UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

Classe di Specializzazione A049

Percorso Didattico

Funzioni goniometriche
Formule goniometriche
Equazioni e disequazioni goniometriche
Trigonometria
Risoluzione dei triangoli

Specializzanda: Mazzoni Caterina

VIII ciclo a.a.2007/2008

PERCORSO DIDATTICO

Funzioni goniometriche. Formule goniometriche. Equazioni e disequazioni goniometriche. Trigonometria, risoluzione dei triangoli.

Il percorso didattico è stato suddiviso in quattro unità didattiche:

U. D. 1 FUNZIONI GONIOMETRICHE.

U. D. 2 FORMULE GONIOMETRICHE,

U. D. 3 EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE.

U. D. 4 TRIGONOMETRIA. RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI,

I destinatari, gli obiettivi generali e gli obiettivi trasversali, sono comuni a tutte e quattro le unità didattiche, mentre, gli obiettivi specifici suddivisi per conoscenze, competenze e abilità, vengono esplicitati per ogni singola unità didattica.

1. Destinatari

Questa unità didattica è rivolta a studenti del 4° anno del Liceo Scientifico tradizionale. Le ore settimanali previste sono 3.

Uno sguardo ai programmi

Programmi Brocca: in riferimento allo studio della trigonometria i programmi Brocca per il liceo scientifico prevedono la dimostrazione dei teoremi dei seni e del coseno, la risoluzione dei triangoli al 3 anno, mentre lo studio delle funzioni circolari e delle relative formule di addizione e sue principali conseguenze è rimandato al 4^. Nei commenti si trova***:***

Lo studio della trigonometria, ridotto all'essenziale, è finalizzata alla risoluzione dei triangoli; esso risponde anche alle necessità proprie delle altre scienze.

Programmi ministeriali: lo studio delle funzioni goniometriche, curve dei seni e delle tangenti, formule per l'addizione la sottrazione, la duplicazione, la bisezione degi argomenti, semplici equazioni goniometriche, risoluzione dei triangoli rettilinei, sono previsti nella classe IV.

Piano Nazionale per l'informatica: lo studio della trigonometria è previsto nel tema 1:"**coseno e seno degli angoli convessi. Relazione tra lati ed angoli nei triangoli rettangoli**" da svolgersi nella classe terza. Lo studio delle funzioni goniometriche, invece, è previsto nel tema 3 :"**Funzioni circolari. Formule di addizione e principali conseguenze.**" da svolgersi sempre nella classe terza.

Riforma Moratti: questi programmi invece, vedono lo studio della trigonometria nel secondo biennio con: "**Seno, coseno e tangente di un angolo. Proprietà fondamentali. Funzioni seno, coseno e tangente.**"

La proposta dell'UMI: lo studio della trigonometria è previsto nel secondo biennio, quando gli studenti conoscono gli elementi fondamentali di geometria piana, in particolare le similitudini. Per quanto riguarda le conoscenze previste , esse sono così enunciate:

- **Seno, coseno, e tangente di un angolo**
- **Coordinate polari**
- **Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo**

Le abilità interessate sono:

- **Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli.**
- **Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari(Astronomia, Fisica, Topografia, Geografia della Terra)**

2. Obiettivi generali

- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dell'unità didattica per gli argomenti: funzioni goniometriche, formule goniometriche, equazioni e disequazioni goniometriche, trigonometria.
- Comprendere le finalità e acquisire i metodi per la risoluzione di problemi legati alla misura degli angoli.
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico specifico della matematica.
- Acquisire una metodologia per la risoluzione di problemi di ottimizzazione.

3. Obiettivi trasversali

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative.

U. D. 1 FUNZIONI GONIOMETRICHE

1. Obiettivi specifici

1.1. Conoscenze

- Conoscere la misura degli angoli in radianti e in gradi;
- Conoscere le funzioni goniometriche seno, coseno, tangente, secante,cosecante e cotangente;
- Conoscere le funzioni goniometriche inverse;
- Conoscere i grafici delle funzioni goniometriche elementari;
- Conoscere il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta;
- Conoscere le relazioni che intercorrono tra le funzioni goniometriche di particolari coppie di angoli associati.

1.2. Abilità

- Saper trasformare la misura in gradi degli angoli nella misura in radianti e viceversa;
- Saper distinguere le diverse funzioni goniometriche elementari;
- Saper tracciare i grafici delle funzioni goniometriche elementari ed inverse;
- Saper operare con i sistemi di misurazione degli angoli;
- Saper definire e rappresentare graficamente le principali funzioni goniometriche;
- Saper applicare la relazione fondamentale della goniometria;

- Saper semplificare espressioni contenenti funzioni goniometriche
- Saper operare con le funzioni goniometriche di angoli associati;
- Saper applicare le funzioni goniometriche per risolvere problemi di fisica: moto circolare uniforme, moto di un proiettile.

2. Contenuti

- Le origini della trigonometria
- Misura degli angoli e degli archi
- Formule di trasformazione: dai gradi ai radianti e viceversa
- Angoli e archi orientati e loro misura
- Le funzioni seno, coseno, tangente e cotangenti di un angolo orientato
- Relazioni tra funzioni goniometriche di uno stesso angolo
- La circonferenza goniometrica
- Relazioni fondamentale della goniometria
- Le funzioni secante e cosecante
- Funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari
- Le funzioni goniometriche inverse
- Interpretazione del coefficiente angolare di una retta
- Relazione tra le funzioni goniometriche di particolari coppie di angoli associati.

3. Prerequisiti

- Definizione di angolo e la sua misura in gradi;
- Lunghezza della circonferenza e area del cerchio;
- Il numero π;
- Concetto di funzione;

- Equazione della circonferenza con centro nell’origine;
- Equazione della retta e coefficiente angolare;
- Rappresentazione di punti e curve nel piano cartesiano; (requisito valido anche per la seconda unità didattica);
- Proprietà dei triangoli particolari.

4. Accertamento dei prerequisiti:

Per la comprensione del seguente modulo didattico è indispensabile la conoscenza dei prerequisiti sopra elencati. L’accertamento avverrà mediante semplice dialogo con gli studenti e se necessario si provvederà al recupero di alcuni di questi. Si cercherà, ogniqualvolta questi verranno utilizzati di richiamare proprietà e concetti ad essi legati.

COME NASCE L'INTERESSE PER LA TRIGONOMETRIA?

Goniometria e **trigonometria** sono due termini che derivano dal greco e significano rispettivamente *misura degli angoli* e *misura dei triangoli*. Le origini della goniometria e della trigonometria sono molto lontane, risalgono a qualche secolo prima di Cristo e sono inizialmente ispirate da esigenze legate alla risoluzione di vari problemi pratici di geodesia, navigazione, astronomia, problemi che in genere richiedono di risalire alla determinazione di angolazioni e distanze non direttamente misurabili. A partire dal XVI^ secolo la trigonometria si sviluppa e si afferma anche come disciplina autonoma, raggiungendo quel rigore teorico e quell'aspetto formale e simbolico caratteristici del linguaggio matematico. Nel frattempo sempre più numerose diventano le implicazioni dei concetti goniometrici con le applicazioni della matematica nel campo scientifico e tecnologico; ben pochi sono infatti i rami della fisica sia classica che moderna, che non contemplano per la loro trattazione il calcolo goniometrico e trigonometrico.

Rapido excursus storico sulle origini della trigonometria

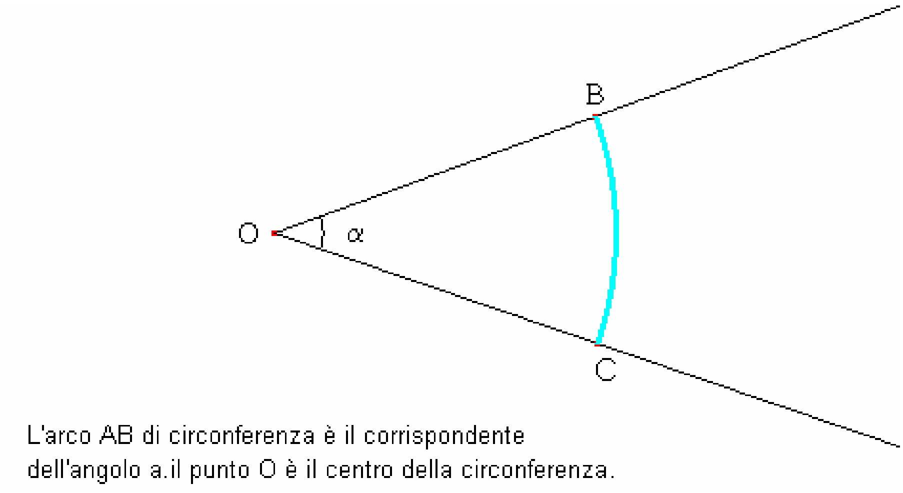
Trigonometria: dal greco τριγονον= triangolo μετρον=misura.

Questo vocabolo è usato per la prima volta nel 1595 (appare nel titolo di un'opera del matematico ed astronomo tedesco Bartolomeo Pitisco, vissuto dal 1561 al 1613). La trigonometria ha tuttavia un'origine molto più antica nella storia dell'uomo. Inizialmente ispirata ad esigenze ispirate a problemi di astronomia, si sviluppa per diversi secoli proprio come tecnica di calcolo di supporto alle ricerche nel campo di questa scienza. Nasce attorno ai secoli III^ e II^ a.C.

(Aristarco di Samo, Ipparco di Nicea, Menelao di Alessandria) e si presenta all'inizio come metodo di risoluzione di triangoli sferici, cioè di triangoli giacenti su una superficie sferica, i cui lati sono, invece che segmenti di un piano, archi di cerchi massimi(casi importanti in cui intervengono questi triangoli si hanno quando i vertici sono punti della superficie terrestre o corpi celesti, come il sole i pianeti e le stelle). Il merito di aver poi sviluppato la trigonometria come scienza autonoma va al matematico francese ***F. Viéte*** (1540 – 1603). Successivi apporti a questo tipo di sviluppo si devono a Nepero, Cavalieri, Bernoulli, Briggs, Eulero, e altri ancora. L' opera più antica che può veramente considerarsi come un trattato organico di trigonometria è la Composizione Matematica dell'astronomo C. Tolomeo (100 – 178). Nell'anno 827 la Composizione è tradotta dagli arabi con il titolo ***Almagesto*** e successivamente in latino. Tale opera rappresenta per diversi secoli l'unica fonte per lo studio della trigonometria. La trigonometria di Tolomeo è però diversa dalla nostra, in essa ad esempio non compaiono le ordinarie funzioni goniometriche, ma un'unica funzione: la *corda di un arco*, (o di un angolo). Non è tuttavia difficile, come vedremo, passare dal concetto di corda di un arco di Tolomeo a quello di seno di un angolo. Le *tavole delle corde* dei greci diventano così le nostre tavole dei seni, e i teoremi dell'*Almagesto* i teoremi della trigonometria attuali.

1. 1 Angoli e archi

Se in un piano tracciamo due semirette aventi l'origine in comune il piano viene diviso in due parti, ciascuna delle quali chiamata **angolo.** Le due semirette vengono dette *lati* dei due angoli, e l'origine comune *vertice*. Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, si chiama ***arco circolare*** quella parte di circonferenza interna all'angolo e avente per estremi i punti di intersezione con i lati dell'angolo stesso.



1.2 Misura degli angoli e degli archi

Per misurare una grandezza è necessario fissare una unità di misura. Le più usate unità di misura degli angoli sono il *grado* e il *radiante.*

Definizione. Si chiama **grado** la 360° parte dell'angolo giro. Il grado si scrive nel seguente modo:

$$1^{\circ} = \frac{1}{360} \text{ dell'angolo giro}$$

i suoi sottomultipli sono il minuto primo (o semplicemente primo) e il minuto secondo (o semplicemente secondo), e si scrivono rispettivamente:

$$1' = \frac{1}{60} \text{ di grado} \qquad \text{e} \qquad 1'' = \frac{1}{60} \text{ di primo}$$

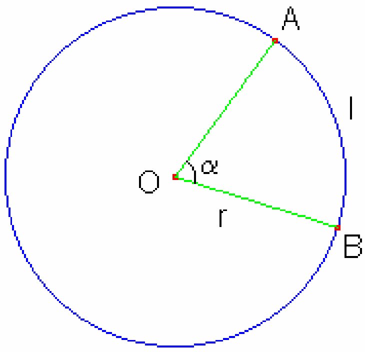
Nota storica:

Perché la suddivisione in 360 parti?

Pare che la suddivisione del cerchio in 360 parti, risalga ai Babilonesi (II secolo a. C.), i quali contavano il ciclo delle stagioni, ossia l'anno solare, in 360 giorni. Nel secolo precedente non c'era ancora un uso sistematico della misura degli angoli il gradi e comunque solo nel II secolo d. C. Tolomeo di Alessandria ne fece un uso regolare, introducendo i sottomultipli del grado «*partes minutae primae*» e «*partes minutae secundae*», che noi oggi chiamiamo «*primi*» e «*secondi*».

Il sistema di misura degli angoli con gradi, primi e secondi, è quindi il più antico, ma presenta il problema di non utilizzare un sistema decimale e di aver perciò problemi di calcolo complessi.

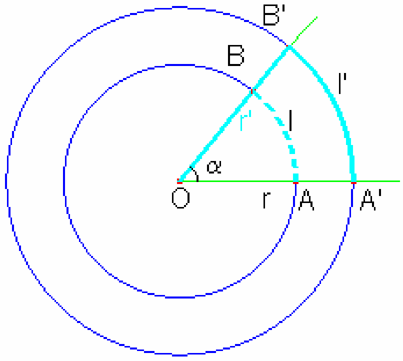
Definizione. Si chiama **radiante** l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario **r**, che sottende un arco **l** di lunghezza uguale al raggio stesso. Ovviamente, se la lunghezza dell'arco sotteso è ad esempio metà di quella del raggio, l'angolo è di mezzo radiante, se è doppia di quella del raggio , l'angolo è di due radianti, e così via.



L'angolo giro che sottende l'intera circonferenza (la cui lunghezza è 2π volte quella del raggio) è di 2π radianti; l'angolo piatto è π radianti; l'angolo retto $\pi/2$ radianti. In generale, quindi, la misura in radianti di un angolo che sottende un arco circolare di lunghezza *l* , è: $\frac{l}{r}$, essendo *r* il raggio della circonferenza di cui l'arco è parte.

Osservazione 1

Consideriamo un'altra circonferenza di raggio r_1 concentrica con la prima, se l_1 è la misura dell'arco



che l'angolo intercetta su di essa, risulta: $\frac{l}{r} = \alpha = \frac{l_1}{r_1}$

Quindi: se ogni volta che si misura un arco ***l*** si usa come unità di misura il raggio della circonferenza cui appartiene, si ottiene un numero che non dipende dalla circonferenza, ma solo dall'angolo α che sottende l'arco.

N.B.: A questo punto i ragazzi verranno portati in laboratorio per comprendere meglio la definizione di radiante (vedi allegato A): utilizzando Cabri Géométre.

L'unità di misura del radiante viene indicata con **1 rad**, ma di solito si trascura l'indicazione dell'unità di misura.

Formule di trasformazione: dai gradi ai radianti e viceversa

Date le misure di un angolo α in gradi e in radianti, vale la proporzione:

$$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$$

da cui si ricavano le formule che convertono la misura di un angolo da radianti a gradi e viceversa:

$$\alpha° = \alpha_{rad} * \frac{180°}{\pi} \qquad \alpha_{rad} = \alpha° * \frac{\pi}{180°}$$

Osservazione 2

Dalla relazione $\alpha = \frac{l}{r}$ come formula inversa si ricava la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio **r** sotteso da un angolo al centro di misura α radianti:

$$l = \alpha\, r$$

Se l'angolo misura $\alpha°$ risulta

$$l = \frac{\alpha° \pi}{180°} r\,.$$

Nella seguente tabella sono riportate le misure in gradi e in radianti di alcuni angoli tra i più frequenti nelle applicazioni:

gradi	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
radianti	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2/3π	5/4π	5/6π	π	3/2π	2π

Facciamo alcuni esempi.

