UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FERRARA

Scuola Di Specializzazione Per L'insegnamento Secondario

CLASSE DI SPECIALIZZAZIONE A049-A059

Tema:

Progressioni Aritmetiche e Geometriche. Successioni. Limite di una Successione. Funzioni Esponenziali e Logaritmiche, equazioni e disequazioni Esponenziali e Logaritmiche.

Docenti.:
Prof. Fabiano Minni
Prof. Davide Neri
Prof. Luigi Tomasi

Specializzanda:
Serena Bezzan

VIII° Ciclo - Anno Accademico 2006-2007
Data di Esposizione: 14 Febbraio 2008

Questo percorso didattico è rivolto ad una classe di Liceo Scientifico ad indirizzo PNI e si articola nelle tre seguenti unità didattiche:

- Progressioni aritmetiche e geometriche. Successioni;
- Limite di una successione;
- Funzioni esponenziali e logaritmiche; equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

Queste unità didattiche si dovranno svolgere in due anni scolastici distinti come indicato dai ***programmi PNI***. Infatti le tre unità didattiche appartengono a tre temi distinti:

- TEMA 2: “Insiemi numerici e strutture”
  2b. (Principio di Induzione) Progressioni aritmetiche e geometriche. Successioni numeriche. Questa unità didattica è prevista in classe terza;
- TEMA 3: “Funzioni ed equazioni”
  3d. Logaritmo e sue proprietà. Funzione esponenziale e logaritmica. Questa unità didattica è prevista in classe quarta;
- TEMA 7: “Analisi infinitesimale”
  7a. Limite di una successione numerica. Questa unità didattica è prevista in classe quarta;

Nei commenti ai temi, non si pone poi l’accento alle progressioni aritmetiche e geometriche, né alle successioni numeriche.
Per quanto riguarda invece le funzioni logaritmo ed esponenziale, si consiglia di limitare ai casi più semplici gli esercizi di applicazione e di utilizzare gli strumenti di calcolo per trovare il logaritmo di un numero.
Infine, per il concetto di limite, (e di derivabilità e integrabilità) si invita ad introdurre tale concetto da un “ventaglio quanto più ampio possibile di loro impieghi in ambiti matematici ed extramatematici ed arricchita dalla presentazione ed illustrazione di opportuni controesempi che serviranno a chiarire i concetti stessi”.

Per quanto riguarda i programmi proposti dall’***UMI in “Matematica 2003”***, tutte le unità didattiche rientrano nel nucleo tematico “Relazioni e Funzioni”. Le unità didattiche sono previste nel secondo biennio e vengono commentate come segue:

Abilità	**Conoscenze**
Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni e disequazioni.	La funzione esponenziale; la funzione logaritmica; (le funzioni seno, coseno, tangente). I loro grafici.
Possedere il senso intuitivo di “limite di una successione”	Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite. Il numero e.

Non vi è cenno alle progressioni geometriche e aritmetiche.

UNITA' DIDATTICA

PROGRESSIONI ARITMETICHE E GEOMETRICHE.

Destinatari

L'unità didattica è rivolta ad una classe terza di un Liceo Scientifico ad indirizzo PNI.

Prerequisiti

- Operazioni, ordinamento e loro proprietà nell'insieme dei numeri naturali e interi
- Funzioni reali
- Equazioni di primo e di secondo grado

Accertamento dei prerequisiti

Nei programmi del PNI le progressioni aritmetiche e geometriche costituiscono uno sviluppo dello studio delle proprietà dell'insieme dei numeri naturali; le conoscenze su tali prerequisiti sono dunque state accertate di recente tramite la verifica sommativa di quella unità didattica.
Per quanto riguarda le funzioni e le equazioni, tali argomenti sono trasversali a tutto il curricolo di matematica; si ritengono sufficienti due ore di lezione in forma dialogica, volta al recupero delle capacità di manipolazione delle formule, al fine di risolvere le equazioni di primo e secondo grado, e delle conoscenze sul concetto di funzione.

Obiettivi generali

- promuovere le facoltà sia intuitive che logiche
- rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura
- educare ai procedimenti di astrazione e di formalizzazione dei concetti
- educare a ragionare induttivamente e deduttivamente
- sviluppare le attitudini sia logiche che sintetiche
- abituare alla precisione del linguaggio e alla coerenza argomentativa
- operare con il simbolismo matematico riconoscendo le regole sintattiche di trasformazioni di formule
- sviluppare l'interesse degli studenti per gli aspetti storico epistemologici della matematica e condurli ad inquadrare storicamente la nascita e l'evoluzione dei concetti matematici
- condurre ad un appropriato utilizzo del lessico matematico

Obiettivi trasversali

- acquisire abilità di studio
- produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti;
- valutare l'opportunità di ricorrere ai mezzi tecnologici disponibili per ragionare sulle situazioni problematiche proposte
- abituare a rispettare i tempi di consegna dei lavori
- sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative.

Obiettivi specifici
Gli obiettivi specifici sono suddivisi in *conoscenze* e *abilità*.

Conoscenze
- conoscere il concetto di successione numerica;
- conoscere la definizione di progressione aritmetica;
- conoscere la formula per il calcolo del termine ennesimo di una progressione aritmetica;
- conoscere la legge per calcolare la somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica;
- conoscere la definizione di progressione geometrica;
- conoscere la legge che lega due termini qualsiasi della progressione geometrica
- conoscere le formule per calcolare il prodotto e la somma di termini consecutivi di una progressione geometrica.

Abilità
- saper definire una successione per ricorrenza o in modo analitico;
- saper valutare se una successione è una progressione aritmetica;
- saper dimostrare la formula per calcolare la somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica;
- saper valutare se una successione è una progressione geometrica;
- saper ricavare le formule che legano due termini qualsiasi di una progressione aritmetica o geometrica;
- saper dimostrare le formule per calcolare il prodotto e la somma di termini consecutivi di una progressione geometrica;
- saper applicare il concetto di progressione ad alcune situazioni economiche e fisiche.

Metodologia didattica

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.
Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).
Verranno discussi e confrontati insieme gli esercizi che hanno apportato incertezze e problemi. Si svolgerà attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Derive; in queste occasioni si preferirà il lavoro di gruppo, le esercitazioni guidate ma anche quelle autonome.

Strumenti utilizzati:

- Libro di testo
- Lavagna e gessi
- Calcolatrice scientifica
- Riga e squadre
- Fotocopie
- Software didattici come Derive.

Controllo dell'apprendimento:

Il controllo dell'apprendimento sarà effettuato mediante *verifiche formative* e *verifica sommativa*.
Le *verifiche formative* consistono nel controllo degli esercizi assegnati per casa, la correzione alla lavagna degli stessi, effettuato dagli allievi, la discussione in classe dei problemi incontrati nello svolgimento degli esercizi e nello studio della teoria, qualche domanda durante le lezioni, lo svolgimento di qualche esercizio alla lavagna.
Le *verifiche sommative* consistono in prove orali e prove scritte.
Le *prove orali* serviranno al docente per valutare non solo la teoria appresa dai ragazzi, ma verrà chiesto anche lo svolgimento di qualche esercizio e verranno fatte domande riguardanti le attività di laboratorio.
La *prova scritta*, della durata di due ore, sarà svolta al termine dell'unità didattica e ha soprattutto il compito di valutare le abilità e permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti.

Valutazione:
Per determinare il voto della verifica sommativa attribuiamo ad ogni esercizio un punteggio.
La diversità di punteggio rappresenta un diverso livello di difficoltà in termini di <u>conoscenze</u> e <u>abilità</u>.
Per attribuire il punteggio teniamo conto dei seguenti indicatori:

- Conoscenze specifiche
- Competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti
- Capacità logiche ed argomentative
- Completezza della risoluzione
- Correttezza della risoluzione e dell'esposizione

Naturalmente, nel caso di errore nello svolgimento dell'esercizio, verrà attribuito solo parte del punteggio completo. Per fare questo, si stabilirà di volta in volta, a seconda della gravità dell'errore commesso, quanto farlo pesare e di quanto abbassare il punteggio.
Fatto questo, applicheremo la stessa diminuzione di punteggio a ciascun studente che avrà fatto lo stesso errore.

Recupero:

Per gli studenti che trovano difficoltà nell'apprendimento, verranno svolte attività pomeridiane, ossia gli "sportelli", che consistono in esercitazioni mirate al singolo studente.

Tempi previsti per l'intervento didattico:

o Ripasso e accertamento dei prerequisiti	2h
o Successioni	1h
o Progressioni aritmetiche	2h
o Calcolo del termine ennesimo	1,5h
o Somma dei primi n termini	1,5h
o Applicazioni	1
o Progressioni geometriche	2h
o Calcolo del termine ennesimo	1,5h
o Somma e prodotto dei primi n termini	1,5h
o Applicazioni	1h
o Attività con Derive	2h
o Verifica sommativi	2h
o Consegna e correzioni verifiche	1h

Per un totale di 20h (quattro settimane).
La previsione è da ritenersi elastica, in quanto si deve tenere conto delle necessità degli studenti.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

Le successioni

Considerazione l'insieme dei numeri naturali. Osserviamo che la sequenza 1, 2, 3, 4, 5…. non ha termine, perché dopo qualunque numero naturale n si può scrivere il numero naturale successivo n+1; questa proprietà deriva dal fatto che vi sono infiniti numeri naturali ed anzi i numeri naturali rappresentano l'esempio più semplice di insieme contenente un numero infinito di elementi.
Consideriamo ora una qualsiasi funzione che ad ogni numero naturale associa un ben determinato numero reale. Sia, per esempio, g definita come segue:

$$g : N \to R$$
$$n \to \frac{2n+1}{3}$$

La funzione g fa corrispondere ai numeri naturali una sequenza di numeri reali:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & , & 2 & , & \ldots\ldots\ldots & , & n & , & . \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ g(0)=\frac{1}{3} & g(1)=1, & & g(2)=\frac{5}{3}, & & & & g(n)=\frac{2n+1}{3} & & \end{array}$$

La sequenza 1, $\frac{5}{3}$…. è dunque una sequenza infinita di numeri reali e costituisce un esempio di <u>successione numerica;</u> l'aggettivo numerica sta a significare che tutti i termini della sequenza sono dei numeri.

Cerchiamo ora di generalizzare il ragionamento precedente. Sia f una qualsiasi legge che ad ogni numero naturale $n \neq 0$ faccia corrispondere un ben determinato numero reale, che per comodità di scrittura, possiamo indicare con a_n, cioè una lettera dell'alfabeto, munita di un indice che può assumere i valori in N. Allora la legge f trasforma l'insieme numerico

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n-1,\ n,\ \ldots\ldots$$

nell'insieme numerico

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots..,\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots\ldots.$$

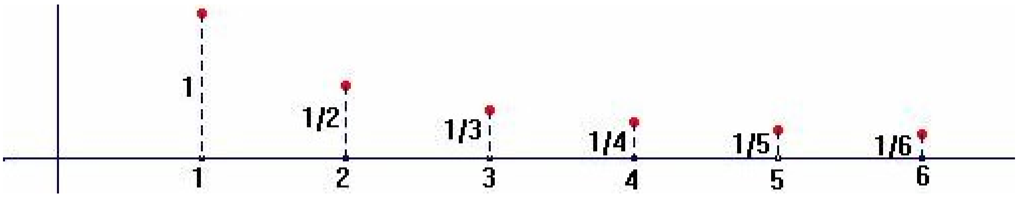
Si dice allora che gli elementi di quest'ultimo insieme (che sono dei numeri reali), costituiscono una **successione.** Tale notazione suggerisce il fatto che a_1 , cioè il

valore assunto dalla funzione in 1, può essere pensato come il primo elemento di una "fila di numeri"; allo stesso modo a_2 ne è il secondo elemento, e così via.
E' anche vero il viceversa e cioè che ogni fila di numeri può essere pensata come una funzione che fa corrispondere a 1 il primo elemento della fila, a 2 il secondo, ecc…

Nota Didattica:
Sottolineiamo ai ragazzi, che ogni successione è un insieme ordinato di numeri, nel senso che ne conosciamo il primo termine, il secondo, il terzo, …. .
L'insieme di numeri reali [0,1] invece non costituisce una successione, perché, posto 0 il primo termine, non è chiaro chi ne sia il secondo, chi il terzo.

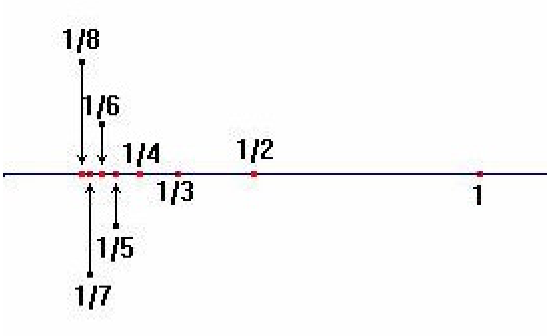
Per visualizzare graficamente una successione, abbiamo a disposizione due metodi. Di seguito li presentiamo con riferimento alla successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

PRIMO METODO



Questo tipo di visualizzazione mette in evidenzia che una successione è una funzione e cioè che a ogni numero naturale (in questo caso, non nullo) n, corrisponde uno e un solo ben determinato valore. Il dominio della funzione è N_0 e dunque **la variabile *n* non varia in modo continuo, ma discreto.**

SECONDO METODO



Questa visualizzazione fa invece notare come i termini della successione costituiscono un insieme numerico: l'insieme $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$

Anche per rappresentare una successione dal punto di vista algebrico, esistono diverse modalità; quella più immediata consiste nell'***esplicitare uno ad uno alcuni termini della successione***. Data l'impossibilità di scrivere infiniti numeri, questo modo ha l'evidente limite pratico che permette una conoscenza solo parziale della successione; tuttavia esso è l'unico utilizzabile per indicare la successione quando non si conosce a priori l'esito di un certo evento. Per conoscere il valore del termine a_{49} dovremo infatti attendere il risultato del quarantanovesimo evento.
Un modo più efficace per rappresentare una successione consiste, se possibile, nel ***definire astrattamente la legge*** che, ad ogni numero naturale n, fa corrispondere il numero a_n; diremo allora che la successione è definita *analiticamente*. Utilizzando l'esempio proposto all'inizio, per definire la successione, si può quindi scrivere:

$$a_n = \frac{2n+1}{3}$$

Esempi:

- Sia data la successione $a_n=2n+1$ con n numero naturale.
  Si ha che i primi termini della successione sono:
  $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, ...
  Tale successione rappresenta, i numeri dispari.
- Sia data la successione $a_n = \frac{1}{2n}$ definita per ogni valore di $n \neq 0$.
  I primi termini della successione sono:
  $a_1 = \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{1}{4},\quad a_3 = \frac{1}{6},\quad a_4 = \frac{1}{8},$..............
- Sia data la successione $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$ definita per ogni valore di $n \neq 0$.
  Calcoliamo i primi sei termini della successione:
  $a_1 = -2,\quad a_2 = \frac{3}{2},\quad a_3 = -\frac{4}{3},\quad a_4 = \frac{5}{4},$...............

Un terzo modo per definire una successione è quello della ***ricorrenza***: esso consiste nell'assegnare il primo termine e la legge che lega due termini consecutivi.

Esempio:

Siano assegnati $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases}$.

Allora il primo termine della successione è già assegnato, 1. Per calcolare a_1 occorre andare a sostituire tale valore nella formula ricorsiva:

$a_1 = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$. Poi $a_2 = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}$ ecc…

Nota Didattica

Facciamo notare ai ragazzi che una stessa successione può essere definita sia analiticamente, sia per ricorrenza. Questo vuol dire che **non è la successione ad essere analitica o ricorsiva, ma il modo in cui essa viene definita**.

Si faccia inoltre notare che, se la successione è definita ricorsivamente, per conoscere un suo termine occorre calcolare tutti i precedenti; se invece la successione è definita in modo analitico, il termine ennesimo si può calcolare direttamente a partire da *n*.

La successione $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$ può essere definita anche nel modo seguente: $a_n = 3^n$.

