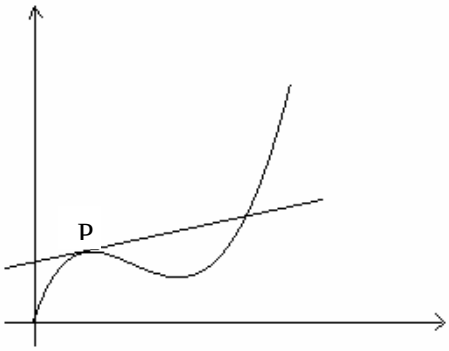
*"Se data una qualsiasi grandezza e, esiste una* $h_0$*, tale che per* $0<h<h_0$ *la differenza* $f(x_0 \pm h)-L$ *è minore di e in valore assoluto, allora L è il limite di* $f(x)$ *per* $x=x_0$*".*

b) Un ulteriore problema consisteva nella determinazione del massimo e del minimo di una funzione; problema legato in particolare allo studio del moto: si sapeva che nel moto dei proiettili la gittata, cioè la distanza orizzontale percorsa dal proiettile, dipendeva dall'angolo di elevazione del cannone rispetto al terreno ma era importante sapere quale fosse l'angolo massimo che dava la massima gittata.

c) Per quanto riguarda il problema di individuare la retta tangente ad una curva, in passato i Greci parlavano di tangente ad una conica come quella retta che intersecava la conica in un solo punto e che rimaneva tutta da una stessa parte rispetto ad essa.

2 La pubblicazione dei "Principi matematici", fu causa di una accesa disputa con il matematico Leibniz, che a sua volta era giunto alla scoperta del calcolo infinitesimale in una forma indipendente e che alcuni consideravano più moderna di quella di Newton.

In realtà questa definizione non è adatta a definire la tangente se la curva fosse più complessa in quanto in questo caso, la retta tangente ad una curva nel punto P non interseca la curva in un solo punto e non rimane da una stessa parte rispetto ad essa.




## 2. Concetto intuitivo di limite

Dall'introduzione storica si dovrebbe aver capito che la necessità di introdurre i "limiti" è stata avvertita per descrivere e capire il comportamento di alcune funzioni vicino ai punti nei quali esse perdevano significato.

Senza ricorrere ai problemi dei grandi fisici del passato, ci accorgiamo anche noi, di alcune limitazioni che abbiamo incontrato nei calcoli fin dalle elementari. Si può eseguire la divisione tra un qualunque numero (diverso da 0) e 0? Nella peggiore delle ipotesi prendiamo una calcolatrice e proviamo a digitare 5:0; la calcolatrice ci manda un messaggio: ERROR.

Ma perché? Che cosa significa dividere un numero per 0?

Proviamo a mano, oppure con la calcolatrice, oppure con il computer, a dividere 5 per numeri molto piccoli, vicini a 0:

$$\frac{5}{0,1}=\frac{5}{\frac{1}{10}}=500 \qquad \frac{5}{0,01}=5000 \qquad \frac{5}{0,001}=50000$$

Si dovrebbe già sapere, comunque si nota che al diminuire del numero al denominatore si incontra un aumento del valore della frazione; se continuiamo a diminuire il denominatore, e lo facciamo diventare "infinitamente piccolo" (cioè infinitamente prossimo allo zero), il valore della frazione diventa "infinitamente grande".

Questo fatto, in matematica si suole esprimere dicendo che "*il limite di una frazione col denominatore che tende a zero è infinito*".

Quindi pur continuando a dire che la divisione per zero è impossibile, abbiamo comunque affermato che la divisione per zero tende a infinito. Sinteticamente, anche se la scrittura $\frac{k}{0}$ non ha senso, si scrive $\lim_{x\to 0}\frac{k}{x}=\infty$

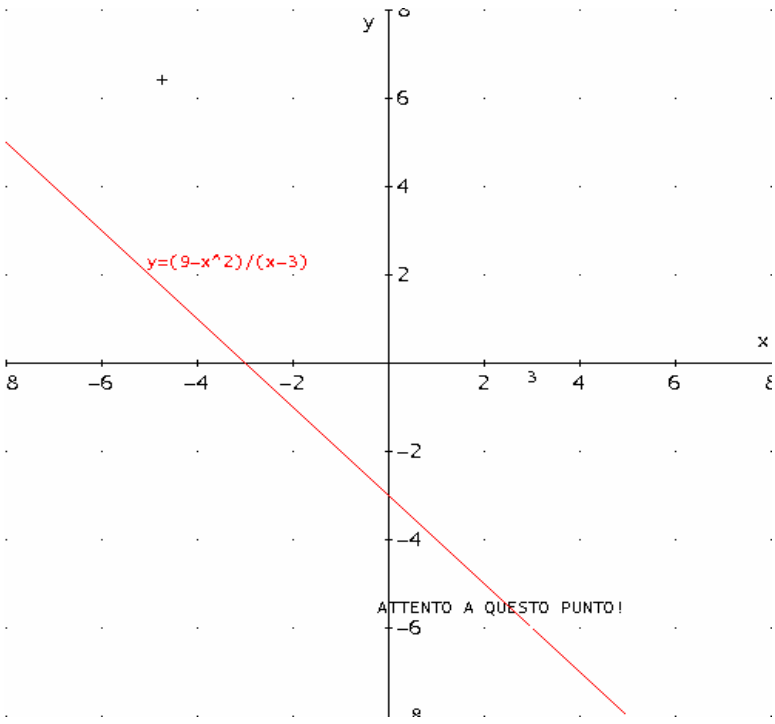
***Nota didattica:*** facciamo presente agli studenti che $\infty$ **non è un numero ma solo un simbolo** che ci indica il comportamento di una funzione il cui valore diventa arbitrariamente grande. Questa precisazione è importante per evitare che nello studente si creino misconcezioni che lo portino anche a pensare che l'infinito sia una grandezza che si può paragonare o addirittura sommare o sottrarre ad altre grandezze finite: scritture come $\infty+\infty$, o $\infty+1$ non hanno significato.

## 3. Limite finito di una funzione in un punto

Prima di introdurre la definizione rigorosa invitiamo gli studenti ad esaminare una funzione del tipo: $f(x)=\frac{9-x^2}{x-3}$

1) Determinare il dominio

2) Tracciare il grafico per via elementare



Il grafico che si otterrà sarà una retta di equazione $y=-x-3$ privata del punto $(3;-6)$ e con dominio $D=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

3) Esaminare, aiutandosi con il grafico tracciato, cosa succede ai valori assunti dalla funzione quando ci si avvicina al punto $x_0=3$ da destra e da sinistra.

La funzione non è definita in $x_0$, ma 3 è un punto di accumulazione per *D*; questo significa che in un intorno ***V*** di 3 cadono infiniti numeri di *D*.
Possiamo pensare di trovare le coordinate dei punti della funzione le cui ascisse appartengono a ***V***; i loro valori descriveranno il comportamento della funzione quando *x* assume valori prossimi a 3.

A questo punto si potrebbe pensare di organizzare una piccola attività di laboratorio; portiamo la classe nel laboratorio di informatica e cerchiamo di far capire cosa succede con i limiti mediante l'utilizzo del software Derive. Riportiamo in allegato un esempio di attività.

**Cosa osserviamo?**
Man mano che *x* si avvicina a 3 (sia da sinistra che da destra), i valori di *y* si avvicinano a -6.
Cerchiamo ora di formalizzare quanto capito; riprendiamo la funzione

$$f(x)=\frac{9-x^2}{x-3}$$

e facciamo notare che comunque si fissi un intorno del punto $y_0=-6$,

$$U=(-6-\varepsilon;-6+\varepsilon)$$

si riesce sempre a trovare un intorno di $x_0=3$,

$$V=(3-\delta;3+\delta)$$

tale che $\forall x\in(3-\delta;3+\delta)$, con $x\neq 3$, risulta

$$-6-\varepsilon<f(x)<-6+\varepsilon.$$

Pertanto diciamo che il limite per $x$ tendente a 3 della funzione, è uguale a -6 e scriviamo:

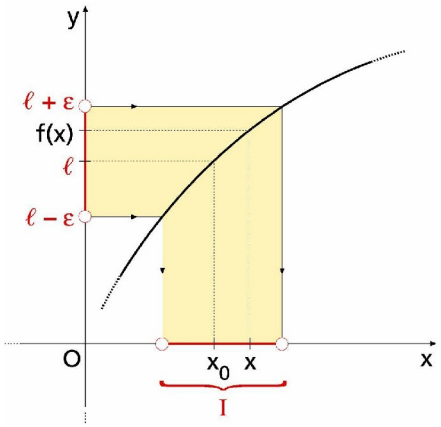
$$\lim_{x\to 1}\frac{9-x^2}{x-3}=-6$$

**DEFINIZIONE: Limite finito di $x$ tendente ad un valore finito $x_0$**

Sia $f(x)$ una funzione definita in tutti i punti di un intervallo $I[a,b]$ tranne al più in $x_0\in I$.
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale $l$ per $x$ che tende a $x_0$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se, comunque si sceglie un numero reale positivo, $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un intorno completo $V$ di $x_0$, (cioè un insieme di punti $x$ tali che $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$), tale che per ogni $x \in V$, diverso (al più) da $x_0$, sia verificata la condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$.




NOTA

Il grafico sopra è stato presentato solo per questo primo limite; per gli altri ho fatto riferimento solo agli esempi; ho invitato i ragazzi a provare a rappresentare graficamente, da soli, il significato della definizione.

Cerchiamo, inoltre, di far ben capire dove si posizionino δ ed ε nel grafico.

**Osservazioni**

- Spesso si prende come intorno $V$ di $x_0$ un intorno circolare, quindi la definizione data sopra si può formulare:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x \text{ con } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si ha } |f(x) - l| < \varepsilon$$

- Operativamente ricordare che $|A(x)| < k \Leftrightarrow -k < A(x) < k$
- Cosa significa la definizione? Significa che fissato un $\varepsilon$ a piacere, piccolo quanto si vuole, riusciamo sempre a trovare un intorno di $x_0$ che sia tale che per ogni punto $x$ che appartiene a quell'intorno, la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. In altri termini: quando $x$ è molto vicino a $x_0$, $f(x)$ è molto vicina ad $l$.
- **"tranne al più in $x_0$":** cioè in $x_0$ la funzione può anche non essere definita;

- quando diciamo **"$\varepsilon$ reale positivo",** pensiamo a valori di $\varepsilon$ *che diventano sempre più piccoli* ; diremo che $\varepsilon$ è preso "piccolo a piacere";
- cambiando $\varepsilon$ cambierà in corrispondenza anche $\delta$, per cui è opportuno sottolineare la dipendenza di $\delta$ da $\varepsilon$, scrivendo $\delta_\varepsilon$;
- se la condizione $|f(x)-l|<\varepsilon$ si verifica in un intorno destro di $x_0$**,** e non in un intorno completo, si dice che esiste il **limite destro** della funzione e si scrive:

$$\lim_{x\to x^+_0} f(x)=l$$

- analogamente se la condizione $|f(x)-l|<\varepsilon$ si verifica in un intorno sinistro di $x_0$**,** e non in un intorno completo, si dice che esiste il **limite sinistro** della funzione e si scrive:

$$\lim_{x\to x^-_0} f(x)=l$$

- se diciamo che esiste il limite della funzione per $x\to x_0$, è sottinteso che esiste limite destro, limite sinistro e che sono uguali cioè:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$$

- La definizione di limite può servire non per calcolare il limite ma per verificare se un limite fornitoci, è corretto o meno.

