Università degli Studi di Ferrara

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO
SEDE DI FERRARA

INDIRIZZO FISICO INFORMATICO MATEMATICO CLASSE A049 VIII CICLO

DIRETTORE della Scuola: Prof. Roberto Greci

COORDINATORE della Sede di Ferrara: Prof. Luciana Bellatalla

Approccio didattico al concetto di derivata

TESI DI ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Specializzanda: Dott.ssa Braga Francesca

Supervisore: Prof. Davide Neri

Relatore: Prof. Valter Roselli

Anno accademico 2007/2008

INDICE

Introduzione

Prima Parte – Premesse

1. Riflessione relativa al processo di insegnamento-apprendimento della matematica con riferimento esplicito al percorso proposto per introdurre il concetto di derivata (ruolo in ambito disciplinare e problematiche didattico-metodologiche relative ad una efficace sviluppo della teoria delle derivate).
2. Collocazione del tema delle derivate nel contesto dei programmi ministeriali della scuola secondaria superiore.

Seconda Parte – Presentazione dei contenuti ed intervento didattico

1. Definizione dei destinatari, prerequisiti e relativo accertamento (prova di verifica); obiettivi trasversali, generali e specifici; metodologie didattiche, materiali e strumenti impiegati.

2. Introduzione storico–epistemologica al concetto di derivata

    - Il metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi di Fermat
    - Il nuovo metodo di Leibniz
    - Il metodo di Newton
    - Considerazioni conclusive

3. La teoria delle derivate
    - La derivata come limite
    - Continuità delle funzioni derivabili
    - Derivate di alcune funzioni elementari mediante la definizione
    - Regole di derivazione
    - Funzione derivata seconda e derivate successive
    - Esercitazione con il software Derive: grafico di una funzione e grafico della funzione derivata
    - Applicazioni del concetto di derivata alla fisica
    - Applicazioni del concetto di derivata all'economia

Conclusioni e riflessioni finali
Bibliografia
Allegati

Introduzione:

Il lavoro che presento in questa tesi di abilitazione all'insegnamento secondario propone un approccio didattico al concetto di derivata.
La tesi è suddivisa in due capitoli (indicati con Prima Parte e Seconda Parte), una parte conclusiva e gli allegati. Nella prima parte ho riportato alcune riflessioni relative al processo di insegnamento-apprendimento della matematica facendo riferimento esplicito al percorso proposto per introdurre il concetto di derivata. Dopodiché ho inquadrato l'argomento delle derivate nel contesto dei programmi ministeriali della scuola secondaria superiore, sottolineando l'importanza del ruolo delle derivate in ambito disciplinare e ho proposto una breve trattazione delle problematiche metodologiche relative ad uno sviluppo efficace dell'argomento.
La seconda parte esplicita i destinatari, i prerequisiti e il relativo accertamento, gli obiettivi trasversali, generali e specifici, le metodologie didattiche, i materiali, gli strumenti impiegati ed i contenuti dell'intervento didattico proposto.
Più nello specifico, per quanto riguarda la prima parte, metterò in evidenza quali sono i contenuti specifici ed i suggerimenti proposti dai programmi ministeriali, relativamente all'insegnamento della teoria delle derivate; tali indicazioni sono il riferimento principale per ogni docente nella fase di progettazione dei propri interventi didattici. In ambito disciplinare il ruolo delle derivate è di grande importanza in quanto costituiscono sia un'integrazione delle conoscenze già acquisite dagli studenti, sia rappresentano un passaggio fondamentale nell'approdo alla matematica moderna; in particolare sono uno strumento indispensabile nella risoluzione di molti problemi di natura applicativa e nello studio delle funzioni. Seguendo le indicazioni ministeriali, l'introduzione al concetto di derivata avverrà per via intuitiva facendo ricorso al classico problema della ricerca della retta tangente ad una curva.
La seconda parte della tesi è invece dedicata allo sviluppo dell'intervento didattico. La prima fase rappresenta un'introduzione storico-epistemologica dell'argomento, nella quale si discuterà della scoperta del calcolo come un momento storico fondamentale che ebbe influenza su tutta la matematica successiva e su tutte le scienze moderne; l'obiettivo è quello di presentare i momenti salienti nella storia della matematica al fine di suggerire agli studenti la "densità" del concetto di derivata. Nella seconda fase si formalizza la definizione di derivata a partire dal rapporto incrementale e dal suo significato geometrico, si esplicita la derivata come operatore sulle funzioni, si presentano le conseguenti regole di derivazione e le applicazioni delle derivate anche in altri ambiti disciplinari. In questa trattazione si cercherà di mettere in evidenza i passaggi nodali e concettualmente più impegnativi per gli allievi. Posso affermare che, lo scopo più generale del progetto didattico va individuato nella costruzione e organizzazione di un modello matematico idoneo a descrivere e a misurare la "rapidità del mutamento". Come più volte ripeteremo, storicamente, il problema delle tangenti e quello della velocità istantanea sono stati il punto di partenza per l'invenzione del calcolo differenziale, in quanto hanno dato origine al concetto di derivata. Perciò si è ritenuto di far discendere questo concetto fondamentale proprio da tali problemi. E' comunque importante far comprendere agli allievi che le nozioni introdotte hanno una validità generale; esse, infatti non vengono solo utilizzate nella determinazione della pendenza delle rette tangenti ad una curva (in analitica), oppure nello studio della velocità e delle accelerazioni (in cinematica), ma anche in moltissimi tipi di problemi, alcuni dei quali sono stati sviluppati in questo lavoro.
Conclusioni e riflessioni finali chiudono la tesi.

Parte Prima – Premesse

1. RIFLESSIONI RELATIVE AL PROCESSO DI INSEGNAMENTO-APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA CON RIFERIMENTO ESPLICITO AL PERCORSO PROPOSTO PER INTRODURRE IL CONCETTO DI DERIVATA

(ruolo in ambito disciplinare e problematiche didattico-metodologiche relative ad un efficace sviluppo della teoria delle derivate)

La crescita culturale degli allievi è una delle finalità generali più alte che la scuola si impegna a promuovere. In questo contesto giocano un ruolo importante tutte le discipline, umanistiche e scientifiche.
Purtroppo è però innegabile che sia più facile, nel pensiero comune, immaginarsi in che modo le prime possano inserirsi in questo processo di crescita dello studente. Il binomio discipline umanistiche-cultura è infatti quasi scontato, mentre il binomio matematica-cultura può erroneamente apparire stonato o inconsistente. È necessario che proprio a ripartire dalla scuola si restituisca una visione corretta di scienza che ne sottolinei gli aspetti creativi e affascinanti e che esalti la sua importanza sul piano culturale e cognitivo di ciascuno. In questa prospettiva, fondamentale sarà il contributo degli insegnanti, magari di una generazione di docenti che, consapevoli di questa immagine della disciplina e dell'importanza che riveste nella formazione di ogni individuo, possano risolvere i "…problemi di immagine della matematica presso sé, presso gli allievi, presso i colleghi, presso le famiglie, presso la società" (D'Amore, 1999).
L'insegnante ha quindi un compito fondamentale, quello di porsi come mediatore culturale nella crescita degli studenti. Compito difficile che richiede competenze da parte del docente riguardo le conoscenze disciplinari, ma anche riguardo il processo di insegnamento-apprendimento che rendono l'insegnante membro di un gruppo professionista.
Nessun insegnamento organizzato in senso dogmatico può sperare di poter promuovere conoscenza, come nessun insegnamento che venga scisso dall'apprendimento, può sperare di essere efficace.
Ogni attività didattica chiama in scena i tre attori protagonisti di questo processo l'allievo, l'insegnante e il sapere. Sui tre lati del triangolo della didattica si possono concentrare le osservazioni che forniscono le giuste indicazioni per costruire un percorso.
Nel caso del progetto oggetto di questa tesi il percorso propone un approccio didattico al concetto di derivata. Esso è di fondamentale importanza e costituisce la base del calcolo differenziale, strumento indispensabile nella risoluzione di problemi di natura applicativa, ad esempio, nel campo della fisica in meccanica ed elettromagnetismo, e ad un livello superiore in modelli caratterizzati da equazioni differenziali o da integrali o da funzionali del calcolo delle variazioni (come in biologia o in ambito economico). In ambito curricolare le derivate rappresentano una meta in grado di perfezionare buona parte delle conoscenze acquisite precedentemente, quali ad esempio la teoria dei limiti e alcune parti di geometria analitica. Sono inoltre una mezzo fondamentale nello studio delle funzioni, dal momento che consentono la ricerca dei punti di massimo e di minimo.

E' possibile distinguere due tipi di didattica della matematica a cui ci si riferisce con il nome di didattica A e didattica B. Il primo tipo, allo scopo di rendere più interessante agli occhi dello studente

la disciplina, concentra l'attenzione sull'oggetto del sapere. La didattica del secondo tipo è invece focalizzata attorno l'apprendimento dell'allievo e sui processi che portano alla conoscenza.
Poiché l'interesse può portare al coinvolgimento degli studenti, per rendere più stimolante la trattazione del concetto di derivata, ho pensato a un'introduzione storica del concetto. In questo senso l'uso della storia sembra appartenere maggiormente a una didattica del primo tipo.
Le ragioni dell'uso della storia come strumento didattico non si esauriscono qui. La storia come sviluppo dei fatti "spiega le origini delle idee, dei problemi, delle teorie… infonde la certezza che questa disciplina non è una stantia raccolta di cose già fatte… ma qualche cosa in perpetua evoluzione, fatta dall'uomo per l'uomo…"(D'Amore, 1999). Per questo motivo la linea che ha guidato il percorso propone di mostrare come il concetto di derivata, nato dal problema della determinazione della retta tangente a una curva in suo punto, si sia sviluppato e, passando anche attraverso una trattazione algebrica "alla Cartesio", abbia condotto alla sua formulazione seicentesca. In ognuno di questi passaggi è possibile evidenziare come un concetto matematico possa essere rivisto e arricchito di significati in un processo a spirale mosso dalla ricerca di generalizzazioni.
In tale contesto perciò, il messaggio che si può trasmettere nell'insegnamento delle derivate, prima ancora della loro importanza in campo applicativo, è quello di una conquista culturale. La scuola secondaria infatti, è ancora "*di necessità un luogo segregato dall'esperienza immediata, un luogo cioè dove possono essere sperimentate avventure intellettuali. La scuola realizza il suo compito proprio nel non essere legata al carro del contingente, ma nell'offrire continue suggestioni e precisi strumenti concettuali per il suo superamento" (G. Genovesi, 2005)*. Il metodo scientifico di cui vogliamo rendere consapevoli gli studenti è dunque un metodo che abbia più fondamento sulla sua capacità conoscitiva della realtà e delle relazioni tra i suoi oggetti che non sulla sua utilità dal punto di vista strettamente pratico. Infine il contesto più ampio in cui deve essere inserito questo intervento didattico è la crescita culturale che la scuola promuove per mezzo sia delle discipline scientifiche che delle discipline umanistiche. È necessario che proprio a ripartire dalla scuola si restituisca una visione corretta di scienza che ne sottolinei gli aspetti creativi e affascinanti e che esalti la sua importanza sul piano culturale e cognitivo di ciascuno.

2. COLLOCAZIONE DEL TEMA DELLE DERIVATE NEL CONTESTO DEI PROGRAMMI MINISTERIALI DELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

In questo paragrafo si vuole inquadrare l'argomento preso in esame in questo percorso didattico, nel contesto dei programmi ministeriali della scuola secondaria superiore.

I PROGRAMMI DI MATEMATICA NEL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

L'insegnamento della matematica nei **licei di ordinamento** si basa sui programmi ministeriali redatti nel 1952, che però ricalcano sostanzialmente i programmi della Riforma Gentile, risalente al 1923; nelle indicazioni metodologiche si suggerisce all'insegnante di:

"dare largo posto all'intuizione, al senso comune, all'origine psicologica e storica delle teorie, alla realtà fisica, agli sviluppi che conducono ad affermazioni pratiche immediate, mettendo da parte le nozioni statiche e rigide, e quelle puramente logiche, ma che astraggono da ogni impulso intuitivo".

Per quanto riguarda la teoria delle derivate, essa è totalmente assente nei programmi per il liceo classico, mentre al liceo scientifico è consigliata nella classe IV:
- Derivata di una funzione di una variabile e suo significato geometrico e fisico.
- Derivate di x^2, di sen$x$, cos$x$, tg$x$. Esercizi di derivazione.

e nella classe V:

- Massimi e minimi con il metodo delle derivate, applicazioni.

I PROGRAMMI DI MATEMATICA DEL PNI: PIANO NAZIONALE PER L'INFORMATICA

Proprio in attesa di una riforma della scuola secondaria superiore, molti licei hanno adottato progetti di sperimentazione, tra cui uno dei più seguiti è il **Piano Nazionale per l'Informatica (PNI)**. I suoi programmi sono stati elaborati nel 1985, allo scopo di introdurre l'informatica nelle scuole secondarie superiori; in realtà il progetto coinvolse solo la scuola secondaria superiore, con l'inserimento di elementi di informatica all'interno di nuovi e più corposi programmi di matematica e fisica mentre le altre materie non vengono toccate. Viene avviato nelle scuole come progetto sperimentale nell'anno scolastico 1987 – 1988. Diversamente dai vecchi programmi, le scansioni annuali degli argomenti vengono sostituite da 5 grandi *temi* per il biennio e da 7 *temi* per il triennio. All'interno dei programmi PNI, la teoria delle derivate è collocata al punto 7.c del tema 7 "Analisi infinitesimale":

- Derivata di una funzione. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange, De L'Hopital.

La classe in cui è suggerito di svolgere l'argomento è la classe quarta.
Per quanto riguarda il commento ai singoli temi, sono riportate le seguenti indicazioni:

"L'introduzione del concetto di derivabilità sarà accompagnato da un ventaglio quanto più ampio possibile di loro impieghi in ambiti matematici ed extramatematici ed arricchita dalla presentazione ed illustrazione di opportuni controesempi che serviranno a chiarire i concetti stessi. Se il docente lo ritiene opportuno, un'idea intuitiva del concetto di derivata, legato ai classici problemi della tangente ad una curva ed alla velocità, può essere data negli anni precedenti, recuperando solo alla fine una impostazione rigorosa. Lo studente sarà abituato all'esame di grafici di semplici funzioni ed alla deduzione di informazioni dallo studio di un andamento grafico; appare anche importante fare acquisire una mobilità di passaggio dal grafico di una funzione a quello della sua derivata e di una sua primitiva."

I successivi programmi elaborati dalla **Commissione Brocca** negli anni 1991 e 1992, che rientravano in un progetto più ampio di riordino della Scuola secondaria superiore, non hanno sostanzialmente modificato i programmi PNI di Matematica e Fisica. Essi sono stati adottati dai vari istituti di istruzione secondaria come progetti di sperimentazione su proposta dello stesso Ministero della Pubblica Istruzione.

CURRICOLO DI MATEMATICA PROPOSTO DALL'UMI – UNIONE MATEMATICA ITALIANA (2001 – 2004)

Nel 2000 – anno internazionale della Matematica – l'Unione Matematica Italiana (UMI) ha insediato una Commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai mutati bisogni della società all'inizio del nuovo secolo.
La Commissione ha deciso di elaborare un curricolo di matematica definendone le conoscenze fondamentali da acquisire, indipendentemente, per quanto riguarda il ciclo secondario, dalla varietà dei suoi indirizzi. E' emersa perciò l'idea della "matematica per il cittadino", cioè di un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici. Nel 2001, l'U.M.I. ha presentato una proposta di curricoli di matematica per la scuola primaria e secondaria di I grado. La proposta è stata corredata da numerosi esempi di attività didattiche che la realizzano ed è pubblicata nel volume *Matematica 2001*.

Nel volume *Matematica 2003* e *Matematica 2004* si trovano i contenuti di matematica per la parte comune a tutti gli indirizzi di scuola superiore, anch'essi corredati da vari esempi di attività didattiche.
In entrambe le proposte, i curricoli sono strutturati in *nucle*i tematici:

- **Numeri e algoritmi – Spazio e figure – Dati e previsioni – Relazioni e funzioni;**

e in *nuclei* trasversali "*di processo*"

- **Argomentare, congetturare, dimostrare – Risolvere e porsi problemi – Misurare – Laboratorio di Matematica**.

I progetti di riforma della scuola secondaria superiore più recenti prevedevano due bienni seguiti da un quinto anno di raccordo con gli studi universitari; nel volume *Matematica 2003* si trovano proposte per ciascuno dei due bienni e nel volume *Matematica 2004* si trova proposto il quinto anno. In *Matematica 2004*, nel nucleo "**Relazioni e funzioni**" le abilità specifiche richieste sono:

• *Interpretare geometricamente la derivata; determinare la tangente in un punto al grafico di una funzione ed usarla per approssimare ("linearizzare") la funzione in un opportuno intervallo.*

• *Utilizzare la derivata per calcolare la velocità istantanea di un moto.*

• *Valutare l'andamento e il segno della funzione f'(x) in relazione all'andamento di f(x) e viceversa; individuare i punti in cui una funzione assume i valori massimi o minimi, relativi e assoluti.*

In particolare si osserva che "*l'ordine e il modo in cui si introduce il concetto di derivata dipende dalle scelte didattiche dell'insegnante. La storia della matematica può essere di aiuto e di guida in queste scelte. Si sconsiglia invece di ridurre l'analisi matematica esclusivamente allo studio di funzioni e di rendere meccanico l'uso della derivata prima e seconda e lo studio del loro segno."*

3. RUOLO DELLE DERIVATE IN AMBITO DISCIPLINARE

Il concetto di derivata, così come quello di limite, è uno dei più importanti e fecondi di tutto il sapere matematico sia per le sue implicazioni di natura puramente teorica, sia per le numerosissime applicazioni di tipo pratico (nella matematica stessa, nelle scienze sperimentali, economiche, statistiche, tecnologiche, ecc.); a tal proposito, basti pensare che sul concetto di derivata si fonda il calcolo differenziale. Come è sotto gli occhi di tutti, nel mondo fisico si verificano continuamente dei mutamenti, a volte molto lenti, altre volte addirittura quasi istantanei: il calcolo differenziale è un modello matematico idoneo a descrivere e a misurare la rapidità del mutamento. Da un punto di vista storico epistemologico, per una certa tendenza a semplificare, talvolta si attribuisce l'invenzione del calcolo a Newton e a Leibniz; in realtà, il calcolo è il risultato di una lunga evoluzione in cui Newton e Leibniz ebbero un ruolo decisivo. Due problemi centrali avvincevano l'attenzione dei matematici del XVII secolo che volevano continuare l'opera di Galileo e di Keplero. Primo fra tutti, *il problema delle tangenti*, cioè la determinazione delle rette tangenti a una curva data, problema fondamentale del calcolo differenziale; secondo, *il problema della quadratura*, cioè la determinazione dell'area limitata da una curva data, problema fondamentale del calcolo integrale.
Il grande merito di Newton e di Leibniz consiste nell'aver riconosciuto chiaramente l'intima connessione tra questi due problemi; nelle loro mani i nuovi metodi, unificati, divennero un potente strumento scientifico, che dette avvio ad uno sviluppo senza precedenti nella scienza. Tuttavia le impostazioni da cui erano partiti i due studiosi erano apparentemente diversi: il primo era interessato ad analizzare in particolare il fenomeno della velocità, in cui il tempo e la posizione di una particella in movimento sono considerati come elementi variabili, e più in generale voleva calcolare il tasso di variazione di una quantità che varia al variare del tempo. Il secondo invece affrontava questioni più strettamente geometriche e, partendo da un lavoro di Fermat, aveva elaborato un metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi di una funzione, e della sua tangente in un punto.