Si osservi che, per calcolare a_{20} quest'ultima definizione è immediata.

Progressioni aritmetiche

Prendiamo in esame ora la seguente successione $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 1 + 2n \end{cases}$. Calcoliamo quindi i termini della successione: $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$, $a_2 = 1 + 2 \cdot 2 = 5$, $a_3 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$, $a_4 = 1 + 2 \cdot 4 = 9$

....

Mettiamo ora i termini in successione: 1, 3, 5, 7, 9… e cerchiamo di far ragionare gli studenti. Basterà chieder: quale proprietà lega questi numeri? Posso già affermare quale sarà il prossimo termine? I ragazzi dovrebbero notare che i termini della suddetta successione si differenziano tutti di 2. Quindi è facile dire che il prossimo termine assumerà valore 11.

Questa successione acquisisce un nome, cioè progressione aritmetica. Con più rigore possiamo affermare che:

In generale, ogni successione di tre o più numeri tali che sia **costante la differenza tra ciascuno di essi** (eccetto il primo) e il precedente si definisce **progressione aritmetica**.

La differenza costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama **ragione**.

Nel nostro semplice esempio, la ragione è 2.

Siano ora *a* e *b* due termini consecutivi di una progressione aritmetica di ragione d: esplicitiamo il legame tra *a* e *b*. Per definizione di ragione si ha che $b - a = d$, da cui

$$b = a + d \quad e \quad a = b - d$$

Quindi, in una progressione aritmetica, un termine qualunque si ottiene dal precedente aggiungendo a quest'ultimo la ragione, oppure si ottiene dal seguente sottraendogli la ragione.

Da questa proprietà segue che, se la ragione è positiva, la progressione è crescente in quanto ogni termine è maggiore del precedente; se la ragione è negativa, la progressione è decrescente perché ogni termine è minore del precedente; se infine la ragione è zero, la progressione è costante, cioè è costituita da numeri tutti uguali tra loro.

Calcolo del termine n-simo di una progressione aritmetica

A questo punto osserviamo che una progressione aritmetica è univocamente determinata, una volta che se ne conosce il primo termine a_1 e la ragione d. Infatti, si avrà:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

In generale, se si cerca il termine ennesimo della progressione aritmetica, intuitivamente si comprende che occorre aggiungere al primo termine (n-1) volte la ragione, cioè vale il seguente:

Teorema: Il termine ennesimo di una progressione aritmetica è uguale alla somma che ha come addendi il primo temine e il prodotto della ragione per il numero di termini che precedono a_n.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Dimostrazione: Possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
&a_2 - a_1 = d\\
&a_3 - a_2 = d\\
&a_4 - a_3 = d\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1} - a_{n-2} = d\\
&a_n - a_{n-1} = d
\end{aligned}
$$

Sommando membro a membro queste n-1 uguaglianze, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&a_n - a_1 = (n-1)d\\
&a_n = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Se invece del primo termine, è noto un termine qualunque della progressione, è possibile calcolare, tramite la ragione un altro termine?
La risposta è data da un corollario del teorema precedente.
Siano, infatti, a_r e a_s due termini qualunque della progressione. Allora

$$a_r = a_1 + (r-1)d \text{ e } a_s = a_1 + (s-1)d \ .$$

Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda si ottiene:

$$a_s - a_r = a_1 + (s-1)d - a_1 - (r-1)d = (s-r)d \ ,$$

da cui

$$\boxed{a_s = a_r + (s-r)d}$$

Naturalmente questa relazione vale anche se ***s<r***.

Esempi:

- Sia $a_1 = 5$ il primo termine di una progressione aritmetica di ragione $d = 4$; quanto vale a_8?
  Per rispondere a questa domanda, basta applicare la formula per in calcolo del termine ennesimo: $a_8 = 5 + (8-1) \cdot 4 = 5 + 28 = 33$

- In una progressione aritmetica siano $a_{10} = \dfrac{61}{12}$ e $a_{30} = \dfrac{121}{12}$; quanto vale a_3?

Applicando due volte l'ultima formula, $d = \frac{a_{30} - a_{10}}{30 - 10} = \frac{\frac{121 - 61}{12}}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

$a_3 = \frac{61}{12} + (3 - 10) \cdot \frac{1}{4} = \frac{61}{12} - \frac{7}{4} = \frac{61 - 21}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$.

Somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica

A questo punto vogliamo determinare la somma dei primi *n* termini consecutivi di una progressione aritmetica, conoscendo solo i termini a_1, a_n e il numero *n* dei termini.

Per fare questo dobbiamo prima fare un'osservazione. Consideriamo una progressione aritmetica finita, cioè costituita da un numero finito di termini; se a_1 e a_n sono i termini estremi, allora due termini *f* e *g* si dicono *equidistanti dagli estremi* quando il numero dei termini che precedono *f* è uguale al numero dei termini che seguono *g*. Un esempio chiarirà il concetto:

Esempio: Consideriamo la progressione 4, 6, 8, 10, 12, 14. Le coppie di termini equidistanti sono {4,14}, {6,12}, {8,10}.

Si può inoltre osservare che, nell'esempio precedente, la somma dei termini equidistanti ha sempre lo stesso valore. Infatti 4 + 14 = 6 +12 = 8 + 10 = 18.
Questa proprietà è vera in generale, e non solo nel nostro caso specifico, cioè:

Teorema: In una progressione aritmetica finita la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante, ed è uguale alla somma dei termini estremi.

Dimostrazione: Siano *f* e *g* due termini equidistanti dagli estremi a_1 e a_n di una progressione aritmetica finita.
Se *k* è il numero di termini che precedono *f* e quindi che seguono *g*, si ha

$$a_1 = f - kd$$

$$a_n = g + kd$$

Perciò, sommando membro a membro le due uguaglianze, si ottiene

$$a_1 + a_n = f + g$$

che è quanto basta per concludere.□

Il risultato appena ottenuto ci permette di calcolare la somma S_n dei primi *n* termini di una progressione aritmetica $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ....,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n,\ ....$
Utilizzando la proprietà commutativa della somma possiamo scrivere S_n in due modi diversi:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Sommiamo ora membro a membro queste due uguaglianze. Otteniamo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Le somme indicate tra parentesi sono ora somma di termini equidistanti dagli estremi, e dunque sono tutte uguali a $(a_1 + a_n)$, proprio grazie al teorema appena esposto. Quindi $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n}$$

Otteniamo quindi che la somma dei primi *n* termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma dei termini estremi, moltiplicata per il numero dei termini.

Osserviamo che la somma S_n può essere calcolata anche quando si conoscono <u>il primo termine, la ragione e il numero dei termini</u>. In questo caso, infatti, basta ricavarsi con un passaggio intermedio il termine a_n e poi applicare la formula precedente.

<u>Esempi:</u>

- Calcoliamo la somma dei primi 50 numeri naturali non nulli, ossia calcoliamo la somma:

  1 + 2 + 3 + 4 + ….. + 50.

Gli addendi si possono pensare come i primi 50 termini della progressione aritmetica con $a_1 = 1$; $d = 1$; $a_{50} = 1 + (50 - 1) \cdot 49 = 1 + 49 = 50$.

La somma dei primi 50 numeri naturali diventa allora:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 50}{2} \cdot 50 = 1275.$$

Possiamo generalizzare questo esempio, alla somma dei primi *n* numeri naturali, ossia: $$S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$$

- Data la progressione dei numeri interi dispari, calcolare la somma dei primi 15 termini.

Essendo $a_1 = 1$ e $d = 2$, calcoliamo $a_{15} = 1 + (15 - 1) \cdot 2 = 1 + 28 = 29$.

Allora $$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 29}{2} \cdot 15 = 225.$$

È interessante far osservare ai ragazzi che la somma dei primi *n* numeri dispari consecutivi è uguale a n^2.

Infatti $a_1 = 1$; $d = 2$; $a_n = 1+ (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$.

Allora $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2$.

Progressioni geometriche

Un altro tipo di successioni che trova notevoli applicazioni in campo scientifico è costituito dalla progressione geometrica.

Prima di darne una definizione, cerchiamo di far lavorare i ragazzi con il seguente esempio: Consideriamo la successione delle potenze di base 2 ossia:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …..

Come sono i rapporti tra ogni termine e quello che lo precede? Controlliamo:
2 : 1 = 2
4 : 2 = 2
8 : 4 = 2
16 : 8 = 2
32 : 16 = 2
64 : 32 = 2

Da questi semplici calcoli, possiamo dedurre che il rapporto tra ogni termine e il precedente è sempre 2, quindi è costante.

Nota Didattica
Facciamo un altro esempio, affinché i ragazzi si convincano che si ha una progressione geometrica quando il rapporto fra un termine e il precedente è sempre costante (e non sempre 2 come nel caso precedente!!!).

Consideriamo la successione delle potenze di base 3 ossia:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, …..

Come sono i rapporti tra ogni termine e quello che lo precede? Controlliamo:
3 : 1 = 3
9 : 3 = 3
27 : 9 = 3
81 : 3 = 3
243 : 81 = 3
729 : 243 = 3

Anche in questo caso il rapporto tra ogni termine e il precedente è sempre costante, in questo caso 3. Possiamo quindi concludere che:

Una successione di tre o più numeri, tali che il quoziente tra ciascuno di essi (escluso il primo) e il precedente è costante è una **progressione geometrica**. Il quoziente costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama **ragione**.

Se indichiamo con a il primo termine della progressione, possiamo definire le progressioni geometriche per ricorrenza come segue:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = q \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

ed esplicitando la successione otteniamo:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a \cdot q \cdot q = a \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a \cdot q^2 \cdot q = a \cdot q^3$$

....

In questo modo possiamo ricavare la seguente legge:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a \cdot q^{(n-1)} \end{cases}$$

Esempio:

- La successione $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ è una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{3}$ e la possiamo scrivere come $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} \end{cases}$

Siano ora a e b due termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q; esplicitiamo il legame che intercorre tra a e b. Per definizione di ragione vale $\frac{b}{a} = q$, da cui

$$b = a \cdot q \quad e \quad a = \frac{b}{q}$$

Osserviamo che la ragione deve sempre essere diversa da zero perché, in base alla definizione data, nessun termine della progressione può essere nullo.

In base alle relazioni precedenti, possiamo affermare che un termine qualunque si ottiene dal precedente moltiplicandolo per la ragione, oppure si ottiene dal seguente dividendolo per la ragione.
Da questa proprietà segue che, se la ragione è positiva, tutti i termini della progressione sono di ugual segno; se la ragione è negativa, i termini sono alternativamente di segno opposto.

Un'ulteriore conseguenza delle conclusioni precedenti riguarda il fatto che possiamo studiare una eventuale crescenza o decrescenza della progressione solamente nel caso in cui la ragione è positiva.

- Se $q>1$ ogni termine è maggiore del precedente e dunque la progressione è crescente.
- Se $q=1$ la progressione è costante.
- Se $0<q<1$ ogni termine è minore del precedente e dunque la progressione è decrescente.

Prodotto e somma di termini consecutivi di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica, è possibile avere delle informazioni sul prodotto e la somma dei primi *n* termini consecutivi?

Come nel caso delle progressioni aritmetiche è necessario fare un'osservazione sul prodotto di termini equidistanti dagli estremi. Nella progressione iniziale $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$ le coppie di termini equidistanti $\{1,32\}$, $\{2,16\}$, $\{4,8\}$ sono caratterizzate dal fatto che il prodotto degli elementi di ogni coppia è costante e vale 32. Più in generale è vero che:

Teorema: In una progressione geometrica finita il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante, ed è uguale al prodotto dei termini estremi.

Dimostrazione. Siano f e g due termini equidistanti dagli estremi a_1 e a_n di una progressione geometrica finita.
Se k è il numero di termini che precedono f e quindi che seguono g, si ha

$$a_1 = \frac{f}{q^k}$$

$$a_n = g \cdot q^k$$

Perciò, moltiplicando membro a membro le due uguaglianze, si ottiene

$$a_1 \cdot a_n = f \cdot g \ \square$$

Ci proponiamo ora di calcolare il prodotto P_n dei primi n termini di una progressione geometrica $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ....,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n,\ ....$

Inizialmente limitiamo lo studio al caso in cui tutti i termini siano positivi. Utilizzando la proprietà commutativa del prodotto possiamo scrivere P_n in due modi diversi:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ..... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$
$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ..... \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Moltiplicando membro a membro queste due uguaglianze.

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot ..... \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Per il risultato precedente:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

Ossia, **il prodotto dei primi *n* termini di una progressione geometrica a termini positivi è uguale alla radice quadrata del prodotto dei termini estremi elevato al numero dei termini.**

Se i termini della progressione non sono tutti positivi, allora il secondo membro nella formula precedente rappresenta il *valore assoluto* del prodotto di questi termini:

$$\boxed{|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$$

ed il segno deve essere deciso caso per caso.

Calcoliamo ora S_n la somma dei primi n termini di una progressione geometrica.
Sia quindi $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ....,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n,\ ....$ una progressione geometrica.

Se la ragione $q=1$ sappiamo che la progressione è costante e dunque tutti i termini sono uguali. Ovviamente sarà $S_n = n \cdot a_1$.

Possiamo quindi supporre $q \neq 1$.
Si tratta di calcolare

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n .$$

Riscriviamo la precedente relazione sostituendo ad ogni addendo la sua espressione:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

Moltiplichiamo a destra e a sinistra dell'uguale per q.

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^n$$

Sottraendo da questa la precedente, si ottiene

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1,$$

cioè $S_n\left(1-q\right) = a_1\left(1-q^n\right)$, ed infine

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Se la ragione q>1, per non introdurre segni negativi, si preferisce utilizzare la seguente relazione:

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

<u>Esempi:</u>

- Calcolare il decimo termine e la somma delle prime dieci potenze di ½.

  La progressione geometrica: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ha come primo termine a_1=1 e ragione q=1/2; perciò possiamo calcolare immediatamente:

  $$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}; \qquad \text{e} \qquad s_{10} = a_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\frac{1}{512}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}.$$

- Calcolare la somma dei primi sei termini della progressione geometrica:

  $$4,\ 10,\ 25,\ \frac{125}{2}, \ldots$$

  La progressione ha primo termine a_1= 4 e ragione $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; perciò:

  $$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^6 - 1}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{5187}{8}$$

Le progressioni come modelli matematici di fenomeni naturali, fisici e sociali.

Molti fenomeni naturali, fisici, sociali, ecc., hanno un andamento di crescita o di recessione che si può analizzare mediante modelli matematici espressi da progressioni aritmetiche o geometriche, o generalmente, da successioni.
Se, mediante l’analisi di dati statistici, è possibile rilevare un certo andamento di un fenomeno ad intervalli regolari di tempo (anni, mesi, secondi, ecc.,), si ipotizza un modello matematiche che permetta di “prevedere” il comportamento del fenomeno in futuro.

Già fin dal secolo scorso, gli economisti avevano ipotizzato modelli matematici sullo sviluppo delle risorse naturali e sull'accrescimento della popolazione. Tali modelli rappresentano bene il fenomeno, purché si mantengano le condizioni ipotizzate.
Per quanto riguarda le risorse naturali, molto utilizzato è il modello delle progressioni aritmetiche, nell'ipotesi che ogni anno vi sia un incremento costante, oppure una riduzione costante; cioè quando si hanno problemi di capitalizzazione semplice.
Si tratta di problemi in cui un capitale iniziale produce a scadenza fissa un interesse percentuale, che va ad incrementare la somma inizialmente posseduta.
Se C è il capitale inizialmente investito ed i è il tasso percentuale di interesse, le somme del capitale posseduto aggiornate ad ogni scadenza, costituiscono una progressione aritmetica di ragione iC:

$$C, \qquad C+iC=C\left(1+i\right), \qquad C+2iC=C\left(1+2i\right), \quad ....$$

Il valore del capitale dopo n scadenze sarà dunque $C_n = C\left(1+ni\right)$.