➢ **Esempio**

Verificare che $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{5}{2}$

Si deve provare che, scelto $\varepsilon>0$, esiste un intorno completo di 3 per ogni $x$ del quale (escluso al più 3) si ha $\left|\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon$, ossia:

$$\left|\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon\,.$$

Esplicitiamo il valore assoluto

$$-\varepsilon<\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}<\varepsilon\,,$$

aggiungiamo 3/2 ai tre membri:

$$\frac{3}{2}-\varepsilon<\frac{1}{2}x<\frac{3}{2}+\varepsilon\,,$$

moltiplichiamo ciascun membro per 2 in modo da isolare la *x*:

$$3-2\varepsilon < x < 2\varepsilon + 3.$$

L'insieme delle soluzioni di questa disequazione è quindi

$$]3-2\varepsilon, 3+2\varepsilon[,$$

abbiamo trovato un intorno di 3 (il raggio dell'intorno è $\delta = -2\varepsilon$, dipende da $\varepsilon$) per cui è vera la condizione iniziale, quindi il limite è verificato.

**Esercizi per casa (o alla lavagna):**

Applicando la definizione di limite, verificare che:

- $\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3$
- $\lim_{x\to 2^-}(3^x - 1) = 8$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\ln x} = 0^+$

Dalla definizione si deduce che **il limite in un punto, è indipendente dal comportamento della funzione nel punto stesso;** si possono verificare, infatti i seguenti casi:

- la funzione è definita in $x_0$, esiste il limite per $x \to x_0$ ed è uguale al valore $f(x_0)$ che la funzione assume in $x = x_0$;
- la funzione è definita in $x_0$ ed esiste il limite per $x \to x_0$ ma $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(c)$

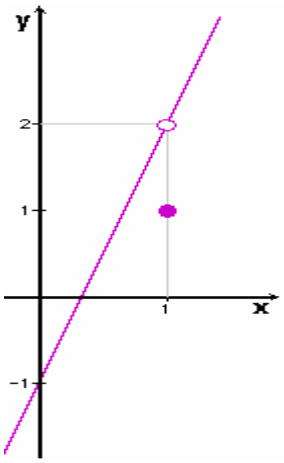
➢ **Esempio**

Studiamo la funzione $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Il $\lim_{x\to 1} f(x)$ coincide con $f(x_0)$, $\forall x_0 \neq 1$ ;invece non coincide con $f(x_0)$, se $x_0 = 1$ perché $f(1) = 1$ mentre $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Basta provare che, $\forall \varepsilon > 0$ , esiste un intorno di 1 tale che $\forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$, con $x \neq 1$, risulta:

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$




- la funzione è definita in $x_0$, ma non è possibile definire il limite per $x \to x_0$;

➢ **Esercizio**

dire se è possibile dare la definizione di limite per x tendente a zero della funzione $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ motivando la risposta.

( la funzione assumerà un valore preciso f(0)=0 ma non si può parlare di limite per x tendente a zero perché la funzione non esiste in un intorno dello zero ( $D=(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$ )

- la funzione non è definita in $x_0$, ma esiste il limite per $x \to x_0$

➢ **Esercizio**

utilizzando la definizione di limite, verifichiamo che risulta $\lim_{x\to 0}\left(\frac{|x|}{x}\right)^2 = 1$

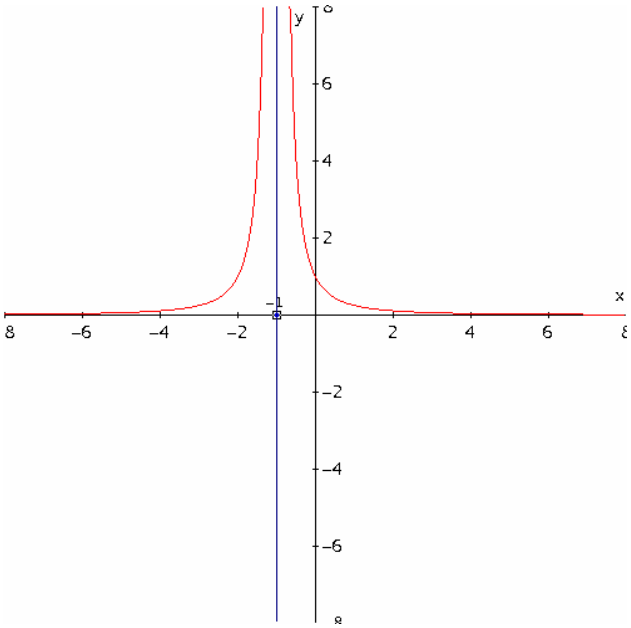
## 4. Limite infinito di una funzione in un punto

Per introdurre la definizione di limite infinito di una funzione per $x$ che tende a un valore finito, utilizziamo lo studio di un'altra funzione:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

1) Determinare il dominio;

2) Tracciare il grafico per via elementare;




Il dominio della funzione sarà $D=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ e il grafico che otterranno sarà quello mostrato nella figura sopra.

3) Esaminare, aiutandosi con il grafico tracciato, **quali valori vengono assunti da** $f(x)$ quando ci si avvicina al punto $x_0=-1$ da destra e da sinistra.

4) Esaminare **l'andamento del grafico** della funzione quando ci si avvicina al punto $x_0=-1$ da destra e da sinistra.

Cosa osserviamo?

Osserviamo che, man mano che *x* si avvicina a -1 (sia da sinistra che da destra), i valori di *y* *diventano sempre più grandi.*

Per esercizio si può provare a costruire una tabella analoga (con derive) a quella fatta nell'esempio precedente per osservare il comportamento della funzione quando *x* assume valori che appartengono ad un intorno sinistro e destro di –1; i dati numerici "rafforzeranno" il grafico.

Pertanto con analoghe considerazioni a quelle fatte prima diremo che il limite per $x$ tendente a -1 della funzione, è uguale a $+\infty$ e scriviamo:

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$

**OSSERVAZIONE DIDATTICA**

L'insegnante dovrebbe tentare di far capire agli studenti che **tutte le altre definizioni che verranno date, seguono dalla prima** e che non è necessario imparare tutto a memoria, bisogna solo fare un piccolo sforzo per capire bene la prima, le altre verranno di conseguenza.
L'insegnante, prima di dare la nuova definizione, potrebbe spronare gli alunni a immaginare come potrebbe essere.

**DEFINIZIONE: Limite infinito per $x$ tendente ad un valore finito $x_0$**

Sia $f(x)$ una funzione definita in tutti i punti di un intervallo $I[a,b]$ tranne al più in $x_0 \in I$.

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $\infty$ per $x$ che tende a $x_0$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se, comunque si scelga un numero reale positivo, $M > 0$, è possibile determinare in corrispondenza a tale scelta, un intorno completo di $V$ di $x_0$, (cioè un insieme di punti $x$ tali che $0 < |x - x_0| < \delta_M$), tale che per ogni $x \in V$ sia verificata la condizione

$$|f(x)| > M$$

**OSSERVAZIONI:**

- il valore assoluto indica che si possono verificare due casi (a seconda delle situazioni): $f(x) > M$ oppure $f(x) < M$:

  se in $V$, escluso $x_0$, vale sempre la disequazione $f(x) > M$, si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e in questo caso si dice che **la funzione $f(x)$ diverge positivamente;**

  se invece, vale sempre la disequazione $f(x) < M$, si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ e in questo caso si dice che **la funzione $f(x)$ diverge negativamente;**
- quando diciamo "$M$ numero reale positivo" pensiamo a valori si $M$ che diventano *sempre più grandi;*
- la condizione $|x - x_0| > 0$ corrisponde a $x \neq x_0$;
- cambiando $M$ cambierà in corrispondenza anche $\delta$, per cui è opportuno sottolineare la dipendenza di $\delta$ da $M$, scrivendo $\delta_M$.

**Esercizio**

Provare a rappresentare graficamente, in generale, il significato della definizione.

**Verifica del limite**

Come si verifica un limite infinito?

- **Esempio**

Usiamo la funzione di prima $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ e verifichiamo, tramite la definizione appena vista che

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$

Fissiamo arbitrariamente un numero reale positivo *M* e risolviamo la disequazione

$$\frac{1}{(x+1)^2}>M$$

passando ai reciproci si ha

$$(x+1)^2<\frac{1}{M}$$

Estraiamo la radice quadrata ad entrambi i membri

$$|x+1|<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

Esplicitiamo ora il valore assoluto

$$-1-\frac{1}{\sqrt{M}}<x<-1+\frac{1}{\sqrt{M}}$$

Possiamo ora dire che l'insieme delle soluzioni della disequazione è l'intorno di –1 dato da $\left]-1-\frac{1}{\sqrt{M}};-1+\frac{1}{\sqrt{M}}\right[$ (l'intorno ha il raggio che dipende da *M*: all'aumentare di *M* diminuisce il raggio); quindi, fissato *M* generico, esiste un intorno di –1 in cui i punti verificano la condizione $f(x)>M$ .

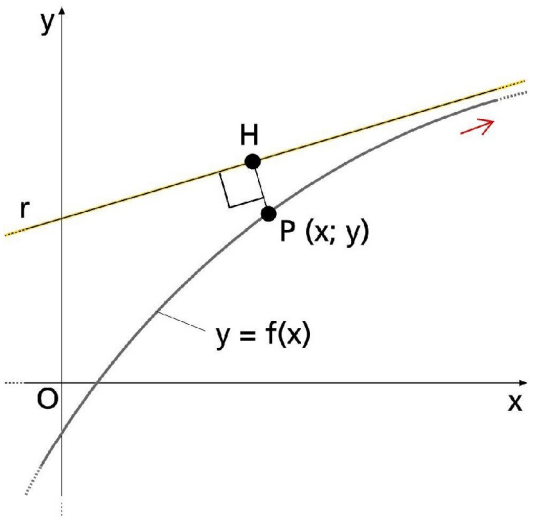
## Gli asintoti verticali

Una retta *r* è detta *asintoto* del grafico della funzione *f* (*x*) se:

la distanza $\overline{PH}$ di un generico punto $P(x;f(x))$ da tale retta tende a zero quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a infinito, cioè:

$\overline{PH}\to 0$ per $x\to\infty$ oppure

per $f(x)\to\infty$ .




?????????????

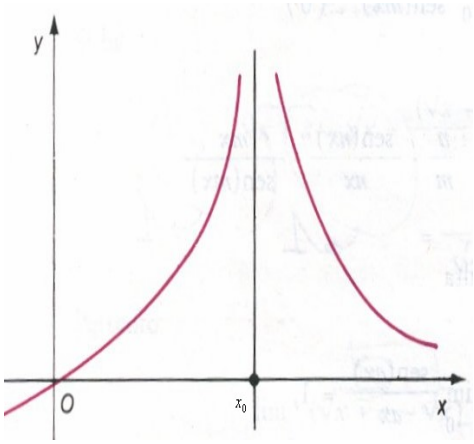
**La retta** $x = x_0$

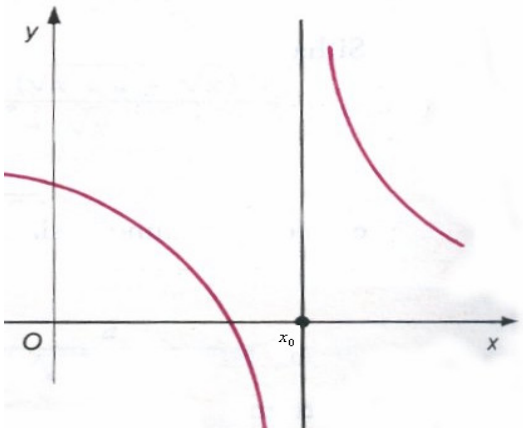
La retta $x = x_0$ si dice **ASINTOTO VERTICALE** cioè è una retta parallela all'asse delle $y$ a cui il grafico della funzione si avvicina progressivamente.