Si può sottolineare da un punto di vista didattico come questi pionieri, fossero guidati da un forte senso istintivo, mentre la revisione critica e la sistemazione rigorosa e formale del concetto di derivata sono posteriori di oltre un secolo alla sua comparsa in campo matematico, ad opera soprattutto della scuola francese, che vi pone a fondamento il concetto di limite. Il nuovo calcolo diviene allora fondamentale per lo sviluppo delle scienze tecniche e nella discussione sull'infinito in ambito filosofico.
In tale contesto però, il messaggio che si può trasmettere nell'insegnamento delle derivate, prima ancora della loro importanza in campo applicativo, è quello di una conquista culturale. Il metodo scientifico di cui vogliamo rendere consapevoli gli studenti è dunque un metodo che abbia più fondamento sulla sua capacità conoscitiva della realtà e delle relazioni tra i suoi oggetti che non sulla sua utilità dal punto vista strettamente pratico.

4. **PROBLEMATICHE DIDATTICO-METODOLOGICHE RELATIVE AD UN EFFICACE SVILUPPO DELLA TEORIA DELLE DERIVATE**

Il prerequisito fondamentale per l'introduzione formale del concetto di derivata è il concetto di limite, la cui comprensione deve essere stata "digerita" attraverso "il registro verbale, che spesso ricorre ad una trattazione dinamica attuata attraverso le espressioni "tende a" e "si avvicina a", così come le rappresentazioni grafiche che richiamano l'idea di movimento (*Bagni*, 1999).

Seguendo i suggerimenti dei programmi ministeriali, il concetto di derivata può essere introdotto per via intuitiva facendo ricorso ai problemi classici della tangente ad una curva e della velocità. E certamente, questa via, che ripercorre lo sviluppo storico dell'argomento trattato, suggerisce proprio di legare strettamente la trattazione teorica alla storia della matematica. Essa, infatti, ha l'importante funzione di evidenziare gli ostacoli che i matematici hanno incontrato nella costruzione dei concetti, mostrando come ***"ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso.*** E d'altra parte, la storia della matematica può dare ad ogni singolo docente l'opportunità di scegliere, se le condizioni lo consentono, un percorso didattico aperto alle connessioni interdisciplinari e generalmente capace di suscitare l'interesse degli allievi.

Certamente, un'altra metodologia che l'insegnante ha a disposizione per proporre un potenziamento e nello stesso tempo un più efficace sviluppo dell'argomento, è l'utilizzo delle nuove tecnologie. L'uso della tecnologia dell'informazione cambia i mezzi e i modi attraverso i quali si trasmette il sapere. Le nuove tecnologie, come ogni strumento, incorporando sapere possono costituire importanti mediatori nel processo di acquisizione di conoscenza, offrendo all'insegnante l'opportunità di costruire ambienti di apprendimento adeguati alle esigenze degli studenti e agli oggetti di studio. Gli studenti sono a tutti gli effetti protagonisti nel processo di costruzione della conoscenza e i docenti assumeranno, a seconda delle esigenze, il ruolo di chi progetta l'azione didattica, oppure quello di chi garantisce la condivisione del sapere in classe, di chi suggerisce linee di ricerca o, ancora, quelli di coordinare le discussioni in classe, osservare il lavoro nei piccoli gruppi, aiutare lo studente nella ricerca delle informazioni e via dicendo. I nuovi software consentono diverse rappresentazioni degli oggetti matematici, mettono a disposizione alfabeti più ricchi e flessibili, offrono possibilità di compiere vere e proprie esplorazioni di ambienti matematici. L'insegnamento – apprendimento del calcolo differenziale, prima dell'avvento delle nuove tecnologie, era concentrato sull'acquisizione di tecniche di manipolazione simbolica per la differenziazione con l'aggiunta, ove opportuno e utile, di illustrazioni statiche di grafici. Le nuove tecnologie hanno messo a disposizione grafici dinamici, manipolabili dallo studente, per aiutare nella comprensione dei concetti. Per esempio, utilizzando funzioni come gli Zoom, presenti in ogni calcolatrice, è possibile evidenziare l'eventuale linearità locale di un grafico; in seguito, utilizzando la funzione Trace, oppure trascinando un punto con il mouse sul grafico della funzione o, ancora, muovendo lungo il grafico un segmentino che congiunge due punti abbastanza vicini, lo studente può vedere dinamicamente come cambia la pendenza delle tangenti lungo il grafico e quindi può pensare alla pendenza delle tangenti al grafico come a una vera e propria funzione. In tal modo è

possibile, con opportune riformulazioni e ristrutturazioni degli argomenti proposti, avviare al calcolo differenziale consentendo a tutti gli studenti di entrare in contatto con concetti assai importanti nell'attuale società. Le nuove tecnologie quindi permettono di ridurre il rischio che, nell'insegnamento, il docente ponga maggiore importanza nel possesso delle tecniche di calcolo, a volte anche raffinate, invece che nel loro controllo.

Nella maggior parte dei casi, per quanto riguarda la presentazione formale del concetto di derivata, la sequenza seguita nei libri di testo, che tiene conto delle indicazioni dei programmi ministeriali, nell'insegnamento nella scuola secondaria superiore è la seguente:

- definizione di derivata come limite del rapporto incrementale;
- derivata delle funzioni elementari con l'uso della sola definizione;
- punti di non derivabilità di una funzione;
- continuità delle funzioni derivabili;
- regole di derivazione;
- derivata della somma;
- derivata del prodotto;
- derivata del reciproco di una funzione;
- derivata del quoziente;
- derivata della funzione composta;
- derivata della funzione inversa;
- applicazioni delle derivate alle altre discipline.

Per tale motivo, nel corso di questo mio lavoro seguirò questo schema cercando di evidenziare i passaggi nodali e concettualmente più impegnativi per gli allievi.

Seconda Parte – Presentazione dei contenuti ed intervento didattico

1. INTERVENTO DIDATTICO:

DESTINATARI

Il percorso didattico oggetto di questo lavoro, è rivolto agli allievi che frequentano il quarto anno di un Liceo Scientifico PNI e si svolge nel corso del secondo quadrimestre. Le ore settimanali di matematica previste sono 5(2[1]).
Nota: In genere l'argomento derivate si sviluppa in quinta, infatti nei libri di testo si trova proprio all'inizio dell'ultimo volume: affrontandole prima, ammesso che questo si riesca a fare, bisogna risolvere il problema del materiale da fornire agli allievi: magari un acquisto anticipato del libro di quinta)

PREREQUISITI

• Conoscenza dei numeri reali
• Conoscenza del calcolo algebrico
• Conoscenza del piano cartesiano e elementi di geometria analitica
• Nozioni di trigonometria
• Relazioni tra lati ed angoli di un triangolo rettangolo
• Polinomi, grado di polinomi
• Binomio di Newton
• Rappresentazione di rette e coniche nel piano cartesiano e posizioni reciproche tra le medesime
• Definizione di funzione di una variabile
• Limite di una funzione, limiti notevoli
• Definizione di continuità di una funzione
• Punto di flesso
• Definizione di funzione composta e di funzione inversa
• Saper utilizzare il software Derive e il foglio elettronico Excel.

ACCERTAMENTO DEI PREREQUISITI

Poiché tale percorso didattico è immediatamente successivo all'unità relativa a limiti e continuità, il raggiungimento dei cui obiettivi deve essere stato recentemente verificato, è opportuno focalizzare l'azione di accertamento dei prerequisiti recuperando le conoscenze e le competenze su due contenuti importanti:
a) la geometria analitica finalizzata alla rappresentazione di rette e di coniche di equazione data nel piano cartesiano e alla determinazione delle posizioni reciproche tra le medesime, con particolare riferimento alla condizione di tangenza in un fissato punto della curva.
b) la trigonometria finalizzata alla determinazione delle relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo (la trigonometria è anche un prerequisito fondamentale per il calcolo dei limiti, quindi questi argomenti dovrebbero essere stati ripresi da poco).

Si cercherà, ogniqualvolta questi verranno utilizzati di richiamare proprietà e concetti ad essi legati.

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dal percorso didattico.
- Promuovere le facoltà intuitive e logiche
- Far cogliere l'importanza del calcolo differenziale per lo studio di funzioni
- Educare ai procedimenti di astrazione e di formalizzazione dei concetti
- Educare a ragionare induttivamente e deduttivamente

[1] Le ore in parentesi sono di laboratorio.

- Sviluppare le attitudini sia logiche sia sintetiche
- Abituare alla precisione del linguaggio e alla coerenza argomentativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI

Gli obiettivi specifici saranno suddivisi in Conoscenze e Abilità:

Conoscenze:

- Conoscere la definizione di rapporto incrementale
- Conoscere la definizione di derivata destra e sinistra di una funzione in un punto e la definizione di derivata di una funzione in un punto
- Conoscere la definizione di derivabilità di una funzione in un intervallo reale I;
- Conoscere le relazioni esistenti tra derivabilità e continuità di una funzione in un punto appartenente al suo dominio;
- Impostare, nel caso generale, il problema del calcolo della derivata di una funzione a partire dal limite del rapporto incrementale
- Conoscere le regole di derivazione della somma di funzioni, del prodotto di una costante per una funzione, del prodotto di più funzioni, del quoziente, della funzione reciproca e inversa, della funzione composta;
- Conoscere la definizione di funzione derivata di ordine n-esimo di una funzione

Abilità:

• Saper interpretare il rapporto incrementale come "pendenza" di una curva in un punto;
• Saper valutare, sulla base della definizione, se una funzione è derivabile o meno in un punto;
• Saper ricavare l'equazione della retta tangente la curva data (curva che rappresenta una funzione) in un punto fissato e saperla riportare graficamente su un piano cartesiano;
• Saper applicare il concetto di derivata a varie situazioni geometriche e fisiche, in particolare:
  • saper determinare il coefficiente angolare della tangente a una curva;
  • conoscere e applicare i concetti di velocità istantanea e di accelerazione istantanea di un punto mobile in moto rettilineo.
• Data una funzione individuare i punti nei quali questa è derivabile;
• Calcolare la derivata di funzioni elementari attraverso il limite del rapporto incrementale
• Saper applicare le regole di derivazione;
• Saper valutare le funzioni derivate successive a partire da una funzione derivabile in un intervallo reale;

CONTENUTI

- Problemi che conducono al concetto di derivata: le tangenti ad una curva e la velocità istantanea (che si possono vedere in ambito storico);
- Definizione di rapporto incrementale e suo significato geometrico;
- Definizione di derivata in un punto;
- Cos'è geometricamente la derivata;
- Continuità delle funzioni derivabili;
- Derivata di alcune funzioni elementari mediante definizione;
- Regole di derivazione: Operazioni con le derivate, derivata della funzione composta e della funzione inversa;

- Funzione derivata seconda e derivate successive;
- Differenziale di una funzione;
- Esercitazione con il software derive: grafico di una funzione e grafico della funzione derivata;
- Applicazione del concetto di derivate alla fisica.

METODOLOGIE DIDATTICHE:

Per affrontare gli argomenti di questo percorso didattico si alterneranno *lezioni frontali-dialogiche*, quali l'insegnamento per problemi che stimolano gli alunni a formulare ipotesi di soluzione ricorrendo non solo alle conoscenze già possedute ma anche alla intuizione e alla fantasia, a *metodologie didattiche attive* quali le discussioni guidate. Per presentare l'argomento si farà uso del *laboratorio di informatica* (in particolare del software Derive (o analogo) e l'utilizzo del foglio elettronico Excel). Questo momento dovrà essere visto prevalentemente come attività diretta degli allievi, interazione allievo-docente, e dovrà essere armonicamente inserita nella trattazione dei temi affrontati di volta in volta. Si dovranno utilizzare in modo corretto gli strumenti di calcolo e di elaborazione. L'attività di laboratorio integra gli elementi di contenuto dei vari temi e costituisce essa stessa, un momento di riflessione teorica. Essa consisterà in:
- analisi dei problemi e loro risoluzione informatica attraverso l'utilizzo del software applicativo *Derive* e del foglio elettronico Excel;
- esplorazione e verifiche di proprietà matematiche, rappresentazioni grafiche e calcoli, simulazioni, come momenti costitutivi del processo di apprendimento della matematica e delle sue successive sistematizzazioni.

Per ogni argomento trattato si cercherà di proporre un buon numero di esercizi, risolvendoli assieme in classe in modo da proporre più metodi risolutivi. Agli studenti verranno assegnati degli esercizi significativi da svolgere a casa scelti con difficoltà crescente, in modo che questi possano acquisire una maggiore familiarità con l'argomento; in seguito in classe, saranno svolti quegli esercizi che hanno apportato più incertezze e difficoltà.
Infine la storia della matematica come strumento metodologico per inquadrare da un punto di vista storico le nozioni ed i concetti introdotti. In tal modo, la storia, permette all'allievo di rendersi conto che la matematica non è una disciplina statica, ma nasce e si sviluppa per risolvere problemi, siano essi pratici o teorici. E' bene tener presente che, nella ricerca scientifica, accanto alla sempre più accentuata diffusione dei settori specialistici, è emersa contemporaneamente l'esigenza di comunicare e di integrare i diversi campi del sapere al fine di avere una visione unitaria e comprensiva dei problemi analizzati dai molteplici punti di vista specialistici. Si è, quindi, cominciata a sentire l'esigenza di un'interdisciplinarità tra le varie scienze quando esse si avvalgono dei contributi di altre discipline.
Ecco allora che, nell'introduzione epistemologica al concetto di derivata si suggerisce la collaborazione dell'insegnante di storia e filosofia, il quale potrà approfondire gli effetti e le conseguenze della nuova teoria elaborata da Newton e Leibniz sulla discussione filosofica intorno al concetto di infinito e di infinitesimo. L'importanza didattica di tale progetto didattico consiste anche nella volontà di suggerire agli studenti una visione organica del sapere, frutto di un'intersezione delle diverse discipline.

MATERIALI E STRUMENTI IMPIEGATI

- Lavagna e gessi;
- Libri di testo;
- Calcolatrice scientifica;
- Laboratorio informatico (uso del software Derive)

CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO:

La valutazione formativa si esegue tramite verifiche orali, esercitazioni in laboratorio di informatica, esercitazioni in classe e correzione degli esercizi assegnati per casa.

Le verifiche orali e gli esercizi alla lavagna permettono inoltre di valutare l'acquisizione di proprietà di linguaggio degli alunni, e il loro criterio di scelta di una strategia risolutiva piuttosto che un'altra.
La verifica sommativa permette di verificare il livello di assimilazione degli argomenti trattati e l'autonomia nella risoluzione degli esercizi.
Per determinare gli esiti della verifica sommativa assegniamo ad ogni esercizio un punteggio. La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze, competenze e capacità richieste per svolgerli.

STRUMENTI DI VALUTAZIONE:

La misurazione si attua attraverso:

- prove orali individuali;
- verifica sommativi (Allegato 1).

GRIGLIA PER LA VALUTAZIONE:

Per determinare gli esiti della verifica sommativa, si consiglia di attribuire ad ogni esercizio un punteggio. La diversità di punteggio tra i vari esercizi, rispecchia i livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze, competenze e capacità per svolgerli.

Nell'attribuire il punteggio completo, nullo o frazione intermedia, teniamo conto dei seguenti indicatori (suggeriti dal Ministero della Pubblica Istruzione per la correzione della prova scritta di Matematica all'Esame di Stato):

- conoscenze specifiche,
- abilità nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti,
- abilità logiche ed organizzative,
- completezza della risoluzione,
- correttezza della risoluzione e dell'esposizione.

RECUPERO:

Affinché l'attività didattica risulti efficace e completa, si prevede di svolgere eventuali attività di recupero così articolate:

- Recupero da effettuare in classe, durante le ore curricolari
- Attività pomeridiane con studenti in difficoltà
- Assegnazione al singolo studente di esercizi mirati

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO:

- Accertamento dei prerequisiti: 1 ora;
- Lezioni frontali e dialogiche in classe (sono compresi anche gli esercizi alla lavagna): 16-18 ore;
- Attività in Laboratorio: 5 ore;
- Verifica sommativa: 2 ore;
- Consegna e correzione della verifica sommativa: 1 ora;

per un totale di **24-26** ***ore,*** le quali, tenuto conto che le ore settimanali di matematica sono 5, equivalgono a **5** ***settimane circa.***

2. INTRODUZIONE STORICO-EPISTEMOLOGICA AL CONCETTO DI DERIVATA

Il concetto di derivata, come il concetto di limite e altri dell'Analisi Infinitesimale hanno una lunga storia che, per certi aspetti, può essere fatta risalire ad alcune tecniche già presenti nella matematica greca. Solitamente l'introduzione a scuola ricalca le definizioni moderne di tali concetti. Un ostacolo didattico che una presentazione di questo tipo incontra è connessa alla questione del formalismo dell'analisi matematica. Ma tale ostacolo è sicuramente anche epistemologico se si

pensa che il dibattito sulla formalizzazione di quei concetti, anche se non fatto risalire all'antichità, ha animato almeno due secoli di storia della matematica prima di giungere alle formalizzazioni seicentesche di Newton e Leibniz.
Molti testi presentano le derivate, a partire dalla definizione, come limite del rapporto incrementale, per poi guardare al suo significato geometrico. La scelta, in questo progetto, è partire da un'analisi storica delle radici del concetto: "il problema della determinazione delle tangenti a una curva", affinché gli studenti possano intervenire su una situazione problematica che possono esplorare.
Inoltre, il progetto vorrebbe fornire, lungo il tragitto, alcuni strumenti e criteri per cogliere, nel concetto moderno di derivata, la densità dei suoi contenuti, le sue potenzialità come strumento e oggetto. Tutto questo anche nella speranza di poter fornire una visione della matematica come scienza che non procede per accumulazione, ma che tante volte rivede le sue definizioni e i suoi metodi alla ricerca di generalizzazioni e dell'essenza.
Non è sicuramente meno importante la funzione della storia volta ad evidenziare gli ostacoli che i matematici hanno incontrato nella costruzione dei concetti.
"Mettere l'allievo di fronte a queste fratture, a questa discontinuità per mostrare situazioni erronee nelle quali i matematici si sono venuti a trovare, è un modo per aiutare a capire il senso che ha l'errore in matematica" (D'Amore, 1999). Ripercorrendo la storia di un concetto l'insegnante può evidenziare gli ostacoli epistemologici. Dalla teoria degli ostacoli, emerge infatti che "ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione (…), dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso" (D'Amore, 1999). Nel caso delle derivate e più in generale dell'analisi infinitesimale, il lungo dibattito sulla formalizzazione di quei concetti è tutto "raccontato" nel formalismo elegante, ma oggettivamente poco accessibile a cui si è giunti solo nel Seicento che "è il risultato di molti anni di lavoro informale" e che non va "nascosto proprio a chi sta apprendendo" (Bagni, 2001).