1. Esprimere in radianti la misura dell'angolo di15°

   Ponendo x°=15° nella prima formula si ha:

   $$x' = \frac{15°}{180°}\pi = \frac{\pi}{12}$$

2. Esprimere in gradi la misura dell'angolo di $\frac{3}{2}\pi$.

   Ponendo $x' = \frac{3}{2}\pi$ nella seconda formula si ottiene:

   $$x° = \frac{180°}{\pi}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 270°$$

1.3 Il sistema sessadecimale

Il sistema di misura degli angoli che considera il grado come unità ed il primo e il secondo come sottomultipli, si dice **sessagesimale**,; quello che assume il radiante come unità si dice **circolare**.

Si chiama **sessadecimale** il sistema di misura che assume ancora il grado come unità ma come sottomultipli la sua decima, centesima, millesima,… parte. Se un angolo misura 54° 15' nel sistema sessagesimale, misura 54°,25in quello sessadecimale, infatti: $54°15' = \left(54 + \frac{15}{60}\right)^{\circ} = (54 + 0{,}25)^{\circ} = 54°{,}25$.

Viceversa, un angolo che misura 32°,45 nel sistema sessadecimale, in quello sessagesimale è di: 32°27', infatti: volendo trasformare i 45 centesimi di grado in primi basta fare la proporzione 45 : 100 = *x'* : 60, da cui *x'* =27.

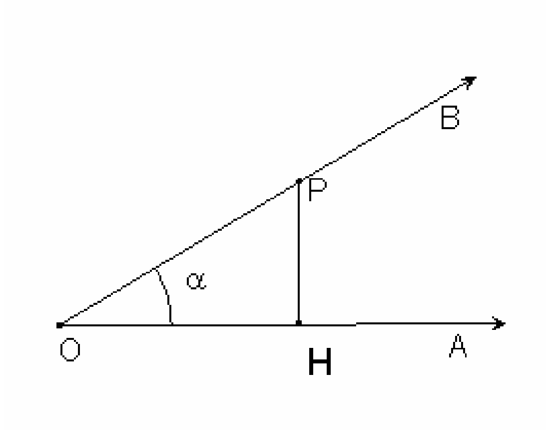
1.4 Angoli ed archi orientati e loro misura

È spesso necessario attribuire ad un angolo un'orientazione. Un angolo si dice orientato quando i suoi lati sono considerati in un certo ordine, quando cioè è stabilito quale dei due deve essere considerato come primo. In tal caso l'angolo può essere pensato come generato dalla rotazione del primo lato verso il secondo, fino alla sovrapposizione dei due.

Per convenzione si considera come ***positiva*** *una rotazione che avviene nel* ***verso antiorario*** *e* ***negativa*** *quella che avviene nel* ***verso orario****.*

2.1 Seno, coseno e tangente di un angolo acuto

Sia dato l'angolo $A\hat{O}B=\alpha$ (fig. 7) e siano rispettivamente *OA* e *OB* il primo e il secondo lato dell'angolo. Sia *P* un qualsiasi punto nel secondo lato di α e si orientino i lati dell'angolo nel verso che va da *O* ad *A* e da *O* a *B.* Sia *H* la proiezione ortogonale di *P* sulla retta *OA* del primo lato dell'angolo.



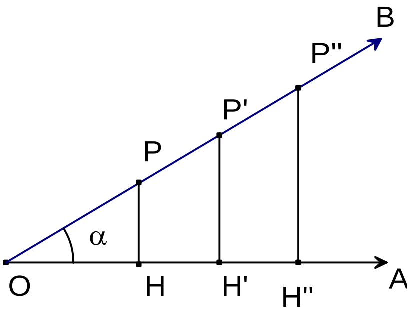
Consideriamo ora, i rapporti

$$\frac{HP}{OP}, \quad \frac{OH}{OP}, \quad \frac{HP}{OH}.$$

Notiamo subito che questi rapporti non variano al variare del punto P nel secondo lato dell'angolo e dipendono quasi esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo α.

Infatti se consideriamo su *OB* altri punti *P', P'',* ecc. diversi da *P* aventi per proiezione ortogonale su *OA* rispettivamente *H', H'',ecc.,* i triangoli $O\overset{\Delta}{P}H$, $O\overset{\Delta}{P'}H'$, $O\overset{\Delta}{P''}H''$, ecc. che risultano simili avendo gli angoli congruenti, avranno anche i lati omologhi in proporzione e sarà quindi:

$$\frac{HP}{OP} = \frac{H'P'}{OP'} = \frac{H''P''}{OP''} = \ldots$$
$$\frac{OH}{OP} = \frac{OH'}{OP'} = \frac{OH''}{OP''} = \ldots$$
$$\frac{HP}{OH} = \frac{H'P'}{OH'} = \frac{H''P''}{OH''} = \ldots$$



Questi rapporti sono pertanto funzioni dell'angolo α e sono chiamati **funzioni goniometriche** dell'angolo α; essi sono rispettivamente il *seno*, il *coseno*, la *tangente* dell'angolo α. L'angolo α costituisce pertanto l'argomento delle funzioni goniometriche.

Definiremo quindi

- *il seno dell'angolo α è il rapporto tra la distanza di un punto P, del secondo lato dell'angolo, dalla retta del primo lato e la distanza dello stesso punto P dal vertice O*

$$sen\alpha = \frac{\overline{HP}}{\overline{OP}}$$

- *Il coseno dell'angolo α è il rapporto tra la proiezione, sulla retta del primo lato dell'angolo, di un segmento OP scelto sul secondo alto e il segmento OP stesso*

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$$

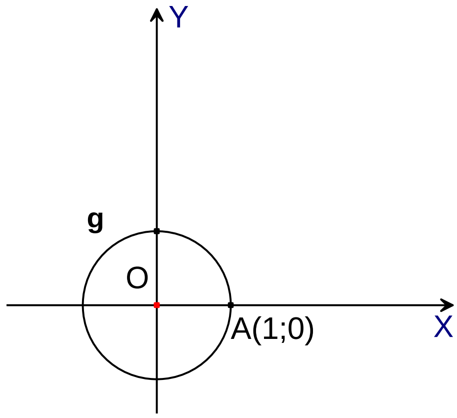
- *La tangente dell'angolo α è il rapporto tra la distanza di un punto P, sul secondo lato dell'angolo, dalla retta del primo lato e la proiezione, sempre sulla retta del primo lato, del segmento OP scelto sul secondo lato*

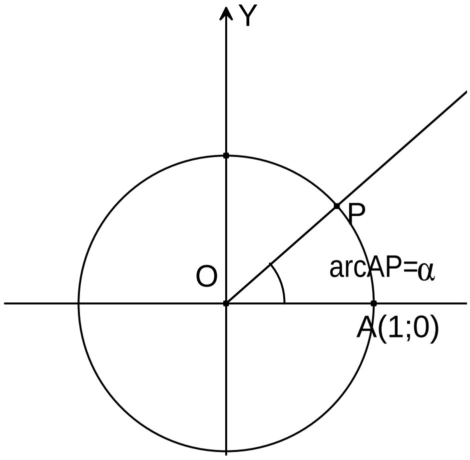
$$tg\alpha = \frac{\overline{HP}}{\overline{OH}}$$

2.2Circonferenza goniometrica

*Si chiama **circonferenza goniometrica** e la indicheremo con γ, una circonferenza orientata alla quale è associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la cui origine coincide con il centro della circonferenza stessa e la cui unità di misura è assunta uguale al raggio di quest'ultima. Il senso positivo di percorso sulla circonferenza è, convenzionalmente quello antiorario.*

La sua equazione, come è noto è $X^2 + Y^2 = 1$. Il punto *A(1;0)*, intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse, è detto **origine degli archi**, che supponiamo orientati positivamente, cioè secondo il verso antiorario. Ogni angolo può essere traslato in modo da avere il vertice in *O* e un lato coincidente con l'asse delle ascisse; l'altro lato taglierà la circonferenza γ in un punto *P.* La lunghezza dell'arco α dell'arco AP indica allora la misura in radianti dell'angolo $A\hat{O}P$.





2.3 Le funzioni seno e coseno di un angolo definiti nella circonferenza goniometrica

Le funzioni goniometriche, già definite in precedenza, si possono anche definire in modo diverso.

Per ogni numero reale $\alpha \in [0;2\pi]$, sia $P \in \gamma$ il punto tale che $\overset{\frown}{AP} = \alpha$. L'angolo $A\hat{O}P$ misura dunque α radianti.

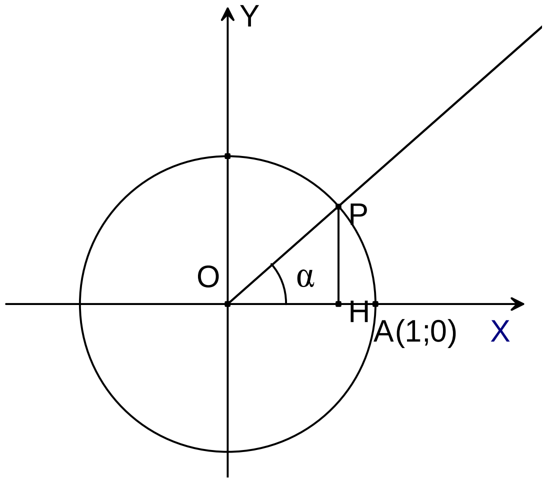
Definizione: Si definiscono **coseno e seno** di α oppure dell'angolo $A\hat{O}P$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto *P* e si scrive:

$$P(\cos\alpha; sen\alpha).$$

In altre parole

$$\cos\alpha = x_P$$
$$sen\alpha = y_P$$

Osservazione didattica: Si farà notare agli studenti che le definizioni date ora sono equivalenti a quelle formulate precedentemente. Infatti, considerando la seguente figura



dove *H* è la proiezione ortogonale di *P* sull'asse *X* e $A\hat{O}P = \alpha$, si ha:

$$sen\alpha = \frac{\overline{HP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HP}}{r} = \frac{\overline{HP}}{1} = \overline{HP} = y_P, \text{ ordinata del punto } P$$

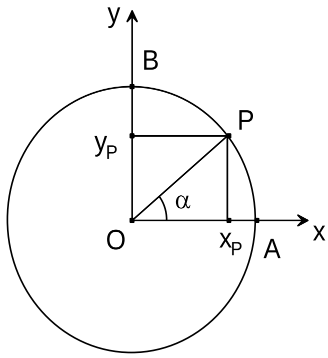
$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OH}}{r} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH} = x_P, \textit{ ascissa} \text{ del punto } P$$

2.4 Le variazioni delle funzioni seno e coseno. Prima relazione fondamentale della goniometria.

Supponiamo che un punto *P* percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da *A*, in verso antiorario. Se $A\hat{O}P = \alpha$, come variano $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ al variare della posizione di *P*? Basta osservare che cosa succede all'ascissa di *P* (ossia al coseno) e alla sua ordinata (ossia al seno).

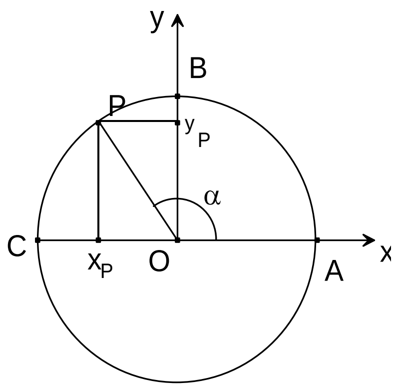
a. Finché il punto *P* percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_P e la sua ordinata y_P sono positive. Man mano che *P* si avvicina al punto *B*, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In *B* abbiamo:

$$x_B = 0, \quad y_B = 1$$



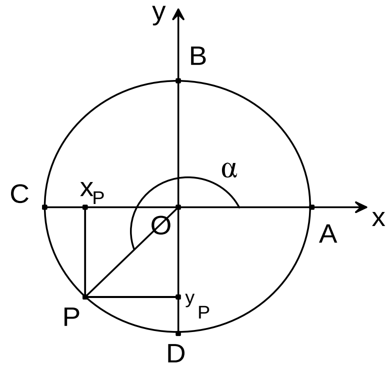
b. Quando *P* la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa Quando *P* si avvicina a *C* sia l'ascissa che l'ordinata diminuiscono. In *C* abbiamo:

$$x_C = -1, \quad y_C = 0$$



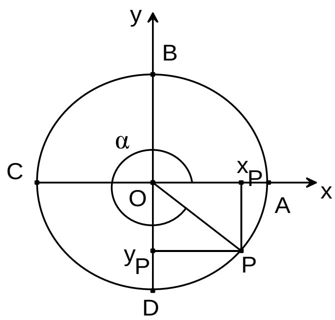
c. Se *P* si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano *P* si avvicina a *D*, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce. In *D* abbiamo:

$$x_D = 0, \qquad y_D = -1$$



d. Quando *P* percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi ad *A*, sia l'ascissa sia l'ordinata di *P* aumentano. In *A* abbiamo:

$$x_A = 1, \qquad y_A = 0$$



Qualunque sia la posizione di *P* sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1, quindi:

$$-1 \leq sen\alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.$$

Il codominio della funzione seno e coseno è quindi $[-1;\ 1]$.

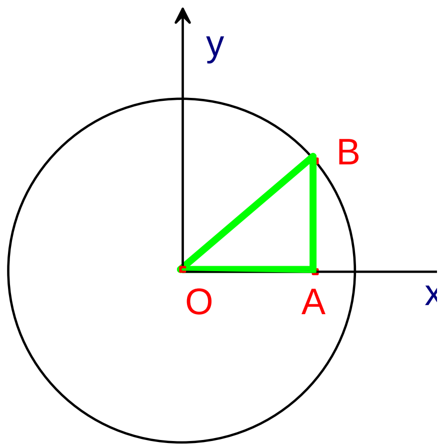
Osserviamo inoltre che poiché $P(\cos\alpha, sen\alpha)$ appartiene alla circonferenza di equazione $X^2 + Y^2 = 1$, le sue coordinate devono soddisfare a tale equazione, cioè deve essere:

$$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

detta **prima relazione fondamentale della goniometria**.

Tale relazione esprime il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo

$A\hat{O}B$



2.5 Seno e coseno di angoli particolari

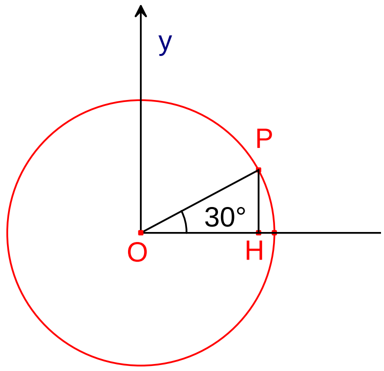
1. $\alpha = \dfrac{\pi}{6} = 0,5236...$ $\quad (30^\circ)$

Dalla figura 17 si osserva che il triangolo $O\hat{H}P$, rettangolo in *H* e con l'angolo $H\hat{O}P$ di 30°, è la metà di un triangolo equilatero di lato *OP* e altezza *OH* e pertanto risulta:

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{\mathrm{PH}} = \frac{1}{2}.$$

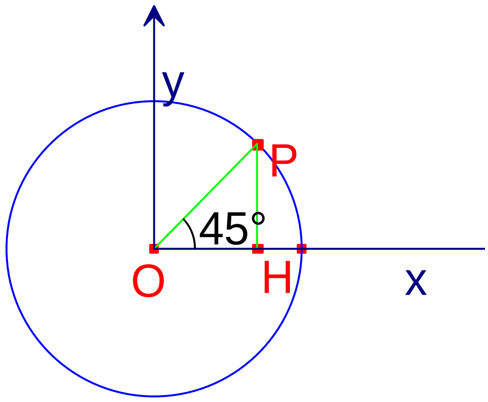
Quindi:

$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$sen 30^\circ = sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$



2. $\alpha = \dfrac{\pi}{4} = 0{,}7854...$ $\qquad (45^\circ)$

Dalla figura 18 si osserva che il triangolo $O\hat{H}P$, rettangolo isoscele, è la metà di un quadrato di diagonale *OP* e lato $OH = PH$ e pertanto risulta



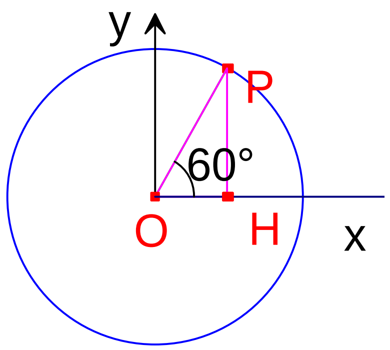
$$OH = PH = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi:

$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$sen 45^\circ = sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 1{,}0472...$ $\qquad (60^\circ)$

Dalla figura 19 si osserva che il triangolo rettangolo $O\hat{H}P$, con l'angolo $H\hat{O}P$ di 60°, è la metà di un triangolo equilatero di lato *OP* e altezza *PH* e pertanto risulta:



$$\overline{OH} = \frac{1}{2}, \qquad \overline{PH} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi:

$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$
$$sen 60^\circ = sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6 Periodicità della funzione coseno e seno.