Quindi in generale, si dice che la retta $x = x_0$ è asintoto verticale della funzione se valgono entrambe le condizioni:

1. la funzione non è definita per $x = x_0$,
2. se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Si possono verificare le situazioni mostrate nelle due figure seguenti:



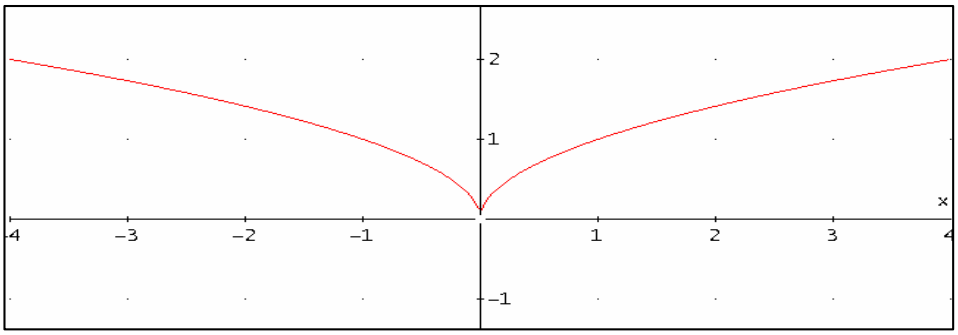

Nel nostro esempio l'asintoto verticale è la retta $x = 1$.

**OSSERVAZIONI**

1) Se una funzione non è definita in un punto, non necessariamente ha in quel punto un asintoto verticale.

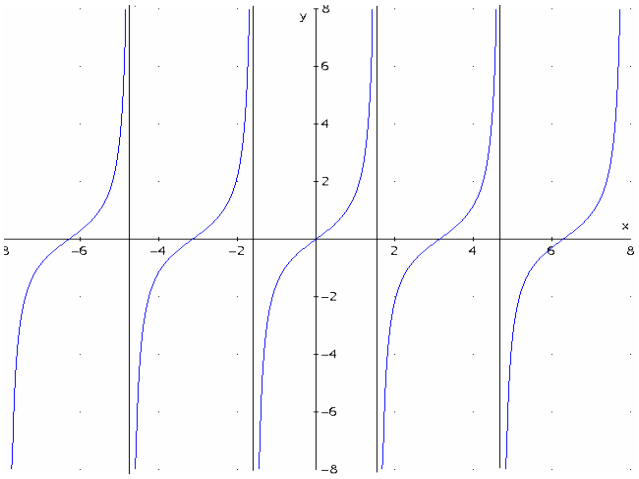
➢ **Esempio**

La funzione $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{|x|}}$ non è definita per $x=0$, il suo grafico è il seguente e non ha alcun asintoto verticale.




Infatti, in questo caso, è verificata solo una delle 2 condizioni dette prima.

2) il grafico di una funzione può avere più asintoti verticali, anche infiniti come nel caso della funzione tangente: $f(x)=tgx$




3) È necessario che tutti i punti di un intorno completo di $x_0$ facciano parte del dominio della funzione.

4) Anche in questo caso la definizione è utile per verificare l'esattezza di un limite dato.

**Esercizi per casa (o alla lavagna)**

**ESERCIZIO 1:** verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$$

**ESERCIZIO 2:** provare che risulta:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

**ESERCIZIO 3:** verificare l'esattezza del seguente limite:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x-3}=-\infty$$

**ESERCIZIO 4:** verificare che $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-3}{x}=-\infty$

## 5. Limite finito di una funzione all'infinito

Un problema analogo ai precedenti si può porre nel caso di funzioni definite su tutto l'asse reale (o su una semiretta); ad esempio si può far riferimento alle funzioni tempo, definite sul semiasse positivo per $t\geq 0$.

Facendo un breve riferimento all'esperienza quotidiana, possiamo dire che, nel caso di fenomeni dipendenti dal tempo, si parla spesso di "andare a regime" o "stabilizzarsi" dopo un certo tempo. Per esempio si può pensare al numero di un certo prodotto alimentare venduto giornalmente; si tratta di una funzione tempo che, dopo eventuali brusche variazioni in un periodo di forte pubblicità, si stabilizza su una certa quota giornaliera costante.

Per indicare questo comportamento si parla di **limite finito della funzione all'infinito**.

Prima di dare la definizione, come al solito osserviamo il comportamento di alcune funzioni.

Consideriamo le funzioni:

$$f(x)=\frac{x}{x+1},$$

$$g(x)=senx-2$$

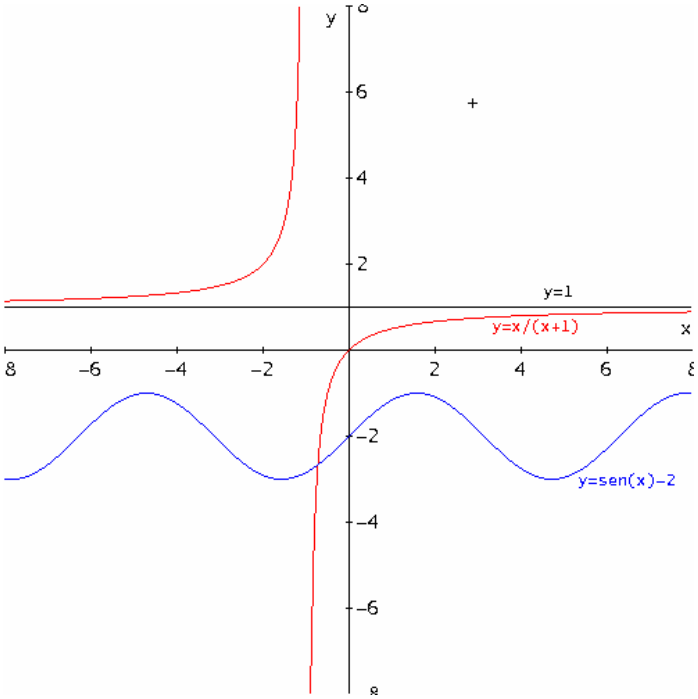
1) Determinare il dominio

2) Tracciare il grafico per via elementare

3) Aiutandosi con il grafico tracciato di ciascuna funzione, esaminare l'andamento quando $x$ tende a $\pm\infty$.

$f(x)$ si avvicina alla retta $y=1$;

$g(x)$ continua ad oscillare tra -3 e-1 senza avvicinarsi a nessun punto in particolare.




Per esercizio si può proporre agli studenti di compilare una tabella di valori, simile a quelle compilate in precedenza.

**DEFINIZIONE: Limite finito per $x$ tendente all'infinito**

Sia $f(x)$ una funzione definita in $(-\infty,+\infty)$.

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale $l$ per $x$ che tende all'infinito e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

se, comunque si scelga un numero reale positivo, $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza a tale scelta, un numero reale positivo, $N > 0$, tale che per ogni $x$ che verifichi la condizione $|x| > N$ si abbia:

$$|f(x) - l| < \varepsilon .$$

**OSSERVAZIONI:**

- Se $|f(x) - l| < \varepsilon$ è soddisfatta solo per $x > N$, oppure soltanto per $x < N$, allora si dice che esistono rispettivamente, i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

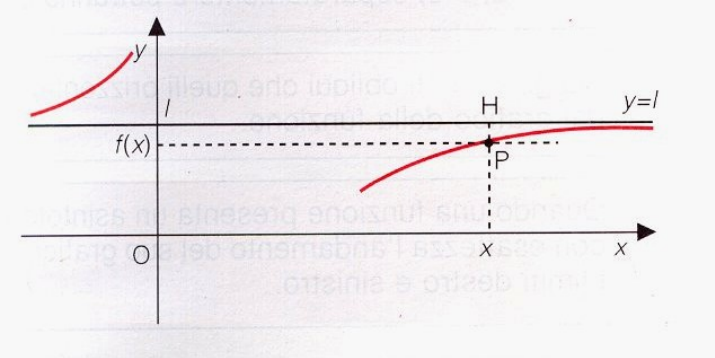
**Esercizio**

Provare a rappresentare graficamente, in generale, il significato della definizione.

**La retta** $y = l$

La retta $y = l$ si dice **ASINTOTO ORIZZONTALE** cioè è una retta parallela all'asse delle $x$ a cui il grafico della funzione si avvicina progressivamente.

Il grafico di una funzione può ammettere al massimo due asintoti orizzontali e ciò accade quando i limiti della funzione per $x \to \pm\infty$ sono entrambi finiti, ma diversi fra loro.




- **Esercizio**

Verificare che $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Si tratta di risolvere la disequazione:

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

e vedere se fra le sue soluzioni vi è un intorno di $\infty$ (cioè l'unione di un intorno di $-\infty$ con uno di $+\infty$).

Svolgendo i calcoli avremo:

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x < -\frac{1}{\varepsilon}\right) \vee \left(x > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Tenendo conto che $\varepsilon > 0$, il primo intervallo ottenuto rappresenta un intorno di $-\infty$, il secondo un intorno di $+\infty$; possiamo concludere quindi che il limite è verificato.

**ESERCIZIO 1:** verificare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$

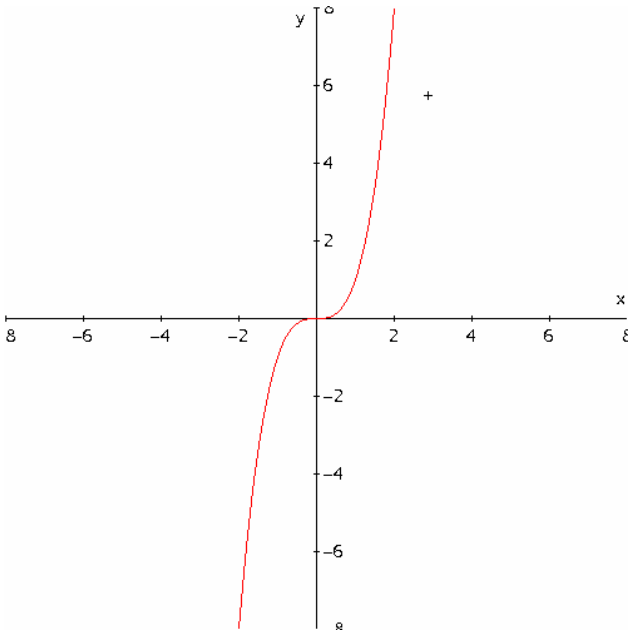
**ESERCIZIO 2:** provare che $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

**ESERCIZIO 3:** verificare che risulta $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$

**ESERCIZIO 4:** provare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4-x} = 0^+$

## 6. Limite infinito di una funzione all'infinito

Osserviamo la funzione $f(x) = x^3$




Notiamo che quando $x$ va verso valori molto grandi (o molto piccoli), anche la funzione assume valori molto grandi, ossia tendenti a $\infty$.

### DEFINIZIONE: Limite infinito per $x$ tendente all'infinito

Sia $f(x)$ una funzione definita in $(-\infty,+\infty)$.

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite l'infinito, per $x$ che tende all'infinito e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se, comunque si scelga un numero reale positivo, $M > 0$, è possibile determinare in corrispondenza a tale scelta, un numero reale positivo, $N > 0$, tale che per ogni $x$ che verifichi la condizione $|x| > N$ si abbia:

$$|f(x)| > M$$

**OSSERVAZIONI:**

- Se per $|x| > N$ risulta sempre $f(x) < -M$, allora si dirà che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

- Se per $x > N$ risulta sempre $|f(x)| > M$, oppure $f(x) > M$, oppure $f(x) < -M$, allora si dice che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

- Se infine, per $x < -N$ risulta sempre $|f(x)| > M$, oppure $f(x) > M$, oppure $f(x) < -M$, allora si dice che esistono rispettivamente i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- Se si verifica che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

scriveremo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

- Se si verifica che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

scriveremo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

**Esercizio**

Provare a rappresentare graficamente, in generale, il significato della definizione.