Non è del tutto esatto ritenere che il calcolo infinitesimale fu una conquista di grandi geni del XVII secolo come Newton e Leibniz. In realtà, alcuni principi fondamentali del nuovo calcolo esistevano da tempi molto remoti: da Archimede, e, per quanto riguarda certe intuizioni fondamentali, anche da matematici vissuti prima di lui come Zenone e Eudosso. Inoltre, già nel Cinquecento vi era in Italia una scuola di valenti e originali ricercatori che traeva ispirazione dai metodi del Siracusano, mentre nella prima metà del secolo seguente i risultati raggiunti da studiosi come Keplero, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Pascal, Galileo e Barrow, costituivano un importante corpo di dottrine.
Il procedimento infinitesimale scaturì da due problemi principali: quello della *determinazione della velocità istantanea di un mobile* e quello della *determinazione della tangente a una curva in un suo punto*, problemi che aprirono la via al calcolo differenziale. Per quanto riguarda il problema della determinazione delle tangenti a una curva, esso fu affrontato già dai Greci nell'antichità. Questi, avevano un modo di procedere prevalentemente "geometrico". La definizione di retta tangente che essi fornivano, non suggeriva un modo di procedere per determinarla, non si aveva cioè un metodo generale, ma tanti casi particolari.
Torricelli, Fermat, Descartes, Barrow, Pascal e altri studiarono alcuni problemi relativi alla tangente a una curva, considerandola come posizione limite della corda, e misero in luce l'opportunità di identificare l'elemento di curva (arco infinitesimo) con l'elemento di retta (segmento infinitesimo di tangente).

IL METODO PER LA DETERMINAZIONE DEI MASSIMI E DEI MINIMI DI FERMAT

Lo studio della variazione della tangente, cioè dell'*andamento* di una curva, rivestiva enorme importanza pratica, in quanto, per esempio, era stato osservato da Fermat che la velocità di variazione di un fenomeno era praticamente nulla in prossimità di un massimo o di un minimo.
Nel 1684 Leibniz pubblica un articolo, *"Nuovo metodo per i massimi e i minimi, come anche per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali, e modo unico di calcolo per i suddetti"* che viene tradizionalmente considerato l'atto di nascita del calcolo infinitesimale. Nel lungo titolo di tale lavoro è implicito un richiamo proprio ad un trattato di Fermat, rimasto inedito durante la sua vita, intitolato *Metodo per trovare i massimi e i minimi.*

Fermat elaborò un metodo molto ingegnoso per individuare i punti in cui una curva algebrica nella forma $y = f(x)$ assume un valore massimo o minimo. Occorre porre l'accento sul fatto che la notazione utilizzata è quella moderna, per non appesantire ulteriormente il formalismo. L'osservazione fondamentale di partenza che egli fece, è la seguente: confrontando il valore di $f(x)$ in un certo punto, con il valore $f(x+E)$ in un punto vicino, generalmente si ottengono valori diversi; invece nel punto di massimo o di minimo di una curva continua la differenza sarà quasi impercettibile. Pertanto, per trovare i punti di massimo e di minimo, Fermat considerò la pseudo-uguaglianza $f(x) \cong f(x+E)$, la quale si avvicina tanto maggiormente ad una vera uguaglianza, quanto più piccolo è l'intervallo *E* tra i due punti; così, dopo aver diviso il tutto per *E*, pose $E = 0$.
I risultati così ottenuti gli diedero le ascisse dei punti di massimo e di minimo della curva algebrica.
Tuttavia il metodo proposto da Fermat, era efficace soltanto in alcuni casi particolari (ad esempio è valido per funzioni polinomiali); i limiti di tale metodo risiedono nel fatto che manca una solida sistemazione teorica e difetta di generalità, poiché ad esempio diviene inefficace quando nella funzione compaiono quantità fratte o irrazionali. Con terminologia moderna, possiamo dire che il metodo di Fermat arriva a determinare correttamente il rapporto incrementale e nei casi più semplici, a calcolare il

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

e a porlo uguale a zero. Ovviamente, Fermat non possedeva minimamente il concetto di limite; proprio per questo il messaggio da trasmettere agli studenti è quello di una scienza che procede per conquiste graduali, difficoltose e in ogni modo innovative.

Possiamo proporre un primo esempio per far capire maggiormente il modo di procedere di Fermat:

Si vogliano determinare con il metodo di Fermat i punti di massimo e di minimo, ad esempio, della funzione $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$.

Consideriamo dunque $f(x+E) = 2(x+E)^2 + 3(x+E) - 5 = 2x^2 + 4xE + 2E^2 + 3x + 3E - 5$ e calcoliamo $\frac{f(x+E) - f(x)}{E} = \frac{2E^2 + 4xE + 3E}{E} = 2E + 4x + 2$.

Ponendo $E = 0$, si ottiene l'equazione $4x + 2 = 0$, risolta dall'unica soluzione $x = -\frac{1}{2}$. Tale risultato coincide ovviamente con il fatto che $f(x)$ rappresenta nel piano cartesiano una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, e dunque non ha punti di massimo ed ammette un unico punto di minimo nel vertice di ascissa $x = -\frac{1}{2}$.

IL NUOVO METODO DI LEIBNIZ

L'articolo del 1684, *Nova methodus* di Leibniz è, come abbiamo già detto in precedenza, il primo pubblicato sul calcolo differenziale. E' da tener presente che, molti dei risultati ottenuti da Leibniz, come lo sviluppo delle sue idee, sono contenuti in centinaia di pagine di note scritte a partire dal 1673 ma da lui mai pubblicate. Il punto di svolta rispetto ai risultati di Fermat, e che sarà presente anche nella teoria di Newton, è il riconoscimento del carattere di operazione sulle funzioni proprio della derivazione e quindi la possibilità di scindere i due momenti del calcolo della funzione derivata e della risoluzione dell'equazione associata per il calcolo dei punti di massimo e di minimo. La memoria di Leibniz inizia direttamente con le regole del calcolo, senza alcuna presentazione: la sua volontà è di sottolineare il carattere innovativo e la potenza della nuova tecnica, in grado di risolvere problemi che prima creavano difficoltà insormontabili. L'unica definizione, introdotta nelle prime righe, è quella di differenziale: sia data una relazione tra variabili espressa da

un'equazione $P(x, y) = 0$ (Leibniz non fa uso a livello pubblico della nozione di funzione, che si affermerà solo qualche decennio più tardi).

Sia *a* una quantità data *costante*, sarà *da* = 0 e *dax* = *adx*.
Se abbiamo *y* = *v*, sarà *dy* = *dv*.

Addizione e sottrazione:
se si ha *z* - *y* + *w* + *x* = *v*, sarà *d(z* - *y* + *w* + *x)* = *dv* = *dz* - *dy* + *dw* + *dx*.
Moltiplicazione:
dxv = *xdv* + *vdx*, ovvero, posto *y* = *xv*, sarà *dy* = *xdv* + *vdx*.
Divisione:
posto

$$z = \frac{v}{y}$$

si ha

$$d\frac{v}{y} = dz = \frac{\pm v dy \mp y dv}{y^2}.$$

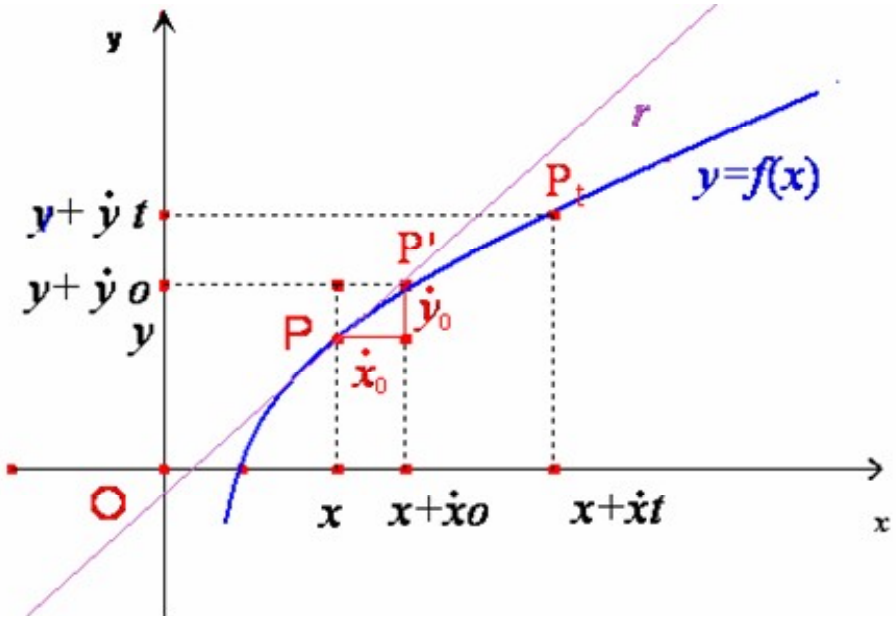
Da queste infine si possono trovare le derivate di una potenza e poi da queste le derivate di una radice; a questo punto è possibile differenziare qualsiasi combinazione di potenze e radicali, dunque qualsiasi funzione poiché tali combinazioni costituivano a quel tempo la quasi totalità delle funzioni considerate. Queste formule venivano ottenute trascurando gli infinitesimi di ordine superiore. Se, per esempio, le minime differenze di *x* e *y* sono *dx* e *dy* rispettivamente, allora *dxy* ossia la differenza minima di *xy* è $(x+dx)\cdot(y+dy)-xy$. Poiché *dx* e *dy* sono infinitamente piccoli o infinitesimi, il termine *dxdy* è infinitamente infinitesimo e può essere trascurato, e si ottiene così il risultato *dxy* = *xdy* + *ydx*. Il primo esempio a cui Leibniz ricorre per illustrare la fecondità del calcolo è un problema di determinazione della tangente ad una curva data di equazione assai complessa: $x : y + (a + bx)\cdot(c - x^2) : (ex + fx^2)^2 + ax\sqrt{g^2 + y^2} + y^2 : \sqrt{h^2 + lx + mx^2} = 0$. Essa non può essere risolta mediante un appello all'intuizione geometrica, e dunque mostra come l'algebrizzazione del calcolo permetta di risolvere i problemi più intricati con relativa facilità. Da un punto di vista didattico, inizialmente Leibniz sembra fornire un'interpretazione geometrica dei rapporti dei differenziali; invece le regole del calcolo sono presentate senza fare alcun riferimento alla geometria, dimostrandone invece la validità in alcuni casi concreti. L'importanza didattica di un simile approccio consiste, allora, nella nascita di un nuovo strumento del calcolo simbolico che opera sulle funzioni e permette di definire e calcolare le rette tangenti ad una curva. Particolare importanza può essere data anche alla felice notazione introdotta, come utile strumento per il pensiero; sarà questa la simbologia universalmente adottata in luogo di quella newtoniana e che troverà ulteriore compimento con il calcolo integrale.

IL METODO DI NEWTON

Quasi venti anni prima della pubblicazione della *Nova Methodus* di Leibniz, nel 1665-1666, Newton aveva già elaborato un suo calcolo, i cui elementi fondamentali trovarono una prima redazione nel *De analisi per aequationes numero terminorum infinitas*, scritto nel 1669 ma pubblicato solo nel 1711. Tuttavia, la tipica formulazione del problema in termini di trovare la relazione tre le flussioni di date quantità fluenti compare nelle successive due opere: il *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* e il *De quadratura curvarum*, scritte rispettivamente nel 1671 e nel 1676, ma anch'esse pubblicate solo più tardi. Si dice che Newton avesse un timore anormale delle critiche e De Morgan afferma che "una paura morbosa dell'opposizione degli altri dominò tutta la sua vita". La prima pubblicazione di risultati che Newton aveva ottenuto avviene solo nel 1687, quindi poco dopo l'apparizione della *Nova Methodus* di Leibniz, con i *Principia*. In uno scolio Newton riconosce il fondamento tanto del suo quanto del metodo di Leibniz, metodo che i due scienziati si erano

reciprocamente comunicati nella corrispondenza epistolare intercorsa dieci anni prima. Tuttavia, nella terza edizione dei *Principia* il riferimento scompare; è il segno della ben nota polemica sulla priorità dell'invenzione del calcolo che scoppiò tra i due a fine secolo coinvolgendo e dividendo i matematici del tempo. La contesa si trascinò per anni ed ebbe fine soltanto nel 1714 con la morte di Leibniz e la sostanziale "vittoria" di Newton.
A differenza di Leibniz, che considera in un certo senso le grandezze come composte di parti infinitesime, Newton, più attento alle questioni di dinamica e in genere del moto, le considera variabili in funzione del tempo: grandezze "fluenti", cioè variabili con continuità, indicate con x e y che ad ogni istante avranno una velocità di variazione, detta "flussione", indicata con $\dot{x}$ e $\dot{y}$; una flussione può essere a sua volta assunta come fluente e se ne possono calcolare le flussioni.

Il problema della tangente, secondo il metodo di Newton, si pone allora nei seguenti termini: si consideri una curva come luogo dei punti $F(x,y)=0$ in cui si possa esprimere la variabile y come funzione di x, $y=f(x)$ e sia $P(x,y)$ un fissato punto appartenente alla curva F.



Se indichiamo con o un intervallo di tempo molto breve, i prodotti $o\dot{x}$ e $o\dot{y}$ rappresentano i piccoli incrementi per i quali x e y variano in tale intervallo. Il punto di coordinate $(x+o\dot{x}, y+o\dot{y})$ si trova allora certamente sulla curva, ma molto vicino alla retta tangente alla curva nel punto P; quindi la pendenza della retta tangente alla curva nel punto P può essere calcolata come rapporto di tali incrementi:

$$m = \frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Per poter eseguire tale rapporto, Newton elabora un algoritmo basato sullo sviluppo in serie delle funzioni, di cui egli stesso consacrò l'importanza in matematica.

Presentiamo ora il metodo di Newton con un esempio classico e didatticamente efficace:

Consideriamo la funzione $y = x^n$, con n intero positivo. Il problema fondamentale è espresso da Newton nei seguenti termini:

"*data una relazione tra quantità fluenti, trovare la relazione tra le loro flussioni e viceversa*".

Le due variabili di cui è data la relazione possono rappresentare quantità qualsiasi. Tuttavia, Newton pensa ad esse come variabili con il tempo perché è un modo utile di ragionare anche se, come egli stesso rileva, non è necessario. Se quindi o è un "intervallo infinitamente piccolo di tempo" allora

$\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ sono gli incrementi infinitesimi di *x* e *y*, o come egli li chiama i momenti di *x* e di *y*. Per trovare la relazione tra $\dot{y}$ e $\dot{x}$, il punto di partenza per Newton è la seguente relazione:

$$y + o\dot{y} = \left(x + o\dot{x}\right)^n$$

Sviluppando il membro di sinistra secondo la regola del binomio, si ottiene:

$$y + o\dot{y} = x^n + n\left(o\dot{x}\right)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(o\dot{x}\right)^2 x^{n-2} + \ldots\ldots + n\left(o\dot{x}\right)^{n-1} x + \left(o\dot{x}\right)^n$$

Si semplifica *y* e x^n:

$$o\dot{y} = n\,o\dot{x}\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(o\dot{x}\right)^2 x^{n-2} + \ldots\ldots + n\left(o\dot{x}\right)^{n-1} x + \left(o\dot{x}\right)^n$$

Si dividono entrambi i membri per $o\dot{x}$:

$$\frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o\dot{x}\,x^{n-2} + \ldots\ldots + n\left(o\dot{x}\right)^{n-2} x + \left(o\dot{x}\right)^{n-1}$$

I termini contenenti *o* possono essere trascurati e, in definitiva, risulta

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}.$$

Da un punto di vista storico, le obiezioni che vennero mosse a questo procedimento fanno riferimento alla natura del rapporto tra quantità evanescenti: gli si obietta infatti che l'ultimo rapporto di due quantità evanescenti è nullo, perché prima che svaniscano esso non è l'ultimo; dopo che sono svanite non ne hanno più alcuno. Newton ribatte che il rapporto delle quantità non è misurato "prima che siano svanite e nemmeno dopo, ma nell'istante in cui svaniscono". Un'altra obiezione è la seguente: se è dato l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, sono date anche le ultime grandezze di tali quantità. Quindi ogni grandezza sarebbe costituita di quantità minime, sorta di indivisibili, "al contrario di ciò che Euclide ha dimostrato contro gli incommensurabili". Newton ribatte che le ultime ragioni non sono rapporti di quantità determinate o indivisibili, ma i limiti a cui esse si avvicinano (il concetto di limite posseduto da Newton è intuitivo e non formale).

Da un punto di vista didattico, il metodo di Newton fa uso di uno strumento matematico che può risultare ostico per gli studenti: lo sviluppo in serie delle funzioni. Tuttavia, la sua importanza risiede nel mostrare come uno stesso problema possa essere affrontato con una pluralità di strategie; introduce ai metodi del pensiero matematico moderno.

CONCLUSIONI:

Sia a Newton, sia a Leibniz bisogna attribuire il merito di aver visto nel calcolo infinitesimale un nuovo metodo generale applicabile a molti tipi di funzioni. Dopo di loro, il calcolo infinitesimale non fu mai più una semplice appendice o un'estensione della geometria greca, ma una scienza indipendente capace di affrontare una gamma molto estesa di problemi. Entrambi aritmetizzarono il calcolo, cioè lo edificarono su concetti algebrici. La notazione e le tecniche algebriche usate da Newton e da Leibniz non misero soltanto a loro disposizione uno strumento più efficace della geometria, ma consentirono anche di trattare con la stessa tecnica molti e diversi problemi geometrici e fisici.