Ricordiamo innanzitutto che una funzione $y = f(x)$ è **periodica** di periodo T (con *T>0*) se, per qualunque numero intero relativo *k*, si ha

$$f(x+kT) = f(x) \tag{1}$$

cioè se, sostituendo $(x+kT)$ al posto di *x*, il valore della funzione non cambia. Si noti che la (1) ha senso se sia $(x+kT)$ sia *x* appartengono al dominio della funzione considerata. Il più piccolo valore di *T, positivo,* per cui vale la (1) è detto *periodo principale*.

Finora abbiamo considerato le funzioni $\cos\alpha$ e $sen\alpha$ per $\alpha \in [0;\ 2\pi]$. Tali funzioni vengono poi definite su tutto l'asse reale in modo **periodico**, attribuendo cioè a esse negli intervalli

$\left]2\pi;\ 4\pi\right],\ \left]4\pi;\ 6\pi\right],...,$ come pure negli intervalli $\left[-2\pi;\ -4\pi\right[,\ \left[-4\pi;\ -6\pi\right[,...$ **gli stessi valori** che erano stati attribuiti loro nell'intervallo $\left[0;\ 2\pi\right]$. In base a tale definizione si dice che **le funzioni coseno e seno sono periodiche di periodo** 2π e si scrive:

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi) \quad (k \in \mathbf{Z})$$
$$sen\alpha = sen(\alpha + 2k\pi) \quad (k \in \mathbf{Z})$$

2.7 Grafici delle funzioni seno e coseno: Sinusoide e Cosinusoide.

Vogliamo ora costruire il grafico delle funzioni rappresentate dalle equazioni

$$y = senx, \quad y = \cos x$$

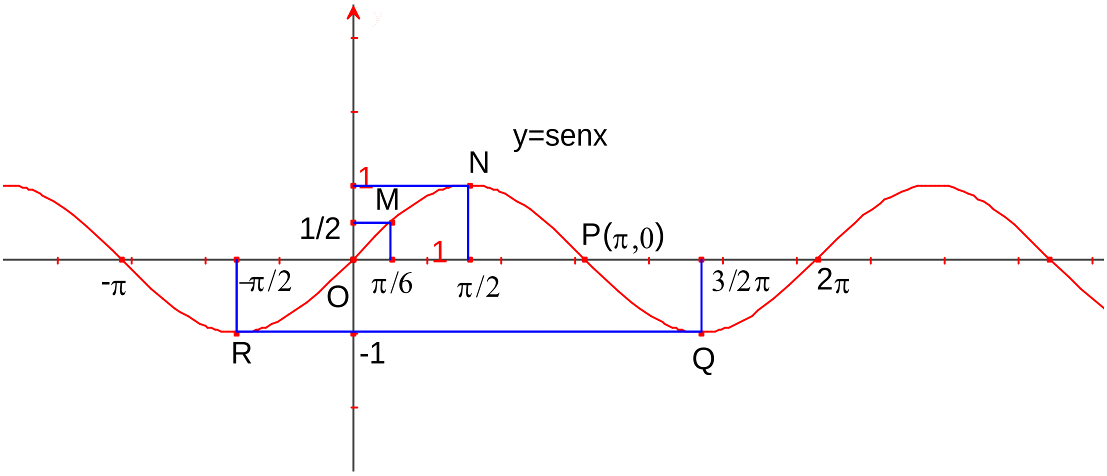
Basterà portare sull'asse delle ascisse le misure dell'angolo espresse in radianti e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori del *seno*, del *coseno*. Le curve che così si ottengono sono dette rispettivamente **sinusoide** e **cosinusoide**.

Proponiamoci quindi di disegnare la sinusoide:

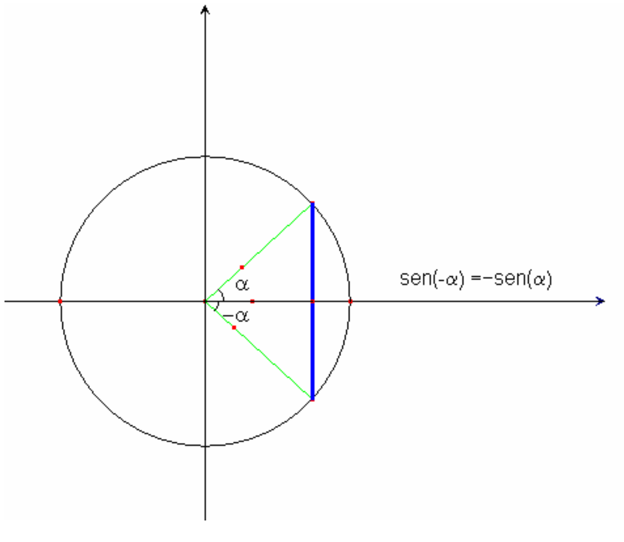
segniamo sul piano cartesiano i punti che hanno per ascissa la misura in radianti dell'angolo e per ordinata il valore del suo seno, per esempio:

$O(0;\ 0),\ M\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{1}{2}\right),\ N\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right),\ P(\pi;\ 0),\ Q\left(\frac{3}{2}\pi;\ -1\right),$ ecc.

Questi punti sono punti del grafico richiesto. Tenendo conto di tutti i possibili valori dell'angolo e del suo seno e ricordando anche la periodicità della funzione *seno*, si ottiene un grafico come quello di figura.



La funzione $y = senx$ ha per dominio l'insieme $\Re$ dei numeri reali e come immagine del dominio l'intervallo $[-1;\ 1]$. Inoltre essendo $sen(-\alpha) = -sen\alpha$, il *seno* è una **funzione dispari.**

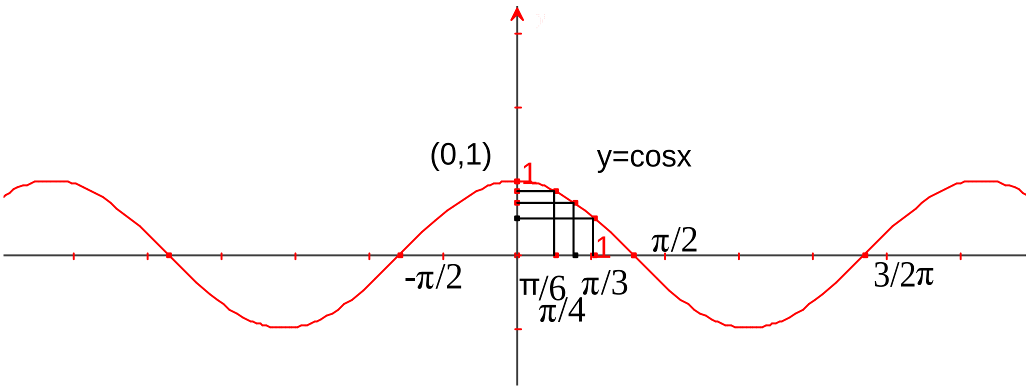


Analogamente per disegnare la cosinusoide:

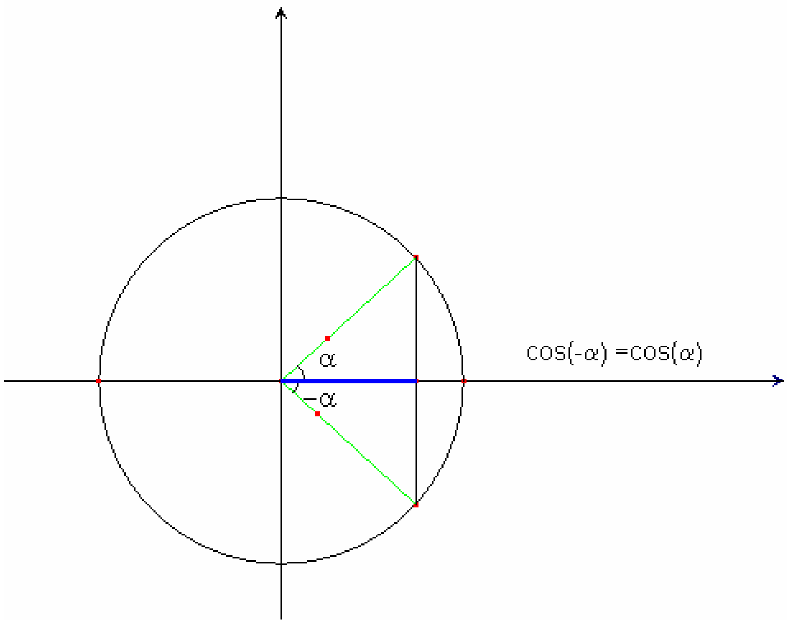
segniamo sul piano cartesiano i punti che hanno per ascissa la misura in radianti dell'angolo e per ordinata il valore del suo *coseno,* per esempio:

$$(0;\ 1),\ \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$$

Questi punti sono punti del grafico richiesto. Tenendo conto di tutti i possibili valori dell'angolo e del suo coseno e ricordando anche la periodicità della funzione *coseno*, si ottiene un grafico come quello di figura 22.



La funzione $y = \cos x$ ha per dominio l'insieme $\Re$ dei numeri reali e come immagine del dominio l'intervallo $[-1;\ 1]$. Inoltre essendo $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ (fig. 23) la **funzione è pari**.

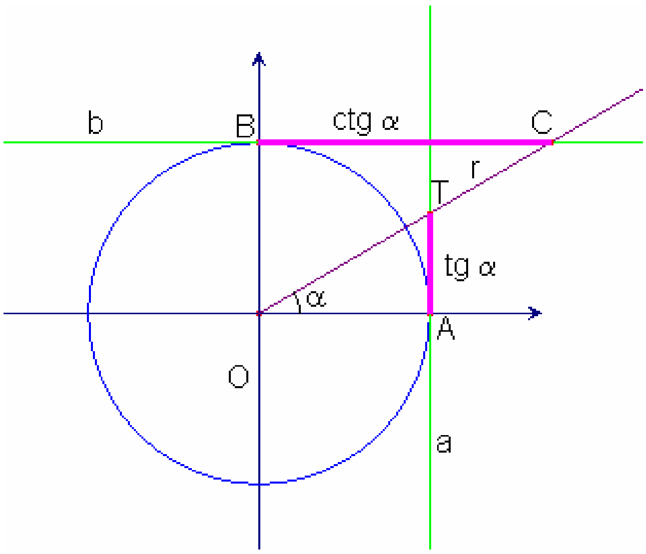


Osservazione didattica:

Gli alunni saranno portati in laboratorio per realizzare il grafico della funzione seno utilizzando entrambi i software didattici Cabri e Derive.

2.8 Un altro modo per definire le funzioni tangente e cotangente

Se si considerano due rette **a** e **b**, tangenti alla circonferenza goniometrica nei suoi due punti **A** e **B** d'intersezione con i semiassi positivi delle **x** e delle **y**, e i punti **T** e **C** d'intersezione di queste con la semiretta **r**, vengono dette **tangente** e **cotangente** dell'angolo orientato α rispettivamente l'ordinata di **T** e l'ascissa di **C**.



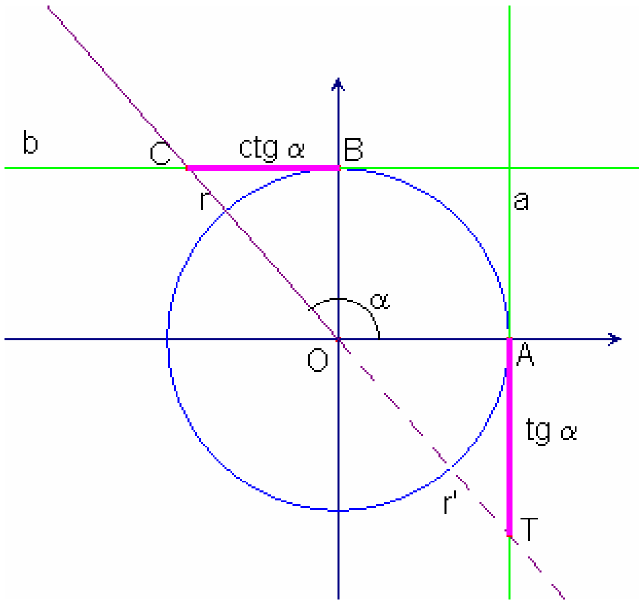
Anche queste definizioni coincidono con quelle date nel precedente paragrafo. Infatti, usando le coordinate di **T** per definire la tangente di α si ha:

$$tg\alpha = \frac{y_t}{x_t} = \frac{y_t}{1} = y_t$$

Analogamente, usando le coordinate di **C** per definire la cotangente di α, si ha:

$$ctg\alpha = \frac{x_c}{y_c} = \frac{x_c}{1} = x_c$$

Se la semiretta **r** non interseca le rette tangenti alla circonferenza **a** e **b**, si devono considerare le intersezioni di queste ultime con la semiretta **r'** opposta alla retta **r**.



Come si può osservare graficamente o tenendo conto del fatto che

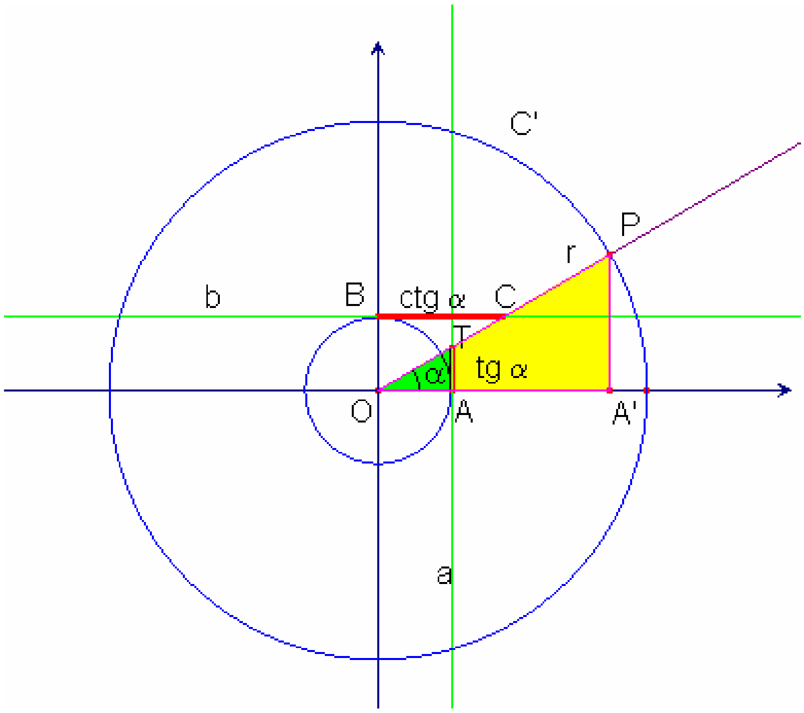
$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{e} \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

La tangente e la cotangente assumono valori positivi nel I e nel III quadrante, e valori negativi nel II e IV quadrante.

2.9 <u>Dipendenza della tangente e della cotangente dall'angolo α.</u>

Anche in questo caso si può dimostrare che i rapporti $\frac{y_t}{x_t}$ e $\frac{x_c}{y_c}$ con cui sono state definite la tangente e la cotangente, non cambiano se cambia il raggio della circonferenza **C**.

Dimostriamo quanto affermato per la funzione tangente (per la cotangente vale lo stesso discorso). Consideriamo il prolungamento del raggio **OP** che interseca la seconda circonferenza **C′** nel punto **P′** e sia **A′** la sua proiezione sull'asse x.