In altri fenomeni, ad esempio biologici, l'accrescimento, o la riduzione, in ogni periodo di tempo è proporzionale al numero delle unità del periodo precedente; per questi fenomeni il modello ipotizzato è quello delle progressioni geometriche. Un esempio di questo tipo, è il seguente:
una popolazione è costituita da 1000 individui. Ogni anno si ha un aumento dell'8% del valore precedente. Quanti individui saranno presenti dopo 6 anni (e quindi al settimo anno)?
Essendo a_1=1000 e q=1+8%=1+0,08=1,08 si ricava: $a_7 = 1000 \cdot 1{,}08^6 = 1587$

Oltre ai problemi di capitalizzazione semplice, si possono anche considerare quelli di capitalizzazione composta se si tiene conto del fatto che anche gli interessi maturano per il futuro nuovi interessi.
Sia quindi C il capitale investito inizialmente al tasso di interesse i. Alla prima scadenza il capitale sarà ancora $C\left(1+i\right)$, ma alla seconda sarà $C\left(1+i\right)+iC\left(1+i\right)=C\left(1+i\right)^2$. Si ottiene così una progressione geometrica di ragione $\left(1+i\right)$, il cui termine ennesimo vale $C_n = C\left(1+i\right)^n$. In economia, il capitale maturato con gli interessi si definisce montante.

Attività di laboratorio con Derive

Il software didattico Derive può essere molto utile all'insegnante per favorire la capacità di rappresentazione e di comprensione delle proprietà delle successioni da parte degli studenti. Di seguito presentiamo alcuni esercizi che possono essere proposti.

1. Considerare la successione definita per via analitica $a_n = \dfrac{2n+1}{4n+1}$. Studiarne l'andamento al variare di n=0,1,2,3,...

   Digitare **f(n):=(2n+1)/(4n+1)** per scrivere il termine generico della successione.
   Digitare **vector([n,f(n)],n,0,20)** e **Simplify** per visualizzare le prime 21 coppie (n,f(n)) dei termini della successione.
   Per visualizzare tali coppie nel piano cartesiano, ciccare con il mouse **Plot, Plot.**

2. Considerare la successione definita per ricorrenza $a_0 = 5$ e $a_n = 1 - \dfrac{1}{a_{n-1}}$.
   Studiarne l'andamento.

   Digitare **f(n):=If (n=0,4,1-1/f(n-1))** per scrivere il termine generico della successione.
   Digitare **vector([n,f(n)],n,0,20)** e **Simplify** per visualizzare le prime 21 coppie (n,f(n)) dei termini della successione.
   Per visualizzare tali coppie nel piano cartesiano, ciccare con il mouse **Plot, Plot.**

3. Considerare la successione di Fibonacci così definita

   $$\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(1) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

   Studiarne l'andamento come illustrato al punto 2. Studiare l'andamento della successione dei rapporti tra un termine della successione di Fibonacci e il precedente.

4. Data la sequenza numerica:

   1,3,9,27,81………

   determinare la funzione di dominio N che associa ad ogni numero naturale il termine ennesimo della sequenza indicata. Usando il comando **vector**, costruire poi la sequenza dei primi 20 termini di ciascuna successione. Studiarne l'andamento come negli esercizi precedenti.

VERIFICA SOMMATIVA

1. Fra le seguenti successioni ci sono progressioni aritmetiche? In tal caso indica il primo termine e la ragione:
   - $a_n = 5 + 2n$
   - $a_n = 2 + \frac{1}{n}$
   - $a_n = -3n$ [6]
2. In una progressione aritmetica si sa che il primo termine è 15, l'ultimo è 5 e la somma dei termini è 310. Determinare il numero dei termini e la ragione. [4]

3. I tre lati di un triangolo sono in progressione aritmetica. Determinare la loro misura sapendo che il perimetro è 24 cm. [4]

4. Dimostrare che se x_0, x_1, x_2 …. sono una progressione geometrica di ragione d, allora i valori della funzione $y=ax+b$ calcolati per x_i sono pure in progressione aritmetica.
   [5]

5. In una progressione geometrica il primo termine è 5 e la ragione è 2; calcolare il prodotto e la somma dei primi 4 termini. E se la ragione fosse –2? [4]

6. I lati di un triangolo sono in progressione geometrica. Sapendo che il perimetro è 76m e il rapporto tra il lato maggiore e la somma degli altri due è $\frac{9}{10}$, trovare le misure dei lati del triangolo.
   [5]

7. Un impresario si impegna, per contratto, alla seguente penalità: 10 euro di penalità per il primo giorno di ritardo di consegna dei lavori, 20 euro per il secondo giorno, 40 per il terzo e così via. Quanto pagherebbe per dieci giorni di ritardo?
   [3]

Griglia di Misurazione

<table>
<tr><th>Punteggio Grezzo
(Totale 31)</th><th>Voto in Decimi
(ottenuto con la proporzione)</th><th>Voto in decimi
(una proposta)</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="4">0-1</td><td rowspan="10">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">2-3</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">3-4</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="3">4-5</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">5-6</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">7</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">7-8</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">8</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="3">8-9</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="3">9-10</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>31</td><td>10</td></tr>
</table>

UNITA’ DIDATTICA
LIMITI DI SUCCESSIONI

Destinatari

L’unità didattica è rivolta ad una classe quarta di un Liceo Scientifico ad indirizzo PNI.

Prerequisiti

- Successioni
- Progressioni aritmetiche
- Progressioni geometriche

Accertamento dei prerequisiti

Gli argomenti svolti nell’unità didattica precedente costituiscono dei prerequisiti necessari per lo svolgimento di quest’unità. L’attività di accertamento sarà dunque volta al recupero dei suoi obiettivi di apprendimento.

Obiettivi specifici

Conoscenze

- ♦ Conoscere la definizione di successione convergente, divergente e indeterminata
- ♦ Conoscere il teorema dell’unicità del limite e il teorema del confronto
- ♦ Conoscere le definizioni delle successioni somma, differenza, prodotto e quoziente
- ♦ Conoscere la definizione di successione monotona
- ♦ Conoscere il principio delle successioni monotone
- ♦ Conoscere la definizione di *e* (numero di Nepero) e di π (pi greco).

Abilità

- ♦ Saper distinguere una successione convergente, divergente o indeterminata
- ♦ Saper dimostrare i teoremi dell’unicità del limite e del confronto
- ♦ Saper calcolare il limite delle successioni somma, differenza, prodotto, quoziente
- ♦ Saper calcolare i limiti delle successioni aritmetiche e geometriche
- ♦ Saper calcolare il limite di una successione monotona
- ♦ Saper verificare il limite di una successione

- ♦ Saper calcolare il limite, se esiste, delle progressioni aritmetiche e geometriche
- ♦ Saper applicare il principio delle successioni monotone per definire nuovi numeri

Tempi dell'intervento didattico

• Accertamento dei prerequisiti	1h
• Limite finito	3h
• Limite infinito	2h e 30 min
• Limiti delle progressioni aritmetiche e geometriche	1h
• Successioni monotone	1h e 30min
• Numero di Nepero	1h
• Verifica sommativi	1h
• Correzione e consegna della verifica sommativi	1h

Per un totale di 12h .
La previsione è da ritenersi elastica, in quanto si deve tenere conto delle necessità degli studenti.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

Limite finito di successioni

Per introdurre l'argomento dell'unità didattica chiediamo agli studenti di provare a descrivere l' "andamento" della successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$; tali valori mostrano un comportamento disordinato oppure si avvicinano sempre di più ad un particolare valore?
Consideriamo un altro esempio: il numero decimale periodico $9,\overline{2}$ ha come frazione generatrice $\frac{92-9}{9} = \frac{83}{9}$. I valori di tale numero, troncati all'ennesima cifra decimale, costituiscono una successione i cui elementi sono

9 9,2 9,22 9,222 9,222 9,2222

cioè $a_n = 9{,}222.....2$, con *n* cifre decimali.

Sappiamo che gli elementi di tale successione sono approssimazioni per difetto di $\frac{83}{9}$, e che tali approssimazioni si avvicinano sempre più al crescere di *n* al valore esatto.

Questo fatto si esprime dicendo che, al tendere di n a $+\infty$, a_n tende a $\frac{83}{9}$ oppure dicendo che la successione ha per limite $\frac{83}{9}$.

Vogliamo enunciare esattamente il significato di quanto appena detto.

Man mano che procediamo nella successione, nessuno dei termini assume effettivamente il valore $\frac{83}{9}$, ma se si va ***abbastanza lontano***, si può essere sicuri che ciascuno dei termini differirà da $\frac{83}{9}$ ***tanto poco quanto si vuole***.

Cosa significa questo in termini matematici?

Significa che le ***distanze*** dei termini a_n da $\frac{83}{9}$ possono essere rese ***più piccole di qualunque numero positivo prefissato***, a condizione di considerare ***valori di n abbastanza grandi.***

In generale, il ragionamento per verificare che una successione ammette limite è questo: si fissa dapprima un numero positivo ε, non importa quanto piccolo, e successivamente bisogna trovare un numero intero n_ε tale che tutti i termini della successione per cui $n > n_\varepsilon$ avranno distanza dal limite minore dell' ε fissato.

Si dice che una successione $\{a_n\}$ ammette il **limite *l*** e si scrive:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

se, fissato comunque un numero positivo ε, esiste in corrispondenza di esso un $n_\varepsilon \in N$ tale che, per tutti i termini a_n con $n > n_\varepsilon$, sia verificata la disuguaglianza:

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

Se tale limite esiste ed è finito, la successione si dice **convergente.**

Tale definizione può essere interpretata geometricamente, sia su una retta che nel piano cartesiano: per quanto piccolo sia il numero ε, i termini della successione con indice maggiore di n_ε cadono tutti nell'intervallo $(l-\varepsilon\ ;\ l+\varepsilon)$.

Esercizio:

Data la successione $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots., \frac{n}{n+1}, \ldots...$ verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Occorre verificare che l'uguaglianza $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ è verificata da tutti i numeri *n* successivi ad un primo n_ε.

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

Scegliendo dunque n_ε il primo numero intero maggiore o uguale a $\frac{1}{\varepsilon}-1$, la disuguaglianza iniziale è verificata per ogni $n>n_\varepsilon$.

Per esempio, se $\varepsilon=\frac{1}{100}$, $n_\varepsilon=99$ e per ogni *n*>99 si ha

$$-\frac{1}{100}+1<\frac{n}{n+1}<\frac{1}{100}+1$$

L'uguaglianza di destra è ovvia perché ogni termine della successione è minore di 1.

Limite infinito di successione

Consideriamo la successione $a_n=n^3$, i cui primi termini sono 0, 1, 8, 27, 64, 125, ….. Osserviamo che essi diventano sempre più grandi, tali che, comunque si scelga un numero grande *k*, i termini della successione diventano, a partire da un certo indice, *tutti* maggiori di *k*.
In generale si dirà che una successione tende all'infinito quando i suoi termini diventano *definitivamente* maggiori di qualunque numero *k*>0, per quanto grande esso possa essere ossia:

Si dice che una successione $\{a_n\}$ **diverge positivamente** e si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$$

se, fissato comunque un numero positivo *k*, esiste in corrispondenza di esso un $n_k \in N$ tale che, per tutti i termini a_n con $n>n_k$, sia verificata la disuguaglianza:

$$a_n>k$$

Anche in questo caso, naturalmente, la definizione verrà interpretata dal punto di vista geometrico. Sul piano cartesiano, i termini con indice maggiore di n_k saranno tutti più in alto della retta $y=k$.

Analogamente, si ha la definizione di successione che diverge negativamente.

Si dice che una successione $\{a_n\}$ **diverge positivamente** e si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

se, fissato comunque un numero positivo *k*, esiste in corrispondenza di esso un $n_k \in N$ tale che, per tutti i termini a_n con $n > n_k$, sia verificata la disuguaglianza:

$$a_n < -k$$

Le successioni convergenti e divergenti sono dette anche **successioni regolari.**

Si osservi che una successione diverge positivamente se e solo se la successione formata da tutti termini opposti diverge negativamente.

Esercizio:

Dimostrare che la successione $a_n = \dfrac{1-n^2}{n}$ tende a $-\infty$.

Risolviamo la disequazione

$$\frac{1-n^2}{n} < -k \qquad (k \in \Re_0^{\ +})$$

Essendo *n* un numero positivo:

$$1-n^2 < -nk$$

$$n^2 - nk - 1 > 0$$

Questa disequazione è soddisfatta per $n > \dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$.

Il limite è verificato non appena si scelga *n* maggiore del primo numero intero maggiore o uguale a $\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$.

Per quanto riguarda il comportamento delle successioni, esiste infine una terza possibilità; ad esempio, la successione oscillante $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$, non ha limite all'infinito. Le successioni che non sono né convergenti né divergenti si dicono **indeterminate**.

Esempi:

$\left\{(-1)^n\right\}: a_0 = 1, a_1 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1......$
$\left\{(-n)^n\right\}: a_1 = -1, a_2 = 4, a_3 = -27, a_4 = 256....$
Queste successioni sono entrambe indeterminate.

Nota Didattica
Ho deciso di non trattare i teoremi riguardanti i limiti in quanto verranno affrontati in modo più generale e approfondito nella parte dei limiti di funzioni.
Ho pensato di concentrarmi sulla parte riguardante lo studio dei limiti delle progressioni trattate nella prima unità del percorso didattico, e dei limiti delle successioni monotone.

Progressioni aritmetiche

Sia $\{a_n\}$ una progressione aritmetica di ragione *d*. Ricordiamo che $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Consideriamo i tre seguenti casi:

- Se *d=0*, risulta per ogni *n:* $a_n = a_1$, e dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_1$.
  In questo caso la successione è quindi **convergente**
- Se *d>0,* si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 + (n-1)d\right] = +\infty$ e dunque la successione è **divergente positivamente**
- Se *d<0*, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 + (n-1)d\right] = -\infty$ e dunque la successione è **divergente negativamente.**

Progressioni geometriche

Sia $\{a_n\}$ una progressione geometrica di ragione *q*. Vale allora $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$.
Ricordiamo che, in base alla definizione data, né la ragione, né i termini della progressione possono essere nulli.
Possiamo distinguere diverse situazioni:

- Se *q*>1, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 \cdot q^{(n-1)}\right] = \infty$ poiché la base della funzione esponenziale è maggiore di 1 e dunque la **successione è divergente**.
- Se ***q*=1**, la successione è costante e dunque **converge** ad a_1.
- Se *q*<1, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 \cdot |q|^{(n-1)}\right] = 0$ poiché la base della funzione esponenziale è minore di 1 e dunque la successione è **convergente** a 0.
- Se $q \le -1$, la successione è **indeterminata**, poiché a segni alterni e tale che ognuna delle due sottosuccessioni formata dai termini dello stesso segno cresce in valore assoluto.

Successioni monotone

Nella definizione generale di limite di una successione non si richiede che una successione convergente $a_1,\ a_2,\ a_3,$ ..... tenda al suo limite *l* in un modo particolare. Il più semplice tipo di successione convergente è rappresentato dalle successioni monotone, in cui ogni termine è $\leq$ oppure $\geq$ del precedente. Precisamente possiamo estendere la terminologia delle funzioni monotone alle successioni monotone: una successione si dice:

- crescente se $\forall n \in N$ risulta $a_n < a_{n+1}$
- non decrescente se $\forall n \in N$ risulta $a_n \leq a_{n+1}$
- decrescente se $\forall n \in N$ risulta $a_n > a_{n+1}$
- non crescente se $\forall n \in N$ risulta $a_n \geq a_{n+1}$

Consideriamo, ad esempio,

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ ....,\ \frac{n}{n+1},\ ....$$

Tale successione è monotona crescente perché

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = a_n$$

In contrapposizione alle successioni monotone vi sono le successioni convergenti che oscillano; ad esempio, la successione $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ ....$ converge al suo limite 0 da entrambi i lati.
Il comportamento di una successione monotona è particolarmente facile da determinare. Infatti una successione di questo tipo può non avere un limite e aumentare o diminuire indefinitamente, come la successione dei numeri naturali; in questo caso la successione tende all'infinito.
Se però i termini di una successione monotona crescente rimangono limitati, cioè se esiste una costante nota *M* tale che ogni termine della successione è minore di *M*, allora è intuitivamente chiaro che essa deve tendere ad un certo limite che sarà minore o al massimo uguale a *M*.
Vale allora il seguente teorema:

Teorema sulle successioni monotone:
Una successione monotona crescente o non decrescente (decrescente e non crescente) ha come limite l'estremo superiore (inferiore) dell'insieme numerico costituito sai suoi termini.