➢ **Esempio**

Verificare che $\lim_{x\to+\infty} (x^3 + 4) = +\infty$.

Si tratta di risolvere la disequazione: $x^3 + 4 > M$ $(*)$

Svolgendo i calcoli avremo:

$$x^3 + 4 > M \quad \Leftrightarrow \quad x^3 > M - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt[3]{M-4}$$

Posto $N = \sqrt[3]{M-4}$ la relazione $(*)$ è verificata per ogni $x > N$ e quindi il limite è verificato.

**Esercizio per casa (o alla lavagna)**

Verificare i seguenti limiti

a) $\lim_{x\to+\infty}(x^3+2) = +\infty$, b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1+2x^2}{x} = -\infty$, c) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+1\right) = +\infty$

## 7. Teoremi sui limiti

Enunceremo di seguito dei teoremi e delle proprietà che sono validi per funzioni definite in qualsiasi dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ e per punti $x_0$ (in cui calcoliamo il limite) di accumulazione del dominio *D*; valgono inoltre per $x \to \pm\infty$. Per semplicità, tuttavia, penseremo sempre a particolari domini *D*, ossia a intervalli di $\mathbb{R}$ e a $x_0$ come punto di *D*.

I teoremi che seguono sono presentati utilizzando limiti finiti (*l*) di funzioni in un punto ($x \to x_0$); osserviamo che **essi valgono anche se invece di *l* abbiamo** $+\infty$ o $-\infty$.

### Teorema di unicità del limite

**Se una funzione $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$, allora tale limite è unico.**

Prima di procedere con la dimostrazione cerchiamo di spiegare il significato del teorema. Trovare il limite(*l*) di una funzione in un punto significa che, man mano che $x \to x_0$ i valori assunti dalla funzione tendono a stabilizzarsi verso quel valore di *l* (si avvicinano ad *l* senza mai toccare quel numero). Se questi valori si stabilizzano attorno a un certo valore $l_1$ , essi non possono stabilizzarsi **anche** attorno a un altro valore $l_2$; quindi non possiamo trovare 2 valori diversi come limiti della stessa funzione in uno stesso punto.

***Dim***.

Dimostriamo la tesi per assurdo. Ricordiamo che per effettuare questo tipo di dimostrazione si procede nel seguente modo: si suppone falsa la tesi; se con questa supposizione si arriva a negare

l'ipotesi iniziale, significa che è sbagliato supporre falsa la tesi, quindi la tesi del teorema è dimostrata.

Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che *l* non sia unico, ossia che (oltre ad *l*) esiste un altro valore *m* tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = m \quad m \neq l$$

Allora sarà sicuramente $m<l$ oppure $m>l$. Supponiamo $m<l$ e, poiché possiamo scegliere $\varepsilon$ (positivo) piccolo a piacere, consideriamo

$$\varepsilon < \frac{m-l}{2}$$

Applichiamo ora la definizione di limite a entrambi i casi: dovrebbero esistere due intorni *V* e *V'* di $x_0$ tali che

$$|f(x)-l| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in V$$
$$|f(x)-m| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in V'$$

Osserviamo che anche $V \cap V'$ è un intorno di $x_0$. Allora in $V \cap V'$ devono valere contemporaneamente

$$\begin{cases} |f(x)-l| < \varepsilon \\ |f(x)-m| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in V \cap V' \end{cases}$$

Esplicitando i valori assoluti:

$$\begin{cases} l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \\ m-\varepsilon < f(x) < m+\varepsilon \end{cases}$$

Confrontando le disuguaglianze possiamo affermare che

$$m-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$$

da cui segue che

$$m-\varepsilon < l+\varepsilon$$

ricaviamo $\varepsilon$:

$$-\varepsilon-\varepsilon < l-m$$
$$-2\varepsilon < l-m$$
$$2\varepsilon > m-l$$

da cui otteniamo che $\varepsilon > \frac{m-l}{2}$.

Ma inizialmente avevamo supposto la disuguaglianza opposta, cioè che fosse $\varepsilon < \frac{m-l}{2}$.

Da qui possiamo concludere che la supposizione che esistano due limiti distinti *l* ed *m* è falsa. Quindi se $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, il limite *l* è unico.

OSSERVAZIONE

Se fosse vero che $\varepsilon < \frac{m-l}{2}$, questo significherebbe che il valore di *f*(*x*) dovrebbe appartenere contemporaneamente a un intorno di *l* e ad un intorno di *m*, intorni che non hanno valori in comune!!! Questo è impossibile.

NOTA

Esplicitamente non ci sono esercizi precisi di applicazione di questo teorema; implicitamente, ogni volta che si calcola un limite si applica il principio del teorema, nel senso che, se si calcola il limite e si trova un certo valore si può essere sicuri che non ne esistono altri!

## Teorema del confronto (Teorema dei due carabinieri)

**Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite nello stesso dominio $D$, escluso al più un punto $x_0$. Se per ogni punto del dominio, diverso da $x_0$ risulta:**

$$f(x)\le g(x)\le h(x)$$

**e se, inoltre, è**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l,$$

**allora risulterà anche:**

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=l$$

NOTA

Il teorema viene anche detto “dei due carabinieri” perché la funzione *g* viene “stretta/chiusa” dalle altre due funzioni *f* ed *h*; se queste si muovono in una direzione (in linguaggio matematico *tendono a un certo valore l*), anche la funzione *g* è costretta ad andare verso quel valore.

***Dim.***

Per ipotesi sappiamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l$$

quindi dalla definizione di limite segue che, preso comunque un $\varepsilon>0$, è possibile determinare in corrispondenza di esso due intorni completi di $x_0$, $V$ e $V'$(cioè un insieme di punti $x$ tali che

$0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$ e $0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$), tali che ogni $x \in V$ e per ogni $x \in V'$ si verifichino le seguenti condizioni:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$|h(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

Le due disuguaglianze valgono simultaneamente per $x$ del dominio appartenenti all'intorno $V \cap V'$
Inoltre poiché per ipotesi deve verificarsi $f(x) \le g(x) \le h(x)$, segue la relazione:

$$l - \varepsilon < \underbrace{f(x) \le g(x) \le h(x)}_{\text{per ipotesi}} < l + \varepsilon \qquad \forall x \in V \cap V'$$

che implica:

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x \in V \cap V'$$

cioè $$|g(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in V \cap V'$$

Quest'ultima relazione significa proprio che $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

- **Esercizio**

Date le funzioni

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$
$g(x) = 2x - 2$
$h(x) = x^2 - 1$

e sapendo che $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 0$, calcoliamo $\lim_{x \to 1} g(x)$ usando il teorema del confronto.

Per poter applicare il teorema dobbiamo prima verificare che siano soddisfatte le sue ipotesi, cioè che, in un intorno di 1 si verifichi che $f(x) \le g(x) \le h(x)$:

$-x^2 + 4x - 3 \le 2x - 2 \le x^2 - 1$

ossia $\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \le 2x - 2 \\ 2x - 2 \le x^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 \le 0 \\ -x^2 + 2x - 1 \le 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -(x-1)^2 \le 0 \\ -(x-1)^2 \le 0 \end{cases}$ sempre vero!

Poiché le disequazioni del sistema sono verificate $\forall x \in \square$, allora anche la disuguaglianza $f(x) \le g(x) \le h(x)$ è verificata $\forall x \in \square$, in particolare è verificata in un intorno di 1.

Allora, poiché sono soddisfatte le ipotesi del teorema del confronto, posso affermare che $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$, esattamente come gli altri limiti.

**Esercizio per casa (o alla lavagna)**

Calcolare $\lim_{x\to 3} g(x)$, sapendo che $f(x) = -x^2 + 8x - 14, g(x) = 2x - 5, h(x) = x^2 - 4x + 4$ e che $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} h(x) = 1$

## Teorema di permanenza del segno

**Se la funzione $f(x)$ ammette limite diverso da zero cioè**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0,$$

**allora esiste un intorno $I(x_0)$ di $x_0$, escluso al più il punto $x_0$, in cui $f(x)$ assume lo stesso segno di *l*.**

Viceversa, se esiste un intorno $I(x_0)$ di $x_0$, privato al più del punto $x_0$, in cui risulta $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, e se esiste il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora:

$$l \ge 0 \qquad (l \le 0)$$

***Dim.***

Dimostriamo la prima parte del teorema.

**Ipotesi** $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$ **Tesi** $f(x) > 0$ in un intorno di $x_0$

Per ipotesi, sappiamo che preso comunque un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza ad esso un intorno completo di $x_0$, $V$(cioè un insieme di punti $x$ tali che $0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$), tale che ogni $x \in V$ si verifichi la seguente condizione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

essendo per ipotesi $l \neq 0$, risulta $|l| > 0$ e poiché la scelta di $\varepsilon$ è arbitraria allora scegliamo $\varepsilon = |l|$ .

In tal caso abbiamo $|f(x) - l| < |l| \quad \forall x \in V \quad \Rightarrow \quad l - |l| < f(x) - l < l + |l|$

Da cui segue la tesi, osservando che

se $l > 0$, essendo $l - |l| = 0$ e quindi $f(x) > 0$,

se $l < 0$, essendo $|l| = -l$ e quindi $l + |l| = l - l = 0$ e quindi $f(x) < 0$

Dimostriamo la seconda parte del teorema

Sia per esempio $f(x) > 0$.

E supposto per assurdo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l < 0$ per la prima parte del teorema esiste un intorno $I'(x_0)$ di $x_0$ tale che $f(x) < 0$, $\forall x \in I'(x_0)$, con $x \neq x_0$. Ma per ipotesi $f(x) > 0$ $\forall x \in I(x_0)$, ciò implica che per i punti $x$ dell'intorno $I(x_0) \cap I'(x_0)$ la funzione assume valori sia positivi che negativi. Abbiamo ottenuto una contraddizione, pertanto deve essere $l \geq 0$.

**OSSERVAZIONI:**

- il teorema vale anche se $l = \pm\infty$;
- il teorema non è valido nel caso il cui il limite sia uguale a zero infatti se per esempio, consideriamo $\lim_{x \to 1}(1 - x) = 0$, in un qualunque intorno completo del punto 1, i valori assunti dalla funzione $y = 1 - x$ sono in parte positivi e in parte negativi (è positiva in ogni intorno sinistro di 1 e negativa in ogni intorno destro.

## 8. Calcolo di limiti e operazioni

In generale, per calcolare il limite di una funzione basta sostituire il valore a cui tende la variabile *x*, tutte le volte in cui compare *x* nella funzione:

$$\lim_{x \to 3} 2x = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x - 2 = 3 \cdot (+\infty) - 2 = +\infty$$

Cerchiamo ora di presentare delle regole generali utili per calcolare i limiti; purtroppo spesso queste sole regole non basteranno, si dovranno utilizzare teoremi, conoscenze di limiti fondamentali e "trucchetti" per superare gli ostacoli presentati dai limiti.

**I limiti finiti**

I teoremi che ci accingiamo ad enunciare sono validi sia per $x$ che tende a un valore finito, $x_0$, sia a $+\infty$ o $-\infty$ ma in questo caso, il valore del limite è sempre un numero reale. Per questi teoremi daremo solo l'enunciato omettendone la dimostrazione.