Osservazione didattica: Quando si affronta un argomento nuovo gli studenti si pongono come primo obiettivo quello di cogliere i nuovi concetti che vengono introdotti. Il ricorso alla storia, soprattutto se si esagera con i dettagli, rischia di rendere oltremodo difficoltoso il percorso. Viceversa, se la storia viene troppo semplificata si corre il rischio di banalizzarla o deformarla. Perciò, in base al tipo di classe in cui ci si trova ad operare, si deciderà quale livello di profondità sarà il caso di raggiungere nella introduzione storica. Ovvero, si potrà scegliere se limitarsi all'approccio di Fermat o spingersi fino a Leibniz e Newton.

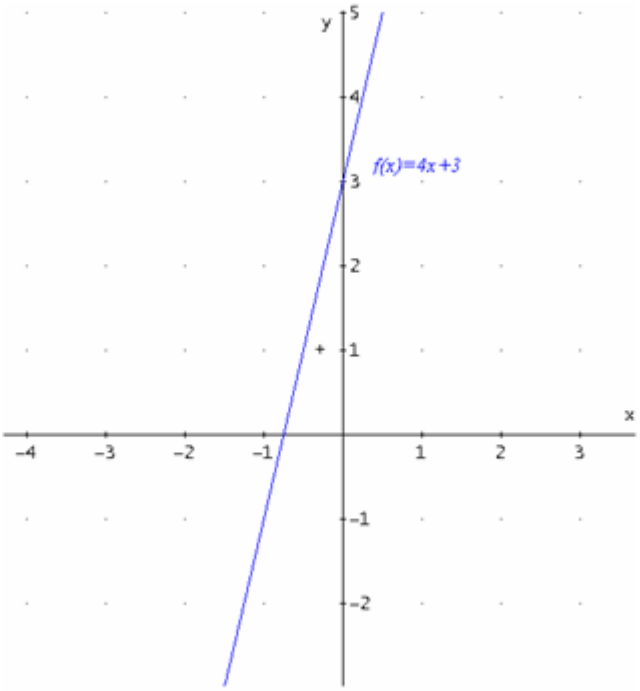
3. LA TEORIA DELLE DERIVATE:

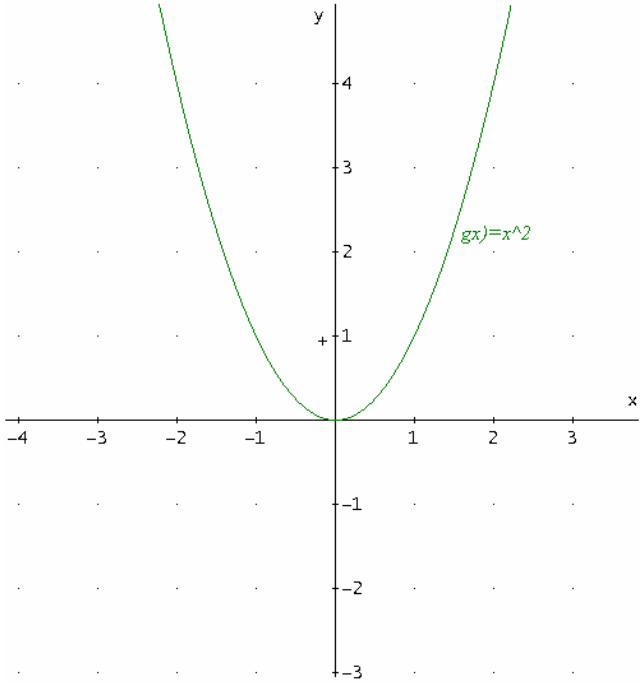
INTRODUZIONE AL CONCETTO DI DERIVATA:

Consideriamo le seguenti funzioni:

$$f : x \to 4x + 3$$

$$g : x \to x^2$$





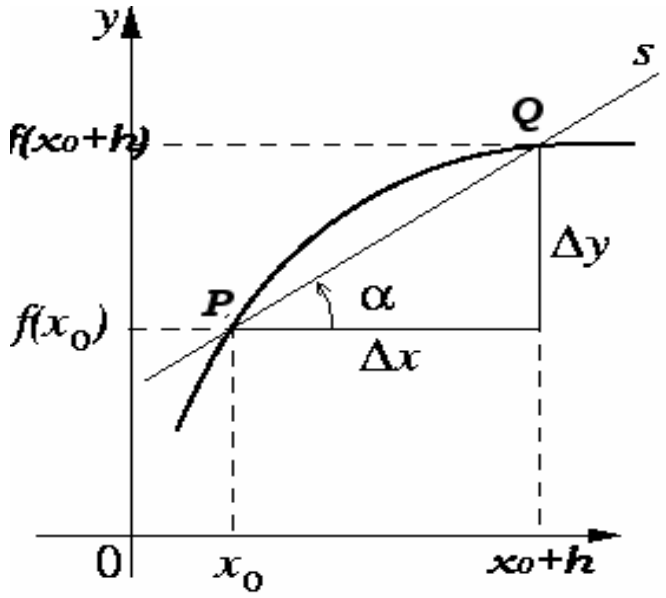
Nota didattica: Possiamo pensare di realizzare il tutto in Laboratorio di Informatica, utilizzando lo strumento Excel. Costruiamo un foglio elettronico in cui nelle varie celle inseriamo rispettivamente:

- ✓ i valori assegnati alla variabile x
- ✓ i corrispondenti valori per la funzione f
- ✓ i corrispondenti valori per la funzione g
- ✓ la differenza tra un valore di x e il precedente che indicheremo con Δx
- ✓ le corrispondenti differenze per la funzione f che indicheremo con Δf
- ✓ le corrispondenti differenze per la funzione g che indicheremo con Δg
- ✓ il rapporto $\Delta f/\Delta x$
- ✓ il rapporto $\Delta g/\Delta x$

x	$f(x)=4x+3$	$g(x)=x^2$	Δx	Δf	Δg	$\Delta f/\Delta x$	$\Delta g/\Delta x$
0	3	0					
1	7	1	1	4	1	4	1
2	11	4	1	4	3	4	3
3	15	9	1	4	5	4	5

E' bene che gli studenti osservino che per la funzione f il rapporto $\Delta f / \Delta x$ rimane costante e tale rapporto coincide col coefficiente angolare della retta grafico della funzione (infatti scritta l'equazione della retta $y=4x+3$ il suo coefficiente angolare è proprio $m=4$); per la funzione g invece, il rapporto $\Delta g / \Delta x$ varia notevolmente da punto a punto.
Se in particolare, consideriamo una funzione data da un polinomio di primo grado, cioè se $f(x) = mx + q$, il grafico è una retta e la pendenza del grafico è data dal coefficiente angolare m.
Ciò che allora ci chiediamo è: data una curva di equazione $y = f(x)$, è possibile estendere anche a f il concetto di pendenza?

Se prendiamo una funzione il cui grafico non abbia singolarità e che non sia una retta (per la quale abbiamo già visto che è possibile definire la pendenza), ad esempio la funzione $g(x)$ considerata sopra, la pendenza non è più costante, ma cambia da punto a punto (come si vede bene in tabella). Se però prendiamo due punti abbastanza vicini sulla retta reale, x_0 e x_0+h, la "pendenza" del grafico di f in x_0 è vicina alla pendenza della retta s che passa per i due punti corrispondenti sul grafico $P(x_0 ; f(x_0))$ e $Q(x_0 + h; f(x_0 + h))$.



Tale pendenza può essere espressa in modo esplicito per mezzo delle coordinate di P e Q:

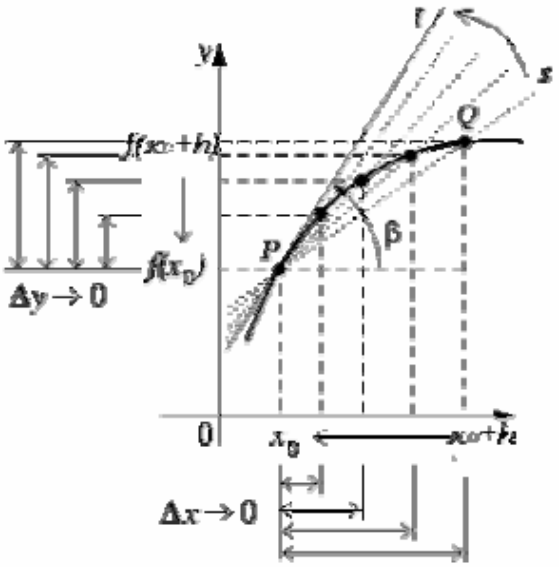
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h \neq 0)$$

detta "**rapporto incrementale**".

Esempio:
Calcolare il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ relativo al punto $x_0 = 2$ ed all'incremento h.
Essendo: $f(x_0) = f(2) = -1$ ed $f(x_0 + h) = f(2 + h) = 2h^2 + 3h - 1$, allora:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2h^2 + 3h}{h} = 2h + 3.$$

Prendendo ora h sempre più piccolo, cioè avvicinando il punto Q al punto P fisso, si può notare intuitivamente che la retta secante, si approssima sempre più alla retta tangente alla funzione nel punto P, avremo un'approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di f nel punto $P(x_0 ; f(x_0))$. Al limite, considerando incrementi infinitesimi della variabile indipendente, la posizione della retta secante si accosta a quella della tangente: *la tangente è il limite delle secanti e il coefficiente angolare della tangente è il limite dei coefficienti angolari delle secanti.*



In tal modo si generalizza il concetto di retta tangente introdotto nel corso del terzo anno del liceo limitatamente al caso delle coniche. Si è dunque ottenuto un metodo per determinare il coefficiente angolare della retta tangente nel punto di ascissa x_0, che indicheremo con $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(supposto naturalmente che tale limite esista e sia finito). Pertanto, l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è espressa dall'equazione:

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Nota didattica: La scelta didattica di tale introduzione della derivata come limite consiste nel fare leva sul concetto intuitivo di retta tangente. Come già accennato, non esistono altri strumenti, se non la derivata, per definire la retta tangente, e tuttavia quest'ente geometrico è stato utilizzato in tutti gli anni scolastici precedenti. Il rischio di presentare dapprima la definizione formale di derivata di una funzione in un punto e poi esplicitare il suo significato geometrico è quello di separare eccessivamente l'argomento derivata dalle conoscenze già possedute dagli studenti; l'approccio al concetto di derivata tramite il suo significato geometrico può aiutare gli allievi nel processo di ristrutturazione delle proprie conoscenze in una prospettiva di sempre maggior organizzazione formale e rigorosa.

Una volta introdotto geometricamente il concetto di coefficiente angolare "limite" delle rette secanti, formalizziamo la definizione di derivata e di funzione derivabile in un punto fissato.

Definizione: Una funzione f definita in un intorno del punto x_0 si dice ***derivabile*** *in x_0 se* ***esiste*** *ed è* ***finito*** *il limite del rapporto incrementale:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Il valore di tale limite si chiama **derivata** della funzione nel punto x_0 e verrà indicato con $f'(x_0)$. Pertanto, se la funzione è derivabile in x_0 esiste ed è unica la retta tangente alla curva nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$, il cui coefficiente angolare è il numero $f'(x_0)$.

Oltre alla notazione $f'(x_0)$, esistono altri simboli per rappresentare la derivata della funzione f nel punto x_0:

$$\left[\mathrm{D}f\left(x\right)\right]_{x=x_0}$$

Se utilizziamo la notazione $y = f\left(x\right)$, sopravvivono inoltre le notazioni già usate da Leibniz e Newton:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}, \quad \dot{y}\left(x_0\right)$$

Osservazione. E' bene sottolineare che**,** da un punto di vista analitico, affinché una funzione sia derivabile in x_0 occorre che siano rispettate contemporaneamente le seguenti condizioni:

1. *la funzione è definita in un intorno del punto* x_0;
2. *il limite del rapporto incrementale esiste sia per* $h \to 0^+$ *che per* $h \to 0^-$ *ed è lo* stesso;
3. *il suddetto limite è finito.*

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione $f\left(x\right) = 3x^2 - 5$ nel punto $x_0 = 1$ utilizzando la definizione di derivata. Essendo $\frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = 3(h+2)$, risulta $\lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} 3\left(h+2\right) = 6$.

Il valore trovato è la derivata della funzione data nel punto $x_0 = 1$. Possiamo allora scrivere $f'\left(1\right) = 6$.

Laboratorio di matematica: Come ulteriore esercitazione per comprendere ciò che abbiamo appena spiegato possiamo pensare di costruire un foglio elettronico che determini l'equazione della tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{6-3x}{3+x}$ in un suo punto T e che tracci i grafici della funzione e della tangente trovata. (Allegato 2).

IL PROBLEMA DELLE VARIAZIONI:

Osservazione didattica: E' bene tener presente, più in generale, l'importanza dello strumento derivata in varie scienze come *tasso istantaneo di variazione*. Per far questo sono stati portati esempi di andamenti di fenomeni che si possono esprimere attraverso una funzione, per sottolineare che, per conoscere l'andamento di un fenomeno, è necessario sapere il suo stato e la sua tendenza.

Per iniziare, si può pensare di proporre la seguente situazione:

> *Supponiamo che la mamma di Marta abbia l'abitudine di misurare il peso di sua figlia e di riportarlo nel calendario. L'informazione "Marta è cresciuta di 2 Kg" è un'indicazione sufficiente a comprendere se la ragazzina sta crescendo rapidamente, o abbiamo bisogno di conoscere altro?"*

E' chiaro che da un problema di questo genere si sente la necessità di conoscere lo stato attuale e la necessità di definire una tendenza che risponda alle domande "sta crescendo, diminuendo, di molto o di poco?". Si può pensare di introdurre quindi il concetto di *tasso medio di variazione* a partire dalla situazione del peso di Marta definendolo come rapporto $\Delta p/\Delta t$ interpretandolo come indicazione di quanto mediamente è variato il suo peso in un certo intervallo di tempo per passare poi, a definire più in generale, data una grandezza $y = f(x)$, il *tasso medio di variazione* in un intervallo Δx come il rapporto tra la variazione della variabile dipendente, indicata con Δy, e la corrispondente variazione della variabile indipendente, ovvero:

$$\textit{tasso medio di variazione} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Il tasso di variazione medio è quindi il rapporto incrementale. Nelle applicazioni economiche e statistiche si considerano in generale, tassi di variazioni medi (ad esempio il tasso di inflazione medio mensile, che esprime la variazione del costo della vita nell'arco di un mese). Sottolineando l'utilità di un'informazione su come una grandezza varia in un certo istante può tuttavia essere interessante conoscere il *tasso istantaneo di variazione* di una grandezza. In questo caso occorre calcolare un limite del tipo:

$$\textit{tasso istantaneo di variazione} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si può dire che, in generale, l'andamento di un fenomeno (espresso da una funzione) è regolato da due aspetti distinti:

- *il suo stato* (dove sta): qual è cioè il valore della funzione in un punto;
- *la sua tendenza* (dove va): qual è la variazione della funzione in un punto, se i suoi valori stanno aumentando o diminuendo o sono stazionari;

Il primo aspetto è descritto dalla funzione stessa e dal valore che essa assume in corrispondenza di un valore assegnato alla variabile indipendente. Il secondo aspetto è descritto dal tasso di variazione istantaneo, cioè dal limite del rapporto incrementale della funzione in quel punto.
Si possono proporre alcuni esempi tratti dalla quotidianità:

Esempio 1
Nella seguente tabella sono riportate le temperature registrate in un giorno d'estate in una città del centro Italia.

Rilievo	8.00	9.00	12.00	14.00	16.00	18.00	20.00	21.00	22.00	23.00
Temperatura	17°	18.5°	19°	23°	23°	20°	19°	18°	17.5°	17

Calcolare il tasso di variazione medio in ogni intervallo di tempo fra due rilievi consecutivi.

Così come il problema delle tangenti ad una curva, visto in precedenza, anche il problema delle velocità è un aspetto del problema più generale: come determinare il tasso di variazione istantaneo di una grandezza che varia in funzione di un'altra.
Sia $s = r(t)$ la legge oraria che esprime la posizione all'istante di tempo t di un punto che si muove lungo una traiettoria rettilinea. Dopo un intervallo di tempo Δt, lo spostamento del punto avrà subito una variazione pari a $\Delta s = r(t + \Delta t) - r(t)$.
La **velocità media** v_m è definita come il rapporto tra lo spostamento effettuato dal punto e l'intervallo di tempo in cui esso si realizza, per cui si potrà scrivere:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

Considerando ora variazioni di tempo Δt sempre più piccole, otteniamo valori della velocità media, che rappresentano stime sempre migliori di quella che si definisce la velocità v del punto nell'istante t. Tale velocità, denominata **velocità istantanea,** è definita mediante l'"operazione" matematica di limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = v(t)$$

Nota: E' bene sottolineare che la scrittura sopra è essenzialmente matematica, invece si ha che, sperimentalmente, la stima della velocità istantanea si ottiene misurando intervalli di tempo e relativi spostamenti sempre più piccoli: infatti, per quanto si possano introdurre metodi e strumenti di misura sempre più sofisticati le variazioni di posizione e tempo misurate saranno comunque valori con un limite inferiore imposto dalla strumentazione. Per questo motivo, in fisica, la velocità istantanea non è una quantità osservabile ma solo stimabile.

Esempio:
La legge oraria del moto di un punto materiale che si muove in linea retta è esprimibile attraverso l'equazione $y=3t^2$, che esprime la posizione in ogni istante t. Completa la tabella:

t	Y(t)
0 s	...
2 s	12 m
4 s	...
6 s	...
8 s	
10 s	
12 s	

Calcola il tasso di variazione medio in ogni intervallo di tempo fra due valori di tempo consecutivi, che corrisponde alla velocità media in ogni intervallo di tempo. In quale intervallo la velocità media è massima e in quale è minima?
Rappresenta il grafico della funzione corrispondente. Calcola il valore del tasso di variazione istantaneo (che corrisponde alla velocità istantanea) per i tempi t=3s e t=7s.

DERIVATA DESTRA E DERIVATA SINISTRA DI UNA FUNZIONE IN PUNTO:

Dalla definizione di derivata in un punto, è bene notare che, a volte, pur non esistendo il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$, tuttavia esiste ed è finito il limite sinistro e/o il limite destro. Questi limiti si diranno, allora, rispettivamente **derivata sinistra** e **derivata destra** di $f(x)$ in x_0, e si indicheranno con i simboli $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$.

Abbiamo, quindi, per definizione:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

in cui i limiti dei secondi membri esistono e sono finiti. Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia derivabile in x_0 è che:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Se invece si verifica che:

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

allora tale funzione non è derivabile in x_0 ed il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso**.