Naturalmente questo teorema non fornisce un metodo per determinare il limite della successione, ma è molto importante perché ci permette di affermare l'*esistenza* del limite, senza doverne conoscere il valore esatto.
Inoltre questo teorema è di notevole importanza poiché alcuni numeri sono definiti soltanto come limiti di successioni monotone limitate. Rientra in questa classe il numero ***e* di Nepero**.

Il numero *e* di Nepero

Il numero *e* è irrazionale e il suo valore approssimato alla sesta cifra decimale è 2,718281… ed è la base dei logaritmi naturali.
In alcuni testi la successione dalla quale si definisce il numero di Nepero è:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in N_0)\ .$$

Grazie al *Teorema sulla Successioni Monotone* appena enunciato, dimostrando che tale successione è *crescente* e *limitata superiormente* dimostriamo anche la sua convergenza.
Secondo la formula del Binomio di Newton abbiamo che:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots. + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots.. + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots. +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

A questo punto possiamo scrivere:

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right); \ldots.$$

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots.\left(1-\frac{k-1}{n}\right); \ldots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots.\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Pertanto si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

A questo punto possiamo osservare che al crescere di *n*, il secondo membro cresce per due motivi: ogni termine della somma cresce, ad eccezione del primo che rimane costante, ed inoltre aumenta il numero degli addendi, che sono tutti positivi.
Per questo motivo abbiamo che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

cioè la successione è *crescente*. Grazie a questa considerazione, possiamo concludere per il teorema precedentemente visto, che esiste il limite di $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ per $n \to +\infty$. Tuttavia, questo limite potrebbe essere + ∞ ,
Osserviamo quindi che per *n*>1 si ottiene:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+......+\frac{1}{n!},$$

e questo perché i fattori

$1-\frac{1}{n}$; $1-\frac{2}{n}$; $1-\frac{3}{n}$; ;….; $1-\frac{n-1}{n}$;

sono tutti minori di 1.
Inoltre, si ha che

$3! = 3\cdot 2 > 2^2$; $4! = 4\cdot 3\cdot 2 > 2^3$; $n! = 2^{n-1}$;

si avrà quindi

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+......+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ora $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+......+\frac{1}{2^{n-1}}$ è la somma dei termini di una progressione geometrica di ragione $q=\frac{1}{2}<1$ ed è quindi uguale a $a_1\cdot\frac{1-q^{n-1}}{1-q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

Per questo otteniamo

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+......+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < 3.$$

Da questo ultimo passaggio, possiamo concludere che la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ è sempre compresa tra 2 e 3; possiamo quindi concludere che il suo estremo superiore è compreso fra 2 e 3 e quindi, sempre per il Teorema delle successioni monotone, il limite di tale successione è finito ed è compreso fra 2 e 3. Questo limite viene appunto indicato con la lettera *e* e chiamato *costante di Nepero.*

Per definizione si ha quindi

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

VERIFICA SOMMATIVA

1. Delle seguenti successioni, stabilire quali sono superiormente limitate e quali sono inferiormente limitate:

   $a_n = \dfrac{n}{n+2}$

   $a_n = \sqrt{1+n^2}$ [4]

2. Delle seguenti successioni, stabilire quali sono crescenti e quali decrescenti:

   $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

   $a_n = e^{\frac{1}{n}}$ [4]

3. Applicando la definizione, verificare i seguenti limiti:

   $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

   $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-2n}{n} = -2$ [6]

   $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}-n\right) = -\infty$

4. Calcolare il più piccolo intero *n* che verifica la disuguaglianza $\sqrt{n^2+1}+n>10$. [3]

5. Stabilire se le seguenti successioni sono progressioni aritmetiche o geometriche, ed in ogni caso calcolarne il limite:

   □ $\{4+n\}$ □ $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ □ $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ □ $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2n}\right\}$ [8]

6. Sia $\{u_n\}$ la successione così definita in $\mathbb{N}_0$:

   $$u_1 = -3; \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6; \qquad n \geq 1.$$

   Calcolare u_2, u_3, u_4.

   Sia poi $\{v_n\}$ la successione così definita in $\mathbb{N}_0$: $v_n = u_n + 18$

   Dimostrare che $\{v_n\}$ è una successione geometrica, esprimere v_n in funzione di *n*, poi u_n in funzione di *n*. [6]

Griglia di Misurazione

<table>
<tr><th>Punteggio Grezzo
(Totale 31)</th><th>Voto in Decimi
(ottenuto con la proporzione)</th><th>Voto in decimi
(una proposta)</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="4">0-1</td><td rowspan="10">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">2-3</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">3-4</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="3">4-5</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">5-6</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">7</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">7-8</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">8</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="3">8-9</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="3">9-10</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>31</td><td>10</td></tr>
</table>

UNITA' DIDATTICA

FUNZIONE ESPONENZIALE E LOGARITMICA

Prerequisiti

- Potenze e radici;
- Equazioni e disequazioni algebriche;
- Coordinate nello spazio;
- Funzioni e grafici elementari (somma e prodotto di funzioni, funzioni inverse), tra cui la funzione valore assoluto;
- Trasformazioni nel piano (traslazione, dilatazione).

Accertamento dei prerequisiti

Per affrontare la seguente unità didattica è opportuno accertarsi che gli allievi abbiano acquisito determinati concetti e proprietà, relativi alle potenze e alle funzioni; allo scopo si utilizzerà una breve verifica scritta (non valutata) o un dialogo tra insegnante e classe.
Si procederà, dunque, a recuperare le conoscenze non ben assimilate, mediante un breve ripasso.

Obiettivi specifici
Gli obiettivi specifici sono suddivisi in *conoscenze* e *abilità*.

Conoscenze:

- Definizione di funzione esponenziale, dominio e codominio della funzione;
- Proprietà della funzione esponenziale e suo grafico in dipendenza dalla base;
- La crescita esponenziale;
- Definizione di equazione e disequazione esponenziale.
- Definizione di logaritmo;
- Proprietà fondamentali dei logaritmi: logaritmo di un prodotto, di un quoziente, di una potenza, cambiamento di base;
- Definizione di funzione logaritmica, dominio e codominio della funzione;
- Proprietà della funzione logaritmica e suo grafico;
- Equazioni e disequazioni logaritmiche.
- Come si definisce il numero di Nepero e e sapere indicare alcune delle ragioni per le quali assume importante rilevanza la funzione $y = e^x$

Abilità:

- Assimilare la definizione e le proprietà delle potenze a esponente reale;

- Saper riconoscere e rappresentare le funzioni esponenziali;
- Saper rappresentare una funzione composta da traslazioni e dilatazioni di una funzione data;
- Acquisire familiarità con la lettura di un grafico di funzione;
- Acquisire le tecniche per la risoluzione (nei casi più semplici, anche con metodo grafico) di equazioni e disequazioni esponenziali;
- Comprendere che alcuni fenomeni reali possono essere rappresentati mediante modelli esponenziali.
- Acquisire familiarità con l'uso dei logaritmi e delle loro proprietà;
- Saper riconoscere e rappresentare le funzioni logaritmiche;
- Saper osservare i rapporti esistenti tra la funzione esponenziale e la funzione logaritmica;
- Acquisire le tecniche per la risoluzione di equazioni e disequazioni logaritmiche;
- Saper utilizzare la calcolatrice scientifica e software per determinare valori delle funzioni logaritmiche.

Tempi previsti per l'intervento didattico

• Accertamento dei prerequisiti	1h
• Proprietà delle potenze e calcolo di potenze con esponente intero o reale	2h
• Curva esponenziale	2h
• Equazioni e disequazioni esponenziali	4h
• Logaritmi e proprietà	1h
• Curva logaritmica	2h
• Equazioni e disequazioni logaritmiche	3h
• Cenni storici	1h
• Verifica sommativi	2h
• Correzione verifica	1h
• Ore di laboratorio	3h

Per un totale di 22 ore di lavoro.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

La Funzione Esponenziale

_ Esponente intero o uguale ad $\frac{1}{2}$ _

Si definisce **funzione esponenziale** la funzione:

$$f : x \to a^x \quad (a > 0)$$

Questa funzione assume grande significato in quanto modelli matematici atti a descrivere il comportamento nel tempo di fenomeni naturali forniscono soluzioni che ne fanno uso.

Nel caso di esponente intero n si ha:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{nvolte}$$

Se invece l'esponente non è intero, ma è $x = \frac{1}{2}$ si definisce:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

che si ipotizza di saper già calcolare attraverso, ad esempio, una calcolatrice tascabile.

Proprietà delle Potenze

La potenza a^{β} è definita $\forall a > 0$ e $\beta \in \Re$ e gode delle cosiddette *proprietà formali delle potenze* ossia:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$$
$$a^{\alpha} \div a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$$
$$\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}$$
$$\left(a \cdot b\right)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$$
$$\left(a \div b\right)^{\alpha} = a^{\alpha} \div b^{\alpha}$$

Diventa più complesso rispetto ai casi visti in precedenza il calcolo di potenze aventi esponente reale. Servendosi tuttavia dell'ammessa possibilità di estrazione delle radici quadrate, si può calcolare l'esponenziale a^x per molti valori anche non interi di x, per esempio:

$$a^{3,75} = a^3 \cdot a^{0,75}$$

ed essendo:

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

si ha:

$$a^{3,75} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^3 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{\sqrt{a}}$$

Anche l'ultimo fattore è calcolabile attraverso doppia esecuzione di radice quadrata.

Non tutti i numeri non interi possono, come nell'esempio considerato, essere trasformati nella somma di un intero e di alcune potenze di $\frac{1}{2}$. E' tuttavia sempre possibile approssimare la parte decimale di un numero con somme di potenze di $\frac{1}{2}$.
Per esempio:

$$0,8125 = \frac{13}{16} = \frac{8+4+1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$0,4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 0 \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$$

Nel primo caso si è ottenuto il valore esatto usando solamente tre addendi, mentre nel secondo sembra è necessario utilizzare un maggior numero di addendi.

La tecnica di approssimazione adottata, che fa uso dell'operazione di estrazione di radice quadrata, parte dal presupposto *non rigorosamente dimostrato* che l'elevamento a potenza mediante l'uso di una approssimazione del valore dell'esponente in luogo del valore esatto dello stesso porti ad ottenere un valore tanto "migliore" quanto più accurata è la rappresentazione dell'esponente.

Nel caso precedente, abbiamo che i numeri:

$$\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$$
....

"approssimino" 0,4 e che le potenze:

$$(1,5)^{\frac{1}{4}} \qquad =1,10668$$
$$(1,5)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \qquad =1,16421$$
$$(1,5)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}} \qquad =1,17161$$
$$(1,5)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}} \qquad =1,17533$$

"approssimano" 1,17….. Per questo si conclude che:

$$(1,5)^{0,4}=1,17...$$

Naturalmente:

- i numeri 1,106; 1,164; 1,171; 1,175 "approssimino" qualcosa ma non sappiamo dire con certezza quanto vale questo qualcosa
- vediamo che questo qualcosa è un numero che comincia con 1.17….
- si ipotizza che questo meccanismo funzioni in generale, in corrispondenza a qualunque base a e a qualunque esponente β

Tutto questo non è stato provato, ma in realtà si può dimostrare rigorosamente che il metodo presentato funziona molto bene ed in particolare si ha che:

- ogni numero reale positivo β può essere approssimato con un intero più somme di potenze di $\frac{1}{2}$
- dette $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ...$ le varie approssimazioni di β mediante un numero via via maggiore di potenze di $\frac{1}{2}$, qualunque sia $a > 0$ i numeri:

$$a^{\beta_0}, a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, ...$$

"approssimano" un numero reale che chiameremo, per definizione, a^{β};
- la definizione data di potenza a^{β} soddisfa le proprietà formali delle potenze.

In caso di esponente $\beta \leq 0$, che apparentemente non rientra in quelli esaminati, si risolve, ricordando che, per definizione:

$$a^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad a^{-\beta} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\beta}$$

Grafico della funzione esponenziale

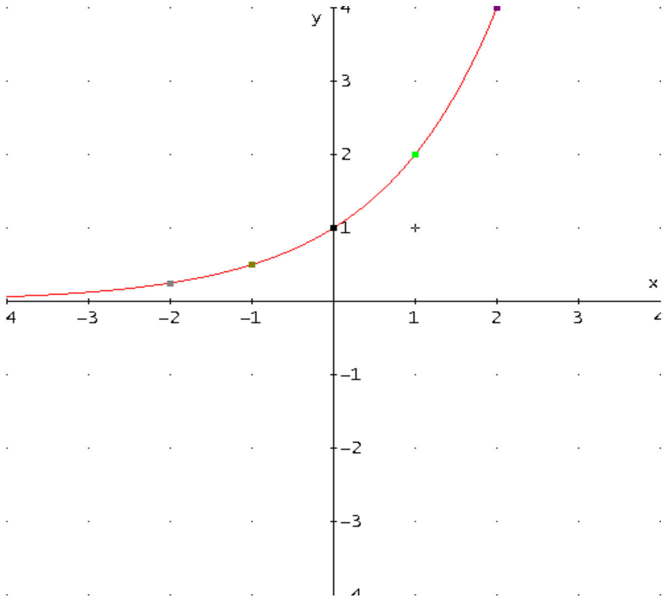
Studiamo ora il grafico della funzione $y = a^x$. Dobbiamo tuttavia suddividere lo studio nei due casi:

- PRIMO CASO: $a > 1$
- SECONDO CASO: $0 < a < 1$.

Nota didattica
Si è pensato di non presentare immediatamente il grafico, ma di portare gli allievi a "costruirlo" per punti, considerando dei casi specifici.

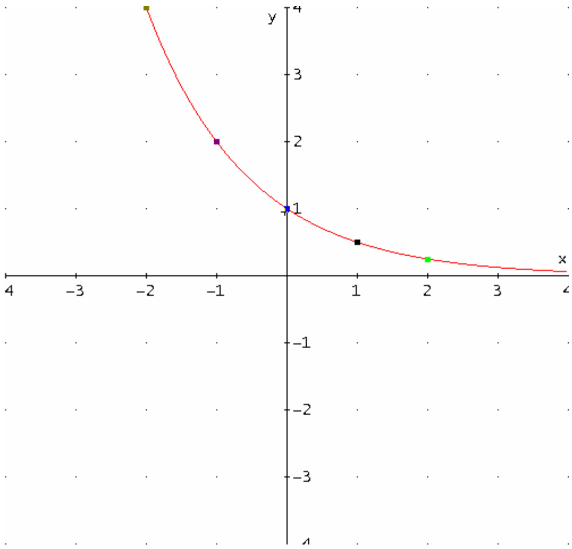
PRIMO CASO: Considerata la funzione $y=2^x$. Attribuiamo alcuni semplici valori all'esponente x e determiniamo i corrispondenti valori di y; riportiamo poi nel grafico i punti ottenuti e cerchiamo di collegarli con una linea continua.

x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$



SECONDO CASO: Procediamo allo stesso modo considerando la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4



Da questi due esempi possiamo cominciare, con i ragazzi, a dedurre le proprietà fondamentali della funzione esponenziale:

<u>se $a > 1$:</u>

- Dominio: $\Re$
- Codominio: $\Re^+ \setminus \{0\}$ (la funzione si trova interamente "sopra" l'asse delle ascisse poiché 2^x è positivo per qualsiasi valore di *x*)

- Funzione crescente in quanto al crescere dell'esponente *x*, cresce anche il valore della funzione esponenziale.
- La curva passa per il punto (0,1)
- La curva non interseca mai l'asse *x*, perché non esiste alcun valore di *x* tale che risulti $2^x = 0$
- Se *x* va verso valori molto piccoli (negativi), la funzione si avvicina a 0 (introduzione intuitiva al concetto di limite: $2^x \to 0$ per $x \to -\infty$)
- Se *x* va verso valori molto grandi, la funzione tende a diventare molto grande ($2^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$).