I triangoli ***OAT*** e ***OA'P*** sono simili, quindi vale la proporzione:

$$\overline{AT}:\overline{OA}=\overline{A'P}:\overline{OA'}$$

ovvero

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{A'P}}{\overline{OA'}}=tg\alpha$$

Quindi i rapporti considerati dipendono soltanto dall'angolo α. Ovviamente tali rapporti non esistono se i denominatori sono nulli.

2.10 Periodicità della funzione tangente

Come le funzioni *seno* e *coseno,* anche la funzione *tangente* viene definita al di fuori dell'intervallo $[0;\ 2\pi]$ in maniera periodica, in modo da rispettare l'uguaglianza;

$$tg\alpha = tg(\alpha + 2\pi)$$

Tenuto presente però che sui valori $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ la tangente non è definita, essa non sarà analogamente definita sui valori che si possono ottenere da questi aggiungendo multipli di *2π,* cioè per tutti i valori:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \qquad \alpha = \frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{2} + 3\pi \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + 4\pi \qquad \alpha = \frac{3}{2}\pi + 4\pi = \frac{\pi}{2} + 5\pi$$

E così via. In definitiva, i valori "proibiti" sono tutti i numeri:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

essendo *k* un qualsiasi intero positivo, negativo o nullo.
L'esame dei valori particolari studiati mette in luce, del resto, che i valori della tangente nell'intervallo $[0;\ \pi]$ sono gli stessi assunti nell'intervallo $[\pi;\ 2\pi]$, cioè si ha:

$$tg\alpha = tg(\alpha + k\pi) \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

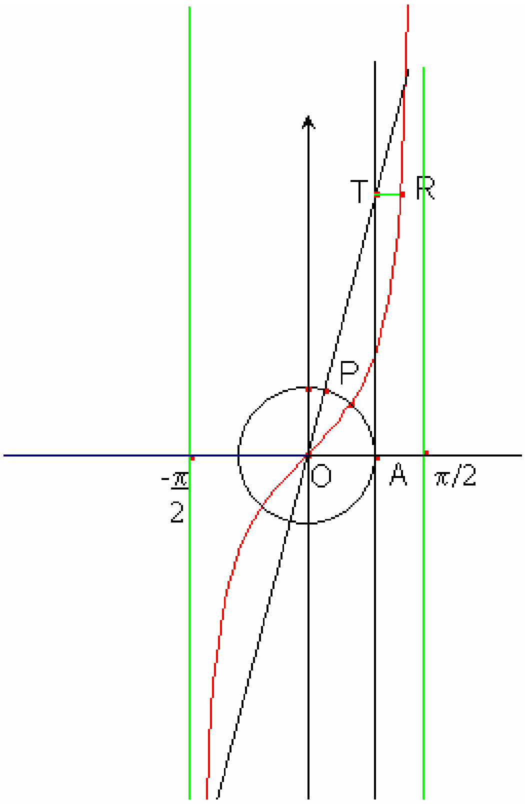
cioè **la funzione tangente è periodica di periodo π.**

2.11 Grafico della funzione tangente

Tracciamo ora nel piano XOY il grafico della funzione

$$y = tgx$$

riportando sull'asse delle ascisse la misura degli archi e sull'asse delle ordinate i corrispondenti valori delle tangenti. Limitiamo per ora il grafico ad archi compresi



tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Quando *x* assume valori molto vicini a $\frac{\pi}{2}$ ma minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare sempre più grande , diremo che tende a $+\infty$. In altre parole si può dire che la distanza tra i punti (x, tgx) e la retta $x=\frac{\pi}{2}$ tende a 0.

Analogamente quando *x* assume valori molto vicini a $-\frac{\pi}{2}$, ma maggiori di $-\frac{\pi}{2}$. Quindi il grafico della tangente si avvicina a quello delle due rette verticali $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=-\frac{\pi}{2}$ che sono detti **asintoti** della curva.

<u>Osservazione:</u>

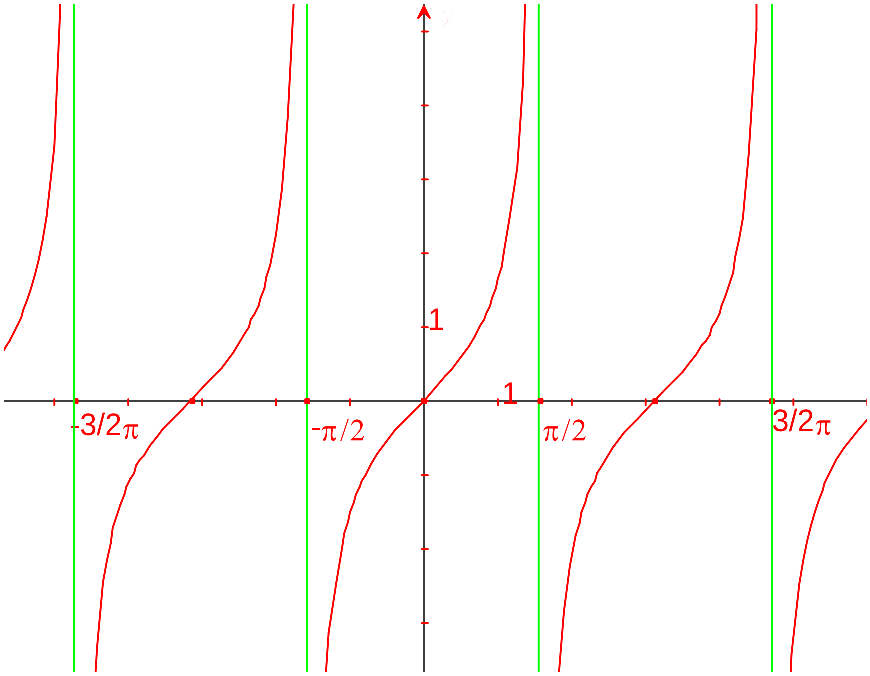
A differenza delle funzioni *seno* e *coseno*, la funzione *tangente* $y = tgx$ può assumere qualunque valore reale. Perciò il suo codominio è l'insieme $\Re$ dei reali ed è definita $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbf{Z})$.

Il grafico completo della funzione $y = tgx$ è costituito da infiniti rami uguali a quello di figura 29, che si ripetono in ogni intervallo:

$$\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[\quad \left]\frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right[\quad \text{ecc...}$$

come pure:

$$\left]-\frac{3}{2}\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right[\quad \left]-\frac{5}{2}\pi;\ -\frac{3}{2}\pi\right[\quad \text{ecc.}..$$

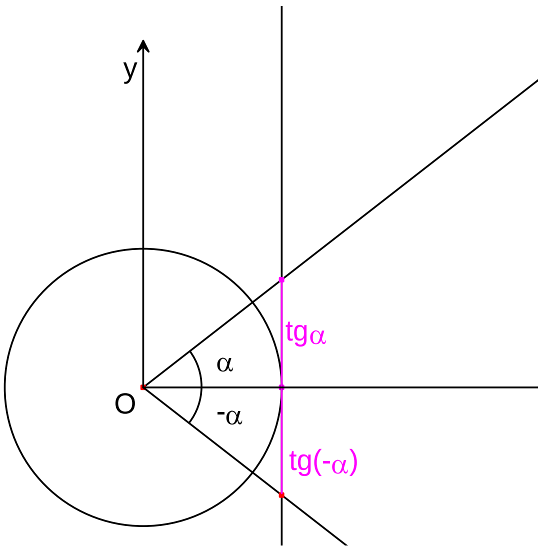


La curva ha quindi infiniti asintoti verticali di equazione:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad (k\in\mathbf{Z})$$

ed è simmetrica rispetto all'origine (la funzione tangente cioè è dispari), infatti si ha:

$$tg(-x)=-tgx \qquad \forall x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \left(k\in\mathbf{Z}\right)$$

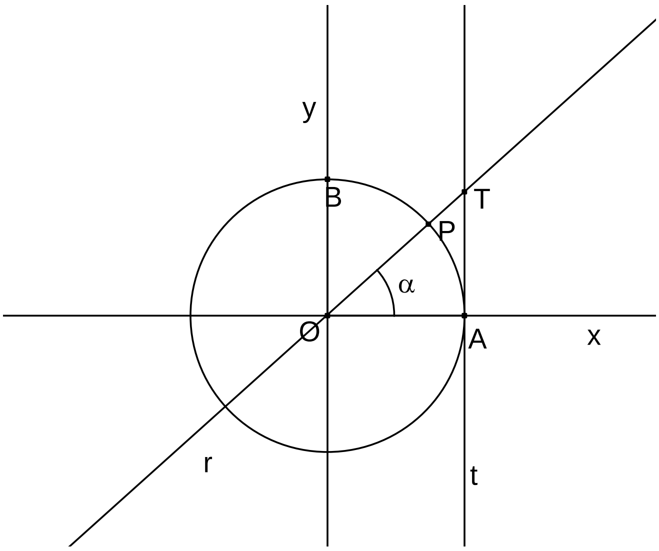


2.12 Significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

Sia $y = mx$ l'equazione di una retta *r* passante per l'origine *O* degli assi e sia α la misura in radianti dell'angolo che la semiretta positiva dell'asse *x* forma con la semiretta di *r* i cui punti hanno ordinata non negativa. Sappiamo inoltre che il coefficiente angolare *m* è il rapporto:

$$m = \frac{y}{x} \qquad 1$$

Tra l'ordinata e l'ascissa di un punto qualunque della retta distinto dall'origine.



Disegnata la circonferenza goniometrica di equazione:

$$X^2 + Y^2 = 1$$

e la retta *t* ad essa tangente in $A(1,\ 0)$, siano *P* e *T* i punti di intersezione di *r* con la circonferenza e con *t* . Per quanto detto in precedenza, i punti *P* e *T* hanno rispettivamente le coordinate seguenti:

$$P(\cos\alpha;\ sen\alpha) \qquad T(1;\ tg\alpha).$$

Essendo *T* un punto di *r*, dalla (1) segue:

$$m = \frac{tg\alpha}{1} = tg\alpha$$

Cioè **il coefficiente angolare di una retta *r* è la tangente goniometrica dell'angolo orientato di misura α** che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse. Dall'appartenenza di *P* a *r* si ha ancora:

$$m = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

E quindi:

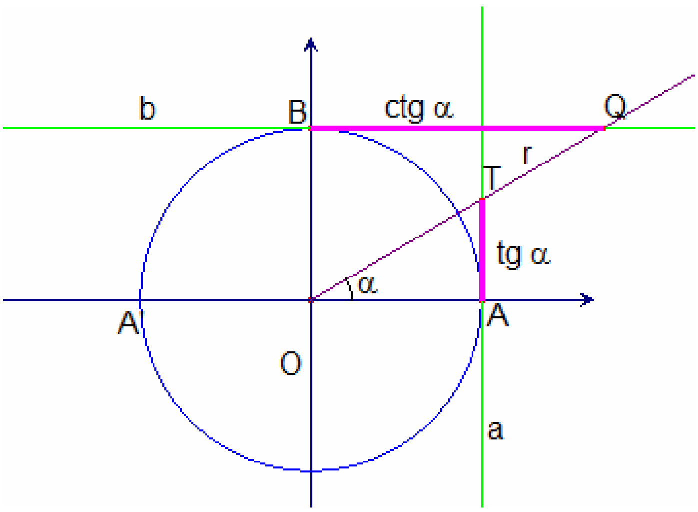
$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

che è la **seconda relazione fondamentale della goniometria.**

3. Le funzioni cotangente, secante e cosecante

3.1 La funzione cotangente:

Considerato l'arco $\overset{\frown}{AP} = \alpha$ e la retta *OP*, sia *Q* il suo punto di intersezione con la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $B(0,\ 1)$; l'ascissa del punto *Q* è detta **cotangente di α** e si indica con la scrittura $ctg\alpha$. Si osservi che se $P \equiv A$, oppure $P \equiv A'$ il punto *Q* non esiste, perciò *ctgα* si definisce per $\alpha \neq k\pi$.



Si osservi dalla figura che i triangoli $O\hat{B}Q$ e $O\hat{A}T$ sono simili, quindi:

$$BQ : OA = OB : AT$$

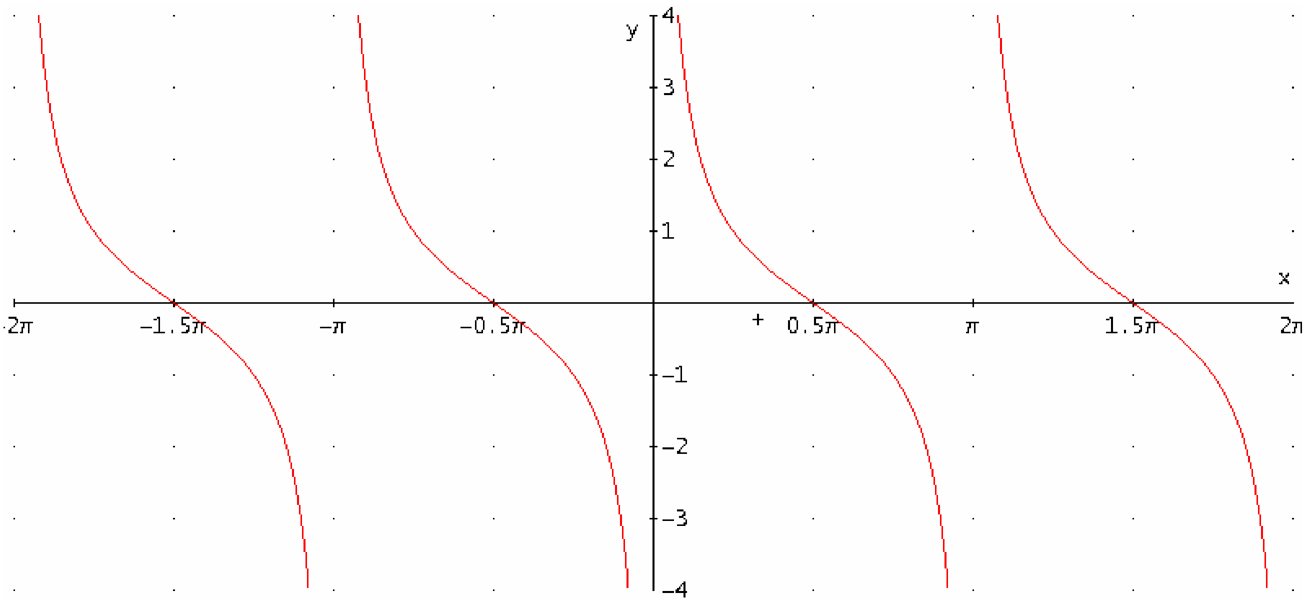
Cioè:

$$ctg\alpha : 1 = 1 : tg\alpha$$

Da cui, per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$:

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

La funzione $y = ctgx$ è definita per $x \neq k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$, ha per codominio tutto l'insieme $\Re$ dei reali, inoltre è, come la funzione tangente, periodica di periodo π. Il suo grafico, detto **cotangentoide**, è il seguente:



La curva ha infiniti asindoti di equazione:

$$x = k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

E infine, poiché:

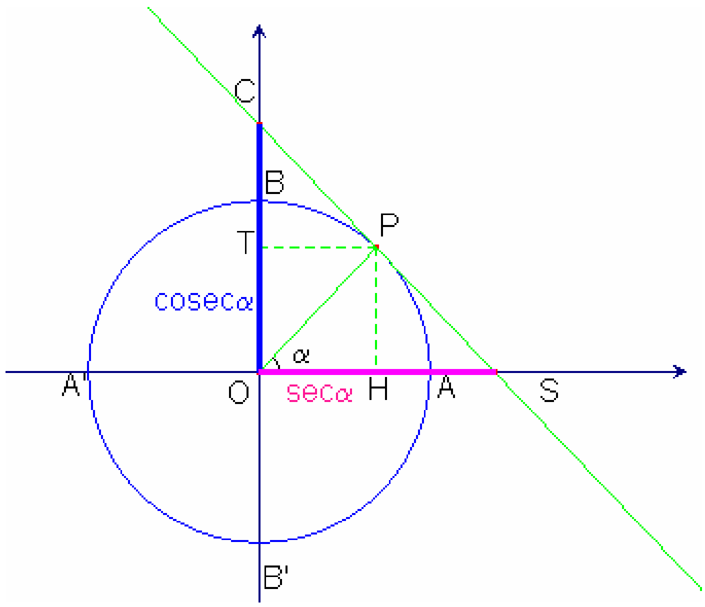
$$ctg(-x) = -ctgx$$

La curva è simmetrica rispetto all'origine (cioè la funzione cotangente è dispari).