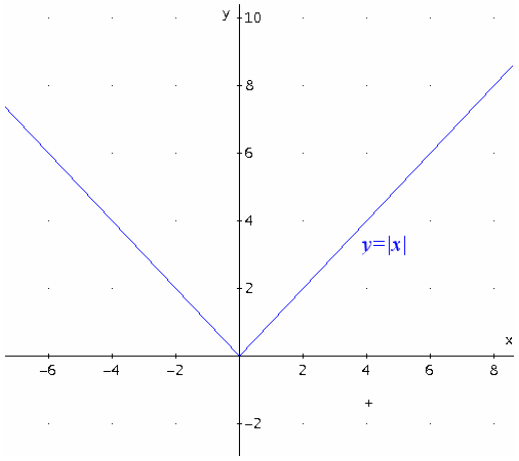
Esempio:
Sia data la funzione

$$f:\ IR \rightarrow IR:\ x \rightarrow |x|$$

f non è derivabile nel punto 0 ; infatti, calcolando il rapporto incrementale si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1\ se\ x\to 0^{+}\\ -1\ se\ x\to 0^{-}\end{cases}$$

Quindi $f'_{+}(0) = 1$ e $f'_{-}(0) = -1$ ovvero: $f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$. Nel punto $x_0 = 0$, il grafico della funzione ha un punto angoloso.



Se $f: x \rightarrow f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo reale $[a,b]$, essa si dirà derivabile nell'estremo inferiore a se esiste la derivata destra della funzione in a, ossia se esiste ed è finito il limite destro:

$$f'_{+}(a)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

Si dirà che la funzione f è derivabile nell'estremo superiore b se esiste la derivata sinistra della funzione in b, ossia se esiste ed è finito il limite sinistro:

$$f'_{-}(b)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}.$$

Si dice che la funzione f è derivabile nell'intervallo $[a,b]$, se è derivabile in ogni punto di $[a,b]$, estremi compresi.

Osservazione didattica: Il passo successivo deve essere dedicato al passaggio dalla derivata di una funzione in un punto alla funzione derivata, passaggio assolutamente taciuto da molti libri di testo. Il passaggio dalla derivata di una funzione in un punto, un numero, ad una funzione, la funzione derivata, è un passaggio delicato, basti pensare a quanto distanti siano i registri semiotici dell'uno e dell'altro.
La funzione originaria $f(x)$ assegna l'ordinata della curva $y = f(x)$ per il valore x, ovvero:

$$f: IR \rightarrow IR$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Allora si può ora considerare l'inclinazione della curva, in un punto variabile P di coordinate x e $y = f(x)$, come una nuova funzione di x, che indicheremo con $f'(x)$ e chiameremo derivata della funzione $f(x)$. La derivazione è dunque un'operazione che fa corrispondere ad ogni valore di x i valori di una funzione $f'(x)$ secondo una legge ben determinata:

$$f': IR \rightarrow IR / x \rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione $f(x)=2x^2-7x$ e quindi il valore della funzione derivata $f'(x)$ nel punto $x_0 = 2$. Essendo

$f(x+h)=2(x^2+h^2+2hx)-7(x+h)=2x^2+2h^2+4hx-7x-7h$, allora:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+2h^2+4hx-7x-7h-(2x^2-7x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+4hx-7h}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}(2h+4x-7)=4x-7$$

Quindi $f'(x)=4x-7$ è la funzione derivata. Il suo valore in $x_0 = 2$ è:

$$f'(x_0)=f'(2)=4\cdot 2-7=1$$

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Osservazione: Il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili può essere presentato in modo intuitivo: infatti, se esiste finito il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per x tendente a zero, allora l'incremento Δy della funzione $f(x)$ deve divenire arbitrariamente piccolo quando l'incremento Δx tende a zero.

Ciò che gli studenti devono capire è che è lecito chiedersi se una funzione derivabile è sempre continua e se viceversa, una funzione continua è sempre derivabile.

Teorema: Se una funzione $f(x)$, definita in un intervallo I con $x_0 \in I$, è derivabile in x_0, allora è anche continua in x_0.

Dimostrazione:

Per ipotesi sappiamo che la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0. Ciò significa che esiste ed è finito il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Per dimostrare il teorema è necessario dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Per $x \neq x_0$ si può scrivere:

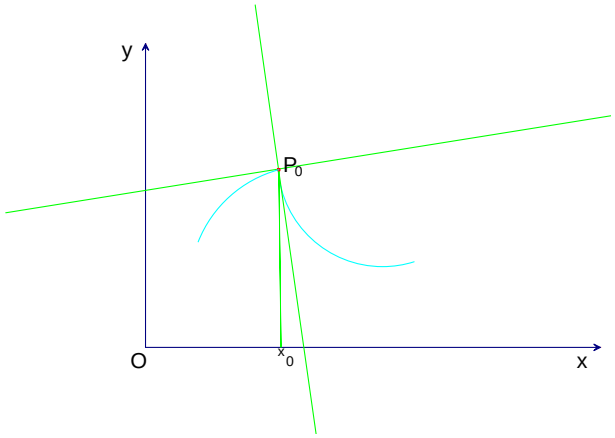
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0);$$

quindi, passando al limite per $x \to x_0$ e ricordando le proprietà dei limiti, si ottiene:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0=f(x_0).$$

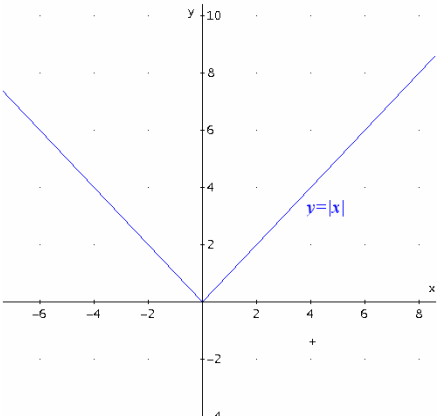
Osservazione: Sottolineiamo che l'ultimo prodotto $f'(x_0)\cdot 0$ non può essere una forma indeterminata perché, per ipotesi, la derivata in x_0 esiste finita.

Osservazione didattica:
E' opportuno far notare alla classe che, al contrario, la continuità in un punto non implica la derivabilità in quel punto, ovvero NON vale il viceversa del Teorema precedentemente dimostrato.
L'interpretazione geometrica della derivata permette di renderci conto in modo rapido ed espressivo del fatto che una funzione *y=f(x)* può essere continua in un punto senza essere ivi derivabile, pensiamo infatti a curve continue con punti angolosi in cui esistono due tangenti diverse alla curva.



In definitiva la continuità di una funzione in un punto non implica la sua derivabilità in quel punto, come provano gli esempi che seguono.

Esempio: Il grafico seguente è un valido controesempio:



Infatti la funzione : $f : IR \to IR \,/\, f(x) = |x|$
è continua $\forall x \in IR$; ma non è derivabile per $x = 0$.
Se calcoliamo il limite del rapporto incrementale nel punto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \ se \ x \to 0^+ \\ -1 \ se \ x \to 0^- \end{cases}$$

Quindi non esiste il limite del rapporto incrementale per $x_0=0$. Il grafico mette in evidenza che in $x=0$ vi è un punto angoloso.

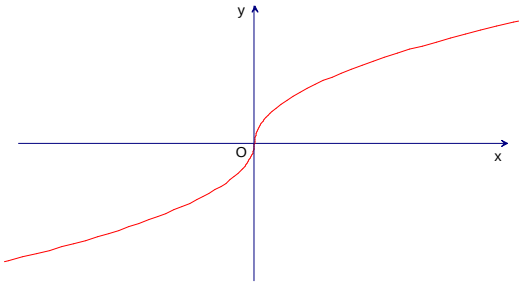
Altro Esempio:
Sia data la funzione $f: IR \rightarrow IR: x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ e sia $x_0 = 0$. Il rapporto incrementale della funzione f relativo al punto $x_0 = 0$ e all' incremento $h \neq 0$ è:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ha:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\sqrt[3]{h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

quindi la funzione f non è derivabile nel punto x_0. Geometricamente, tale risultato si interpreta affermando che la tangente al grafico della funzione f nel punto (0;0) è l' asse y.
Il grafico di f è riportato nella figura sottostante.



Osservazione: Più in generale, se il grafico della funzione f presenta dei punti in cui la tangente è parallela all'asse y allora in tali punti non è possibile definire la derivata, ovvero in corrispondenza di tali punti la funzione non è derivabile.

DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI MEDIANTE LA DEFINIZIONE

a) Derivata di una costante

La più semplice delle funzioni è $f: R \rightarrow R / f(x) = k$; $k \in R$. Il grafico di tale funzione è una retta orizzontale coincidente con tutte le sue tangenti, ed è ovvio che $f'(x) = 0$ per tutti i valori di x.

Osservazione: Questo risultato ammette un'interpretazione geometrica semplice. Il grafico della funzione $y=k$ è una retta parallela all'asse x. La tangente a questo grafico coincide evidentemente in ogni suo punto, con questa retta e perciò il suo coefficiente angolare è 0.

Ciò segue anche dalla definizione:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Quindi la funzione costante è derivabile $\forall x \in R$ e la sua derivata è costantemente nulla. Pertanto:

$$\frac{d}{dx}(k) = 0$$

b) Derivata della funzione identica

Data la funzione $f: R \rightarrow R / f(x) = x$, il suo grafico è la retta passante per l'origine, bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Quindi la funzione identica è derivabile $\forall x \in R$ e la sua derivata è costantemente uguale a 1. Pertanto:

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Osservazione: Anche questo risultato ammette una semplice interpretazione geometrica. Il grafico della funzione $y=x$ è la bisettrice del primo e terzo quadrante. La tangente in ogni suo punto a questo grafico è la bisettrice stessa e dunque il suo coefficiente angolare è 1.

c) Derivata della funzione x^2 :

Data la funzione $f : R \to R / f(x) = x^2$, la sua derivazione equivale alla determinazione dell'inclinazione di una parabola.

E' questo il più semplice caso in cui si debba eseguire il passaggio al limite senza che il risultato sia noto per via intuitiva fin dal principio.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + \lim_{h\to 0} h = 2x$$

Quindi la funzione x^2 è derivabile $\forall x \in R$ e la sua derivata è:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

d) Derivata della funzione x^n , $n \in N$.

Generalizziamo il caso precedente ad una potenza con esponente un numero naturale qualsiasi.

Si ottiene che:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} \right] = nx^{n-1}$$

Quindi la derivata di $f(x) = x^n$ vale:

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$

Nota didattica

La regola data per la derivazione delle potenze naturali di *x*, può essere generalizzata a potenze reali. Dimostreremo questo risultato in modo agevole, dopo avere dimostrato la regola di derivazione di una funzione composta.

e) Derivata della funzione $\sin x$

Sia data la funzione $f : R \to R / f(x) = \sin x$, (con la misura degli angoli espressa in radianti). Allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

Osserviamo che:

$$\cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \qquad \text{essendo} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

mentre più elaborata risulta la risoluzione del secondo limite, per il quale risulta opportuno moltiplicare numeratore e denominatore per l'espressione $\cos h + 1$, infatti:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\sin^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{h}\sin h\frac{1}{\cos h + 1} = 0$$

dato che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1\ ,\ \lim_{h\to 0}\sin h = 0\ ,\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h + 1} = \frac{1}{2}$$

In definitiva:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x\cdot 1 + \sin x\cdot 0 = \cos x\ .$$

Quindi la funzione $\sin x$ è derivabile $\forall x \in R$ e la sua derivata è:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Osservazione: Notiamo ancora che si ha questo risultato solamente nel caso in cui l'angolo è espresso in radianti (ecco uno dei motivi per i quali si lavora con i radianti); se la misura dell'angolo è in gradi bisognerebbe aggiungere un fattore $\frac{\pi}{180}$.

f) Derivata della funzione $\cos x$

Data la funzione $f : R \to R\ /\ f(x) = \cos x$, sempre con gli angoli espressi in radianti,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h} = -\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} + \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}$$

Osserviamo che:

$$-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x$$

mentre si è visto in precedenza che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

In definitiva:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x\cdot 1 + \cos x\cdot 0 = -\sin x$$

Quindi la funzione $\cos x$ è derivabile $\forall x \in R$ e la sua derivata è:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x\ .$$

g) Derivata della funzione $\log_a x$**, con** $a \in R_0^+ - \{1\}$

Data la funzione $f : R^+ \to R\ /\ f(x) = \log_a x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x}$$

Posto $\frac{h}{x} = t$ il limite diventa $\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\log_a e$, essendo $\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e$.

Quindi la derivata di $f(x) = \log_a x$ vale:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

In particolare, se $f(x)=\ln x$, risulta $f'(x)=\frac{1}{x}$.

h) Derivata della funzione esponenziale

Data la funzione $f: R \to R / f(x)=a^x$, con $a \in R_0^+ - \{1\}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}a^x\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$$, essendo $\lim_{t\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$.

Quindi la derivata di $f(x)=a^x$ vale:

$$f'(x)=a^x\ln a$$

In particolare se $f(x)=e^x$ risulta $f'(x)=e^x$.

Osservazione: E' bene evitare per quanto possibile di fornire "ricette" agli studenti, ma farle costruire a loro, utilizzando la definizione e interpretando geometricamente il risultato ottenuto.

REGOLE DI DERIVAZIONE

E' bene sottolineare con gli studenti che, fino a questo momento, abbiamo concentrato le nostre energie per derivare funzioni di vario genere, trasformando opportunamente i rapporti incrementali per poi eseguire il passaggio al limite. Una conquista determinante fu compiuta quando, grazie a Leibniz, a Newton e ai loro successori, si sostituirono questi artifici individuali con efficaci metodi generali. Con essi, si può derivare quasi meccanicamente ogni funzione che si presenta in matematica, evitando così l'ostico e talvolta difficile passaggio al limite; la derivazione, in questo modo acquisisce il carattere di un algoritmo di calcolo, ed è proprio questo aspetto della teoria che ci permette di utilizzare il termine "calcolo".

Osservazione didattica: Ciò che si è appena sottolineato ci permette di far notare che la derivata diventa un operatore, indicato con il simbolo $\frac{d}{dx}()$, nel dominio delle funzioni derivabili che fornisce come risultato una funzione. Schematicamente possiamo scrivere:

Se indichiamo con:

$$A=\{f \,/\, f \text{ è una funzione derivabile}\}$$

e con

$$B=\left\{g \,/\, g(x)=\frac{d(f(x))}{d(x)} \text{ è una funzione}\right\}$$

allora si ha che l'operatore

$$\frac{d}{dx}: A \to B / \; f \to g=\frac{df}{dx}$$

a) Derivata della funzione somma

Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due funzioni derivabili nell'intervallo *I*; allora la funzione somma

$$s(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

è derivabile in *I* e $\forall x \in I$ si ha $s'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$.

Dimostrazione

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)+f_2(x+h)]-[f_1(x)+f_2(x)]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}=$$

$$=f'_1(x)+f'_2(x)$$

Questo risultato si estende per ricorrenza ad un qualsiasi numero (comunque finito) di funzioni derivabili in *I*.

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^4 + \sin x$. La derivata di x^4 è $4x^3$, la derivata di *sin x* è *cos x*, quindi $f'(x) = 4x^3 + \cos x$.

Altro esempio:

Calcolare la derivata della funzione $y = x^2 - x$ nel punto $x = 2$

Utilizzando la definizione

$$\lim_{h\to 0}\frac{[(2+h)^2-(2+h)]-[2^2-2]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+h^2+4h-2-h-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h} = 4 .$$

Utilizzando la regola di derivazione: $y' = 2x - 1$ che nel punto $x = 2$ vale $y'(2) = 4 - 1 = 3$.

***b)* Derivata della funzione prodotto**

Siano $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$ due funzioni derivabili nell'intervallo *I;* allora la funzione prodotto

$$p(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)$$

è derivabile in *I* e $\forall x \in I$ si ha $p'(x) = f_1'(x)\cdot f_2(x) + f_1(x)\cdot f_2'(x)$.

Dimostrazione.

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)]-[f_1(x)\cdot f_2(x)]}{h}$$

(aggiungendo e sottraendo $f_1(x+h)\cdot f_2(x)$)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f_1(x+h)\cdot f_2(x+h)\right]+f_1(x+h)\cdot f_2(x)-\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]-f_1(x+h)\cdot f_2(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)\cdot\left[f_2(x+h)-f_2(x)\right]+f_2(x)\cdot\left[f_1(x+h)-f_1(x)\right]}{h} =$$

essendo $f_1(x)$ *derivabile in x è ivi anche continua* $\Rightarrow \lim_{h\to 0} f_1(x+h) = f_1(x)$ *e quindi*

$$= f_1(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left[f_2(x+h)-f_2(x)\right]}{h} + f_2(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\left[f_1(x+h)-f_1(x)\right]}{h} =$$

$$= f_1(x)\cdot f_2'(x) + f_1'(x)\cdot f_2(x)$$

Casi particolari della regola di derivazione del prodotto:

i. $D\left(k\cdot f(x)\right) = k\cdot f'(x)$

Infatti:

$$D\left(k\cdot f(x)\right) = D(k)\cdot f + k\cdot f'(x) = 0 + k\cdot f'(x) = k\cdot f'(x).$$

ii. $D\left(\left[f(x)\right]^n\right) = n\left[f(x)\right]^{n-1} f'(x), \quad n \in N$

Infatti, calcoliamo dapprima la derivata del prodotto di tre funzioni $f(x), g(x), h(x)$.

$$(f\cdot g\cdot h)' = [(f\cdot g)\cdot h]' = (f\cdot g)'\cdot h + (f\cdot g)\cdot h' = (f'g + fg')\cdot h' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$$

La precedente regola può dunque essere estesa al caso di un numero qualsiasi di fattori purché finito.

$$\left(f(x)^n\right)' = \underbrace{\left[f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)\right]'}_{n \text{ fattori}} = \underbrace{f'(x)f^{n-1}(x) + f'(x)f^{n-1}(x) + \ldots + f'(x)f^{n-1}(x)}_{n \text{ addendi}} = n\ f'(x)f^{n-1}(x).$$

Osservazione didattica:
Dalla regola di derivazione di una potenza naturale di x e dalla derivata di una costante e di una funzione per una costante, deduciamo che tutti i polinomi sono funzioni derivabili e la loro derivata è un polinomio di grado inferiore di un'unità.
Osservazione didattica:
La regola di derivazione del prodotto di funzioni verrà ripresa quando si studieranno gli integrali per parti.

Esempio: Calcoliamo la derivata di $f(x) = x \sin x$. La derivata di x è 1, la derivata di *sin x* è *cos x*, quindi: $f'(x) = \sin x + x \cos x$.

Altro esempio:
Calcolare la derivata della funzione $y = 4x^4 \cos x$ nel punto $x = \pi$
$y' = 16x^3 \cos x - 4x^4 \sin x$ che nel punto $x = \pi$ dà $f'(\pi) = -16\pi^3$.