<u>se $0 < a < 1$:</u>

- Dominio: $\Re$
- Codominio: $\Re^+ \setminus \{0\}$ (la funzione si trova interamente "sopra" l'asse delle ascisse poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è positivo per qualsiasi valore di *x*)
- Funzione decrescente in quanto al crescere dell'esponente *x*, il valore della funzione esponenziale decresce
- La curva passa per il punto (0,1)
- La funzione non interseca mai l'asse *x*
- Se *x* va verso valori molto piccoli, la funzione tende a diventare molto grande (introduzione intuitiva al concetto di limite: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$)
- Se *x* va verso valori molto grandi, la funzione si avvicina a 0 (introduzione intuitiva al concetto di limite: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0$ per $x \to +\infty$).

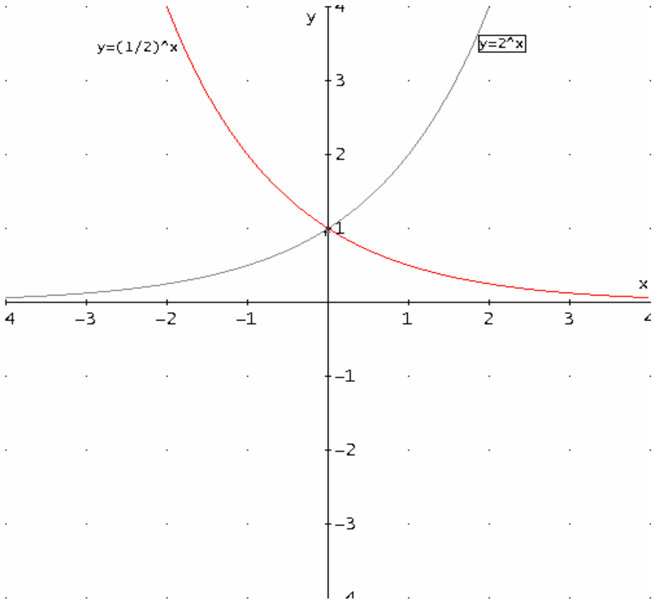
A questo punto è bene sottolineare che per qualsiasi valore di *a*, positivo e diverso da 1, la funzione esponenziale è una **funzione biunivoca**

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

e quindi **invertibile**; si scoprirà che la sua inversa è la funzione logaritmica.

Osservazione

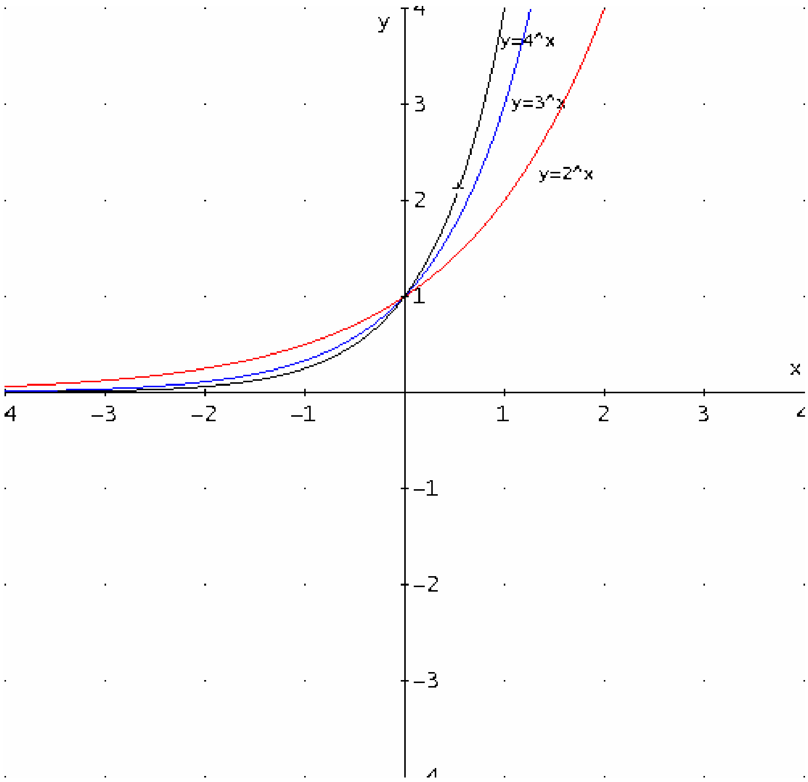
Confrontiamo i grafici delle due funzioni $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Facciamo notare ai ragazzi che i due grafici sono simmetrici rispetto all'asse *y*, ricordando che $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

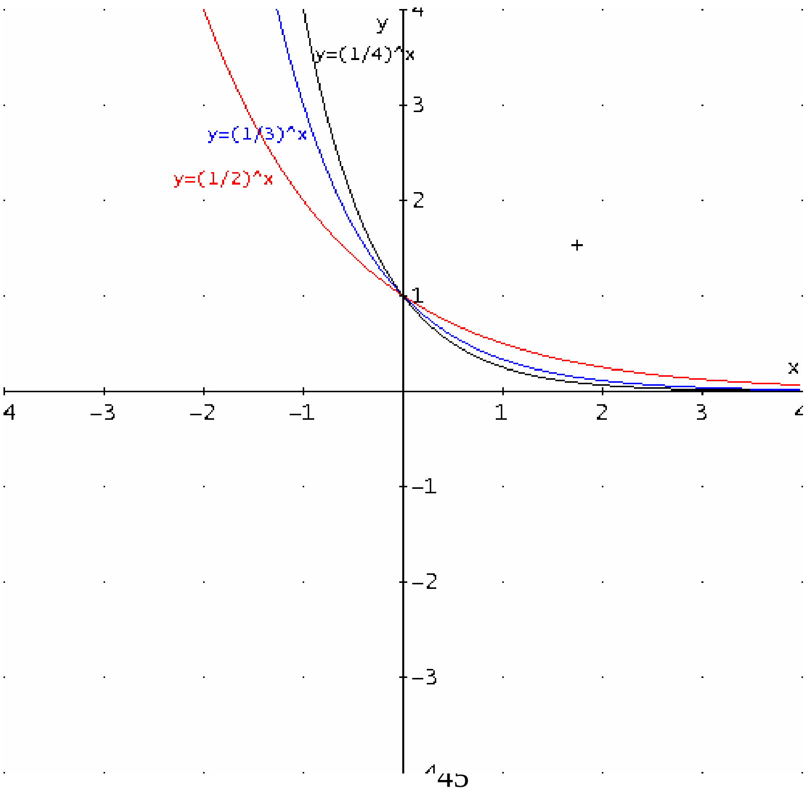
Esercizio:

Disegnare i grafici delle funzioni $y = 3^x$, $y = 4^x$ e confrontarli con il grafico di $y = 2^x$; I ragazzi dovranno notare che i grafici delle funzioni esponenziali con basi $a > 1$ hanno tutti *comportamenti simili* a quello della funzione $y = 2^x$, che la rapidità della curva aumenta all'aumentare della base e che tutti i grafici si intersecano nel punto di coordinate (0,1).



Esercizio

Disegnare i grafici delle funzioni $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ e confrontarli con il grafico di $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

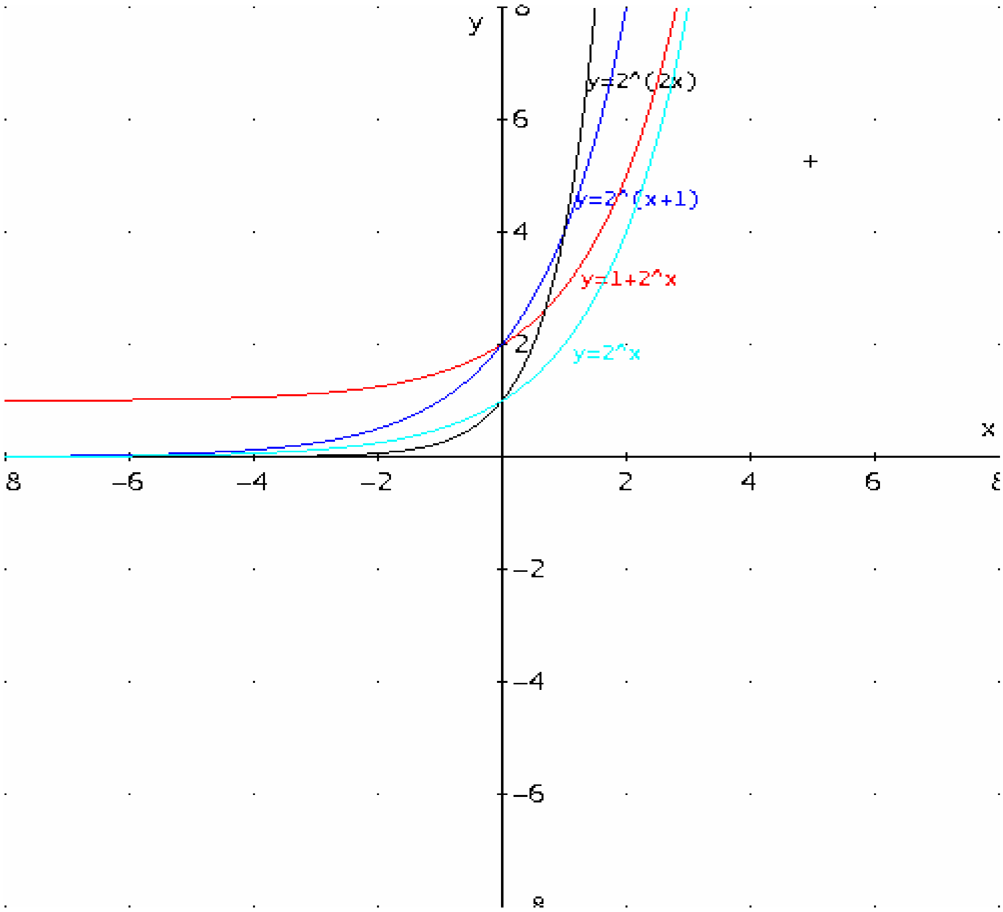


Esempio

In un sistema di riferimento cartesiano disegniamo il grafico della funzione $f(x)=2^x$.

Nello stesso sistema di riferimento disegnare, senza fare calcoli, i grafici delle funzioni $f(x)=1+2^x$, $f(x)=2^{x+1}$, $f(x)=2^{2x}$.

In questo modo si richiameranno i concetti di traslazione e dilatazione. Bisogna dunque far notare ai ragazzi che le proprietà della funzione esponenziale si mantengono anche applicando ad essa alcune trasformazioni geometriche.



Esempio: le funzioni del tipo $y=[f(x)]^{g(x)}$

Si farà ragionare sui campi di esistenza di alcune potenze in cui la base o l'esponente variano al variare di *x*, proponendo esercizi come:

$$y=5^{\sqrt{2x-3}},\ y=\frac{1}{\left(x^2-2\right)^{\sqrt{3}}},\ y=\left(4x^2-1\right)^{\sqrt{x}}.$$

Attività di Laboratorio: La crescita esponenziale

Può essere interessante effettuare un semplice confronto tra l'andamento delle funzioni $y = x, y = x^2, y = x^3, y = x^4$ con quello della funzione esponenziale $y = 2^x$.

Si deve far notare che, all'aumentare di x, 2^x supera velocemente i valori delle potenze.

Per far notare questo si accompagneranno gli studenti in **laboratorio** e si farà utilizzare Excel per creare la tabella con i diversi valori.

x	x^2	x^3	x^4	2^x
0	0	0	0	1
1	1	1	1	2
10	100	1000	10^4	1024
20	400	$8 \cdot 10^3$	$1,6 \cdot 10^5$	$\cong 1.05 \cdot 10^6$
100	10^4	10^6	10^8	$\cong 1.3 \cdot 10^{30}$
200	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^6$	$1,6 \cdot 10^9$	$\cong 1.6 \cdot 10^{60}$

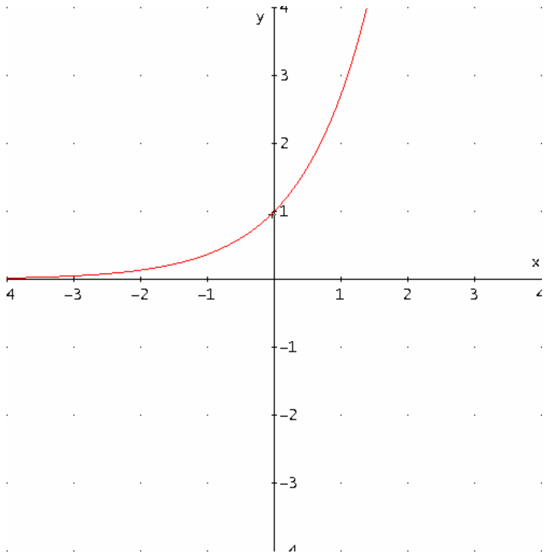
Riportiamo di seguito anche la tabella che si ottiene con Excel:

x	x^2	x^3	x^4	2^x
0	0	0	0	1
1	1	1	1	2
10	100	1000	10000	1024
20	400	8000	160000	1048576
100	10000	1000000	1E+08	1,27E+30
200	40000	8000000	1,6E+09	1,61E+60

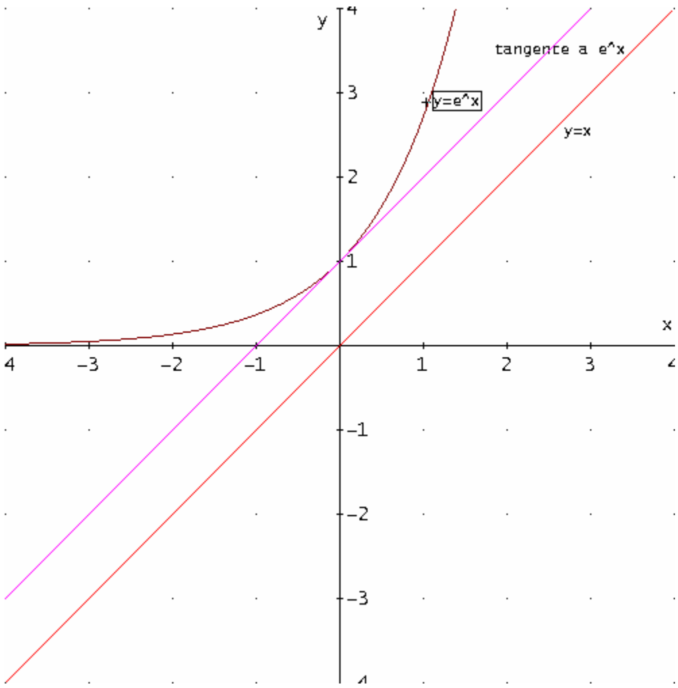
Curva esponenziale notevole: $y = e^x$

Importanza notevole riveste la funzione esponenziale $y = e^x$ in quanto compare in molte formule che descrivono l'evoluzione nel tempo di fenomeni fisici.
Il valore approssimato di e è 2,7182818…, quindi rientra nel caso in cui a>1.

Il grafico di e^x è il seguente:



Facciamo notare ai ragazzi che la retta tangente alla curva nel punto (0,1) è parallela alla bisettrice del I e III quadrante.



Equazioni esponenziali

Si dicono **equazioni esponenziali** le equazioni in cui l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza.

Si studieranno le equazioni esponenziali che si possono ridurre alla forma canonica:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad a > 0,\ a \neq 1$$

Si riprenderà dunque quanto osservato in precedenza sulla biunivocità delle funzione esponenziale; si dedurrà quindi che risolvere un'equazione, in cui i due membri sono potenze di una stessa base (riconducibile alla forma canonica), equivale a risolvere un'equazione in cui i due membri sono gli esponenti di tali potenze. Quindi se $a > 0$ e $a \neq 1$ è sempre lecito il passaggio

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \to f(x) = g(x)$$

Bisogna però far notare ai ragazzi che non tutte le equazioni esponenziali sono riducibili alla forma canonica e che si studierà presto un metodo per risolvere tali equazioni.