3.2 La funzione secante e cosecante

Consideriamo ora la retta *t* tangente alla circonferenza goniometrica nel punto *P* e siano *S* e *C* le sue intersezioni con gli assi *x* e *y* . L'ascissa del punto *S* è detta **secante di α** e si indica con la scrittura *sec α,* mentre l'ordinata del punto *C* è detta **cosecante di α** e si indica con la scrittura *cosec* α. Si osservi che se $P \equiv B$ o $P \equiv B'$ il punto *S* non esiste, perciò *sec* **α** si definisce per

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,.$$



Analogamente, se $P \equiv A$ o $P \equiv A'$ il punto *C* non esiste, perciò *cosec* **α** si definisce per

$$\alpha \neq k\pi \,.$$

Si osservi inoltre che il triangolo $O\hat{P}S$ è rettangolo e ha l'ipotenusa *OS*; applicando il primo teorema di Euclide[1], risulta:

$$OS : OP = OP : OH$$

cioè:

$$\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$$

Quindi, per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

La funzione $y = \sec x$, definita per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), è periodica di periodo 2π; inoltre essendo reciproca della funzione coseno, risulta, per ogni *x* del dominio:

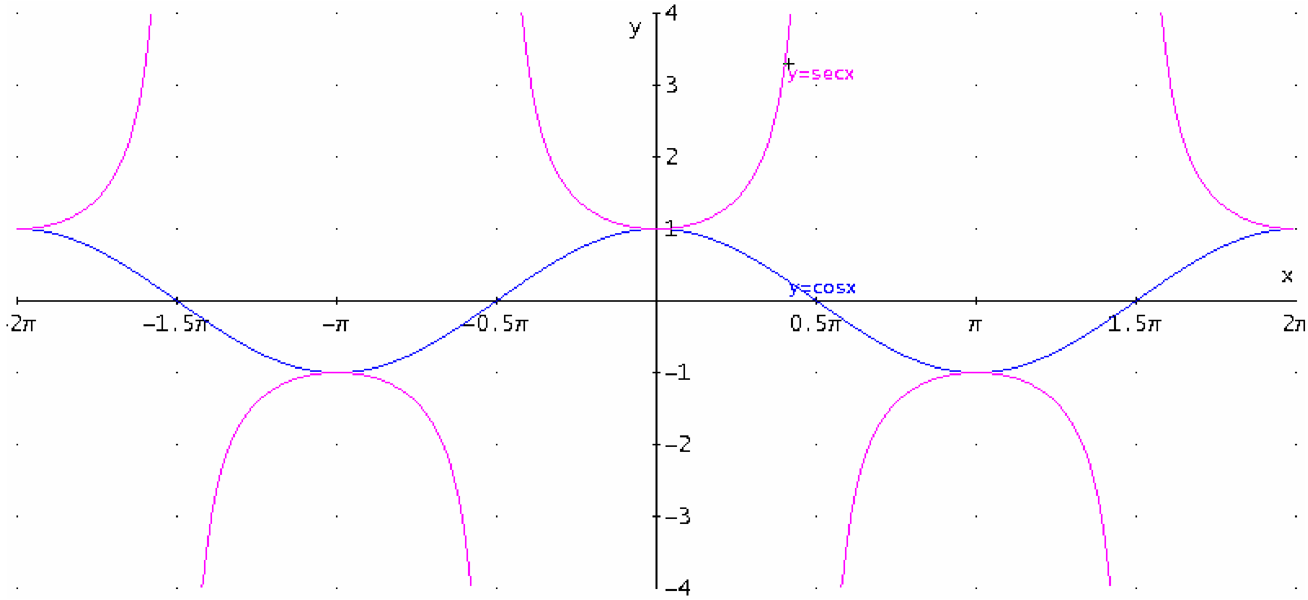
$$\sec(-x) = \sec x$$

$$\text{e} \qquad |\sec x| \geq 1 \quad \text{cioè} \quad \sec x \leq -1 \quad \sec x \geq 1$$

quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse *y* e situato al di fuori della striscia limitata dalle rette $y = -1$ e $y = 1$. Il grafico della funzione secante si ottiene per punti dal grafico della funzione coseno:

se $(x,\ a)$ con $a \neq 0$ è un punto della cosinusoide, il punto di uguale ascissa $\left(x,\ \frac{1}{a}\right)$ appartiene al grafico della secante.

[1]Il primo teorema di Euclide afferma che: In ogni triangolo rettangolo, il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



In corrispondenza dei punti in cui la cosinusoide incontra l'asse delle ascisse

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

la secante ha **asintoti verticali.**

Analogamente, applicando il primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo

$O\hat{P}C$, si ha:

$$OC : OP = OP : OT$$

cioè:

$$\operatorname{cosec}\alpha : 1 = 1 : sen\alpha$$

da cui, per $\alpha \neq k\pi$:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

La funzione $y = \operatorname{cosec} x$, definita per ogni $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, è periodica di periodo 2π, inoltre, essendo reciproca della funzione seno, risulta, per ogni *x* del dominio:

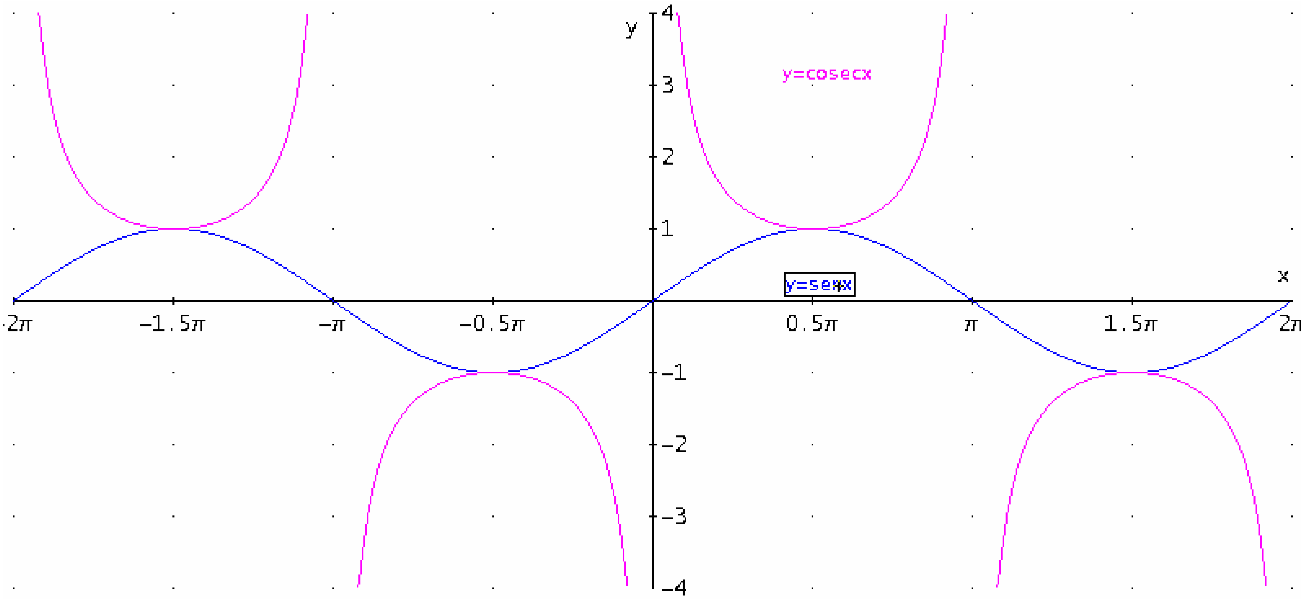
$$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$$

e

$$|\operatorname{cosec} x| \geq 1 \quad \text{cioè} \quad \operatorname{cosec} x \leq -1 \quad \operatorname{cosec} x \geq 1$$

E quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine ed è situato al di fuori della striscia limitata dalle rette $y = -1$ e $y = 1$. Il grafico della funzione cosecante si ottiene per punti dal grafico della funzione seno:

se $(x,\ a)$ con $a \neq 0$ è un punto della sinusoide, il punto di uguale ascissa $\left(x,\ \dfrac{1}{a}\right)$ appartiene al grafico della cosecante.



In corrispondenza dei punti in cui la sinusoide incontra l'asse delle ascisse:

$$x = k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

la cosecante ha **asintoti verticali**.

Valori delle funzioni goniometriche mediante una sola di esse:

Noto:	$sen\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
✓ $sen\alpha$	$sen\alpha$	$\pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$	$\pm\frac{sen\alpha}{\sqrt{1-sen^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-sen^2\alpha}}{sen\alpha}$
✓ $\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
✓ $tg\alpha$	$\pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$tg\alpha$	$\frac{1}{tg\alpha}$
✓ $ctg\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\pm\frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$	$\frac{1}{ctg\alpha}$	$ctg\alpha$

<u>Valori esatti delle funzioni goniometriche di angoli particolari</u>

Misura in radianti	Misura in gradi	seno	coseno	tangente	cotangente
0	0°	0	1	0	non esiste
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
	90°	1	0	non esiste	0
	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
	150°				$-\sqrt{3}$

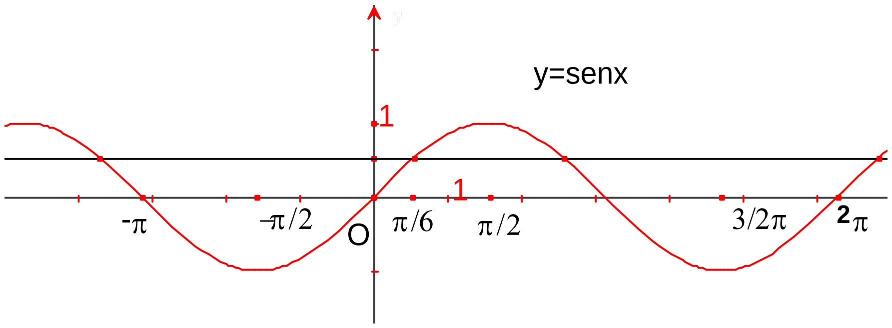
$\frac{5}{12}\pi$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{2}{3}\pi$ $\frac{3}{4}\pi$ $\frac{5}{6}\pi$ π $\frac{7}{6}\pi$ $\frac{5}{4}\pi$ $\frac{3}{2}\pi$ $\frac{7}{4}\pi$ 2π	180° 210° 225° 270° 315° 360°	$\frac{1}{2}$ 0 $-\frac{1}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ -1 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ -1 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1 non esiste -1 0	non esiste $\sqrt{3}$ 1 0 -1 non esiste

4 Le funzioni goniometriche inverse:

Una funzione è invertibile, ossia ammette funzione inversa solo se essa è biettiva.

4.1 La funzione arcoseno:

La funzione $y = senx$ non è biiettiva perché non è iniettiva. Infatti se consideriamo una retta *y*=*k*, parallela all'asse *x*, con $-1 \le k \le 1$, essa interseca il grafico della funzione seno in infiniti punti, quindi ogni valore del codominio $[-1;\ 1]$ di $y = senx$ è il corrispondente di infiniti valori del dominio.

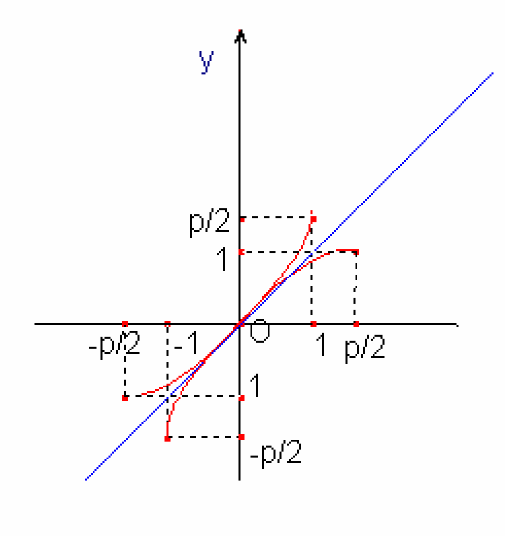


Se tuttavia restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ (o nello stesso modo all'intervallo $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$ ecc..) , la funzione $y = senx$ risulta biettiva e dunque invertibile. La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno* e si scrive $x = arcseny = sen^{-1}y$ che significa "*x* è l'angolo il cui seno è *y*.

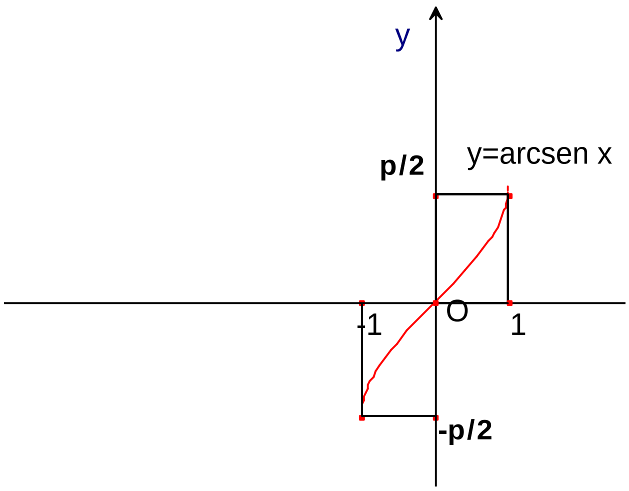
<u>Esempio:</u>

$$arcsen1 = \frac{\pi}{2} \iff sen\frac{\pi}{2} = 1;$$
$$arcsen\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \iff \mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per ottenere il grafico della funzione $y = arcsenx$ definito in $[-1;\ 1]$ e a valori in $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1°, 3° quadrante (che ha equazione *y*=*x*) del grafico $y = senx$ con $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.



Ecco il grafico della funzione arcoseno.



Relativamente alle funzioni seno e arcoseno si ha:

$$arcsen(senx) = x \text{ per } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$sen(arcsenx) = x \text{ per } -1 \le x \le 1$$

Le considerazioni fatte per la funzione inversa di $y = senx$ valgono anche per le funzioni inverse delle altre funzioni goniometriche.

4.2 La funzione arcocoseno:

La funzione inversa del coseno si chiama **arcocoseno** e si scrive

$$x = \arccos y = \cos^{-1} y$$

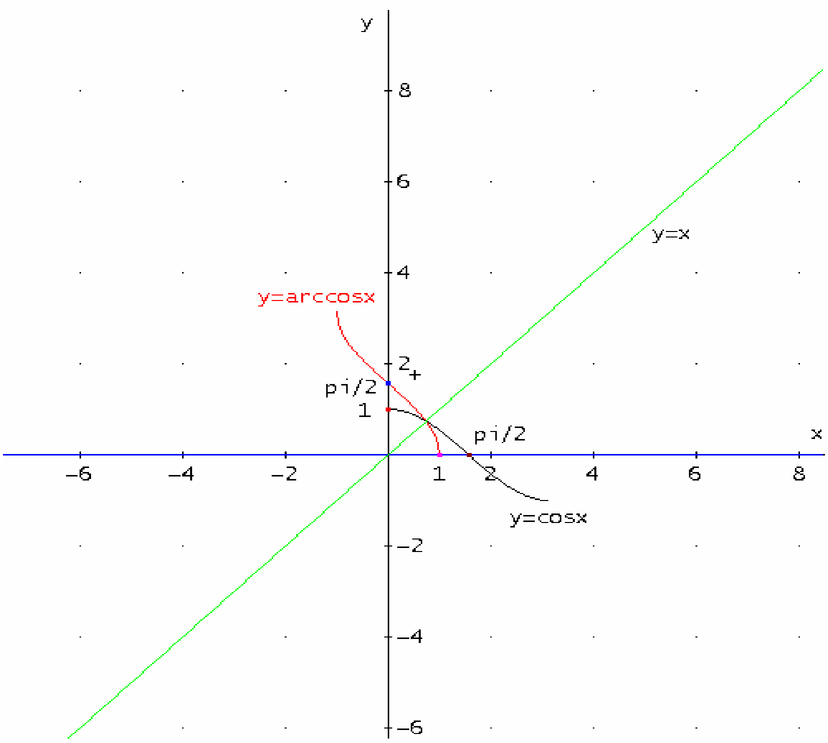
definita in $[-1;\ 1]$ e a valori in $[0;\ \pi]$ che significa "*x* è l'angolo il cui coseno è *y*".