***c)* Derivata della funzione reciproca**

Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I e diversa da zero per ogni $x \in I$ *;* allora la funzione reciproca è derivabile in I e $\forall x \in I$ si ha $D\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

Dimostrazione.
Si ha $\forall x \in I$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{f(x+h)} - \dfrac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)\cdot f(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[-\frac{1}{f(x+h)\cdot f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

essendo $f(x)$ derivabile in x è ivi anche continua $\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ *e quindi si ottiene*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{f(x+h)} - \dfrac{1}{f(x)}}{h} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

Osservazione didattica: Riconosciamo subito che $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Questo risultato è di grande importanza in Fisica; infatti, come già studiato, esprime la relazione tra un campo centrale ed il rispettivo potenziale.

Esempio:
Calcolare la derivata della funzione $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ nel punto $x = 2$
$y' = -\dfrac{2x}{(x^2+4)^2}$ che nel punto $x = 2$ dà $y' = -\dfrac{4}{64} = -\dfrac{1}{16}$

d) Derivata della funzione quoziente

Date le funzioni $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$ definite e derivabili sullo stesso intervallo *I* (con $f_2(x) \neq 0$ in *I*), la funzione $q(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ è una funzione derivabile nell'intervallo *I* e la sua derivata è data da:

$$q'(x) = \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{\left[f_2(x) \right]^2}.$$

Dimostrazione.

Poiché $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x)\dfrac{1}{f_2(x)}$ è il prodotto di una funzione $f_1(x)$ e del reciproco di $f_2(x)$, utilizzando regole già dimostrate, abbiamo

$$D\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = f_1'(x)\frac{1}{f_2(x)} + f_1(x) D\left[\frac{1}{f_2(x)}\right] = \frac{f_1'(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1(x)\, f_2'(x)}{f_2(x)^2} =$$

$$= \frac{f_1'(x)\, f_2(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{f_2(x)^2}$$

Esempio:

- Calcolare la derivata della funzione $y = \dfrac{2x}{3\cos x}$ nel punto $x = \pi$

$y'(x) = \dfrac{6\cos x + 6x\sin x}{9\cos^2 x}$ e per $x = \pi$ $\qquad y'(\pi) = D\left[\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]_{x=\pi} = -\dfrac{2}{3}$.

- Calcolare la derivata della funzione y=*tg*(*x*)

$$\mathrm{D}(\mathrm{tg}(x)) = \mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \mathrm{sen}(x)\cdot(-\mathrm{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$$

e) <u>Derivata della funzione composta</u>

Per introdurre la derivata di una funzione composta, uno degli scogli più difficili per gli studenti, facciamo il seguente esempio:
Supponiamo che, in un determinato intervallo, una grandezza Y (ad esempio il prezzo della benzina) raddoppi rispetto un'altra grandezza U (ad esempio il prezzo del gasolio) e che quest'ultima diminuisca di 1/3 rispetto ad una grandezza X (ad esempio il prezzo del metano).
Quale rapporto di variazione vi è stato tra la grandezza Y e la grandezza X?
Possiamo dire che la variazione di Y è stata il doppio di un terzo rispetto a quella di X.
In altre parole possiamo scrivere:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta Y}{\Delta U}\cdot\frac{\Delta U}{\Delta X} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Se quindi una grandezza dipende da una seconda grandezza e questa da una terza, il tasso di variazione della prima rispetto alla terza, si ottiene moltiplicando i due tassi di variazione relativi (della prima rispetto alla seconda e di questa rispetto alla terza). Facciamo vedere che ciò che vale per i tassi medi di variazioni vale anche per i tassi istantanei di variazione.
Consideriamo perciò una funzione composta *F*(*x*), generata da due funzioni reali *y* = *g*(*t*) e *t* = *f*(*x*): $F(x) = g\left[f(x) \right]$. Vediamo come si possa ottenere la derivata della funzione *F* rispetto alla variabile *x*, conoscendo le derivate delle due funzioni componenti rispetto alle proprie variabili.

Teorema (della derivazione composta): Sia $t = f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e derivabile in $x_0 \in I$ e sia $y = g(t)$ una funzione definita in un intervallo I' (tale che $g(I) \subseteq I'$) e derivabile in $t_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $F(x) = g[f(x)]$ è derivabile in x_0, e si ha:

$$F'(x_0) = g'(t_0) \cdot f'(x_0).$$

Osservazione didattica: La derivata della funzione composta è uno degli ostacoli più difficili per gli studenti ed è fonte di continui errori negli esercizi. Nella maggior parte dei casi succede che, gli studenti si dimentichino uno degli anelli della catena di derivate. Conviene dunque insistere sul seguente schema di composizione delle funzioni:

$$x \xrightarrow{f} t \xrightarrow{g} y$$

e per motivare maggiormente la regola conviene, da un punto di vista didattico, presentare un esempio, piuttosto che presentare la dimostrazione del teorema che tra l'altro è troppo impegnativa per gli studenti della scuola superiore.

Esempio:

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $y = sin\,(2x)$:

- Dapprima deriviamo la funzione composta $y = \sin(2x)$ per mezzo della definizione.

  Poiché $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(x+h)\cos(x+h) - 2\sin x\cos x}{h} =$$

  $$= \lim_{h\to 0} \frac{2(\sin x\cos h + \sin h\cos x)(\cos x\cosh - \sin x\sin h) - 2\sin x\cos x}{h} =$$

  $$= 2\lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos x\cos^2 h - \sin^2 x\cos h\sin h + \cos^2 x\cos h\sin h - \cos x\sin x\sin^2 h - \sin x\cos x}{h}$$

  Poiché valgono i limiti $\lim_{h\to 0}\cos h = 1$, $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$, $\lim_{h\to 0}\sin h = 0$, con semplici calcoli si ottiene $-2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2\cos(2x)$.

- Ora calcoliamo la derivata della funzione di partenza facendo uso della regola di derivazione della funzione composta. Tale calcolo è immediato:
  infatti, sia $t = 2x$. Allora le due funzioni composte sono $f(x) = 2x$ e $g(t) = \sin t$.

  $$g[f(x)]' = g'(t)\cdot f'(x) = 2\cos t = 2\cos(2x).$$

f) <u>Derivata di una potenza con esponente reale qualsiasi</u>

La derivata di una potenza con esponente reale qualsiasi, come abbiamo già osservato in precedenza, può essere calcolata come caso particolare della derivata di una funzione composta. Sia $y = x^\alpha$, con $\alpha \in IR$. Scriviamo la potenza sotto forma di esponenziale di un logaritmo:

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Applicando la regola di derivazione di una funzione composta

$$D[x^\alpha] = D[e^{\alpha\ln x}] = e^{\alpha\ln x}\alpha\frac{1}{x} = x^\alpha\frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione $y = x^{\frac{3}{4}}$ nel punto $x = 81$.

$y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ e per $x = 81$, $y'(81) = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

g) <u>Derivata della funzione</u> $\left[f(x) \right]^{g(x)}$

Calcoliamo la derivata $D\left[f(x) \right]^{g(x)}$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili in I con $f(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

Esprimendo la funzione data come esponenziale di un logaritmo abbiamo

$$D\left[\left(f(x) \right)^{g(x)} \right] = D\left[e^{\ln\left(f(x) \right)^{g(x)}} \right] = D\left[e^{g(x)\ln\left(f(x) \right)} \right] = e^{g(x)\ln\left(f(x) \right)} \left[g'(x)\ln\left(f(x) \right) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \right] =$$

$$= \left[\left(f(x) \right)^{g(x)} \right] \left[g'(x)\ln\left(f(x) \right) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

Esempio:

Calcolare la derivata della funzione $y = x^x$ nel punto $x = e$.

La funzione è del tipo $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) = g(x) = x$ e $f'(x) = g'(x) = 1$,

$y' = x^x (1 \cdot \ln(x) + x \frac{1}{x}) = x^x (\ln(x) + 1)$ e per $x = e$, si ha che $y'(e) = 2e^e$.

<u>Osservazione didattica:</u> Piuttosto che imparare a memoria la formula, è bene invitare gli studenti a ricordare il procedimento attraverso il quale si è giunti a tale formula.

g) <u>Derivata di funzioni pari e dispari</u>

Sia *f* una funzione reale definita su di un intervallo reale $I = (-a, a), a > 0$ ed ivi derivabile.

Sia inoltre *f* una funzione pari, ovvero $\forall x \in I : f(x) = f(-x)$.

Allora $D(f(x)) = D(f(-x)) \overset{\text{derivata di funzione composta}}{=} -f'(-x)$, cioè la derivata prima è una funzione dispari.

Analogamente la derivata prima di una funzione dispari è una funzione pari.

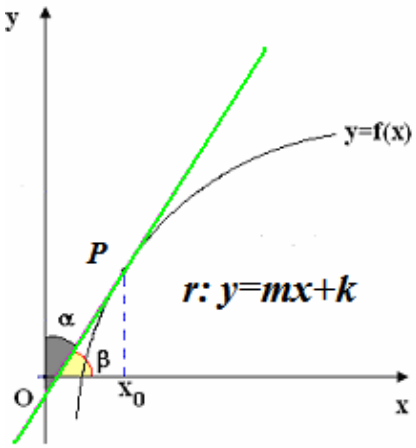
i) <u>Derivata della funzione inversa</u>

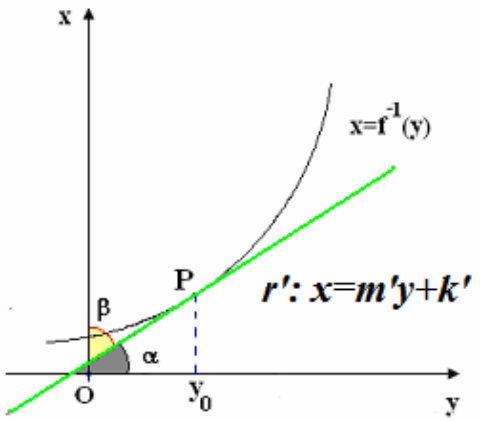
Se la funzione $y = f(x)$ è invertibile e derivabile nel punto $x_0 \in I$, con derivata $f'(x_0) \neq 0$, allora anche la funzione inversa è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$, e vale la relazione:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

La regola di derivazione della funzione inversa può essere giustificata geometricamente. Sia $f'(x_0)$ la derivata di *f* calcolata nel punto x_0. Come abbiamo già osservato più volte, essa rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione $y=f(x)$ nel suo punto $P(x_0, f(x_0))$:

ossia: $f'(x_0) = m = tg(\beta)$ ove β è l'angolo che la retta tangente al punto *P* forma con l'asse *x*.





Invece, considerando la funzione inversa $f^{-1}(x)$ (è bene ricordare che il grafico della funzione inversa è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo terzo quadrante, ovvero alla retta di equazione $y=x$) la sua derivata nel punto P risulta essere la pendenza della retta r' tangente al grafico di destra e quindi: $(f^{-1})'(y_0)=m'=tg(\alpha)$.

Risulta: $m'=tg(\alpha)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=ctg(\beta)=\frac{1}{tg(\beta)}=\frac{1}{m}$

Quindi: $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

Esempio:
Ricalcoliamo la derivata del logaritmo tramite la regola della derivata della funzione inversa.
Data la funzione $f: IR \to IR \ / \ y \to e^y$ essa è derivabile per ogni y in IR con derivata $f'(y)=e^y$. Tale derivata non è mai nulla e la sua inversa lnx è derivabile in $IR^+\setminus\{0\}$.
$f^{-1}: IR \to IR_0^+ \ / \ x \to \ln x = y$. Essendo $e^y=x$, si ha

$$D(\ln(x))=\frac{1}{De^y}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

Altro esempio:

Dimostriamo che: $D\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La funzione $y = \arcsin x$ è l'inversa della restrizione della funzione $x=\sin y$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; perciò si ha, in $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$: $D\arcsin x=\frac{1}{D\sin y}=\frac{1}{\cos y}$.

In $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, abbiamo $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$, e quindi: $D\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Con lo stesso procedimento si ottiene $\forall x \in \left]-1,1\right[: D\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $\forall x \in R$:

$D\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$.

FUNZIONE DERIVATA SECONDA E DERIVATE SUCCESSIVE

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I. Allora, come già visto, si può definire la funzione derivata prima della f, che ad ogni $x \in I$ associa un valore reale $f'(x)$:

$$f': I \to IR \ / \ x \to f'(x)$$

Seguendo un ragionamento del tutto analogo a quello appena esposto, se anche la funzione *f'* risulta essere derivabile nell'intervallo *I*, allora è possibile introdurre una nuova funzione detta derivata prima di *f'* o *funzione derivata seconda di f*:

$$f'': I \to IR / x \to f''(x) = f'(f'(x))$$

In generale, supponendo che la funzione derivata *n-esima* di *f* sia derivabile è possibile costruire la *funzione derivata n+1-esima della funzione f:*

$f^{(n+1)} : I \to IR / x \to f^{(n+1)}(x)$.

Osservazione

Sulla base delle regole di derivazione introdotte è possibile osservare che, se la funzione *f* è rappresentata da un polinomio di ordine *n* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + ... + a_0 \quad (con\ n \in IN)$:

allora tale funzione ammette derivate non nulle fino all'ordine *n*, mentre tutte le derivate di ordine superiore risultano essere nulle.

Esempio:

Sia data la seguente funzione:

$f : R \to R / x \to x^4 + 3x^3 + x + 5$

Calcoliamo la derivata quinta della funzione *f*, si ha:

$f': R \to R / x \to 4x^3 + 9x^2 + 1$

$f'': R \to R / x \to 12x^2 + 18x$

$f''': R \to R / x \to 24x + 18$

$f^{(4)} : R \to R / x \to 24$

$f^{(5)} : R \to R / x \to 0.$

La derivata quinta della funzione *f* è quindi 0, come affermato in precedenza.

ESERCITAZIONE CON IL SOFTWARE DERIVE: GRAFICO DI UNA FUNZIONE E GRAFICO DELLA FUNZIONE DERIVATA

Le derivate delle funzioni con *Derive*

A questo punto gli studenti saranno portati in laboratorio, inteso come "ambiente" di simulazione, di stimolo e di apprendimento di concetti teorici propri della matematica.

a) LE DERIVATE CON *DERIVE*

Il comando di *Derive* che permette di svolgere le derivate è ***Calcola***, con il sottocomando ***Derivata***.

- Nella finestra di dialogo corrispondente, dobbiamo confermare o inserire i seguenti dati: la funzione, l'espressione analitica della variabile, l'ordine di derivazione.
- Con il bottone ***Semplifica*** otteniamo l'inserimento del risultato della derivata nella finestra algebrica.
- Con il bottone ***OK*** inseriamo l'impostazione della derivata, che possiamo svolgere con il comando ***Semplifica_Base***.

Esempio 1**.** Calcolare con *Derive* la derivata della seguente funzione: $y = -x^2 + 4 \cdot x$.

Svolgimento.

- Scrivere in ***Autor*** la funzione –*x*^2 + 4*x*;
- premuto invio sullo schermo apparirà #1: $-x^2 + 4 \cdot x$;
- se diamo il comando ***Calcola_Derivata***, compare la finestra di dialogo. Se facciamo clic su ***Semplifica*** otteniamo il calcolo immediato della derivata:
  #2: $4 - 2 \cdot x$.
- Altrimenti possiamo fare clic su ***OK*** ottenendo l'impostazione della derivata:
  #4: $\frac{d}{dx}(-x^2 + 4 \cdot x)$.
- Per ottenere lo svolgimento della derivata, dobbiamo usare il bottone ***Semplifica_Base***.
  #5: $4 - 2 \cdot x$.

b)L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Esempio 2**.** Calcoliamo le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione:

$$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 2,$$

nei suoi punti di ascissa -1, 1 e 3.
Tracciamo, poi, il grafico della funzione e le tangenti.

Svolgimento.
E' bene ricordare alla classe che, utilizzando il significato geometrico della derivata, l'equazione della tangente al grafico di una funzione di equazione *y = f(x)* in suo punto di ascissa x_0 è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- Inseriamo un titolo
Attiviamo *Derive* e con ***Crea_Espressione*** scriviamo il titolo del lavoro: "Tangenti al grafico di una funzione".
#1: "Tangenti al grafico di una funzione"

- Inseriamo l'espressione della funzione
Nella riga di editazione di ***Crea_Espressione*** digitiamo l'espressione della funzione:

x^3 – 4*x*^2 – 3x + 2.

La inseriamo nella finestra algebrica con ***OK***.
#2: $x^3 - 4 \cdot x^2 - 3x + 2$.

- Calcoliamo la derivata
Facciamo clic sul comando ***Calcola*** e nella tendina scegliamo il sottocomando ***Derivata***. Nella corrispondente finestra di dialogo confermiamo i dati proposti da *Derive*: l'espressione analitica della funzione (quella evidenziata al momento dell'uso del comando), la variabile di derivazione (in questo caso la *x*) e l'ordine di derivazione (il primo). Dando ***OK***, vediamo comparire l'impostazione della derivata prima della funzione:
#3: $\frac{d}{dx}(x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2)$
Con il comando ***Semplifica_Base*** otteniamo il suo svolgimento:
#4: $= 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 3$.

- Assegniamo un nome alla funzione e alla derivata prima
Per applicare la formula della tangente, abbiamo bisogno dei valori della funzione e della derivata prima, quindi li inseriamo nella finestra algebrica con il simbolo di assegnazione, dando loro, rispettivamente i nomi *F* (per la funzione) e *D* (per la derivata della funzione).
Evidenziamo con il mouse l'etichetta #2 e diamo ***Crea_Espressione***. Digitiamo i caratteri: F(*x*): = *x*^3 - 4*x*^2 - 3*x* + 2. Con ***OK*** la inseriamo:
#5: $F(x) := x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2$
Operiamo in modo analogo per la derivata e otteniamo:

#6: $D(x) := 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 3$

- Immettiamo la formula della tangente

Con ***Crea_Espressione*** digitiamo la formula generica della tangente con *y* esplicitata:

$y = D(a)*(x - a) + F(a)$

e con ***OK*** la immettiamo nella finestra algebrica.

#7: $y = D(a)(x - a) + F(a)$

Osservazione didattica: Nella formula abbiamo sostituito x_0 con *a*, perché *Derive* richiede che le variabili siano indicate con un solo carattere, a meno che non diamo una diversa impostazione con il comando ***Dichiara_Stato dell'Algebra Inserimento***.

- Ricaviamo le equazioni delle tangenti

Evidenziamo l'etichetta contenente la formula (#7) e usiamo il comando ***Semplifica_Sostituisci***. Nella finestra di dialogo, facciamo clic prima sul parametro *a* (assegnando dapprima il valore -1) e poi sulla riga di sostituzione della *x* e della *y*. Premiamo il bottone ***Semplifica*** e otteniamo l'equazione della prima tangente.