<u>Esempi:</u> Si svolgeranno alcuni esercizi del tipo:
Risolvere le equazioni

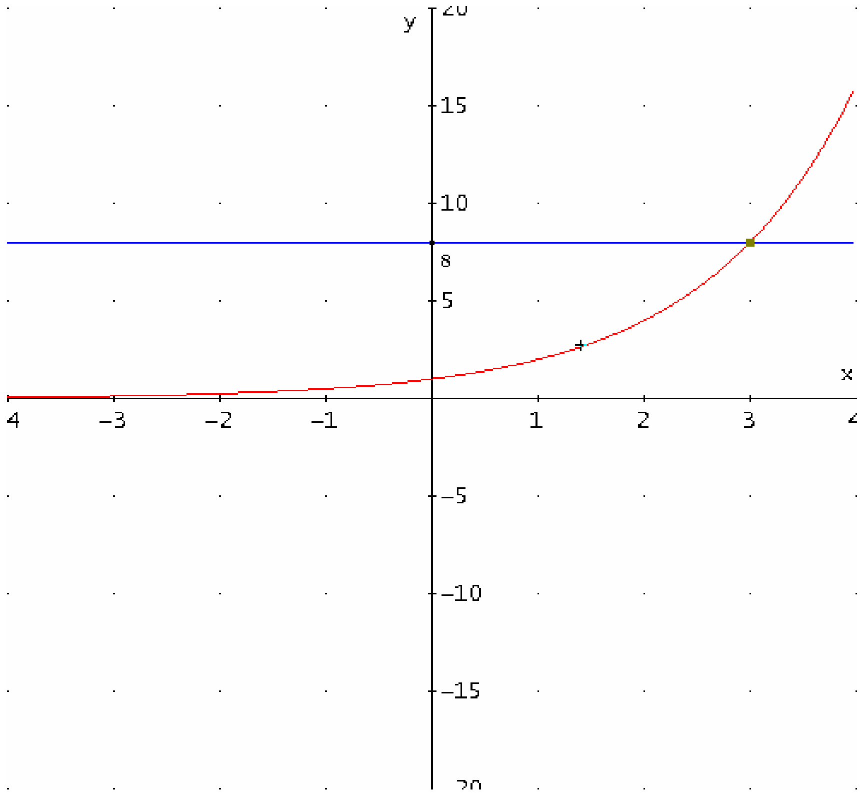
$$3^{2-8x} = 9^{3x+1}$$
$$4^x - 2^{2x+1} = 2^{2x-1} - 6$$

Mostriamo di seguito due tipi di risoluzione, algebrica e grafica, delle **equazioni esponenziali elementari** del tipo $a^x = b$, accompagnando la classe in

<u>Attività di Laboratorio</u>:

<u>Cosa significa risolvere $2^x = 8$?</u>

Intuitivamente si può rispondere che $x = 3$, si può vedere 8 come 2^3 e quindi applicare la regola appena vista, ma si può vedere il tutto anche graficamente:



Nota didattica

Facciamo notare ai ragazzi che $7x \cdot 5^3 - 7 = 0$

non è un'equazione esponenziale perché l'incognita non compare come esponente.

Inoltre, facciamo notare che **non ha alcun senso la scrittura**

$$(-3)^x = -27$$

perché la base della potenza e il suo valore devono essere positivi, in base a quanto visto nell'analisi della funzione esponenziale.

Disequazioni esponenziali

Si chiamano **disequazioni esponenziali** tutte le disequazioni in cui l'incognita figura nell'esponente di qualche potenza.

Studieremo poi le disequazioni esponenziali che si possono ridurre alla forma canonica:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad a > 0,\ a \neq 1$$

Vista la monotonia delle funzioni esponenziali sono leciti i seguenti passaggi:

$$\begin{array}{ll} \text{Se } a > 1 & a^{f(x)} < a^{g(x)} \rightarrow f(x) < g(x) \\ \text{Se } 0 < a < 1 & a^{f(x)} < a^{g(x)} \rightarrow f(x) > g(x) \end{array}$$

A questo punto si procederà con un paio di semplici esempi di applicazione della regola, ad esempio proponendo la risoluzione delle disequazioni:

$$3^x > 9$$

$$\frac{1}{3^x} > 9$$

Osservazioni e casi particolari

Sarà utile far notare, possibilmente mediante esercizi svolti alla lavagna dagli studenti, alcuni accorgimenti fondamentali per la risoluzione di alcune semplici equazioni:

1. prendiamo ad esempio la seguente disequazione $\left(\frac{1}{5}\right)^x < 1$.

   Questa disequazione si può scrivere nel modo seguente, applicando una proprietà delle potenze,

   $$\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^0$$

   e quindi, per quanto detto sopra, si ha $x>0$.
2. prendiamo ad esempio la seguente disequazione $4^x > 0$.
   Facciamo notare ai ragazzi che questa disequazione è sempre verificata, $\forall x \in \Re$ per le proprietà analizzate nello studio della funzione esponenziale.

   Invece la disequazione $\left(\frac{3}{4}\right)^x < -1$ risulta impossibile per le stesse proprietà.

Esercizi

A questo punto si proporranno esercizi via via sempre più complicati che prevedono l'applicazione delle regole non in modo meccanico ma in modo ragionato.

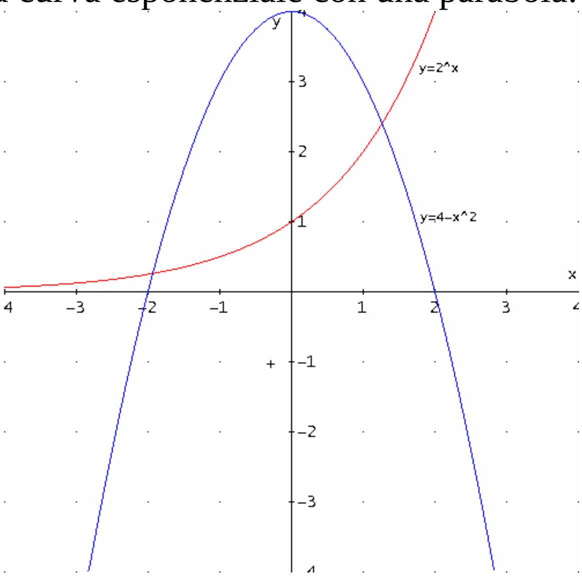
Si può cominciare con $\frac{2^x - 1}{9^x - 3} \leq 0$ che prevede lo studio del segno del numeratore e del denominatore e dunque la suddivisione dell'esercizio in due sottoesercizi; si può poi proporre di risolvere la disequazione $\left(e^{1-\sqrt{x}} - 1\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4+x}{x}} - 4\right] \leq 0$ avvertendo di ragionare sulle condizioni di esistenza della funzione prima di buttarsi nella risoluzione del problema.

Attività di Laboratorio:

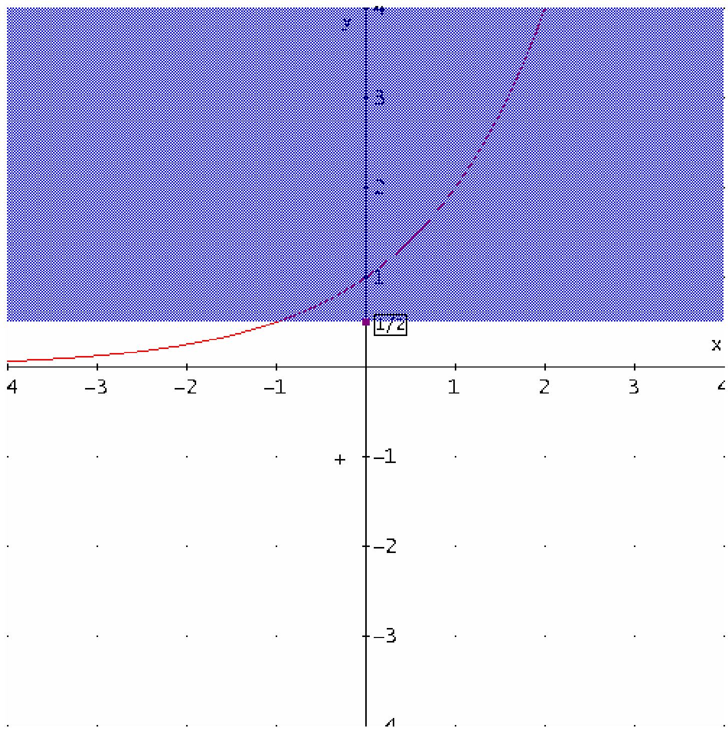
Risoluzione grafica

Risulterà molto utile far prendere dimestichezza con la risoluzione grafica di equazioni e disequazioni esponenziali; a questo scopo si potrebbe organizzare un'altra **attività di laboratorio** in cui si svolgeranno esercizi mediante l'utilizzo di Derive.

1. Risolvere graficamente l'equazione $x^2 + 2^x = 4$ che può essere scritta come $2^x = 4 - x^2$ ed interpretata come l'equazione che risolve il sistema $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$ che dà le intersezioni di una curva esponenziale con una parabola:



2. Risolvere graficamente la disequazione $2^x > \frac{1}{2}$ che equivale al sistema $\begin{cases} y = 2^x \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$:



Il sistema ci dice che siamo interessati ai punti della curva esponenziale che hanno ordinata maggiore di 1/2; dal grafico si può vedere che i punti che godono di tale proprietà sono quelli aventi ascissa maggiore di 1.

Applicazioni: fenomeni ad andamento esponenziale

Le funzioni esponenziali intervengono nella modellizzazione dei principale fenomeni di accrescimento o di decadimento, in molti settori disciplinari; quindi una conoscenza approfondita e sicura delle funzioni esponenziali e delle loro inverse (funzioni logaritmiche) è indispensabile per chiunque abbia a che fare con tali problematiche.
Molti fenomeni economici, biologici, fisici, seguono una legge di tipo esponenziale al variare del tempo:

- Negli ultimi secoli la popolazione mondiale ha avuto una crescita di tipo esponenziale;
- Capitalizzazione continua: la capitalizzazione degli interessi su un deposito bancario, maturati istante per istante, corrisponde alla legge matematica del tipo: $C = C_0 e^{kt}$, dove C è il montante maturato dopo t anni, C_0 è il capitale impiegato al momento del deposito (t=0), k è il tasso di interesse annuo, t è il numero di anni. Questo esempio pratico di applicazione potrebbe suscitare curiosità, considerato l'interesse evidente della società attuale e delle nuove generazioni per i soldi.
- Pressione atmosferica: con buona approssimazione la pressione atmosferica p diminuisce all'aumentare dell'altitudine h, espressa in chilometri, con la legge $p = p_0 e^{-0{,}127h}$, dove p_0 è la pressione per h=0, cioè sulla superficie terrestre.

- Carica e scarica di un condensatore: la carica q, nel processo di carica di un condensatore, cresce dal valore 0 secondo la legge $q(t)=Cf\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$, mentre l'intensità di corrente i varia nel tempo secondo la legge $i(t)=\frac{f}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

Logaritmi

Come abbiamo già detto durante la spiegazione delle funzioni esponenziali, non tutte le equazioni e disequazioni esponenziali si possono ridurre alla forma canonica.
I logaritmi nascono proprio dall'esigenza di risolvere equazioni esponenziali del tipo $2^x=3$. In base alle conoscenze acquisite l'equazione ammette soluzione ed essa è unica, essendo la funzione biunivoca.

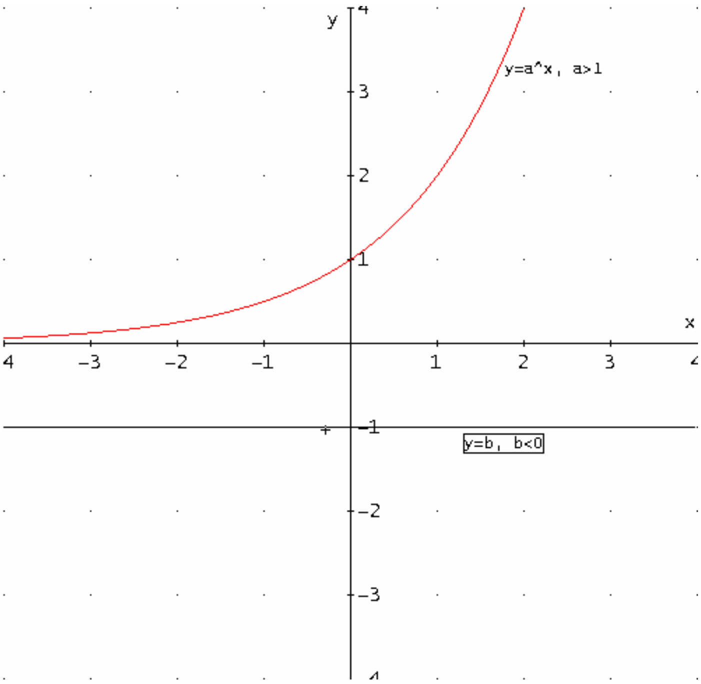
A questo proposito, enunciamo quindi il seguente

Teorema: Se $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, esiste ed è unica la soluzione dell'equazione $a^x=b$.

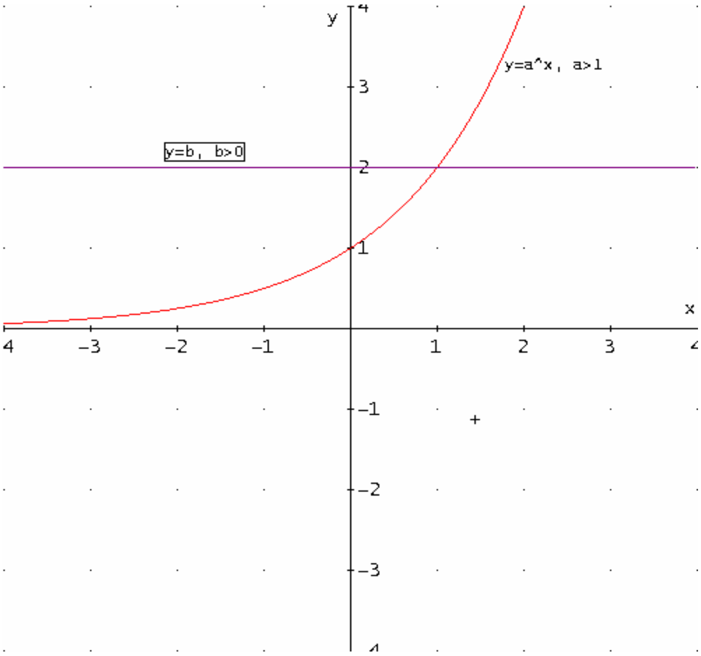
Tale soluzione viene proprio indicata introducendo il logaritmo ossia:

$$\boxed{x=\log_a b}$$

La condizione $a\neq 1$ è giustificata dal fatto che, per $a=1$, $1^x=1 \quad \forall x\in\Re$; quindi se $b=1$, l'equazione ha infinite soluzioni, mentre se $b\neq 1$, l'equazione sarebbe impossibile.
Per rendere più chiaro quanto detto, introduciamo i grafici, per far capire ai ragazzi il significato delle due richieste necessarie affinché esista e sia unica la soluzione dell'equazione.



Se $b<0$ l'equazione risulta impossibile.



Se $b>0$ l'equazione ha un'unica soluzione.

Il **logaritmo di un numero *b*** in una base *a* è l'esponente che si deve dare ad *a* per ottenere *b*; *a* è detta base del logaritmo e *b* è detto argomento del logaritmo.

Nota didattica
Facciamo ragionare i ragazzi sull'esistenza del logaritmo di 0. I ragazzi dovrebbero dedurre che tale logaritmo non può esistere perché per definizione la base e l'argomento devono essere positivi.