**Somma/differenza tra limiti**

Consideriamo le due funzioni $f(x)=2x-6$ e $g(x)=x+3$ e i loro limiti per $x\to 4$, ossia

$$\lim_{x\to 4}(2x-6)=2 \text{ e } \lim_{x\to 4}(x+3)=7.$$

La funzione somma $s(x)=f(x)+g(x)$ è $s(x)=(2x-6)+(x+3)=3x-3$ e il $\lim_{x\to 4}(3x-3)=9$

Osserviamo che $\lim_{x\to 4}(2x-6)+\lim_{x\to 4}(x+3)=2+7=9$, che è proprio uguale al limite della funzione $s(x)$.

Enunciamo ora il teorema che regola il comportamento dei limiti visti sopra:

**Teorema**

Il limite della somma (o della differenza) di due funzioni è uguale alla somma (o alla differenza) dei limiti delle due funzioni.

Ossia, siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni; se

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l, \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=l_1 \text{ dove } l \text{ ed } l_1\in\Re$$

allora

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=l\pm l_1$$

**Prodotto tra limiti**

Vogliamo ora calcolare

$$\lim_{x\to 5} x\cdot\frac{x+1}{2-x}=$$

La funzione $f(x) = x \cdot \dfrac{x+1}{2-x}$ di cui dobbiamo calcolare il limite è formata dal prodotto di due funzioni $g(x) = x, h(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$. Sapendo che $\lim_{x\to 5} x = 5$ e $\lim_{x\to 5} \dfrac{x+1}{2-x} = -2$, si avrà che $\lim_{x\to 5} x \cdot \dfrac{x+1}{2-x} = 5(-2) = -10$.

**Teorema**

Il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle due funzioni.

Ossia, siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni; se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 \text{ dove } l \text{ ed } l_1 \in \Re$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot l_1$$

In particolare, se si considera la funzione costante

$$g(x) = k \neq 0,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = k \cdot l$$

- **Esempio**

1) $\lim_{x\to 2} 3x = 3 \cdot \lim_{x\to 2} x = 3 \cdot 2 = 6$

2) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} x \cdot (x-3) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} x \cdot \lim_{x\to \frac{1}{2}} (x-3) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} x \cdot \left( \lim_{x\to \frac{1}{2}} x - \lim_{x\to \frac{1}{2}} 3 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} - 3 \right) = -\frac{5}{4}$

**Quoziente di limiti**

E con il quoziente $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cosa succede?

Sproniamo i ragazzi a pensare ad alcuni esempi e vediamo se la soluzione proposta può funzionare.

**Teorema**

Il limite del quoziente di due funzioni è uguale al quoziente dei limiti delle due funzioni, supposto che il limite della funzione divisore sia non nullo.

Ossia, siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni; se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l\,, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 \text{ dove } l \text{ ed } l_1 \in \square\,,\ l_1 \neq 0$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l_1}$$

In particolare consideriamo la funzione $\frac{1}{f(x)}$, reciproca di $f(x)$:

se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \Re\,,\ l \neq 0\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

- Esempi

1) $\lim_{x\to -4} \frac{2x+1}{x-3} = \frac{\lim_{x\to -4}(2x+1)}{\lim_{x\to -4}(x-3)} = \frac{-7}{-7} = 1$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-3} = \frac{1}{\lim_{x\to 2}(x^2-3)} = \frac{1}{1} = 1$

**Potenza n-esima di una funzione**

**Teorema**

Sia $f(x)$ una funzione;

se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \Re$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n = l^n$$

**Radice n-esima di una funzione**

**Teorema**

Sia $f(x)$ una funzione;

se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, l \in \Re \text{ e } l > 0$$

allora

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0}f(x)}=\sqrt[n]{l}$$

➢ **Esempio**

Essendo $\lim_{x\to 3}(5x-4)=11$, allora $\lim_{x\to 3}\sqrt{5x-4}=\sqrt{11}$

Con l'aiuto di questi limiti possiamo cominciare a calcolare il limite di qualche funzione.

➢ **Esempi**

- $\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{2x+1}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2}{\lim_{x\to 1}(2x+1)}=\frac{1^2}{2\cdot\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

  Abbiamo applicato il teorema del quoziente, della somma, della potenza e del prodotto.

- $\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{\sqrt{x+1}}=\frac{\lim_{x\to 3}(x-4)}{\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}\right)}=\frac{3-4}{\left[\lim_{x\to 3}(x+1)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{-1}{4^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}$

  Abbiamo applicato i teoremi del quoziente, della somma e della potenza.

**Elevamento a potenza**

**Teorema**

Se

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=l>0 \text{ e } \lim_{x\to x_0}g(x)=l_1$$

allora risulterà: $$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim_{x\to x_0}g(x)}=l^{l_1}$$

Finora ci siamo occupati di una serie di teoremi sui limiti, all'inizio, però, avevamo precisato che questi teoremi valgono per i limiti finiti. Cerchiamo ora di capire cosa succede a somme, prodotti, quozienti etc. di limiti quando qualcuno di essi è infinito.

Il problema, quando lavoriamo con "l'infinito" è che, come abbiamo già detto, $\infty$ è solo un simbolo e, di conseguenza, non valgono le normali regole di calcolo.

Presentiamo una tabella che riassume tutti i "comportamenti dell'infinito", pregheremo, però, gli studenti di non impararla a memoria ma di riflettere su di essa. La tabella verrà discussa in classe.

| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim_{x\to x_0} g(x)$ | $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ | $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ | $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ | $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0 ($0^+$ se i segni dei due limiti sono concordi , $0^-$ se sono discordi) | 0 |
| $\infty$ | $l_1$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\frac{1}{l_1}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | Indeterminato | 0 |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | Indeterminato | 0 |
| $+\infty$ | $-\infty$ | Indeterminato | $-\infty$ | Indeterminato | 0 |
| $\infty$ | 0 | $\infty$ | Indeterminato | $\infty$ | $\infty$ |
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | Indeterminato | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | Indeterminato | $\infty$ |

| $\lim_{x\to x_0} f(x)$ | $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n$ |
|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ se $n$ è pari<br>$-\infty$ se $n$ è dispari |

se $f(x)>0$ per $x\in I$

| $\lim f(x)$ | $\lim g(x)$ | $\lim[f(x)]^{g(x)}$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $l_1>0$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $l_1<0$ | 0 |
| $0<l<1$ | $+\infty$ | 0 |
| $l>1$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $0<l<1$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $l>1$ | $-\infty$ | 0 |

I casi rimanenti oltre a tutti quelli visti, e precisamente:

$$(\pm\infty)+(\mp\infty) \qquad 0\cdot(\pm\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad (+\infty)^0$$

costituiscono le cosiddette **FORME INDETERMINATE (O FORME DI INDECISIONE),** per le quali non è possibile stabilire a priori, quanto valga, senza avere ulteriori informazioni sulle espressioni che hanno dato loro origine.

## 9. Calcolo delle forme indeterminate e limiti notevoli

Abbiamo già accennato che in alcuni casi i limiti di funzioni si presentano sotto forme che vengono chiamate di "indecisione" poiché non esistono teoremi che permettano di calcolarli direttamente, ma è necessario applicare trasformazioni anche notevoli per arrivare al risultato.
Ricordiamo che le forme indeterminate sono:

$$(\pm\infty)+(\mp\infty) \qquad 0\cdot(\pm\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad (+\infty)^0$$

Per la risoluzione di molte forme indeterminate si ricorre all'utilizzo dei cosiddetti limiti notevoli (casi particolari di forme indeterminate):

### Limiti Notevoli

Il calcolo dei limiti, ad eccezione del caso delle funzioni elementari in punti del loro dominio, può presentarsi un problema complesso. Ci sono alcuni limiti detti ***notevoli*** perché fondamentali nelle applicazioni dell'analisi e ci sono di aiuto per risolvere i limiti che si presentano in forma indeterminata.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{x}$$

Osserviamo che la misura dell'angolo è indicata in radianti. Cosa succede se uso i gradi…

Poiché il limite ha la forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, dobbiamo studiare il comportamento della funzione in un intorno piccolo del punto 0; ciò ci permette di supporre $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e successivamente determinare il valore del limite destro e del limite sinistro.

i) Calcoliamo $\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{x}$

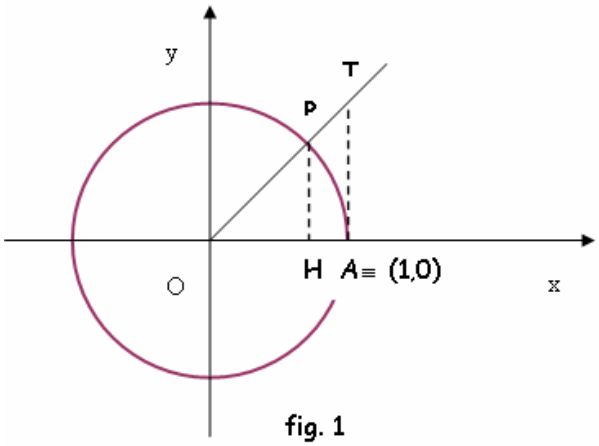


fig. 1

Considerata la figura 1, indichiamo con x la lunghezza dell'arco AP. Tenendo conto che $\overline{PH} = senx$ e $\overline{TA} = tgx$, si ha che

senx < x < tgx per la teoria della rettificazione della circonferenza.

Poiché sen$x$ > 0 possiamo dividere per sen$x$ entrambi i membri ottenendo $1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{\cos x}$

Consideriamo i reciproci

$$\cos x < \frac{senx}{x} < 1$$

Poiché la funzione $\cos x$ è continua, il $\lim_{x\to 0^+}\cos x = 1$, allora per il teorema del confronto (visto in precedenza) anche il $\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{x} = 1$.

ii) Calcoliamo $\lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{x}$

Ponendo $x = -u$ e osservando che la funzione $senx$ è dispari, otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{x} = \lim_{u\to 0^+}\frac{sen(-u)}{-u} = \lim_{u\to o^+}\frac{-senu}{-u} = \lim_{u\to o^+}\frac{senu}{u} = 1$$

Abbiamo così dimostrato il limite.

Con il supporto dell'insegnante, gli studenti sono ora chiamati (possibilmente alla lavagna) a calcolare i limiti che seguono

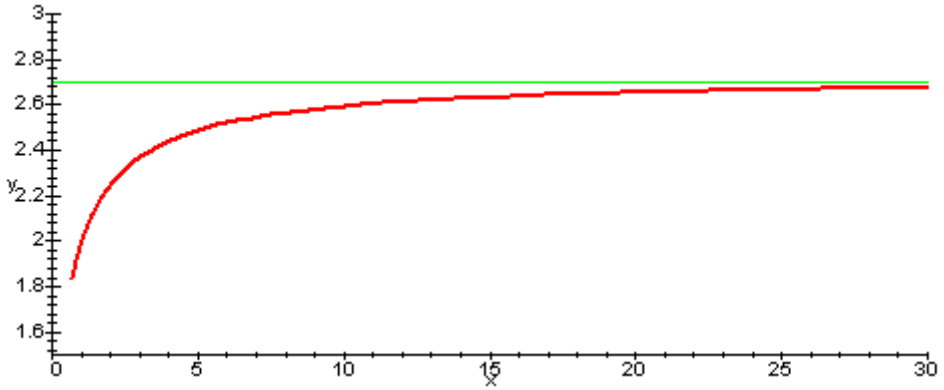
1. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Passiamo ora a calcolare un secondo limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Non dimostriamo questo limite ma ci limitiamo a ricordare che è una forma indeterminata del tipo $1^{\infty}$ e che la lettera $e$, che prende il nome di *numero di Nepero*, dal matematico scozzese John Napier, è un numero irrazionale, trascendente e il suo valore approssimato per difetto è 2,71828182845. La prova della trascendenza di questo numero è dovuta a Hermite (1873), mentre già Eulero (1737) aveva dimostrato che era irrazionale, ecco il motivo per cui questo numero si indica con la lettera $e$. É interessante osservare che, assieme a π, questo è uno dei pochi numeri trascendenti usati nella pratica comune e che hanno un simbolo speciale. Come curiosità segnaliamo che mentre è noto che $e^{\pi}$ è un numero trascendente, non si sa ancora se $\pi^e$ sia razionale o irrazionale.