#8: $y = 8 \cdot (x + 1)$

Operiamo similmente per gli altri due punti, sostituendo ad *a*, rispettivamente, i valori 1 e 3 e otteniamo:

#9: $y = 4 \cdot (1 - 2 \cdot x)$

#10: $y = -16$.

Nota didattica: Si fa notare agli studenti che i valori delle derivate calcolate nei tre punti, cioè i tre coefficienti angolari delle tangenti, sono rispettivamente: positivo, negativo e nullo. Il docente stimola gli studenti ponendo tale quesito: "Cosa si può dire sull'andamento della curva in tali punti"?

- Tracciamo i grafici della funzione e delle tre tangenti

Evidenziamo l'etichetta #2 (#2: $x^3 - 4 \cdot x^2 - 3x + 2$), entriamo in ambiente grafico a due dimensioni, facendo clic sul bottone ***Finestra_Grafici-2-D***. Usiamo poi il comando ***Traccia!***, per ottenere il grafico della curva.

Ritorniamo nella finestra algebrica, mediante il bottone corrispondente. Evidenziamo l'etichetta #8 (#8: $y = 8 \cdot (x + 1)$) e operiamo in modo simile a prima per ottenere il grafico della prima tangente. Facciamo lo stesso per la seconda tangente contenuta nell'etichetta #9 (#9: $y = 4 \cdot (1 - 2 \cdot x)$) e per la terza tangente contenuta nell'etichetta #10 (#10: $y = -16$).

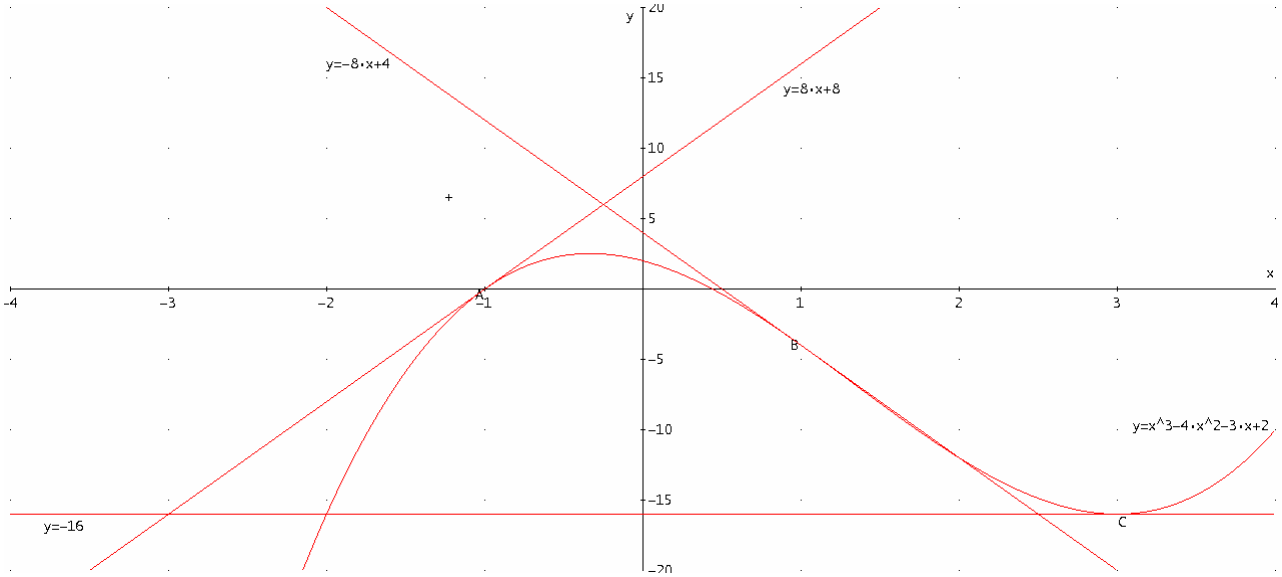
- Inquadriamo il grafico

Inquadriamo l'andamento della curva premendo due volte il bottone degli ***Zoom***, ***Riduci verticalmente*** (il secondo da sinistra). Il fattore di scala per la *x* resta 1, quello della *y* diventa 5.

- Personalizziamo il grafico

Inseriamo nel grafico l'espressione della funzione che stiamo esaminando. Usiamo il comando ***Opzioni_assi*** e, nel campo *y*, digitiamo: *x*^3 - 4*x*^2 - 3*x* + 2.

Diamo i nomi *A*, *B* e *C* ai punti di tangenza. Facciamo clic "vicino" al primo punto: notiamo che la croce si sposta in quella posizione. Diamo il comando ***Varia_annotazione*** e nella relativa riga di dialogo digitiamo la lettera *A*. Operiamo nello stesso modo per i punti *B* e *C*.



APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI DERIVATA ALLA FISICA

Accelerazione media ed accelerazione istantanea

Procedendo in maniera analoga alla velocità istantanea che abbiamo visto precedentemente, si giunge a definire l'accelerazione istantanea del punto in moto rettilineo, *a(t)*, a partire dal concetto di accelerazione media in un intervallo di tempo Δt, come la derivata della funzione velocità istantanea rispetto al tempo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = a(t)$$

Poiché l'accelerazione istantanea è la derivata della velocità, che, a sua volta, è la derivata dello spostamento di un punto rispetto al tempo, ne consegue che l'accelerazione istantanea è la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo.

Esempio: Data la legge oraria: $r(t) = 3t^3 - 2t + 4$,

calcoliamo l'accelerazione all'istante $t = 2s$.

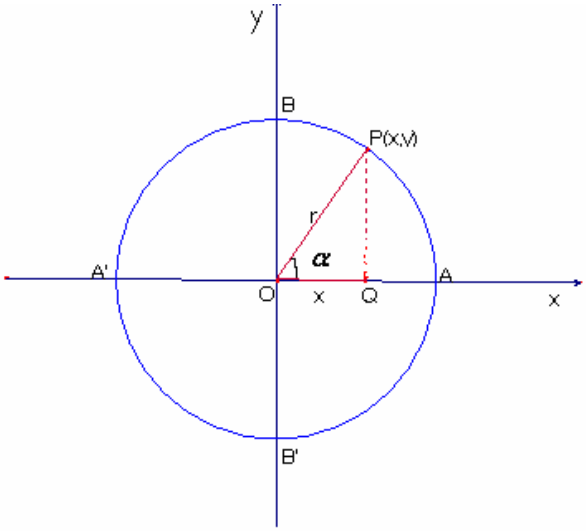
$$v = r'(t) = 9t^2 - 2, \qquad a = v'(t) = r''(t) = 18t, \quad a(2) = 36 m/s^2.$$

L'accelerazione istantanea all'istante richiesto è di 36 m/s^2.

Moto armonico semplice:

Se si considera il moto circolare uniforme come il più semplice esempio di moto curvilineo piano, allora il moto armonico semplice si può interpretare come il moto che esegue ciascuna componente ortogonale del vettore posizione mentre il punto si muove sulla circonferenza con velocità scalare uniforme. Sia $\vec{r}(t)$ è il raggio vettore che individua la posizione del punto *P* sulla circonferenza (nell'ipotesi che si consideri come origine il centro del cerchio corrispondente) all'istante *t* (nell'ipotesi che all'istante *t=0* il raggio vettore si trovi disposto lungo l'asse positivo delle ascisse) e se *α(t)* è l'angolo, in radianti, che tale raggio forma con l'asse orizzontale in tale istante (ovvero $\alpha = P\hat{O}Q$), allora il moto armonico semplice orizzontale è descritto dalla legge oraria:

$$s(t) = r\cos(\alpha(t)).$$



Indicato con v la velocità scalare uniforme del punto mobile sulla circonferenza, la lunghezza, l, dell'arco di circonferenza descritto dal punto, nel tempo t, è data da

$$l(t) = r\,\alpha(t) = v\,t,$$

da cui

$$\alpha(t) = \frac{v\,t}{r}.$$

Introdotto il concetto di velocità angolare

$$\omega = \frac{v}{r},$$

il moto armonico semplice sarà, pertanto, descritto dalla seguente legge oraria

$$s(t) = r\cos(\omega\, t);$$

la velocità istantanea sarà espressa mediante la derivata di $s(t)$

$$s'(t) = -\,\omega\, r\sin(\omega\, t);$$

l'accelerazione istantanea del moto armonico si ottiene come derivata seconda dello spostamento

$$a(t) = s''(t) = -\,\omega^2\, r\cos(\omega\, t) = -\,\omega^2\, s(t).$$

Si deduce, quindi, che l'accelerazione del moto armonico è proporzionale, ma opposta, allo spostamento, con coefficiente ω^2.

Intensità di corrente elettrica

Si definisce intensità media di corrente elettrica, la quantità di carica elettrica che fluisce attraverso la sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Qualora si voglia passare a una descrizione del fenomeno elettrico istante per istante, è opportuno considerare la quantità di carica che attraversa la sezione del conduttore come una grandezza variabile con continuità e regolarità nel tempo. Pertanto, detta $q(t)$ la quantità di carica che ha attraversato la sezione del conduttore nell'intervallo $[0,t]$ e $q(t+\Delta t)$ la quantità di carica che ha attraversato la stessa sezione nell'intervallo $[0,\ t+\Delta t]$, allora, come nel caso della velocità istantanea, la corrente istantanea, $i(t)$, che attraversa la sezione del conduttore nell'istante di tempo t è il

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t};$$

quindi

$$i(t) = q'(t).$$

Esempio: Attraverso la sezione di un filo conduttore passa una quantità q di carica elettrica che è legata al tempo dalla relazione: $q = t^3 - 5t + 2$. Trovare l'intensità di corrente all'istante $t = 2s$.
Poiché $i(t) = q'(t)$:
$i = q'(t) = 3t^2 - 5$; quindi: $i(2) = q'(2) = 12 - 5 = 7 \longrightarrow i = 7A$.

Forza elettromotrice indotta

Il fenomeno dell'induzione magnetica è tale per cui, se, attraverso la superficie delimitata, al suo contorno, da un conduttore chiuso, si verifica, nell'intervallo di tempo Δt, una variazione del flusso Φ del campo magnetico, allora nel conduttore circolano correnti elettriche indotte. Tali correnti sono tanto più intense quanto più rapida è la variazione del flusso magnetico Φ. Esse circolano nel verso tale per cui, con la loro azione magnetica, tendono ad opporsi al fenomeno che le ha suscitate (legge di Lenz) e si esauriscono quando cessa la variazione di flusso concatenata. L'induzione magnetica ha una caratteristica tipicamente *relativa*, nel senso che si genera tanto nella situazione in cui il conduttore è fermo (rispetto ad un osservatore esterno), mentre varia il flusso magnetico attraverso la superficie, quanto nella situazione in cui è il conduttore che, muovendosi nel campo magnetico, fa variare la sezione attraverso cui fluisce il campo stesso. Si dà il nome di *forza elettromotrice (f.e.m.)*, alla tensione apparente che produrrebbe tali correnti. La rapidità di variazione del flusso magnetico, nell'intervallo Δt, è espressa da

$$\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = -fem$$

che esprime la legge di Faraday – Neumann. In altre parole, la f.e.m. indotta è direttamente proporzionale alla variazione del flusso concatenato con il circuito e inversamente proporzionale al tempo in cui tale variazione si è verificata.
La forza elettromotrice istantanea, *fem(t)*, è allora espressa mediante la derivata del flusso magnetico, ottenuta con il passaggio al limite per Δt tendente a zero:

$$\text{fem}(t) = -\Phi'(t).$$

APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI DERIVATA ALL'ECONOMIA:

UN CICLOMOTORE IN PIÙ

(TRATTO DALLA PROPOSTA DI REVISIONE DEI PROGRAMMI UMI, MATEMATICA 2004)

Con questo esempio si intende proporre un utilizzo della derivata di una funzione, presentando il significato economico del "Costo marginale".

Problema: Si suppone che una fabbrica di motorini produca x ciclomotori al giorno, con x intero, compreso tra 0 e 100, estremi inclusi. Il costo, in euro, della produzione di x motorini, è dato dalla funzione

$$C(x) = 2000 + 300x - x^2/2 .$$

Supponendo che ne possano essere prodotti 50 al giorno, si chiede il costo di un eventuale 51-mo.

Come prima riflessione sul problema risulta significativo esaminare la struttura della funzione $C(x)$, osservando i termini che compaiono e riflettendo sul loro significato, relativamente alla situazione rappresentativa di un modello di realtà produttiva. In termini di costi di produzione, compaiono un costo fisso (in questo caso 2000 euro), una parte che aumenta, qui linearmente, con le unità prodotte (300 euro per ogni unità prodotta x), una diminuzione, più sensibile con l'aumentare delle unità prodotte ($x^2/2$). Da queste conclusioni, che discendono facilmente dalla formalizzazione algebrica presentata, ma bastano a rendere realistico l'uso di una tale funzione per una situazione del tipo proposto, si passa alla risoluzione richiesta.

Il problema viene risolto calcolando il costo $C(51) - C(50)$:

$$C(50) = 2000 + 300 \cdot 50 - 50^2/2 = 15750$$

$$C(51) = 2000 + 300 \cdot 51 - 51^2/2 = 15999{,}50.$$

La differenza risulta

$$C(51) - C(50) = 249{,}50\ €$$

e rappresenta il costo, in euro di un ciclomotore aggiuntivo, nella situazione che la produzione giornaliera sia fissata alle 50 unità. Facendo poi calcolare ai ragazzi i costi di un eventuale motorino in più in situazioni di produzione giornaliera diverse da quella di 50 unità assegnata in precedenza, si fa osservare che il risultato cambia, quindi il costo dipende dal valore x fissato.

Tuttavia, si può ora affrontare il medesimo problema da un altro punto di vista.

In economia infatti, si definisce 'Costo marginale' la derivata di C rispetto a x, e viene proprio usata per calcolare il costo aggiuntivo di un'ipotetica ulteriore unità in produzione.

Si propone, a questo punto di calcolare il costo marginale, per il valore $x = 50$, facendo uso della derivata; in tal caso, si assume che x possa essere un numero reale qualunque e che la funzione $C(x)$ sia derivabile.

Poiché risulta

$$C'(x) = 300 - x,$$

allora

$$C'(50) = 250.$$

Il valore $C'(50)$ differisce di poco da $C(51)$-$C(50)$, ma non coincide con esso. Questo perché, in generale, il costo marginale C'(k) costituisce una buona approssimazione del costo del (k+1)-esimo prodotto.

Infine, con un'opportuna scelta della scala, si può graficare la curva, una parabola, per ipotizzare per quali valori di x il costo di un motorino aggiuntivo è minimo e verificare che ciò avviene per valori prossimi, da sinistra, al massimo della funzione.

Nota didattica: Ovviamente questa seconda parte la si può svolgere solo dopo lo sviluppo dell'unità dedicata ai teoremi fondamentali del calcolo differenziale, argomento che in genere si sviluppa immediatamente dopo questa unità didattica.

Nel testo assegnato, la variabilità di x era fissata nell'intervallo chiuso di estremi 0, 100; si studia ora l'andamento della funzione prescindendo da questi limiti, ma va precisato che non ha significato per il problema esaminare valori di x maggiori di quello per cui si raggiunge il massimo.

Si procede alla ricerca del massimo, determinando il valore di x che rende nulla la derivata della funzione costo:

$$C'(x) = 300 - x,$$

$$C'(x) = 0, \text{ ossia } 300 - x = 0, \text{ per } x = 300.$$

Il massimo si raggiunge per x = 300, e risulta efficace far notare, anche graficamente, che, se l'intervallo di variabilità arrivasse a tale valore, il costo di un'ulteriore unità in produzione sarebbe minimo; si può comunque calcolarlo come in prima fase, da:

$$C(300) = 47000,\ C(299) = 46999{,}5$$

e risulta di soli 0,5 €:

$$C(300) - C(299) = 0{,}5.$$

Oltre al costo marginale, in economia si studiano anche la domanda marginale, il ricavo marginale, ecc. che sono la derivata prima delle rispettive funzioni domanda, ricavo e così via.

Conclusioni e riflessioni

A conclusione di questo lavoro aggiungo alcuni commenti, riflessioni e chiarimenti sulle scelte attuate.

Nel complesso, il percorso sviluppato in questo lavoro ha insistito sull'approfondimento dei nodi concettuali nell'insegnamento delle derivate, cercando di favorire le costruzioni mentali tramite l'introduzione storica ed intuitiva dell'argomento, trattando solo in un secondo momento le definizioni formali. Ritengo che tale obiettivo sia raggiungibile in una scuola secondaria superiore con un'adeguata disponibilità di ore di Matematica, con l'auspicio di stimolare un interesse per la materia. Più nello specifico, lo sviluppo dell'argomento "derivate" nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, è inserito al quarto anno nel tema intitolato "analisi infinitesimale"; tuttavia, dato il notevole contenuto concettuale, data la corposa richiesta di prerequisiti e il suo legame con molti fenomeni della vita di tutti i giorni, generalmente viene affrontato nel primo quadrimestre del quinto anno. Tra l'altro in questo modo, si facilita il successivo passaggio all'argomento dell'integrazione al quale la derivazione è strettamente connessa.

Ho proposto prima di tutto un'interpretazione storico-epistemologica dell'argomento: gli autori presentati sono stati in successione: Fermat, Leibniz e Newton. Con il metodo di Fermat, della ricerca dei massimi e dei minimi ho cercato di avvicinare gli allievi ai procedimenti e alle questioni caratteristiche del calcolo infinitesimale; con l'analisi del lavoro di Leibniz, pubblicato negli *Acta Eruditorum*, ho cercato di sottolineare la costruzione di un nuovo strumento matematico del tutto generale, in grado di risolvere problemi fino allora insolubili; infine con il metodo di Newton ho voluto mostrare come lo stesso problema della tangente sia stato fecondo per lo sviluppo dell'intera matematica. Ho anche sottolineato come uno stesso problema possa essere affrontato con una pluralità di strategie (metodo di Leibniz e Newton a confronto) la qual cosa introduce ai metodi del pensiero matematico moderno.

Ho ribadito inoltre, come in questo caso, ci sia la possibilità di una progettazione interdisciplinare, ovvero di una collaborazione con l'insegnante di storia e filosofia, per cercare di approfondire il dibattito culturale che si sviluppò intorno al concetto di infinito nel corso del '700. La rilevanza didattica di questa successione storica del pensiero e del formalismo è quella di introdurre e contestualizzare le idee da cui trae origine il concetto di derivata; in questo modo ho quindi cercato di limitare i rischi di un difficile impatto con il formalismo moderno del calcolo differenziale.