Proprietà dei logaritmi

Dalla definizione data si ricavano le seguenti proprietà fondamentali:

$$\log_a a^c = c \quad a>0, a\neq 1$$
$$\log_a 1 = 0 \quad a>0, a\neq 1$$
$$\log_a a = 1 \quad a>0, a\neq 1$$

Altre proprietà sono le seguenti:

$$\log_a(b_1\cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2 \quad \text{con} \quad b_1>0 \text{ e } b_2>0$$
$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2 \quad \text{con} \quad b_1>0 \text{ e } b_2>0,$$
$$\log_a b^k = k\log_a b \quad \text{con} \quad b>0$$

$$\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a \quad \text{ossia} \quad log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Qui si omettono le varie dimostrazioni, ma in classe si prevede la dimostrazione algebrica delle formule.

Si metterà in evidenza la necessità, che si noterà poi nella risoluzione delle equazioni e disequazioni logaritmiche, di esprimere un logaritmo in base *a* come un logaritmo in base *c*; quindi si introdurrà la formula del cambiamento di base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a > 0, a \neq 1, b, c > 0, c \neq 1$$

Nota didattica
Allo scopo di imparare a riconoscere ed applicare le proprietà dei logaritmi si proporranno alcuni semplici esercizi. Si propone inoltre di non insistere troppo con questi esercizi in quanto torneranno ripetutamente nello studio di equazioni e disequazioni.

Logaritmi decimali e naturali

Si evidenzierà che i logaritmi più usati sono quelli in base 10 (decimali) e quelli in base *e* (naturali); questi sono gli unici, di solito, presenti nelle calcolatrici scientifiche. Sarà dunque utile sapere come poter passare da una base qualunque a queste basi per inserire i logaritmi nelle calcolatrici.
Per distinguere i logaritmi nelle due basi si usano le notazioni:

- $\log x$ indica il $\log_{10} x$
- $\ln x$ indica il $\log_e x$

Nota storica
Il termine *logaritmo* è stato introdotto da John Napier (1550-1617), chiamato in italiano Nepero.
Logaritmo deriva dai due termini greci **logos** che significa ragione (oppure pensiero, proporzione) e **aritmos** cioè numero. Nepero pubblicò nel 1614 la prima tavola dei logaritmi, scoprì il numero *e* ma non utilizzò mai né *e*, né 10 come base per i logaritmi. Fu il matematico inglese Henry Briggs (1561-1631) a introdurre le prime tavole dei logaritmi in base 10, perché si accorse che i calcoli risultavano più semplici. Successivamente Leonhard Euler (1701-1783), in italiano Eulero, utilizzò il numero *e* e lo indicò in questo modo.

Funzioni logaritmiche

Sia dato un numero reale $a>0, a\neq 1$, è possibile associare, a un qualsiasi numero reale $x>0$, il $\log_a x$ come segue

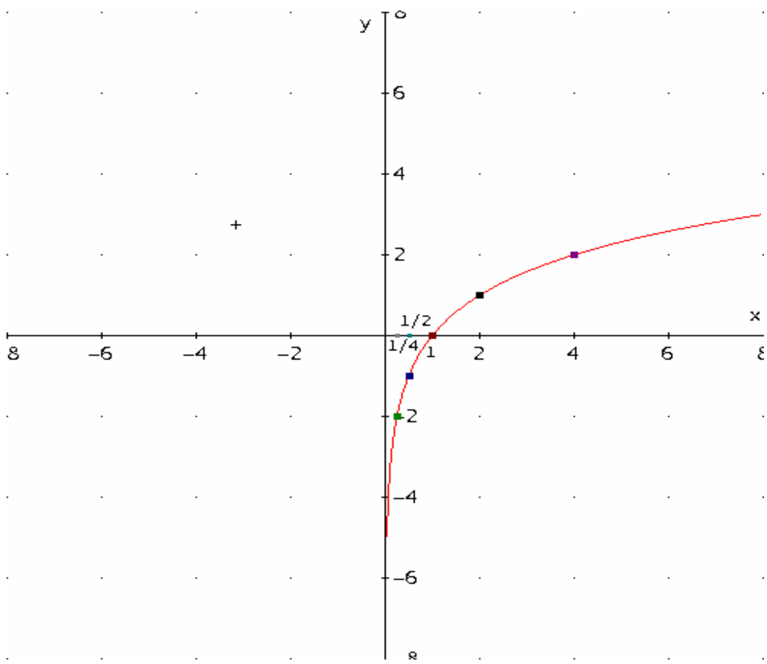
$$x \to \log_a x \qquad (a,x \in \Re^+ \setminus \{0\})$$

Viene così definita una funzione reale di variabile reale, di equazione $y=\log_a x$, che si chiama **funzione logaritmica di base *a*, il cui dominio è $\Re^+ \setminus \{0\}$.**

Ci proponiamo ora di disegnare il grafico della funzione logaritmica.

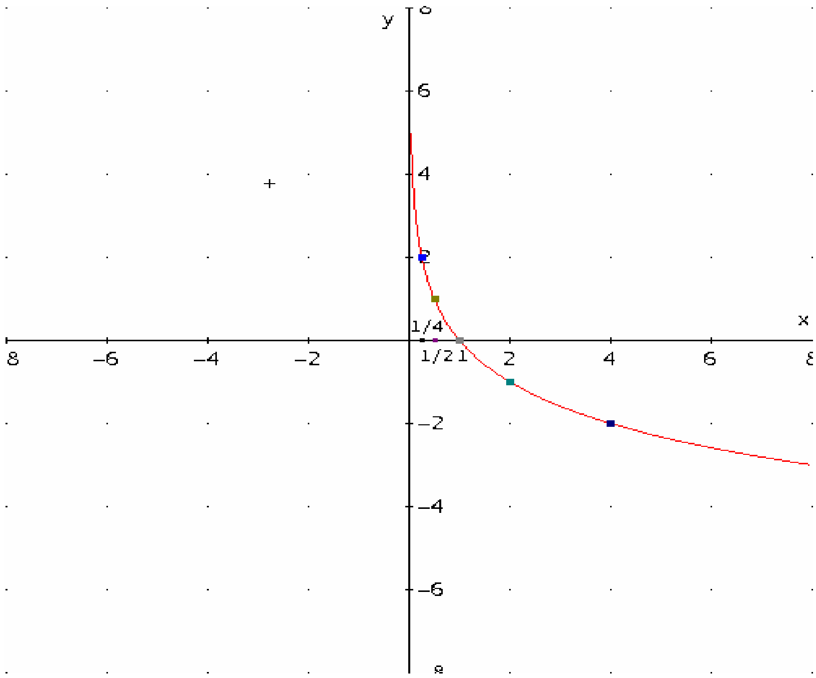
Procediamo con lo stesso metodo utilizzato per disegnare il grafico di una funzione esponenziale: prendiamo in considerazione la funzione logaritmica $y=\log_2 x$ e attribuiamo alcuni semplici valori ad *x* e determiniamo i corrispondenti valori di *y*; riportiamo nel grafico i punti ottenuti cerchiamo di collegarli con una linea continua.

x	$y=\log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



Procediamo allo stesso modo considerando la funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2



Da questi due esempi cominciamo a dedurre le proprietà fondamentali della funzione esponenziale:

se $a > 1$**:**

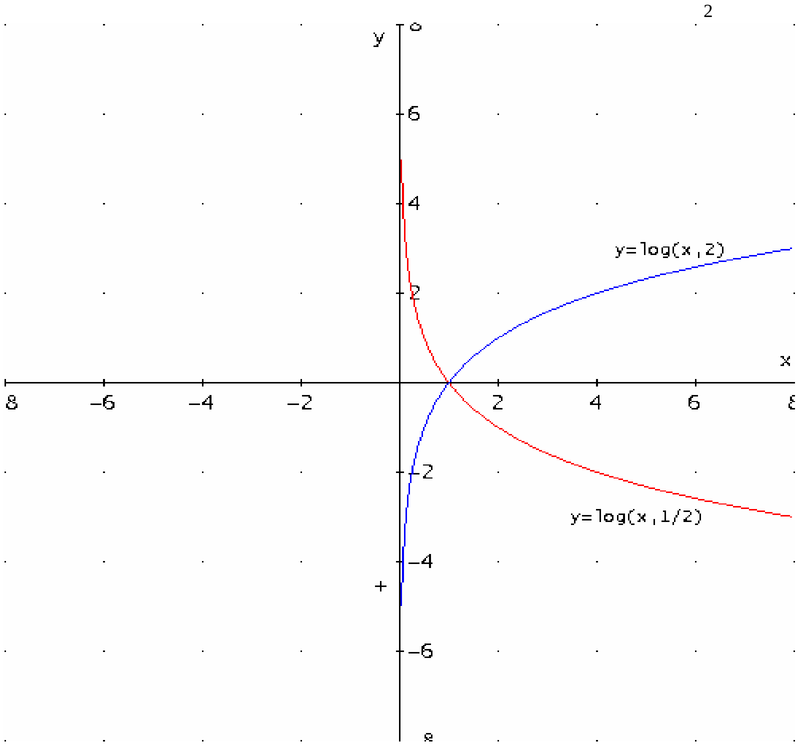
- Dominio: $\Re^{+} \setminus \{0\}$
- Codominio: $\Re$
- Funzione strettamente crescente
- La curva passa per il punto (1,0)
- Se x si avvicina a 0 da valori positivi, la funzione tende a, avvicinandosi sempre più all'asintoto verticale $x = 0$ (introduzione intuitiva al concetto di limite: $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0^+$)
- Se x va verso valori molto grandi, la funzione tende a diventare molto grande ($\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$).

se $0<a<1$**:**

- Dominio: $\Re^+ \setminus \{0\}$
- Codominio: $\Re$
- Funzione decrescente
- La curva passa per il punto (1,0)
- Se x si avvicina a zero da valori positivi, la funzione tende a diventare molto grande, avvicinandosi sempre più all'asintoto verticale $x=0$ (introduzione intuitiva al concetto di limite: $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0^+$)
- Se x va verso valori molto grandi, la funzione diventa molto piccola e si tende a $-\infty$ ($\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$).

Osservazione

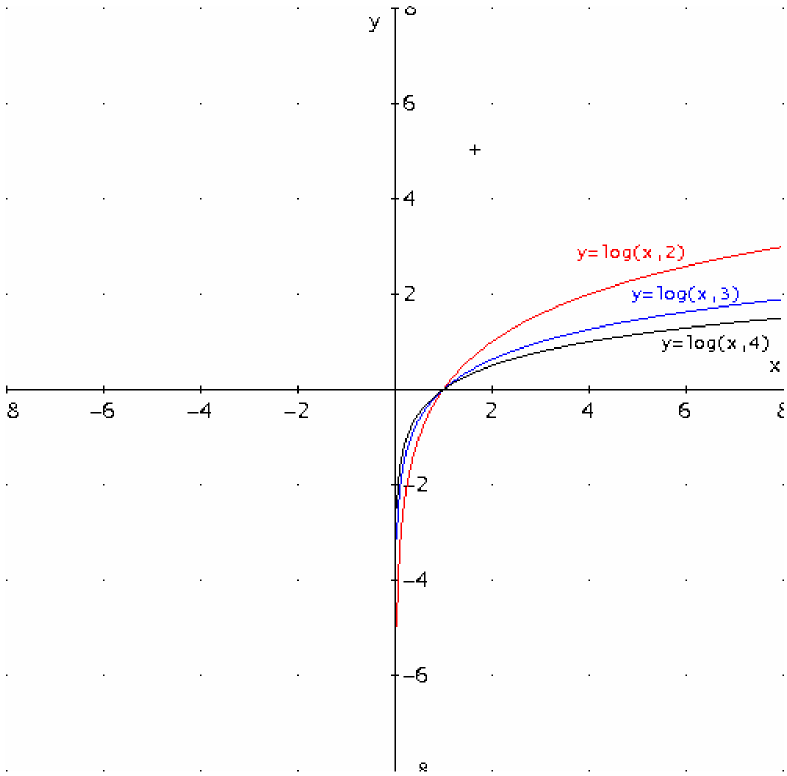
Mettiamo a confronto i grafici delle funzioni $y=\log_2 x$ e $y=\log_{\frac{1}{2}} x$



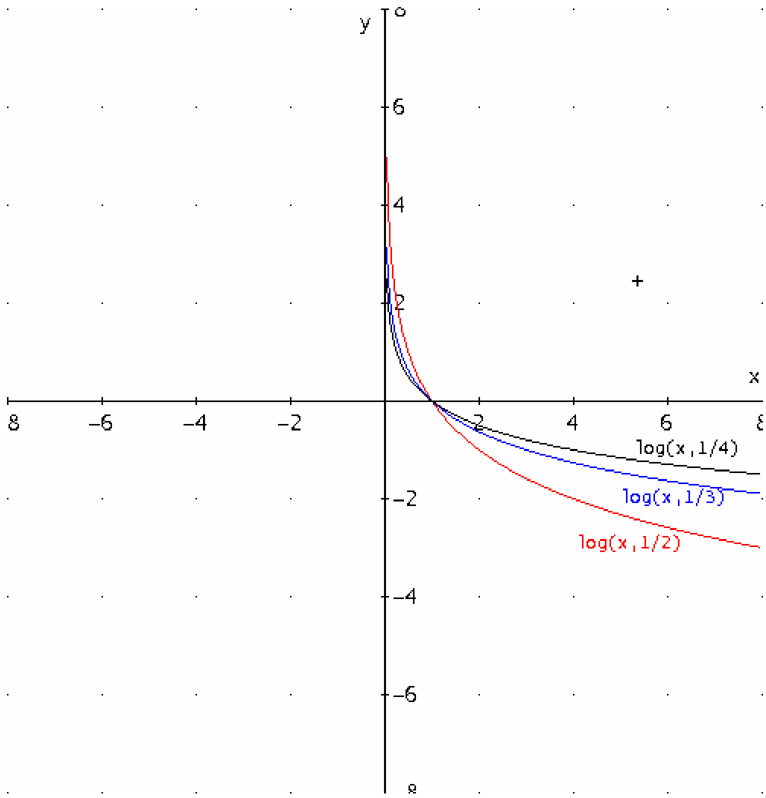
Si può concludere che i due grafici sono **simmetrici** rispetto all'asse $y=0$.

<u>Esercizi</u>

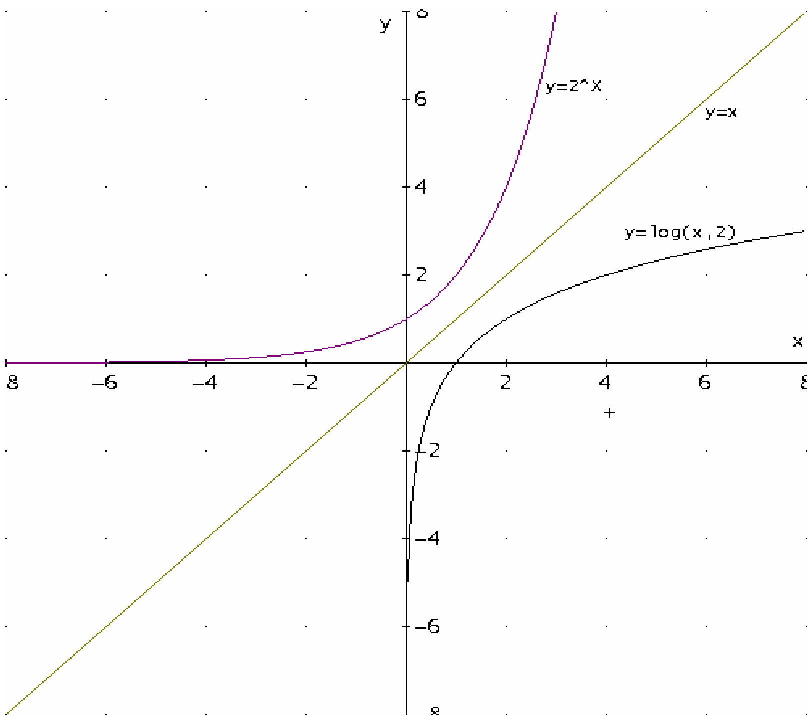
1. Disegnare i grafici delle funzioni $y=\log_3 x$, $y=\log_4 x$ e confrontarli con il grafico di $y=\log_2 x$; facciamo notare ai ragazzi che i grafici delle funzioni logaritmiche con basi $a>1$ hanno tutti comportamenti simili a quello della funzione $y=\log_2 x$.