Per rendere più chiaro il significato si può esaminare il grafico della funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ che tende, per $x\to\infty$, alla retta di equazione $y=e$. Si potrebbe anche suggerire di costruire la solita tabella con derive, attribuendo valori molto grandi a *x*.



Analogamente a quanto fatto per il primo limite notevole, possono essere calcolati altri limiti utilizzando l'altro limite notevole appena visto, ad esempio:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

**Forniamo ora alcuni esempi di calcolo di limiti che si presentano in forma indeterminata.**

1) FORMA INDETERMINATA $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[tgx(1-senx)]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\cdot senx}{\cos x(1+senx)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot senx}{1+senx}=\frac{0}{2}=0$$

2) FORMA INDETERMINATA $+\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(4x-\sqrt{16x^2-9})=+\infty-\infty$$

Razionalizzo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x-\sqrt{16x^2-9})(4x+\sqrt{16x^2-9})}{(4x+\sqrt{16x^2-9})}=\ldots=\frac{9}{+\infty}=0$$

3) FORMA INDETERMINATA $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cos x}{5x+senx}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\cos x}{x}}{5+\frac{senx}{x}}=\frac{2}{5}$$

In generale

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-senx}{bx+senx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a-\frac{senx}{x}}{b+\frac{senx}{x}}=\frac{a}{b}$$

4) FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{4}{3}$$

## ASINTOTI OBLIQUI

Abbiamo già parlato di asintoti verticali e orizzontale ma esistono gli ASINTOTI OBLIQUI?

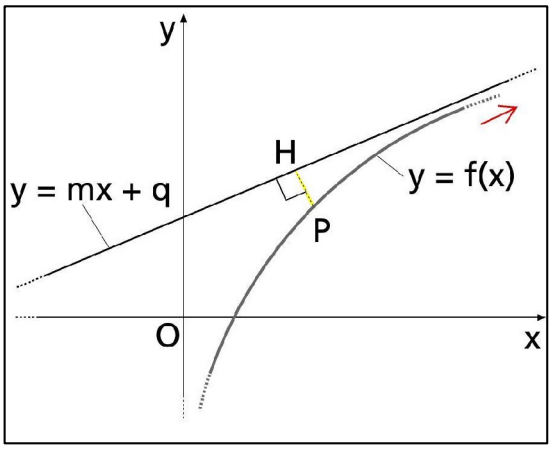
Data sempre una funzione $f(x)$ definita su un intervallo illimitato $(-\infty,+\infty)$, la retta $y = mx + q$ $(m \neq 0)$ è un **ASINTOTO OBLIQUO** per il grafico della funzione se

i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

ii) $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

ricordiamo che deve risultare *m* diverso da 0 e da infinito

iii) $q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$




➢ **Esempio**

Determiniamo, se esiste, l'asintoto obliquo della funzione

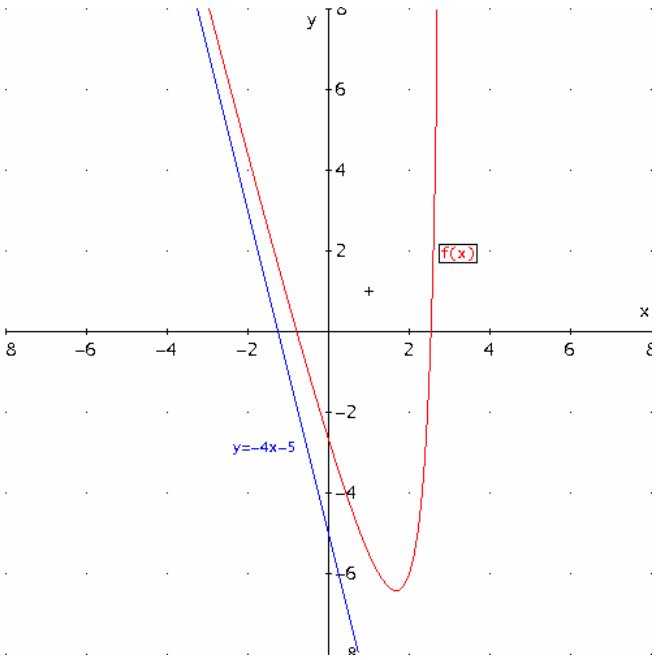
$$y = \frac{4x^2 - 7x - 8}{3 - x}$$

cominciamo con calcolare *m* e *q* mediante le formule viste sopra:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 7x - 8}{3x - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{3}{x} - 1\right)} = -4$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{4x^2 - 7x - 8}{3 - x} - (-4)x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 7x - 8 + 12x - 4x^2}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x - 8}{3 - x} = -5$$

I calcoli svolti sono validi sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$, quindi, in entrambi i casi, il grafico della funzione ha un asintoto obliquo di equazione: $y = -4x - 5$ .

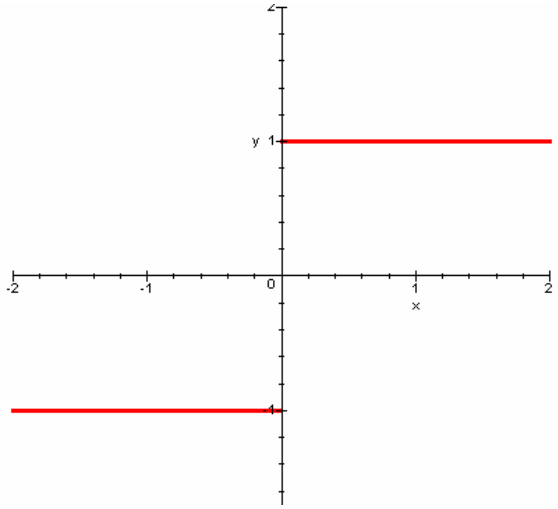



## 10. Funzioni continue

Da un punto di vista intuitivo, una funzione è continua quando è possibile tracciare il suo grafico senza staccare la penna dal foglio.

Consideriamo la funzione:

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$




Osserviamo che il grafico non può essere tracciato con continuità, nel senso che, è necessario staccare la matita dal foglio per disegnare la funzione.

Avendo dato la definizione di limite, possiamo rendere più rigoroso il concetto intuitivo di funzione continua.

Abbiamo visto che nella definizione di limite per $x \to x_0$, ci interessa soltanto conoscere il comportamento della funzione in un intorno di $x_0$ e non siamo affatto interessati a quello che accade in tale punto: $f(x_0)$ può anche non esistere o assumere un valore diverso da quello del limite.

**Il concetto di continuità di cui ci occupiamo ora, vuole invece cercare di mettere in relazione il limite a cui tende la funzione per $x \to x_0$ con il valore della funzione nel punto.**

Facciamo un esempio:

disegniamo i grafici delle funzioni a) $f(x) = x^2 + 1$, b) $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se x} \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Calcoliamo ora il limite per $x \to 1$ di entrambe le funzioni, poi calcoliamo il valore assunto dalle due funzioni quando $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1), \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 2 \neq g(1)$$

Cosa osserviamo?

Esse hanno lo stesso limite per $x \to 1$; nel caso a) tale limite coincide con il valore $f(1)$ della funzione nel punto $x = 1$ mentre nel caso b) questo non accade.

Diamo allora la seguente

Definizione:

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a,b]$ e $x_0$ un punto interno all'intervallo.

La funzione $f(x)$ si dice **continua nel punto** $x_0$ se esiste finito il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e tale valore è uguale a quello che la funzione assume in $x_0$.

***In simboli:*** $f(x)$ è continua in un punto $x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (1)

Se in un punto $x_0$ (del dominio di una funzione) non vale questa relazione, si dice che $x_0$ è un **punto di discontinuità o punto singolare**.

Per stabilire, quindi, se una funzione è continua in un punto $x_0$, dobbiamo accertarci che siano verificate tre condizioni:

- deve esistere $f(x_0)$ cioè la funzione deve essere definita in $x_0$;
- deve esistere finito il $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
- i due valori devono coincidere.

Quindi tornando all'esempio, il caso a) è una funzione continua in $x = 1$, mentre nel caso b) la funzione è discontinua in $x = 1$.

- **Esempio**

Se vogliamo valutare la continuità della funzione di equazione $y = \frac{1}{2}x^3 - x$, di dominio $D = \mathbb{R}$, in $x = 3$, dobbiamo:

1. calcolare il valore della funzione nel punto 3 $\quad f(3) = \frac{21}{2}$;
2. calcolare il valore del limite per $x \to 3$ $\quad \lim_{x \to 3}\left(\frac{1}{2}x^3 - x\right) = \frac{21}{2}$
3. confrontare i valori ottenuti $\quad \frac{21}{2} = \frac{21}{2}$

Poiché questi coincidono, possiamo concludere che la funzione è continua in $x = 3$.

## Continuità a destra o a sinistra

Può capitare che, pur potendo calcolare $f(x_0)$, non sia possibile calcolare il valore del limite per $x \to x_0$ ma si possa valutare tale limite in un intorno solo sinistro o solo destro di $x_0$.

Quindi se capita che

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ diciamo che la funzione è **CONTINUA A SINISTRA** del punto $x_0$
- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ diciamo che la funzione è **CONTINUA A DESTRA** del punto $x_0$

**Funzione continua in un intervallo**

La definizione che abbiamo dato di continuità è una definizione puntuale, cioè una definizione che dà la descrizione di ciò che accade in un punto. Ma possiamo dare anche la seguente definizione:

Definizione:

Una funzione definita in $[a,b]$ si dice continua nell'intervallo $[a,b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo.

## Principali funzioni continue

Di seguito, vengono presentate le più comuni funzioni continue in $\mathbb{R}$ o nei suoi intervalli.

**La funzione costante**

La funzione $f(x)=k$ è continua in tutto $\mathbb{R}$. Infatti, in ogni punto $x_0$ di $\mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to x_0} k = k$

**La funzione $f(x)=x$**

La funzione $f(x)=x$ è continua in tutto $\mathbb{R}$ cioè per un qualunque punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to x_0} x = x_0$,

infatti $\forall \varepsilon > 0$ risulta $|x-x_0| < \varepsilon$ per ogni $x \in ]x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon[$.

**Le funzioni goniometriche**

Sono continue in $\mathbb{R}$ le funzioni $senx$ e $\cos x$; sono continue anche la funzione $tgx$ in $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\right\}$ e la funzione $ctgx$ in $\mathbb{R}-\{k\pi,\ k\in Z\}$

Per esempio, $\lim_{x\to\pi} senx = sen\pi = 0$

**La funzione esponenziale**

La funzione esponenziale, definita in $\mathbb{R}$ : $y=a^x$, con $a>0$ è continua in $\mathbb{R}$.

**La funzione logaritmica**

La funzione logaritmica, definita in $\mathbb{R}^+$: $y=\log_a x$, con $a>0$, $a\neq 1$ è continua in $\mathbb{R}^+$.

**Proprietà:**

La somma, la differenza, il prodotto e il quoziente di funzioni continue, è ancora una funziona continua.

- **Esempio**

$f(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ è una funzione continua perché $g(x) = x^2, h(x) = 2x, k(x) = \frac{1}{x}$ sono funzioni continue e *f*(*x*) è formata dalla somma di esse.