Esempi:

$$arc\cos(-1) = \pi \ \Leftrightarrow \cos\pi = -1;$$

$$arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per ottenere il grafico della funzione $y = \arccos x$ definito in $]-1;\ 1[$ e a valori in $[0;\ \pi]$, si procede come per il grafico della funzione $y = arcsenx$, tracciando il simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° 3° quadrante del grafico di $y = \cos x$ con $x \in [0;\ \pi]$



Inoltre si ha

$$\arccos(\cos x) = x \text{ per } 0 \le x \le \pi$$
$$\cos(\arccos x) = x \text{ per } -1 \le x \le 1$$

4.3 La funzione arcotangente:

Dalla funzione $y = tgx$, se si limita l'insieme di definizione all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (si prende per convenzione questo intervallo ma si potrebbe prendere ugualmente l'intervallo $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$), si può determinare la funzione inversa

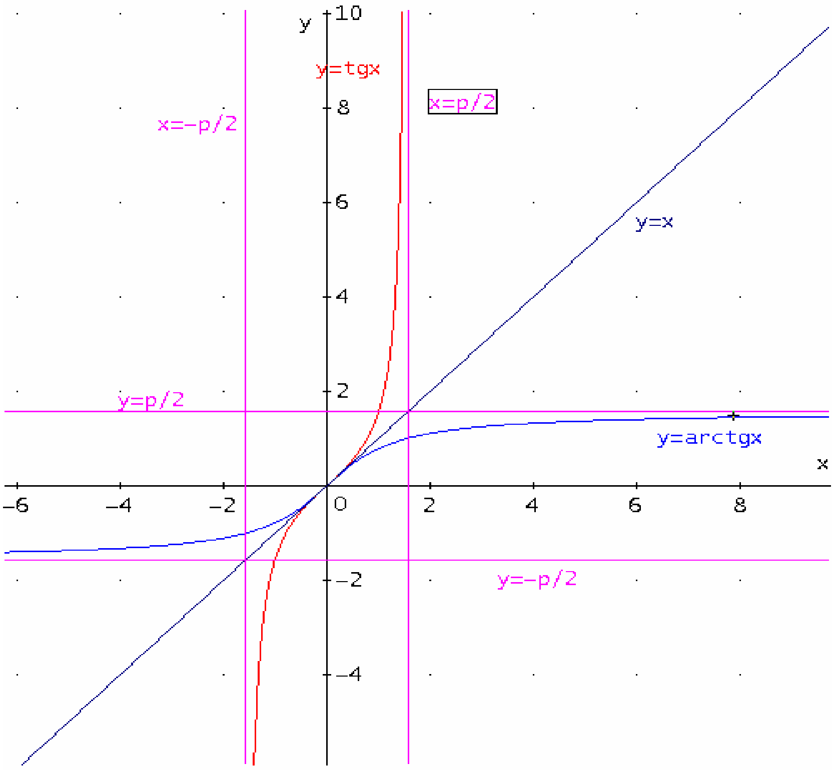
$x = arctg y$ definita per ogni *y* e a valori $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ che significa “*x* è l’angolo la cui tangente è *y*”.

<u>Esempi</u>:

$$arctg 1 = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow tg\frac{\pi}{4} = 1$$

$$arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

La funzione $y = arctgx$ ottenuta dalla $x = arctgy$ scambiando *x* con *y* è definita in $\Re$ e ha valori in $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ e il suo grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1°, 3° quadrante del grafico di $y = tgx$ con $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$.



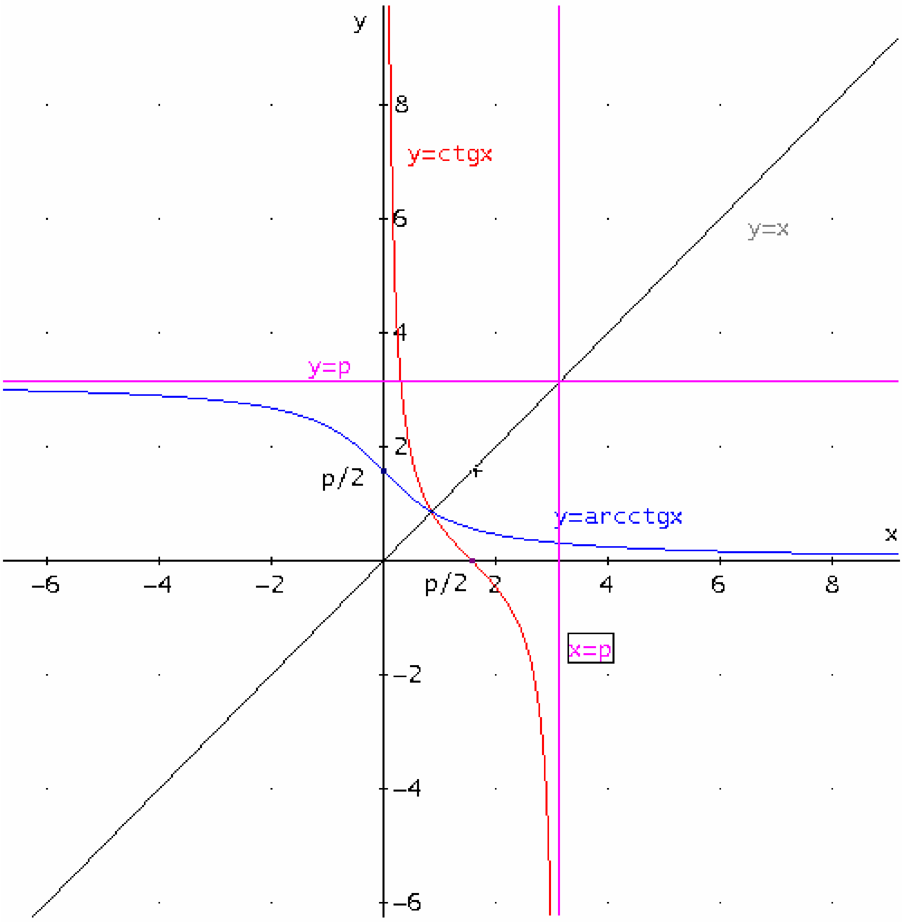
4.4 La funzione arcocotangente:

La funzione $y = ctgx$ non è biunivoca , ma lo è nell'intervallo $]0;\ \pi[$; in tale intervallo pertanto esiste l'inversa $x = arcctgy$ definita per ogni *y* e a valori $x \in]0;\ \pi[$ che significa "*x* è l'angolo la cui cotangente è *y*".

Esempi:

$$arcctg 0 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ctg \frac{\pi}{2} = 0$$
$$arcctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ctg \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La funzione $y = arcctgx$ è pertanto definita su tutto l'asse reale e a valori in $]0;\ \pi[$; il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1°, 3° quadrante del grafico $y = ctgx$ con $x \in]0;\ \pi[$.



5 Relazioni tra le funzioni goniometriche di particolari coppie di angoli, detti associati.

Vengono chiamati **associati** *gli angoli delle seguenti coppie*

α e 90° - α (sono complementari)

α e 90° + α (differiscono di un angolo retto)

α e 180° - α (sono supplementari)

α e 180 + α (differiscono di un angolo piatto)

α e 270° - α (hanno per somma tre angoli retti)

α e 270° + α (differiscono di tre angoli retti)

α e 360° - α (hanno per somma un angolo giro e vengono detti esplementari)

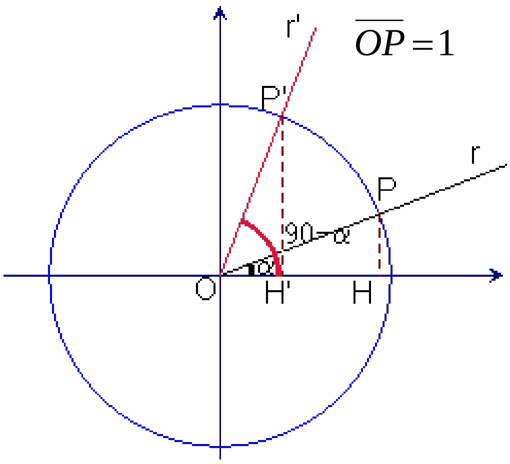
α e -α (sono opposti)

Tra le funzioni goniometriche di queste coppie di angoli intercorrono delle particolari relazioni. Dette relazioni possono venir dedotte dall'esame di alcune coppie di triangoli che risultano essere uguali e dalla conoscenza del segno che ha ogni funzione goniometrica in corrispondenza di un quadrante nel quale giace la semiretta che forma l'angolo.

5.1 Angoli complementari.

Nella figura è rappresentata una coppia di angoli orientati complementari α e 90° -α. Risulta evidente che i due triangoli rettangoli OPH e OP'H' sono uguali avendo l'ipotenusa e gli angoli acuti uguali. Ne consegue che:

$\overline{H'P'} = \overline{OH}$ e $\overline{OH'} = \overline{HP}$



Indicando con $\mathbf{x_{P'}}$ e $\mathbf{y_{P'}}$ quelle di **P′**, si ha pertanto:

$$sen(90° - \alpha) = y_{P'} = x_P = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = x_{P'} = y_P = sen\alpha$$

e di conseguenza:

$$tg(90° - \alpha) = \frac{sen(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = ctg\alpha$$

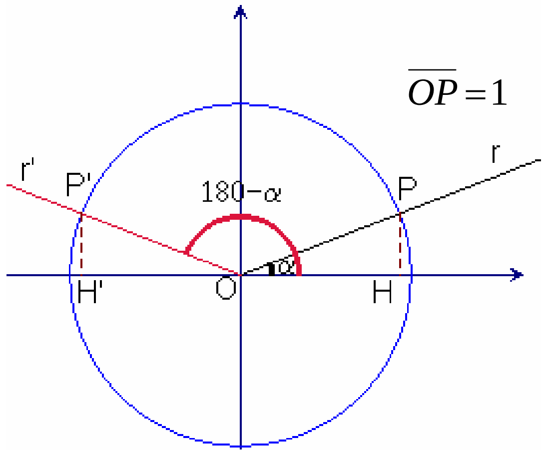
$$ctg(90° - \alpha) = \frac{\cos(90° - \alpha)}{sen(90° - \alpha)} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

5.2 Angoli supplementari.

Nella figura è rappresentata una coppia di angoli orientati supplementari α e $180° - \alpha$

Anche in questo caso risulta evidente che i due triangoli rettangoli OPH e OP′H′ sono uguali. Ne consegue che:

$$\overline{H'P'} = \overline{HP} \qquad e \qquad \overline{O'H'} = \overline{OH}$$



Indicando allora con $\mathbf{x_P}$ e $\mathbf{y_P}$ e coordinate di **P** e con $x_{P'}$ e $y_{P'}$, quelle di **P′**, si ha pertanto:

$$sen(180° - \alpha) = y_{P'} = y_P = sen\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = x_{P'} = -x_P = -\cos\alpha$$

e di conseguenza:

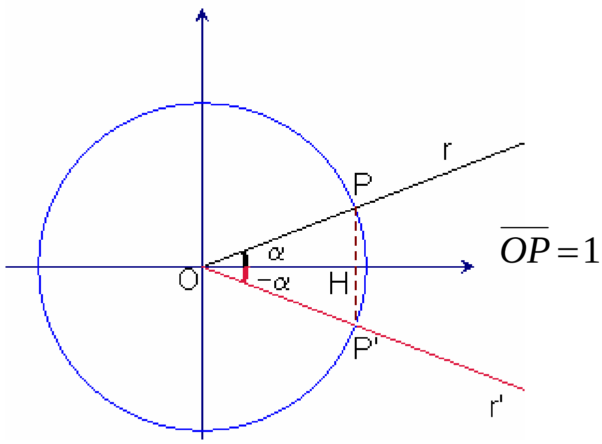
$$tg(180° - \alpha) = \frac{sen(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{sen\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha$$

$$ctg(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{sen(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{sen\alpha} = -ctg\alpha$$

5.3 Angoli opposti.

Nella figura è rappresentata una coppia di angoli opposti α e $-\alpha$.

Dall'uguaglianza dei due triangoli rettangoli OPH e OP'H e dalla conoscenza dei segni delle coordinate x_P e y_P di P e $x_{P'}$ e $y_{P'}$ di P′, si deduce che:



$$sen(-\alpha) = y_{P'} = -y_P = -sen\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = x_{P'} = x_P = \cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-sen\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$$

$$ctg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{sen(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = -ctg\alpha$$

Procedendo in modo analogo si determinano le relazioni che intercorrono tra le funzioni goniometriche di tutte le altre coppie di angoli associati.

VERIFICA FORMATIVA

1. **Rappresenta sulla circonferenza goniometrica i seguenti angoli disegnandone seno, coseno, tangente, cotangente.**

$$\frac{\pi}{6}; \quad -\frac{\pi}{4}; \quad 240°; \quad \frac{3}{2}\pi; \quad 480°; \quad \frac{25}{6}\pi;$$

2. **Calcola i valori delle restanti funzioni goniometriche dell'angolo di ampiezza α sapendo che:**

$$sen\alpha = \frac{1}{3} \quad \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$
$$tg\alpha = -\frac{3}{4} \quad \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$$
$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \quad \alpha \in \left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[$$

3. **Ricordando le relazioni fondamentali della goniometria, semplifica le seguenti espressioni:**

$$(senx+\cos x)^2 \cdot \sec x \cdot \cos ecx$$

$$\frac{senx-\cos ecx}{\cot gx}$$

4. Calcola il valore delle seguenti espressioni

$$2sen\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\left(sen\pi-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2tg\frac{\pi}{6}-3tg\frac{5}{6}\pi+sen\frac{7}{6}\pi-\cos\frac{11}{6}\pi$$

$$1+sen^2 135°-\sqrt{3}\cot g60°+\cos^2 240°-tg135°$$

VERIFICA SOMMATIVA

1. Calcola i valori delle restanti funzioni goniometriche dell'angolo di ampiezza α sapendo che:

$$tgx=\sqrt{5} \quad x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$

(5)

$$\cot gx=-\sqrt{3} \quad x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$$

2. Ricordando le relazioni fondamentali della goniometria, semplifica le seguenti espressioni:

$$\frac{\sec x+\cos ecx}{tgx+ctgx}$$

$$\frac{\cos^2 x-3sen^2 x}{\sec x-2tgx}$$

(10)

$$\frac{(1+senx-\cos x)^2+(senx-\cos x-1)^2}{ctgx(1-senx\cos x)}$$

3. Calcolare il valore delle seguenti espressioni

$$sen(\pi - x)\cos(\pi - x)\left[ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - ctg(\pi - x)\right]$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)ctg(\pi - x) + \cos(\pi - x)ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{sen^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \qquad (15)$$

$$\frac{\left(2\cos\frac{\pi}{2} + 4sen\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}tg\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos\pi\right)}{\left(sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

U. D. 2   LE FORMULE GONIOMETRICHE

1. Obiettivi specifici

1.1 Conoscenze

- Conoscere le formule di addizione;
- Conoscere le formule di sottrazione;
- Conoscere le formule di duplicazione
- Conoscere le formule di bisezione
- Conoscere le formule di prostaferesi
- Conoscere le formule di Werner;

1.2 Abilità

- Saper applicare le formule di addizione;
- Saper applicare le formule di sottrazione;
- Saper applicare le formule di duplicazione;
- Saper applicare le formule di bisezione;
- Saper applicare le formule di Werner;
- Saper applicare le formule di prostaferesi.
- Saper operare semplificazioni sulle espressioni utilizzando le formule goniometriche;

2. Contenuti

- Formule di sottrazione, addizione, duplicazione, bisezione, prostaferesi e Werner.