2. Disegnare i grafici delle funzioni $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ e confrontarli con il grafico di $y=\log_{\frac{1}{2}} x$; si noti che i grafici delle funzioni logaritmiche con basi $0<a<1$ hanno tutti comportamenti simili a quello della funzione $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

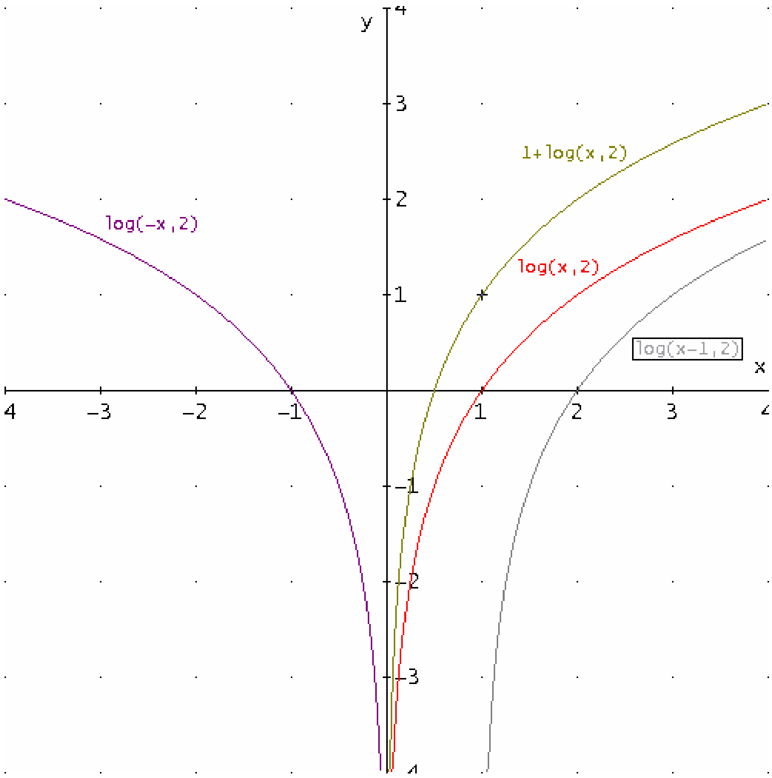


Nota Didattica
Dopo aver studiato i grafici della funzione logaritmica, e precedentemente quelli della funzione esponenziale, è bene sottolineare ancora che **la funzione logaritmica è l'inversa della funzione esponenziale** e banalmente, allo stesso modo, **la funzione esponenziale è l'inversa della funzione logaritmica**.
Facciamo anche notare ai ragazzi che poiché la funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, il suo grafico si ottiene sottoponendo i punti della curva esponenziale a una simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante:

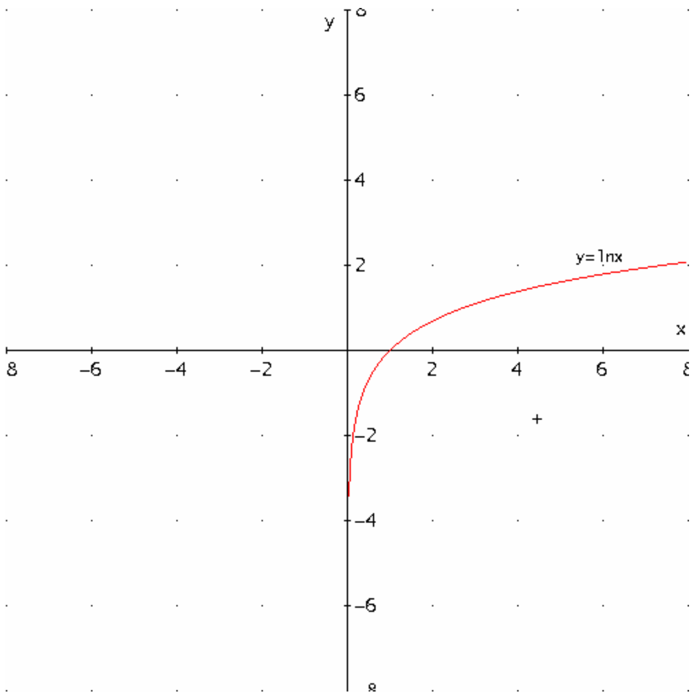


Esempio

Dal grafico della funzione $y = \log_2 x$ dedurre quelli di $y = \log_2(-x)$ e $y = \log_2(x-1)$, $y = 1 + \log_2 x$.



Il grafico seguente è riferito al logaritmo che ha come base quella naturale, cioè $y = \ln x$



Equazioni logaritmiche

Si definiscono **equazioni logaritmiche** quelle equazioni in cui l'incognita compare nell'argomento di uno o più logaritmi.

Nota didattica
Anche in questo caso facciamo notare ai ragazzi che

$$\ln(x+3)=5 \text{ è un'equazione logaritmica,}$$

mentre

$$(x-5)\ln 3=0 \text{ non è un'equazione logaritmica.}$$

Cominciamo a presentare delle equazioni esponenziali risolubili per mezzo dei logaritmi e mostriamo la possibilità data dai logaritmi di risolvere equazioni esponenziali i cui membri siano prodotti e quozienti di basi diverse.

Infatti, in generale, se $f(x)>0$ e $g(x)>0$ sono due funzioni che rappresentano prodotti e quozienti di termini positivi, in cui l'incognita compare solo nell'esponente di alcuni di essi, allora sono definiti i logaritmi di tali funzioni in una certa base $a>0, a\neq 1$ e si ha

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \log_a f(x)=\log_a g(x).$$

A questo piuttosto facciamo ragionare i ragazzi su alcuni esempi concreti come ad esempio $6^{x-1}=3\cdot 7^{x+1}$ oppure $15+4^x=2^{x+3}$.

Si passerà ora allo studio delle equazioni logaritmiche insistendo sul fatto che prima di risolvere l'equazione occorre innanzitutto studiare le condizioni di esistenza della soluzione; è meglio sottolineare che tali condizioni sono espresse dai valori di *x* che appartengono al dominio, ossia dai valori di *x* per i quali l'equazione assume significato.
Dopo aver studiato le condizioni di esistenza si procederà alla sua riduzione alla forma canonica

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)$$

da cui si potrà poi passare agli argomenti. Una volta trovata la soluzione si dovrà verificare se essa è accettabile in base alle condizioni studiate all'inizio.

Disequazioni logaritmiche

Si chiamano **disequazioni logaritmiche** quelle disequazioni in cui l'incognita compare nell'argomento di qualche logaritmo.

Facciamo vedere la possibilità, sotto certe condizioni, di passare da una disequazione esponenziale (con basi diverse), a una disequazione logaritmica. In questo caso si dovrà ricordare di porre grande attenzione alla monotonia della funzione logaritmica e quindi che vale:

$$\text{Se } a>1,\ f(x),g(x)>0 \qquad f(x)<g(x)\to \log_a f(x)<\log_a g(x)$$
$$\text{Se } 0<a<1,\ f(x),g(x)>0 \qquad f(x)<g(x)\to \log_a f(x)>\log_a g(x)$$

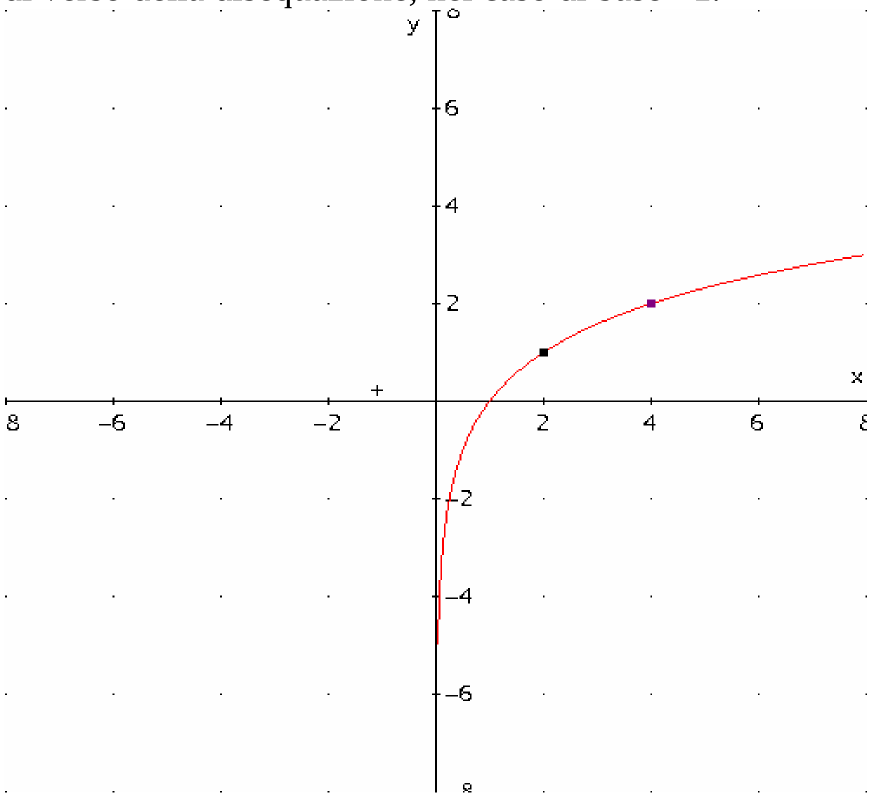
Passiamo ora allo studio delle disequazioni logaritmiche vere e proprie, per le quali non devono essere tenute presenti solo le proprietà di monotonia ma anche le condizioni di esistenza della disequazione.
Dopo aver studiato le condizioni di esistenza si procederà alla riduzione della disequazione alla forma canonica

$$\log_a f(x)<\log_a g(x)$$

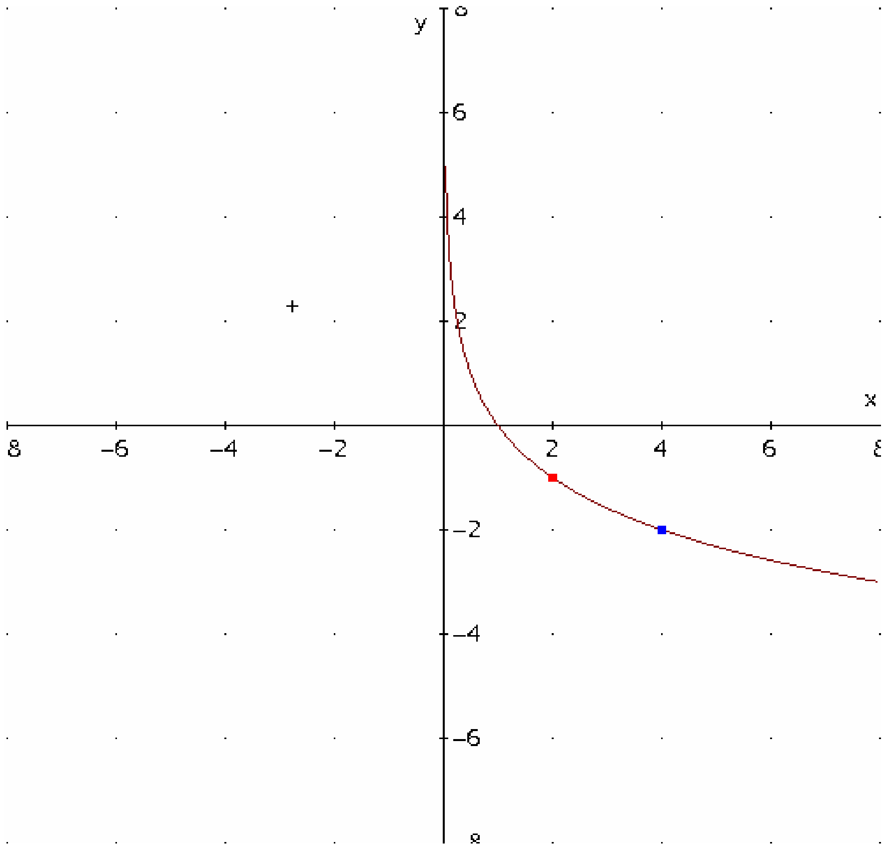
da cui si potrà passare alla disuguaglianza degli argomenti, ricordando che si deve cambiar verso della disequazione quando la base dei logaritmi è <1.

Attività di laboratorio

Si propone un'attività di laboratorio che ha lo scopo di rendere meno automatico il cambiamento di verso della disequazione, nel caso di base <1.



La curva del grafico rappresenta la funzione $y=\log_2 x$ (per cui la base è **2>1**) e vi sono evidenziati due punti; il punto "più in basso" corrisponde a $\log_2 2$, l'altro a $\log_2 4$, da cui si evince che $\log_2 2<\log_2 4 \Leftrightarrow 2<4$ (**quindi il segno si mantiene se la base è >1**).



La curva del grafico rappresenta la funzione $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ (per cui la base è **1/2<1**)il punto più in basso corrisponde a $\log_{\frac{1}{2}} 4$, l'altro a $\log_{\frac{1}{2}} 2$, da cui si evince che $\log_{\frac{1}{2}} 4 < \log_{\frac{1}{2}} 2 \Leftrightarrow 4 > 2$ (**quindi il segno si inverte se la base è <1**).

VERIFICA SOMMATIVA SCRITTA

Risolvere le seguenti equazioni:

1) $\dfrac{9^{x+1}}{27^{3-2x}} = \dfrac{1}{81} \cdot 3^{1+x}$ [5]

2) $\dfrac{2+3^x}{3^x} + \dfrac{4 \cdot 3^x}{3^x + 2} = 4$ [3]

3) $\left(\log_3 x - \dfrac{1}{2} \right)^2 + 2\log_3 x = 3\log_3 x^2 - \dfrac{23}{4}$ [3]

Risolvi le seguenti disequazioni:

4) $\left| 2^x - 4 \right| < 4$ [4]

5) $\log_{\frac{1}{2}}(7-2^x) - \log_{\frac{1}{2}}(5+4^x) + \log_{\frac{1}{2}} 7 \geq 0$ [4]

6) Risolvere graficamente la seguente equazione:

$6x - 3 = 2x^2 - x + x \cdot 3^x - 3^{x+1}$ [3]

7) Risolvere graficamente la seguente disequazione:

$\dfrac{2}{\log_5^2(x-4)} \leq 2 - \dfrac{3}{\log_5(x-4)}$ [3]

8) Data la funzione $f(x) = \dfrac{1-5^{x-1}}{2\left(2^{x+2} - 8\right)}$ [6]

a) Determinarne il campo di esistenza

b) Cercare gli zeri

Griglia di Misurazione

<table>
<tr><th>Punteggio Grezzo
(Totale 31)</th><th>Voto in Decimi
(ottenuto con la proporzione)</th><th>Voto in decimi
(una proposta)</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="4">0-1</td><td rowspan="10">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">2-3</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">3-4</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="3">4-5</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">5-6</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">7</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">7-8</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">8</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="3">8-9</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="3">9-10</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>31</td><td>10</td></tr>
</table>

BIBLIOGRAFIA e SITOGRAFIA

Corso base blu di matematica, M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi, Zanichelli, Bologna, 2005.

Nuovi elementi di matematica, N. Dodero, P. Barroncini, R. Manfredi, Ghisetti e Corvi, Milano, 2000.

Corso di matematica, L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, Etas, Milano, 2003.

Multi Format, W. Maraschini, M. Palma, Paravia, Torino, 2002.

Linee essenziali di matematica, G. Zwirner, L. Scaglianti, Cedam, Padova, 1997.

Corso di matematica sperimentale e laboratorio, M. Battelli, U. Moretti, Le Monnier, Milano, 1990.

http://www.elettronica.ingre.unimore.it/elettronica/pspice_intro.pdf

http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/scientifico.html#MATEMATICA

http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/classico.html#MATEMATICA

http://www.apav.it/aa04-05/matecostondinighiraldini/Esponenziale_e_logaritmi.doc