Molti dei libri di testo adottati nelle scuole secondarie superiori e da me analizzati, presentano la teoria delle derivate a partire dalla definizione per poi esplicitarne solo in un secondo momento il significato geometrico. A mio avviso seguire la strada proposta dalla maggior parte dei libri crea il rischio di separare eccessivamente il nuovo argomento "derivata" dalle conoscenze già possedute dagli studenti; per questo motivo ho cercato di fare leva fin da subito sul concetto intuitivo di retta tangente e solo successivamente formalizzarne la definizione. Ho cercato, nello stesso tempo di evitare l'errore frequente di assumere la retta tangente come un ente geometrico già definito formalmente a prescindere dalle derivate. Come già detto precedentemente in una nota di questo lavoro:

"*… non esistono altri strumenti, se non la derivata, per definire la retta tangente, e tuttavia quest'ente geometrico è stato utilizzato in tutti gli anni scolastici precedenti. Il rischio di presentare dapprima la definizione formale di derivata di una funzione in un punto e poi esplicitare il suo significato geometrico è quello di separare eccessivamente l'argomento derivata dalle conoscenze già possedute dagli studenti; l'approccio al concetto di derivata tramite il suo significato geometrico può aiutare gli allievi nel processo di ristrutturazione delle proprie conoscenze in una prospettiva di sempre maggior organizzazione formale e rigorosa*".

Un altro nodo concettuale che si è cercato di far emergere in modo adeguato in tale lavoro, è il passaggio dal calcolo del limite del rapporto incrementale in un punto, ovvero il calcolo della derivata in un punto, al calcolo della funzione derivata. Mi sono stupita nel costatare che tale passaggio, così di fondamentale importanza, sia assolutamente taciuto da molti libri di testo. Come ho già scritto in precedenza:
"*… il passaggio dalla derivata di una funzione in un punto, un* ***numero****, ad una* ***funzione****, la funzione derivata, è un passaggio delicato, basti pensare a quanto distanti siano i registri semiotici dell'uno e dell'altro*".

Per questo motivo ho messo ben in evidenza il carattere procedurale dell'operazione di derivazione, la quale fa corrispondere ad ogni valore di x i valori di una nuova funzione $f'(x)$ secondo una legge ben determinata. Ritengo che la derivata come operatore sulle funzioni, necessiti di una attenta discussione dal momento che richiede un importante sforzo di astrazione. Tra le diverse regole di derivazione presentate, ho posto maggiormente l'attenzione sulla derivazione di una funzione composta e di una funzione inversa. Tali regole sono tra gli scogli più difficili per gli studenti e sono fonte di continui errori negli esercizi. Ho proposto poi alcune esercitazione con Derive e con il foglio elettronico nella convinzione che le nuove tecnologie informatiche, come ogni strumento, incorporando sapere, possono costituire importanti mediatori nel processo di acquisizione di conoscenza, offrendo all'insegnante l'opportunità di costruire ambienti di apprendimento adeguati alle esigenze degli studenti e agli oggetti di studio. Infine ho presentato applicazioni del calcolo differenziale ad alcune problematiche fisiche ed economiche che hanno lo scopo di far intravedere le molteplici connessioni di questa parte della matematica con le altre discipline e, in genere, con le scienze.

Bibliografia:

- Paola D., *Nuove tecnologie e studio delle grandezze che variano*, 2006.
- Paola, D. 2005, *L'insegnamento apprendimento del Calculus e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano, Progetto Alice*, vol. VI, n. 16 43 - 87.
- Boieri P., Dané C. (2006) *Un approccio grafico alla derivata e alle sue proprietà (prima e seconda parte), La Matematica e la sua didattica, 20, 470-484, 674-688.*
- Michele Impedovo, *Rinnovare i piani di studio di matematica*, Nuova Secondaria , N. 6 2006, Anno XXIII.
- P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica Uno*, Liguori Editore, Napoli, 1998.
- C. B. Boyer, "*Storia della matematica*", Oscar Saggi Mondatori, Milano, 2002.

- M. KLine, "*Storia del pensiero matematico*", edizione italiana a cura di Alberto Conte. - Torino : Einaudi, 1996.

Entrambi questi ultimi due testi, sono costruiti con l'intento di presentare le idee oltre ai protagonisti della matematica. Le storie presentate, hanno il duplice pregio dell'esaustività e della chiarezza. Esse prevedono infatti vari livelli di lettura: lo specialista (l'insegnante in particolare) vi trova una messe di dati, fonti e spunti di ricerca, mentre lo studente ha a disposizione un formidabile strumento di consultazione e sintesi.

- L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, "*Matematica tre*" nuova edizione, Etas Libri, Milano, 2001.

L'introduzione delle derivate del testo Lamberti completa l'introduzione formale alle derivate di questo lavoro e riporta numerosi e significativi esempi, anche se, a mio avviso ha alcune lacune come quella di non esplicitare bene il passaggio dalla derivata in un punto alla funzione derivata. Fornisce comunque gli esercizi necessari per il consolidamento dello strumento matematico delle derivate.

- Maraschini, Palma, "Format, Sci, *La formazione matematica per il triennio*, Liceo Scientifico 3", Paravia 2005.

Questo testo si discosta dalla impostazione tradizionale della maggior parte dei libri. Per lo sviluppo della teoria delle derivate parte da problemi concreti, della quotidianità per poi passare alle definizioni formali. E' un testo da cui, a mio avviso si può prendere spunto, ma di difficile comprensione per gli studenti.

- M. Battelli, *Analisi matematica e informatica; laboratorio di matematica e di informatica*. Nuova ed., Grassina, Bagno a Ripoli: Le Monnier, 1995.

Sono rimasta positivamente colpita dall'impostazione di questo testo, che prima di questo lavoro non avevo avuto modo di consultare. Il testo è ricco di osservazioni, note e riflessioni che sono distribuite lungo tutta l'unità dedicata alla teoria delle derivate, con lo scopo di puntualizzare gli argomenti trattati, di approfondire gli aspetti più rilevanti, di indicarne le possibili applicazioni e di stimolare ulteriori considerazioni e spunti di riflessione. Ho notato una particolare cura nella disposizione e nella stesura delle illustrazioni e rappresentazioni grafiche, che come sempre non sono un "corollario" aggiuntivo della trattazione ma costituiscono esse stesse parte integrante e fondamentale di un discorso didattico. Numerosi sono poi gli esercizi proposti opportunamente graduati e che riguardano tutti i contenuti che vengono affrontati nella teoria.

- M. Bergamini - A. Trifone, *Le derivate e lo studio delle funzioni* modulo V, Zanichelli, 2000.

E' un testo che propone la materia in un modo meno formale del solito ed è accattivante per lo studente. Molto ricco di figure e note storiche.

Sitografia:

http://www.math.unifi.it/archimede.html

http://www.batmath.it/matematica/a_derivate/intervallo.html

Allegato 1.

VERIFICA SOMMATIVA DELLA PRIMA UNITÀ DIDATTICA: (Tempo assegnato 2 ore)

Esercizio 1

Utilizzando la definizione, determinare la derivata delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato a fianco. (7 punti)

$y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}, \quad x_0 = -1$

$y = \ln(x + 3), \quad x_0 = 1$

Esercizio 2

Calcola le derivate delle seguenti funzioni: (9 punti)

$y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$

$y = \log_e\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$y = (xe^x - 1)^2$

Esercizio 3: (3 punti)

Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = tg\,4x$ nel suo punto P di ascissa $x = 0$.

Esercizio 4 (7 punti)

a) Studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione nel punto indicato a fianco.

$y = \sqrt{x}, \qquad x = 0$

b) Dopo aver disegnato il grafico della seguente funzione, studiare la continuità e la derivabilità.

$$y = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & x < -1 \\ x^2 + 1 & -1 \le x < 0 \\ \cos x & 0 \le x \le \pi \\ x & x > \pi \end{cases}$$

Esercizio 5 (4 punti)

Sia $s(t)=3t^2 - \log_e(2+t)$ l'equazione oraria del moto di un oggetto con t variabile tempo ed s variabile spazio. Determinare la funzione velocità. Determinare la velocità dell'oggetto agli istanti t=0,1,2,3 secondi.

GRIGLIA PER LA VALUTAZIONE:

La valutazione della verifica sommativa è determinata in base al punteggio attribuito ad ogni esercizio che ne fa parte. Le differenze di punteggio attribuite agli esercizi rispecchiano le

differenze da essi richieste a livello di conoscenze competenze e capacità. Nell'attribuzione del punteggio si tiene conto dei seguenti indicatori:

i. Conoscenze specifiche.

ii. Competenze nell'applicare le procedure ed i concetti acquisiti.

iii. Capacità logico e argomentative.

iv. Completezza della risoluzione.

v. Correttezza della risoluzione e dell'esposizione.

Nel caso di errore nello svolgimento degli esercizi si attribuisce solo parte del punteggio completo previsto per essi. La griglia di valutazione permette di attribuire un punteggio più oggettivo agli esercizi ed evitare disparità di giudizio del lavoro degli studenti.

La griglia fornisce soltanto un punto di partenza per la proposta di voto:

l'attribuzione del voto dipende anche dall'andamento generale della classe, quindi l'ultima colonna è soltanto indicativa.

Griglia di valutazione:

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

PUNTEGGIO GREZZO (totale 30)	**VOTO IN DECIMI** (ottenuto con la proporzione)	**VOTO IN DECIMI** (proposta di voto)
1 – 3	0 – 1	3
4 - 6	1 – 2	
9 - 9	2 – 3	
13 - 15	3 – 4	4
16 - 18	4 – 5	5
19 - 21	5 – 6	6
22 - 24	6 – 7	7
25 - 26	7 – 8	8
27 - 38	8 – 9	9
29 - 30	9 – 10	10

Allegato 2.

Attività di laboratorio: Le derivate con Excel:

Costruiamo un foglio elettronico che determini l'equazione della tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{6-3x}{3+x}$ in un suo punto *T* e che tracci i grafici della funzione e della tangente trovata. Come ascissa prendiamo a titolo di esempio il valore 2.

Analisi del problema:

Innanzitutto dobbiamo controllare se il punto T appartiene al dominio della funzione.

Calcoliamo il valore della derivata in T sostituendo in $f'(x_T) \approx \frac{f(x_T + h) - f(x_T)}{h}$ un valore di *h* considerato "piccolo". Determiniamo l'equazione della tangente in *T* per mezzo della formula $y = f(x_T) + f'(x_T)(x - x_T)$. Infine tracciamo i grafici. Per tracciarli chiediamo gli estremi dell'intervallo di variazione della *x*; controlliamo che l'intervallo appartenga al dominio, stabiliamo il numero dei punti da rappresentare nel grafico (ad esempio 16 punti), calcoliamo il passo della *x* e i corrispondenti valori della funzione e delle ordinate della retta tangente.

La costruzione del foglio:

Entriamo in ambiente Excel e, tenendo conto dell'analisi svolta, dobbiamo costruire un foglio che:

1. riceva e controlli l'ascissa del punto T,
2. determini l'equazione della retta tangente,
3. richieda e controlli gli estremi di variazione della x
4. carichi una tabella di valori dalla quale ricavare i grafici.

Prima di tutto inseriamo:

a) nella cella E3, il valore della ascissa di T, che a titolo di esempio abbiamo preso uguale a 2.

b) nella cella E5 il valore di h=0,000001 (che abbiamo considerato molto piccolo in modo tale da approssimare quanto più possibile la derivata della funzione al rapporto incrementale).

1. Nella cella C7, scriviamo la seguente istruzione:

=SE(E3=-3;"il punto non appartiene al dominio della funzione";(4-2*E3)/(2+E3))

la quale istruzione controlla che l'ascissa di T non sia il valore -3 che è escluso dal dominio (nel qual caso avvisa con i messaggio: "il punto non appartiene al dominio della funzione") e determina il valore $f(x_T)$.

- Nella cella C9 scriviamo l'istruzione:

=SE(VAL.NUMERO(C7);((6-3*(E3+E5))/(3+E3+E5)-C7)/E5;"=")

che controlla se in C7 abbiamo inserito un numero e calcola il valore $f'(x_T)$.

2. Nella cella D11 scriviamo l'istruzione:

=SE(VAL.NUMERO(C7);"è";"NON ESISTE")

che controlla se in C7 abbiamo inserito un numero e quindi ci dice se è possibile trovare l'equazione della tangente nel caso contrario restituisce la frase "NON ESISTE".

-Nella cella A12 scriviamo l'istruzione:

=SE(VAL.NUMERO(C7);"y=";"")

che controlla se in C7 abbiamo inserito un numero e quindi inserisce la scritta "y =" nel caso contrario non scrive nulla.

- Nella cella B12 scriviamo l'istruzione:

=SE(VAL.NUMERO(C7);C9;"")

che controlla se in C7 abbiamo inserito un numero e quindi inserisce il valore della casella C9 (cioè il valore di $f'(x_T)$) nel caso contrario non scrive nulla.

-Nella cella C12 scriviamo l'istruzione:

=SE(VAL.NUMERO(C7);"*x+";"")

che controlla se in C7 abbiamo inserito un numero e quindi inserisce la scritta "x+" nel caso contrario non scrive nulla.

- Nella cella D12 scriviamo l'istruzione:

=SE(VAL.NUMERO(C7);-C9*E3+C7;"")

che controlla se in C7 abbiamo inserito un numero e quindi inserisce il termine noto dell'equazione della retta tangente. In caso contrario non scrive nulla.

3. Nelle caselle B15 e D15 rispettivamente, carichiamo gli estremi di variazione della *x*, ossia x_1=-1 e x_2= 6,5.

E digitiamo nella cella D17:

=SE(E(F15>0;O(B15>-2;D15<-2));"sono accettabili";"non accettabili")

Che permette di controllare che l'intervallo in cui varia il parametro *x* non contenga il valore -2 escluso dal dominio.

4. Per caricare la tabella usiamo la seguente altra istruzione:

In H5 l'istruzione =B15

In H6 l'istruzione =H5+$F$15 e poi la copiamo sino alla H20

In I5 l'istruzione =(4-2*H5)/(2+H5) e la copiamo sino alla I20

In J5 l'istruzione =$B$12*H5+$D$12 e la copiamo sino alla J20

Otteniamo il seguente foglio:

L'equazione della tangente alla funzione f(x)=(6-3x)/(3+x)

Inserisci l'ascissa di T x di T = 2

Inserisci il valore di h h = 1E-07

In T la funzione vale 0

In T la derivata vale -0,59999999

L'equazione della tangente è
y= -0,6 *x+ 1,2

Inserisci gli estremi di variazione della x
x1 = -1 x2 = 6,5 delta x 0,5

Gli estremi di variazione della x sono accettabili

la tabella per il grafico		
x	f(x)	la tangente
-1	6	1,79999996
-0,5	3,333333	1,49999997
0	2	1,19999998
0,5	1,2	0,89999998
1	0,666667	0,59999999
1,5	0,285714	0,29999999
2	0	0
2,5	-0,22222	-0,3
3	-0,4	-0,6
3,5	-0,54545	-0,9
4	-0,66667	-1,2
4,5	-0,76923	-1,5
5	-0,85714	-1,8
5,5	-0,93333	-2,1
6	-1	-2,4
6,5	-1,05882	-2,6999999

Il grafico della funzione e della tangente

- Per tracciare il grafico della funzione e della tangente, evidenziamo la zona H4:J20 e facciamo clic sul bottone Creazione Guidata Grafico. Nella prima finestra scegliamo il tipo: Dispers.(XY), Dispersione con coordinate unite da linee smussate e senza indicatori di dati. Nella seconda e nella terza finestra confermiamo le proposte di Excel, basate sulla zona che abbiamo selezionato prima di dare il comando grafico. Nella quarta scegliamo di inserire il grafico come oggetto nel foglio di lavoro 1. Per effettuare delle variazioni al grafico, apriamo delle finestre di dialogo con un clic con il tasto destro del mouse sulle parti che desideriamo cambiare. Ad esempio, per far diventare bianco il colore dello sfondo, facciamo clic con il tasto destro sull'area di disegno. Nella finestra di dialogo selezioniamo Formato area del tracciato, Motivo, Personalizzato e sulla tavolozza dei colori che appare clicchiamo sul colore bianco.
- Possiamo anche trovare e rappresentare altre tangenti alla funzione data andando ad inserire diversi valori per l'ascissa del punto *T* nella cella E2 e due opportuni estremi per l'intervallo di variazione della *x* in B15 e in D15.

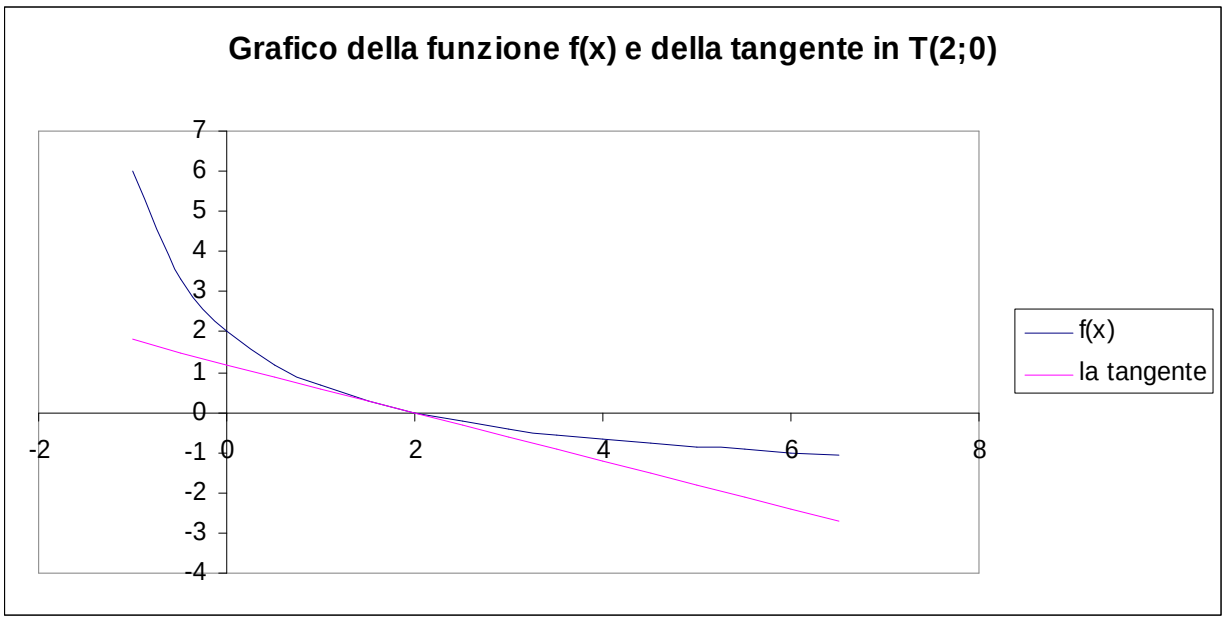


Grafico della funzione f(x) e della tangente in T(2;0)
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
0
2
4
6
8
f(x)
la tangente

This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.