3. Prerequisiti

- Funzioni goniometriche;
- Relazioni tra le funzioni goniometriche;

4. Sviluppo dei contenuti

Tra le funzioni goniometriche di un angolo orientato e l'angolo stesso non esistono proporzionalità. Ne consegue che, ad esempio, $sen2\alpha \neq 2sen\alpha$, che $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, e così via. Per convincersi di questo basta fissare l'attenzione su alcuni semplici esempi:

$$sen\,30° = \frac{1}{2} \quad mentre \quad sen\,60° = sen\left(2 \cdot 30°\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

analogamente

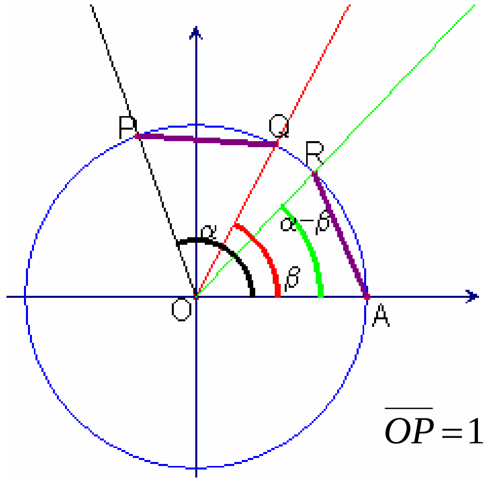
$$\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad mentre \quad \cos 30° = \frac{1}{2}$$

Da queste considerazioni consegue la necessità di trovare delle formule che permettano di determinare $sen2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg2\alpha$, $ctg2\alpha$, $sen\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $ecc.$, conoscendo le funzioni goniometriche dell'angolo α; altre formule che permettano di determinare $sen(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, ecc., conoscendo le funzioni goniometriche dell'angolo α e β; e così via.

Andiamo , quindi, a determinare tutte queste formule a partire da quella che dà il coseno della differenza di due angoli e da questa dedurremo tutte le altre.

1.1 Formule di sottrazione

Nella figura sono rappresentati i tre angoli orientati $\alpha, \beta\ e\ \alpha-\beta$; le ordinate e le ascisse dei tre punti P, Q, R ne rappresentano rispettivamente i seni ed i coseni.



$\overline{OP}=1$

Le ordinate dei punti A, P, Q e R sono pertanto:

A(1; 0) P$(\cos\alpha; sen\alpha)$,

Q$(\cos\beta, sen\beta)$, $R\left[\cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta)\right]$.

Poiché gli angoli $R\hat{O}A$ e $P\hat{O}Q$ sono uguali (perché entrambi di ampiezza $\alpha-\beta$), sarà:

$$\overline{RA}=\overline{PQ}$$

e quindi anche:

$$\overline{RA}^2=\overline{PQ}^2$$

Ricordando che il quadrato della distanza *d* tra due punti di coordinate $(x_1; y_1)\ e\ (x_2; y_2)$ è:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

avremo:

$$\overline{RA}^2=\left[\cos(\alpha-\beta)-1\right]^2+\left[sen(\alpha-\beta)\right]$$

$$\overline{PQ}^2=\left[\cos\alpha-\cos\beta\right]^2+\left[sen\alpha-sen\beta\right]^2$$

e di conseguenza:

$$\left[\cos(\alpha-\beta)-1\right]^2+sen^2(\alpha-\beta)=\left[\cos\alpha-\cos\beta\right]^2+\left[sen\alpha-sen\beta\right]^2$$

Sviluppando i quadrati e tenendo presente la relazione fondamentale della goniometria, otterremo:

$$1+1-2\cos(\alpha-\beta)=1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta$$

Scrivendo in forma semplificata si ricava che:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$$

Questa formula, detta **formula di sottrazione per il coseno**, è valida per ogni coppia di angoli α e β, sia che essi siano positivi o negativi, sia che il primo sia maggiore, minore o uguale al secondo.

Per ottenere la **formula di sottrazione del seno**, ricordando le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli associati e applicando la formula appena ricavata, scriveremo:

$$sen(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\alpha\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\alpha+sen\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)sen\alpha=$$

$$=-sen\beta\cos\alpha+\cos\beta sen\alpha$$

La formula cercata è dunque:

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$$

Essa è valida per ogni coppia di angoli α e β.

Possiamo ora determinare la **formula di sottrazione della tangente**; questa si deduce dalle formule di sottrazione del seno e del coseno:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

Supponendo $\cos\alpha\neq 0$ e $\cos\beta\neq 0$ (e pertanto $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, con $k=0;\pm 1;\pm 2;...$) dividendo numeratore e denominatore dell'ultima frazione per $\cos\alpha\cos\beta$, si ottiene infine:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}$$

Essa è valida sotto le condizioni già enunciate e supponendo che sia $(\alpha-\beta)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

In modo analogo si può dedurre la **formula di sottrazione per la cotangente**:

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Essa è valida sotto le condizioni $\alpha\neq k\pi,\quad \beta\neq k\pi,\quad \alpha-\beta\neq k\pi$.

1.2 Formule di addizione

Le formule di addizione si ricavano sostituendo all'espressione $\alpha+\beta$ l'espressione equivalente $\alpha-(-\beta)$ e applicando poi le corrispondenti formule di sottrazione.

Si ottiene così:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+sen\alpha sen(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

$$sen(\alpha+\beta)=sen[\alpha-(-\beta)]=sen\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha sen(-\beta)=$$
$$=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=tg[\alpha-(-\beta)]=\frac{tg\alpha-tg(-\beta)}{1+tg\alpha\, tg\beta(-\beta)}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=ctg[\alpha-(-\beta)]=\frac{ctg\alpha\, ctg(-\beta)+1}{ctg(-\beta)-ctg\alpha}=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

Le formule ricavate sono pertanto:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

valida per ogni coppia di angoli α e β;

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

valida per ogni coppia di angoli α e β;

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}$$

valida per $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$;

$$ctg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta-1}{ctg\beta+ctg\alpha}$$

valida per $\alpha\neq k\pi, \quad \beta\neq k\pi, \quad \alpha+\beta\neq k\pi$;

1.3 Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione permettono di calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo 2α, note quelle dell'angolo α

Queste formule si ricavano dalle formule di addizione ponendo in esse $\beta=\alpha$.

Si ottiene così:

$$sen2\alpha=sen\left(\alpha+\alpha\right)=sen\alpha\cos\alpha+\cos\alpha sen\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos\left(\alpha+\alpha\right)=\cos\alpha\cos\alpha-sen\alpha sen\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

$$tg2\alpha=tg\left(\alpha+\alpha\right)=\frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha\, tg\alpha}=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$ctg2\alpha=ctg\left(\alpha+\alpha\right)=\frac{ctg\alpha\, ctg\alpha-1}{ctg\alpha+ctg\alpha}=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

Osservazione 1

Le formule di duplicazione del coseno può venir messa sotto altre due forme equivalenti, e precisamente:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - sen^2\alpha = 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - sen^2\alpha = \cos^2 \alpha - \left(1 - \cos^2 \alpha\right) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

Le formule di duplicazione sono dunque le seguenti:

$$sen2\alpha = 2sen\alpha \cos\alpha$$

e

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - sen^2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2sen^2\alpha$$

valide per ogni angolo α;

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

valida per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$;

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

valida per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$

1.4 Formule di bisezione

Le formule di bisezione permettono di determinare i valori di $sen\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, $ctg\frac{\alpha}{2}$, noti i valori delle funzioni goniometriche dell'angolo α.

Queste formule si ricavano dalle due formule di duplicazione del coseno

$$\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha \qquad \text{e} \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

e ponendo in esse α al posto di 2α e quindi $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α; si ottiene così:

$$\cos\alpha = 1 - 2sen^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

Da queste due uguaglianze si ricava, per ogni α:

$$sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

e successivamente:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

e

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Dividendo poi membro a membro le due ultime uguaglianze si ottiene:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \text{per } \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \qquad \text{per } \alpha\neq 2k\pi$$

1.5 Formule di Werner e prostaferesi

Consideriamo le seguenti identità, ottenute mediante le formule di somma e sottrazione:

$$\begin{aligned}
sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)&=2sen\alpha\cos\beta\\
sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\, sen\beta\\
\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\
\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)&=-2sen\alpha sen\beta
\end{aligned} \qquad (*)$$

Queste relazioni scritte nella forma:

- $sen\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]$
- $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$
- $sen\alpha sen\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

Prendono il nome di **formule di Werner**

Posto ora:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases}\alpha=\dfrac{p+q}{2}\\ \beta=\dfrac{p-q}{2}\end{cases}$$

Dalle identità (*) sopra scritte si ottengono le nuove identità, dette **formule di prostaferesi.**

$$sen\, p + sen\, q = 2sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$sen\ p - sen\ q = 2sen\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos\ p + \cos\ q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\cos\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$$

$$tg\ p \pm tg\ q = \frac{sen(p \pm q)}{\cos p \cos q} \quad \text{con } p \quad e \quad q \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$ctg\ p \pm ctg\ q = \frac{sen(q \pm p)}{senp\ senq} \quad \text{con } p \quad e \quad q \neq k\pi$$

Le formule di prostaferesi permettono di trasformare la somma o la differenza di due seni, di due coseni, di due tangenti e di due cotangenti in prodotti o quozienti di seni e coseni.

VERIFICA FORMATIVA

1. **Sapendo che è senx =3/5 e 0°< x < 90° calcolare:**

$$sen(x-45°), \quad \cos(x+45°)$$

2. **Calcolare i valori di:**

$$sen15°, \quad \cos 15°, \quad tg15°$$

3. **Semplificare le seguenti espressioni:**

$$\cos 2x \frac{sen3x + sen2x + senx}{\cos 3x + \cos 2x + \cos x}.$$

$$3[sen2x \cos x - senx(1 + \cos 2x) + 1] - 2$$

$$tg(2x - \pi) + tg(2x + \pi) + tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

VERIFICA SOMATIVA

1. **Sapendo che** $sen\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$ **e che l'angolo di ampiezza x appartiene al primo quadrante, calcolare:** $senx, \quad \cos x.$ (4)

2. **Calcolare i valori di:**

$$sen36°, \quad \cos 36°, \quad ctg36° \qquad (6)$$

3. **Semplificare le seguenti espressioni**

$$2\cos^2\frac{x}{2} + \frac{sen^2 x}{2sen^2\frac{x}{2}} - 2 \qquad (5)$$

$$\frac{1 - tg^2 x}{\cos 2x(1 + tg^2 x)} - sen^2(x - \pi) \qquad (7)$$

$$\frac{\cos^2 x(sen8x - sen4x)}{sen4x \cos 6x} \qquad (8)$$

U. D. 3   LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. Obiettivi specifici

1.1 Conoscenze

- Conoscere le equazioni goniometriche elementari;
- Conoscere i vari tipi di equazioni goniometriche;
- Conoscere le disequazioni goniometriche elementari;
- Conoscere le disequazioni lineari in seno e coseno;
- Conoscere le disequazioni omogenee in seno e coseno.

1.2 Abilità

- Saper risolvere equazioni goniometriche elementari;
- Saper risolvere equazioni goniometriche di vari tipi;
- Saper risolvere disequazioni goniometriche elementari;
- Saper risolvere disequazioni goniometriche di vari tipi.
- Saper discutere le soluzioni delle equazioni goniometriche;
- Saper ricondurre equazioni goniometriche a equazioni goniometriche elementari;
- Saper discutere le soluzioni delle disequazioni goniometriche;
- Saper ricondurre disequazioni goniometriche a disequazioni goniometriche elementari.

2. Contenuti

- Equazioni goniometriche elementari
- Vari tipi di equazioni goniometriche
- Equazioni riducibili a omogenee
- Particolari equazioni goniometriche elementari
- Disequazioni goniometriche elementari
- Disequazioni riconducibili a disequazioni elementari
- Disequazioni lineari in seno e coseno
- Disequazioni omogenee in seno e coseno
- Risoluzione grafica di equazioni omogenee o riducibili

3. Prerequisiti

- Funzioni goniometriche e relativi grafici;
- Concetto di funzione inversa;
- Formule goniometriche.
- Equazioni e disequazioni di 1° e 2° grado

4. Sviluppo dei contenuti

1 EQUAZIONI GONIOMETRICHE

1.1 Generalità sulle equazioni goniometriche

Definizione. *Un'espressione letterale si dice **goniometrica** se contiene delle funzioni goniometriche di variabili angolari.*

Definizione. *Una uguaglianza tra due espressioni goniometriche viene detta* ***equazione*** *se risulta verificata per particolari valori delle variabili angolari che in essa figurano (le variabili vengono dette* ***incognite****).*

Per esempio l'uguaglianza:

$$2senx - 1 = 0$$

Non è verificata per qualunque valore dell'angolo x, ma solo per $x = \frac{\pi}{6}$, per $x = \frac{5}{6}\pi$ e per tutti i valori che si ottengono aggiungendo a questi un multiplo di 2π; essa è quindi un'equazione.

Per la risoluzione delle equazioni goniometriche valgono proprietà analoghe a quelle delle equazioni algebriche. Si chiama **soluzione** dell'equazione ogni valore che, sostituito all'incognita, rende il primo membro uguale al secondo.

Un'equazione si dice a una incognita se in essa compare una sola variabile, oppure a due, tre, … incognite se in essa compaiono due, tre, … , variabili.

Un'equazione si dice **impossibile** se non ha soluzioni.

1.2 Equazioni goniometriche elementari

Come si vedrà in seguito, la risoluzione delle equazioni goniometriche verrà ricondotta ad una dei seguenti tipi di equazione:

$a)$ $senx = m$,

$b)$ $\cos x = m$,

$c)$ $tgx = m$ oppure $ctgx = m$

Dove **x** è l'ampiezza di un angolo incognito ed *m* un dato numero reale. Equazioni di questo tipo vengono dette **elementari.** Ci proponiamo ora di determinarne le soluzioni.

a) L'equazione $senx = m$ ha soluzioni solo se $-1 \le m \le 1$. Se vale questa condizione esiste certamente un angolo α la cui misura soddisfa l'equazione proposta (cioè tale che per esso sia $sen\alpha = m$); ma allora anche l'angolo $\pi - \alpha$ soddisferà la medesima equazione, essendo $sen(\pi - \alpha) = sen\alpha$. Soddisferanno inoltre l'equazione data tutti gli angoli che differiscono da α e da $\pi - \alpha$ di multipli interi di 2π. L'equazione $senx = m$ ha quindi infinite soluzioni, date dalle formule:

- $$x = \alpha + 2k\pi$$
  $$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

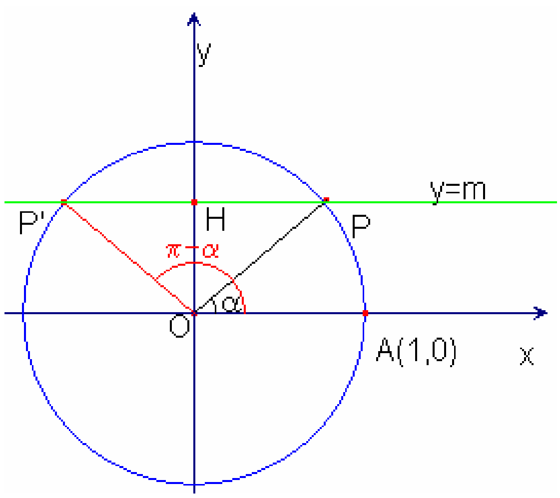
nelle quali k rappresenta un qualunque numero intero (positivo, negativo o nullo).

Metodo grafico

Tali soluzioni possono essere ottenute graficamente intersecando la circonferenza goniometrica con la retta y = *m*.

La retta, se $|m| \le 1$, interseca la circonferenza in due punti **P** e **P',** che sono rispettivamente gli estremi degli archi di misura:

$$x = \alpha \qquad x = \pi - \alpha$$



b) Anche l'equazione $\cos x = m$ ha soluzioni solo se $-1 \leq m \leq 1$. Se questa condizione è verificata esiste certamente un angolo α per il quale è $\cos \alpha = m$; ma se il valore α soddisfa l'uguaglianza data questa è soddisfatta anche dal valore $-\alpha$, essendo $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Sono pertanto soluzioni dell'equazione gli infiniti valori.