## 11. Punti di discontinuità

Abbiamo già detto che un punto $x_0$ di un intervallo $I = [a,b]$ si dice punto di discontinuità per una funzione $f(x)$ se la funzione non è continua in $x_0$; esistono tre tipi di punti di discontinuità:

**Punti di discontinuità di prima specie**

Analizziamo la seguente funzione:

$$f(x) = 2x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2x-1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In generale, la funzione 2*x* + 1 è continua, essendo somma di funzioni continue; il problema è dato dal "punto di congiunzione", cioè *x* = 0. Proviamo allora a calcolare il limite destro per il primo tratto e il limite sinistro per il secondo:

$$\lim_{x \to 0^+} 2x + 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} 2x - 1 = -1$$

Limite destro e limite sinistro sono finiti ma diversi!

DEFINIZIONE: un punto $x_0$ si dice **punto di discontinuità di prima specie** per la funzione $f(x)$ se per $x \to x_0$ esistono finiti i limiti destro e sinistro della funzione ma sono diversi tra loro.

La differenza $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ si chiama **salto** della funzione in $x_0$.

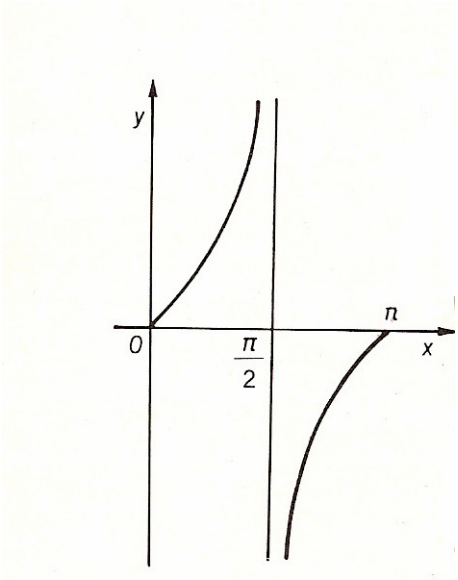
**Esercizio per casa (o alla lavagna)**

Data la funzione $f(x) = 3x^2 + \frac{5x}{|x|}$ individuare il punto di discontinuità, controllare se è di prima specie e calcolare l'eventuale salto.

**Punti di discontinuità di seconda specie**

Analizziamo il grafico della funzione *tgx* e calcoliamo il limite per $x$ che tende a $\frac{\pi}{2}$ da destra e da sinistra.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$$




DEFINIZIONE: un punto $x_0$ si dice **punto di discontinuità di seconda specie** per la funzione $f(x)$ se per $x \to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, della funzione è infinito oppure non esiste.

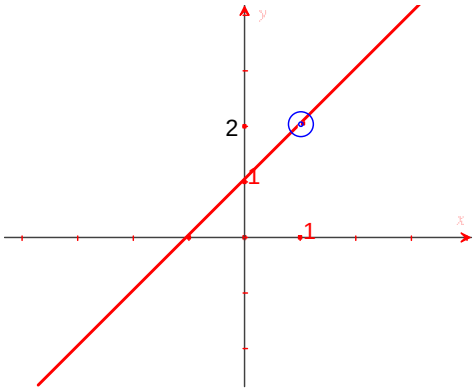
Ritornando all'esempio: la funzione *tgx* presenta nei punti $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ delle discontinuità di seconda specie; quindi ha infiniti punti singolari.

**Esercizio per casa (o alla lavagna)** da fare in classe subito dopo la spiegazione, lo provano a fare da soli mentre uno studente lo esegue alla lavagna:

- disegnare la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, calcolare i limiti destro e sinistro per $x \to 0$ e dire se è un punto di discontinuità e di che tipo.
- Verificare se la funzione $f(x) = \ln|x|$ ha punti di discontinuità ed eventualmente dire di quale specie.

**Punti di discontinuità di terza specie**

Costruiamo il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$




Il campo di esistenza è $\mathbb{R}-\{1\}$. Se calcoliamo il limite per $x\to 1$ troviamo una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$. Scriviamo la funzione in un altro modo, cercando se possibile di semplificare fattori al numeratore e al denominatore; si ha:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

Ora possiamo calcolare il limite: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

Osserviamo che:

la funzione $f(x)=x+1$ è definita su tutto $\mathbb{R}$;

la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ coincide con la funzione $f(x)=x+1$ sull'insieme $\mathbb{R}-\{1\}$.

DEFINIZIONE: un punto $x_0$ si dice **punto di discontinuità di terza specie** per la funzione $f(x)$ se

1) esiste ed è finito il limite per $x\to x_0$, ossia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$;
2) $f(x)$ non è definita in $x_0$, oppure, se lo è, risulta $f(x_0)\neq l$

Un punto di discontinuità di terza specie viene anche detto punto di **discontinuità eliminabile** nel senso che se la funzione non è definita in $x_0$, è possibile estendere il suo campo di esistenza a tale punto, ponendo $f(x_0)=l$, rendendo in tal modo la funzione continua. Ovviamente la funzione che si ottiene non è quella originaria ma differisce per $x=x_0$.

Ritornando all'esempio: per la funzione, il punto $(1;2)$ è un punto di discontinuità di terza specie che si può eliminare definendo la funzione nel modo seguente:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 2 & \text{se } x=1\end{cases}$$

## 12. Teoremi fondamentali sulle funzioni continue

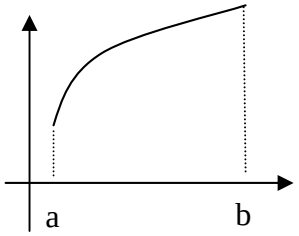
Nei seguenti teoremi consideriamo funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato. Ricordiamo che una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$ è limitata (superiormente e inferiormente).

## Teorema di Weierstrass

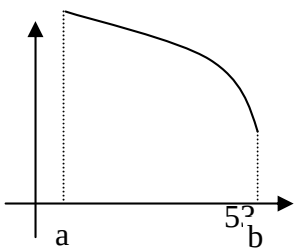
Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$, allora assume in esso un valore massimo *M* e un valore minimo *m* (assoluti).

Ricordiamo che il massimo e il minimo assoluti di una funzione definita in un intervallo $I$ sono rispettivamente il più grande e il più piccolo dei valori assunti dalla funzione in $I$.

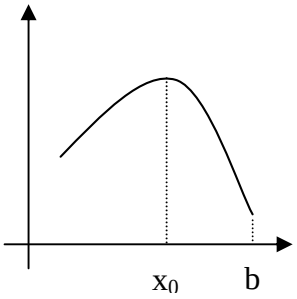
a) Funzione crescente nell'intervallo $I=[a,b]$, massimo e minimo negli estremi.
($m=f(a)$ e $M=f(b)$)




b) Funzione decrescente nell'intervallo $I=[a,b]$, massimo e minimo negli estremi.
($M=f(a)$ e $m=f(b)$)

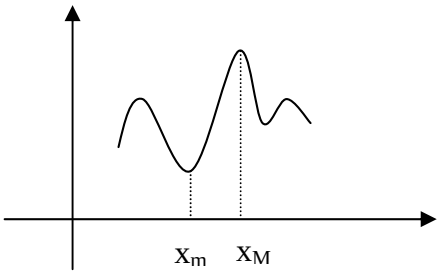


c) Funzione prima crescente e poi decrescente nell'intervallo $I = [a,b]$, massimo all'interno dell'intervallo e minimo in un estremo ($M = f(x_0)$ e $m = f(b)$)

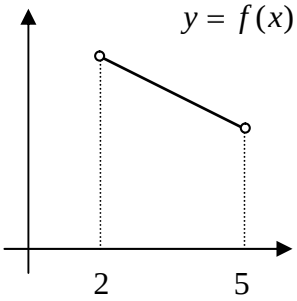



d) Funzione costituita da tratti crescenti e decrescenti nell'intervallo $I = [a,b]$, massimo e minimo interni all'intervallo.

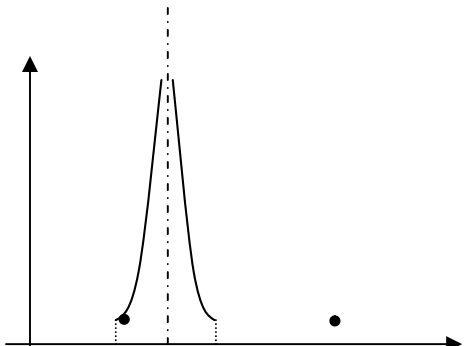
($M = f(x_M)$ e $m = f(x_m)$)




Se alcune ipotesi del teorema non sono verificate, il risultato non è più vero come mostrano i seguenti controesempi:

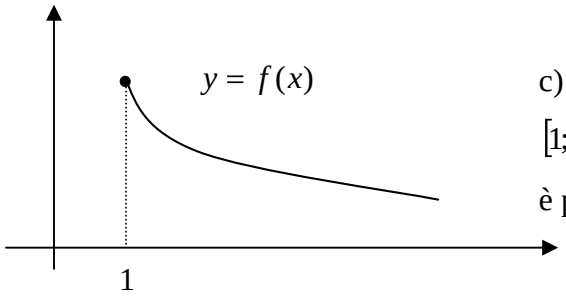



a) La funzione è continua nell'intervallo aperto e limitato $]2;5[$. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo.



$y = f(x)$

b) La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo $[1;3]$ essa assume minimo, ma è priva di massimo.




c) La funzione è continua nell'intervallo illimitato $[1;+\infty[$. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

➢ **Esempio**

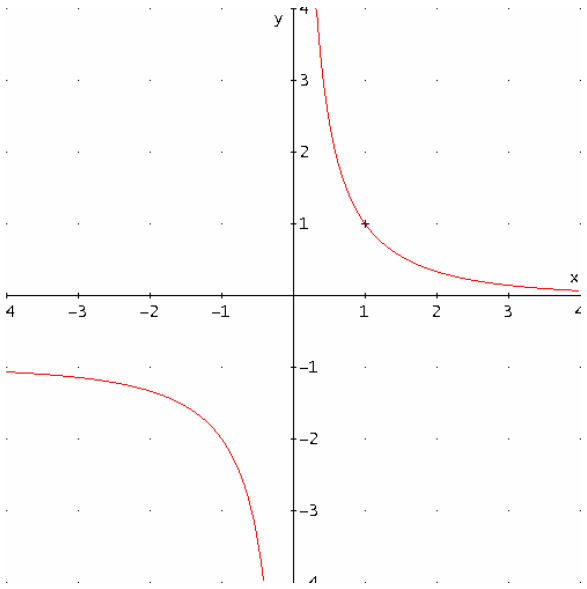
Stabilire se il Teorema di Weierstrass vale per la funzioni riportate, nell'intervallo indicato a fianco; in caso affermativo determinare massimo *M* e minimo *m* della funzione.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1}$ in [-3,5]

Dobbiamo innanzitutto verificare le ipotesi del teorema, ossia controllare se la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato [-3,5].

Calcoliamo il dominio della funzione: $2^x \neq 1$ cioè $x \neq 0$; cosa significa questo? Significa che la funzione presenta un punto di discontinuità in $x = 0$ **ma** $0 \in [-3,5]$, quindi la funzione non è continua nell'intervallo presentato, di conseguenza il teorema non è applicabile.

Vediamolo graficamente, aiutandoci con derive:



2) $f(x) = x^2 - 4x$ in [0,3]

Dobbiamo innanzitutto verificare le ipotesi del teorema, ossia controllare se la funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato [0,3].

La funzione è polinomiale, quindi continua in  , in particolare continua nell'intervallo richiesto. Il teorema di Weierstrass è applicabile: la funzione ammette *M* e *m* in [0,3].

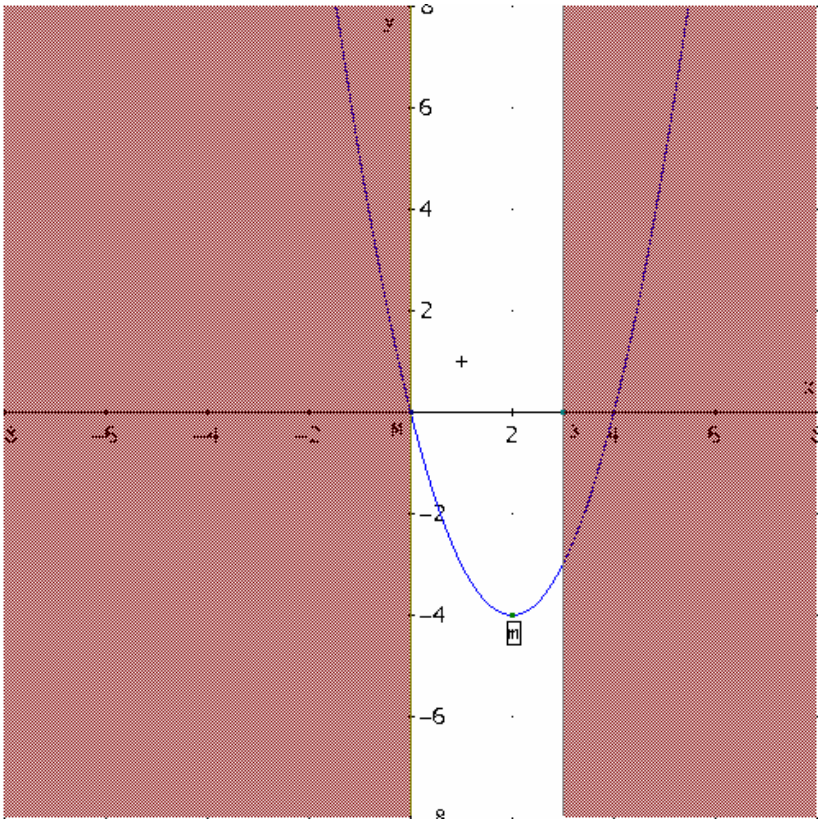
$f(x) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Il minimo della funzione si ha in corrispondenza di $x = 2$, da cui $m = [2,-4]$

Il massimo si ha in corrispondenza dell'estremo inferiore dell'intervallo [0,3], quindi $M = [0,0]$




**Esercizi per casa**

Svolgere lo stesso esercizio visto sopra con le funzioni:

- $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ in [1,2]
- $f(x) = 1 + \ln x$ in [0,3]

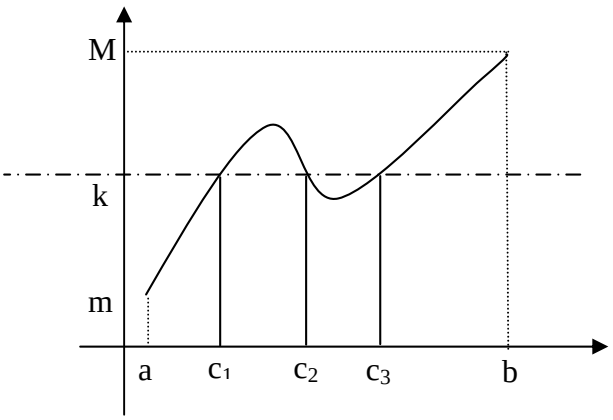
## Teorema dei valori intermedi

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$, allora assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo assoluti.

*OSSERVAZIONE*:

Questo teorema, insieme a quello di Weierstrass permette di concludere che i valori che una funzione continua assume in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$ costituiscono l'intervallo chiuso e limitato $f(I)=[m;M]$; ossia per ogni numero $k \in f(I)$ esiste almeno un punto $c \in [a;b]$ tale che $f(c)=k$.

Il senso di questa osservazione può essere chiarito dalla figura presentata sotto.




In questo caso, ogni retta $y=k$, con $m<k<M$, taglia almeno una volta il grafico della funzione.

## Teorema di esistenza degli zeri

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I=[a,b]$ e negli estremi di tale intervallo essa assume valori di segno opposto, allora la funzione si annulla in almeno un punto interno all'intervallo $]a,b[$.

Cioè esiste almeno un punto $c \in ]a,b[$ tale che $f(c)=0$.

➢ **Esempio**

Stabilire se vale il teorema degli zeri per la funzione

$f(x)=\dfrac{-5+x}{4x^2-1}$ in [-3;7]

Cominciamo con il calcolare il dominio della funzione: $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; notiamo che i punti fuori dominio appartengono all'intervallo [-3;7], per cui la funzione non è continua nell'intervallo richiesto e non è possibile applicare il teorema.

**OSSERVAZIONE**

Sarebbe utile ricordare che gli "zeri di una funzione" sono le soluzioni della stessa; si farà poi notare, a chi non l'avesse già scoperto, che il teorema ci permette di sapere se una equazione ammette soluzioni oppure no in un certo intervallo.

- **Esempio**

L'equazione $-1+x+\sin x=0$ è difficilmente risolvibile "a mano", ossia non si riesce a trovare il valore da attribuire alla variabile *x* affinché l'equazione sia soddisfatta. Spesso, più che il valore preciso della *x*, interessa sapere solo se la funzione ha almeno una soluzione in un determinato intervallo. Dunque, con la nostra equazione, andiamo a cercare se essa ammette soluzioni nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La funzione $f(x)=-1+x+\sin x$ è continua nell'intervallo richiesto perché è somma di funzioni continue, inoltre $f(0)=-1<0,\ f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$. Le ipotesi del teorema degli zeri sono soddisfatte, quindi l'equazione ammette almeno una soluzione nell'intervallo desiderato.

**Esercizi per casa (o alla lavagna)**

Stabilire se le equazioni presentate ammettono soluzioni negli intervalli indicati a fianco

1. $x-4-2\ln(x+1)=0$ in [0,5]
2. $x^2+\frac{2}{x+1}=0$ in [-3,8]

## Verifiche sommative

Presentiamo ora due esempi di verifiche sommative. Si prevede di svolgerne una dopo aver introdotto i teoremi per il calcolo dei limiti che servirà per verificare l'apprendimento del concetto di limite e la corretta applicazione dei tre teoremi studiati. Una seconda verifica verterà sul calcolo di limiti più complicati (forme indeterminate), sulle funzioni continue (con relativi teoremi) e sullo studio della discontinuità.

## 1° Verifica sommativa

**1) Spiegare <u>a parole</u> cosa significano le scritture** $\lim_{x\to 3}(x^2-6x)=-9$ **e** $\lim_{x\to -1}\frac{7}{-1-2x-x^2}=-\infty$**.**

**2) Spiegare quando vale** $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l^+$

**3) Applicando la definizione di limite, provare che risulta:**

$\lim_{x\to -5}(x^2-1)=24$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$ $\lim_{x\to 0}e^x=1$

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ $\lim_{x\to +\infty}3^{x+1}=+\infty$

**4) Verificare il teorema della permanenza del segno per il seguente limite:**
$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$**. Enuncia poi il teorema.**

**5) Verificare che la funzione di equazione** $y=\frac{x-1}{x+1}$ **ha come asintoto orizzontale la retta** $y=1$**.**

**6) Determina gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:**
$y=\frac{3x^2-x+1}{x-1}$, $y=(x+2)\cdot e^{x-1}$

**7) Utilizzando i teoremi studiati calcola i seguenti limiti**

$\lim_{x\to 2}(3x+5)$ $\lim_{x\to 1}(4x^2+x-2)$ $\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{\sqrt{x+1}}$ $\lim_{x\to 0}\cdot x^3\cdot(2x-1)$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{2x+1}$

## 2° Verifica sommativa

**1) Calcolare i seguenti limiti:**

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x-1}$ $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^2-5x+1}{(2x+1)^2}$ $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{senx+1}$

**2) Calcola gli eventuali asintoti obliqui delle funzioni:**

$y = \sqrt{9x^2 + 4x - 1}$, $y = \dfrac{2x^4 - 3}{x^2}$

**3) Dai la definizione di funzione continua in un punto e poi trova in quali punti la funzione $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ non è continua?**

**4) Quale delle seguenti funzioni è continua su tutto l'intervallo  ?**

A $y = \sqrt{x}$

B $y = \dfrac{1}{x}$

C $y = tgx$

D $y = e^x$

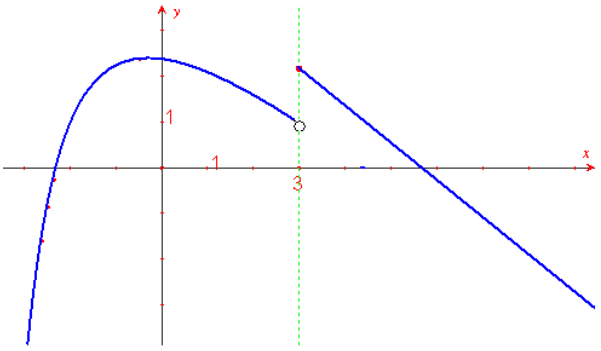
E $y = \log x$

**5) Che tipo di discontinuità presentano le funzioni $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x+2}$ e $g(x) = x + 3^{x-1}$?**

**6) Nella figura seguente è rappresentato il grafico di una funzione. Che tipo di discontinuità presenta?**

**7) Stabilisci se per le seguenti funzioni vale il teorema di Weierstrass, nell'intervallo a fianco indicato:**

$$y = \frac{1}{2^x - 1} \text{ in } [-1;2], \quad y = \frac{5x}{x^2 - 1} \text{ in } [2;7], \quad y = \ln\frac{2x}{x+3} \text{ in } [0;5]$$



## Bibliografia


- ✓ *Corso Di Matematica Sperimentale E Laboratorio 3*, M. Battelli, Le Monnier.

  Risulta utile per la stesura iniziale del modulo didattico poiché fornisce una prima idea di come improntare il lavoro: prerequisiti, obiettivi, contenuti; invece, per quanto riguarda lo sviluppo dei contenuti, si nota un'impostazione superata.

- ✓ *Corso base blu di matematica*, M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, Zanichelli, Bologna, 2005.

  La novità; suddiviso in moduli e non più in "anni". La teoria è ben sviluppata, gli esercizi sono presentati in ordine di difficoltà, si trovano molti spunti per il laboratorio di matematica e per parlare di "matematica per il cittadino".

- ✓ *Nuovi elementi di matematica*, N. Dodero, P. Barroncini, R. Manfredi, Ghisetti e Corvi, Milano, 2000.

  Buono sia dal punto di vista della teoria che degli esercizi; è utile anche per la stesura del modulo didattico in quanto, all'inizio di ogni argomento sottolinea i prerequisiti necessari ed espone brevemente gli argomenti e gli obiettivi proposti.

- ✓ *Corso di matematica*, L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, Etas, Milano, 2003.

  Apprezzabile l'eserciziario in quanto è abbastanza completo e presenta esercizi interessanti e di ogni grado di difficoltà; la teoria sembra invece un po' troppo schematica.

- ✓ *Multi Format*, W. Maraschini, M. Palma, Paravia, Torino, 2002.

  Alquanto ambizioso, i contenuti sono sviluppati in modo sommario, sembra lasciare molto (troppo) spazio al docente; può dare un'idea su come organizzare il modulo didattico.

- ✓ *Linee essenziali di matematica*, G. Zwirner, L. Scaglianti, Cedam, Padova, 1997.

  Testo un po' scarno dal punto di vista dei contenuti, lascia molto spazio all'insegnante; è utile per la scelta degli esercizi.

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.