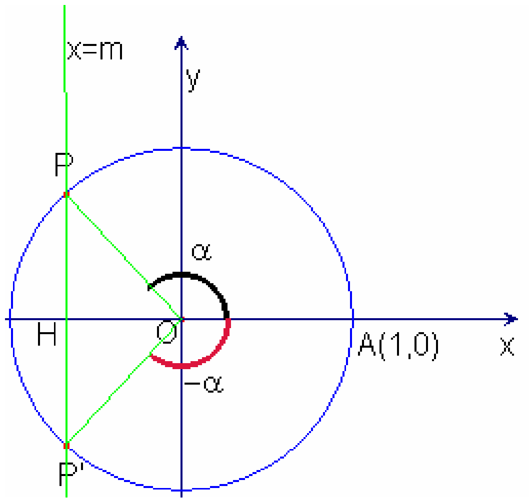
- $x = \pm \alpha + 2k\pi$

con k numero intero qualsiasi.

Metodo grafico

Graficamente tali soluzioni si possono ottenere intersecando la circonferenza goniometrica con la retta X = *m*. I punti **P** e **P'** sono rispettivamente estremi degli archi:

$x = \alpha + 2k\pi \qquad x = -\alpha + 2k\pi$



c) L'equazione $tg\, x = m$ ha soluzione per qualunque valore reale di *m*. Se α è uno dei valori che soddisfa l'uguaglianza, tutte le infinite soluzioni dell'equazione sono date dalla formula:

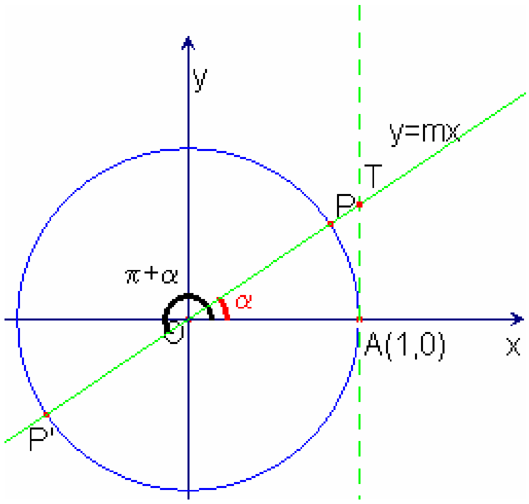
■ $x = \alpha + k\pi$

con k numero intero qualsiasi.

Metodo grafico

Graficamente esse si ottengono intersecando la circonferenza goniometrica con la retta **y = *m*x** passante per il punto **T**(1; *m*). I punti **P** e **P'** sono, rispettivamente, gli estremi degli archi:

$$x = \alpha + 2k\pi \qquad\qquad x = \pi + \alpha + 2k\pi\,.$$



Lo stesso dicasi per l'equazione: $ctg\, x = m$

1.2 Vari tipi di equazioni goniometriche.

Prendiamo in considerazione alcuni tipi di equazioni goniometriche non elementari.

Equazioni risolubili mediante l'applicazione delle varie relazioni goniometriche

Molte equazioni goniometriche possono venir ricondotte ad equazioni goniometriche elementari mediante l'applicazione delle relazioni che intercorrono tra funzioni goniometriche di uno stesso angolo o di angoli associati, oppure mediante le formule che abbiamo visto precedentemente.

Equazioni goniometriche omogenee in seno e coseno.

L'**equazione** $a sen x + b\cos x = 0$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$

è **omogenea di primo grado** in $sen\, x$ e $\cos x$.

I valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono soluzioni di questa equazione in quanto per tali valori il coseno si annulla mentre il seno vale +1 o -1. Possiamo pertanto supporre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (e pertanto $\cos x \neq 0$) e dividere entrambi i membri dell'equazione per $\cos x$, senza perdere delle soluzioni. Così facendo otteniamo l'equazione equivalente alla data:

$$a\, tg\, x + b = 0$$

che sappiamo risolvere.

Possiamo distinguere diversi equazioni di questo tipo secondo il loro grado.

L'**equazione**

$$a\, sen^2 x + b\, sen\, x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

è **omogenea di secondo grado** in $sen\, x$ e $\cos x$.

Se $a \neq 0$ l'equazione non ha per soluzioni i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Pertanto possiamo dividere i due membri dell'equazione per $\cos^2 x$, senza perdere delle soluzioni ottenendo un'equazione algebrica di II^ grado in *tgx*.

Al contrario se se a = 0 dividendo per $\cos^2 x$ si perdono delle soluzioni (i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$); in tal caso si deve raccogliere il fattore $\cos^2 x$, comune a tutti i termini del membro di sinistra e applicare la legge di annullamento del prodotto.

Se $a = 0$ e $c \neq 0$, non ha per soluzioni i valori $x = k\pi$. In questo caso si dividono entrambi i membri per $sen^2 x \neq 0$, ottenendo un'equazione algebrica di II^ grado in *ctgx*.

Se $a = 0$ e $c = 0$ si procederà operando opportuni raccoglimenti a fattor comune.

Si risolvono nel modo descritto anche le equazioni omogenee in seno e coseno di grado superiore al 2° e le equazioni non omogenee ma riducibili a tali.

Equazioni lineari in seno e coseno.

Sono chiamate così le equazioni nella forma:

$$a\,senx + b\cos x = c$$

Con *a, b, c*, numeri reali assegnati.

Supporremo che *a, b, c*, siano tutti diversi da zero; infatti se fosse nullo a o b, l'equazione si ridurrebbe ad una equazione elementare, mentre se fosse nullo c si ridurrebbe ad un'equazione omogenea di 1° grado in seno e coseno.

Per risolvere l'equazione lineare con i tre coefficienti diversi da zero conviene sostituire al posto di $sen\,x$ e di $\cos x$ le loro espressioni razionali in $tg\frac{x}{2}$, date dalle formule:

$$\blacksquare \qquad sen\,x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad\qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

valide, come s'è detto, per $x \neq \pi + 2k\pi$.

Con questa sostituzione l'equazione lineare si trasforma nella seguente:

$$\frac{2atg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + b\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = c$$

e quindi in un' equazione di 2° grado nell'incognita $tg\frac{x}{2}$:

$$(b+c)tg^2\frac{x}{2} - 2a\,tg\frac{x}{2} + c - b = 0$$

Se quest'ultima ha due soluzioni reali, che indicheremo con r_1 ed r_2, si ottengono le due equazioni elementari:

$$tg\frac{x}{2} = r_1 \qquad\qquad tg\frac{x}{2} = r_2$$

che sappiamo risolvere.

L'equazione lineare proposta potrebbe avere come soluzioni anche i valori $x = \pi + 2k\pi$. Questo succede quando b+c=0 e pertanto quando l'equazione trasformata, intera in $tg\frac{x}{2}$, è di 1° grado.

Equazioni riducibili a omogenee

L'espressione

$$a sen^2 x + b senx \cos x + c\cos^2 x + d = 0$$

non è omogenea, essendo presente il termine noto *d* di grado *0.* Essa però può essere trasformata in omogenea di 2° grado moltiplicando tale termine per la somma $sen^2 x + \cos^2 x$, uguale a 1 per ogni valore di *x*.

Esempio

Risolvere l'equazione:

$$\left(\sqrt{3}-1\right) senx \cos x + \left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x = 1$$

tale equazione non è omogenea, ma sostituendo al termine noto 1 l'espressione equivalente $sen^2 x + \cos^2 x$, si ottiene la seguente equazione omogenea di II^ grado in senx e cosx:

$$\left(\sqrt{3}-1\right) senx \cos x + \left(\sqrt{3}+1\right)\cos^2 x = \cos^2 x + sen^2 x$$

riducendo i termini simili otteniamo

$$sen^2 x - \left(\sqrt{3}-1\right) senx \cos x - \sqrt{3} = 0$$

dividendo per $\cos^2 x$, si ottiene:

$$tg^2 x - \left(\sqrt{3}-1\right) tgx - \sqrt{3} = 0$$

che dà:

$$tgx = -1 \qquad \text{e} \qquad tgx = \sqrt{3}$$

Le soluzioni sono dunque:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad e \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Particolari equazioni goniometriche elementari

- L'equazione $sen\alpha = sen\alpha'$

Si risolve tenendo conto della definizione della funzione seno e della sua periodicità. Osserviamo che:

$$sen\alpha = sen\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché due angoli abbiano lo stesso seno è che siano congruenti o supplementari, a meno di un numero intero di angoli giro.

ESEMPIO

Risolvere la seguente equazione: $sen\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}\right)$

Indicando con $\alpha = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ e con $\alpha' = \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4}$, possiamo applicare la proprietà precedente e cioè porre:

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$x = \pi + 8k\pi \vee x = \frac{7}{3}\pi + \frac{8}{3}k\pi$$

- L'equazione $sen\alpha = -sen\alpha'$

Possiamo ricondurci al caso precedente scrivendo $sen\alpha = sen(-\alpha')$. Infatti, per gli archi associati è: $-sen\alpha' = sen(-\alpha')$

- L'equazione $sen\alpha = \cos\alpha'$

Il seno e il coseno sono uguali quando gli angoli sono complementari, quindi possiamo scrivere:

$$sen\alpha = sen(\frac{\pi}{2} - \alpha')$$

che permette di ricondurci al primo caso.

- L'equazione $sen\alpha = -\cos\alpha'$

Per risolvere equazioni di questo tipo, scriviamo $\cos\alpha' = sen(\frac{\pi}{2} - \alpha')$, da cui

$$-\cos\alpha' = -sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right).$$

Pertanto l'equazione data si trasforma nella seguente:

$$sen\alpha = -sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$$

e quindi

$$sen\alpha = sen\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha'\right)$$

- L'equazione $\cos\alpha = \cos\alpha'$

Equazioni di questo tipo si risolvono tenendo presente che:

$$\cos\alpha = \cos\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = 2k\pi$$

Ossia $\cos\alpha = \cos\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \pm\alpha' + 2k\pi$

Due angoli hanno lo stesso coseno quando sono congruenti oppure sono opposti, a meno di un numero intero di angoli di ampiezza 2π.

- L'equazione

$$\cos\alpha = -\cos\alpha'$$

Poiché per angoli supplementari vale $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, possiamo riscrivere l'equazione data:

$$\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha')$$

riconducibile al caso precedente.

- L'equazione

$$tg\alpha = tg\alpha'$$

Equazioni di questo tipo sono risolubili sfruttando la proprietà:

$$tg\alpha = tg\alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + k\pi$$

NOTA BENE: due angoli hanno la stessa tangente quando sono congruenti a meno di un numero intero di angoli piatti.

- L'equazione

$$tg\alpha = -tg\alpha'$$

Poiché $tg(-\alpha) = -tg\alpha$, possiamo scrivere $-tg\alpha' = tg(-\alpha')$, da cui:

$$tg\alpha = tg(-\alpha')$$

che permette di ricondurci al caso precedente.

- L'equazione

$$ctg\alpha = ctg\alpha'$$

Si risolve passando dalle cotangenti alle tangenti, con la relazione:

$$ctg\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Altre equazioni goniometriche elementari

In generale: quando siamo in presenza di equazioni che contengono più funzioni goniometriche, si deve:

1. esprimere le funzioni mediante una sola di esse, utilizzando eventualmente le formule goniometriche;
2. risolvere l'equazione ottenuta rispetto a tale funzione considerata come incognita;
3. risolvere le equazioni elementari che si ottengono.

2 DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Definizione. *Una disequazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica.*

2.1 Disequazioni goniometriche elementari

Vengono chiamate così le disequazioni del tipo:

1. $senx > m \quad (senx \geq m) \quad oppure \quad senx < m \quad (senx \leq m)$
2. $\cos x > m \quad (\cos x \geq m) \quad oppure \quad \cos x < m \quad (\cos x \leq m)$
3. $tgx > m \quad (tgx \geq m) \quad oppure \quad tgx < m \quad (tgx \leq m)$

4. $ctgx > m \quad (ctgx \geq m) \quad oppure \quad ctgx < m \quad (ctgx \leq m)$

Nelle quali *m* rappresenta un qualsiasi numero reale.

Risolvere queste disequazioni significa ricercare tutti i valori dell'incognita *x* per i quali la funzione goniometrica in esame risulta maggiore o minore del numero *m*.

È possibile risolvere tali disequazioni in due modi:

a) Utilizzando il grafico della relativa funzione goniometrica;
b) Utilizzando la circonferenza goniometrica.

Facciamo un esempio in cui si utilizzano entrambi i metodi.

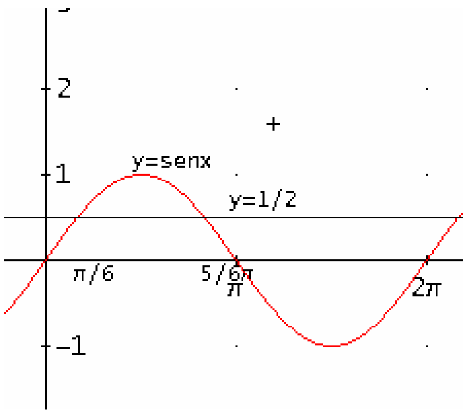
1°metodo

Risolviamo la disequazione $senx < \frac{1}{2}$

La sua equazione associata è $senx = \frac{1}{2}$, le cui soluzioni in $[0;2\pi]$ sono $x = \frac{\pi}{6} \quad e \quad x = \frac{5}{6}\pi$.

Tracciamo il grafico della funzione y = sen*x* nell'intervallo$[0;2\pi]$ e il grafico della retta $y = \frac{1}{2}$. Le ascisse dei punti di intersezione della retta con la sinusoide sono $\frac{\pi}{6} \quad e \quad \frac{5}{6}\pi$.

Poiché deve essere $senx < \frac{1}{2}$, consideriamo la parte di sinusoide che sta strettamente "sotto" la retta $y = \frac{1}{2}$



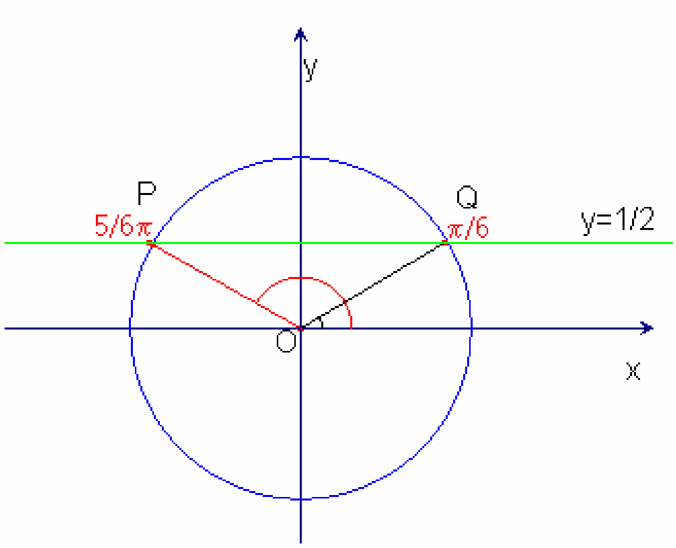
Le ascisse dei punti della sinusoide che stanno sotto il grafico della retta y= 1/2x variano da 0 a $\frac{\pi}{6}$ e da $\frac{5}{6}\pi \ a \ 2\pi$. Pertanto abbiamo due intervalli di soluzioni: $\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi;2\pi\right]$. Per determinare le soluzioni della disequazione data in *R* dobbiamo tener conto della periodicità della funzione seno; otteniamo le soluzioni:

$$\left[2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\right]$$

2° metodo

$$senx < \frac{1}{2}$$

Disegniamo la circonferenza goniometrica e nel cerchio evidenziamo i punti P e Q che hanno ordinata uguale a $\frac{1}{2}$. A essi corrispondono gli angoli $\frac{\pi}{6} \quad e \quad \frac{5}{6}\pi$ che risolvono l’equazione associata.



Le soluzioni nell'intervallo $[0;2\pi]$ sono date da tutti gli angoli a cui corrisponde sulla circonferenza goniometrica un punto con ordinata minore di $\frac{1}{2}$:

$\left[0;\frac{\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5}{6}\pi;2\pi\right]$.

Aggiungendo a ogni soluzione $2k\pi$ otteniamo le soluzioni dell'insieme dei numeri reali:

$$\left[2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{5}{6}\pi+2k\pi;2\pi+2k\pi\right]$$

2.2 <u>Disequazioni riconducibili a disequazioni elementari</u>

Mostreremo mediante degli esempi come si possono risolvere disequazioni riconducibili a disequazioni elementari.

ESEMPIO 1

Risolvere la disequazione

$$4\cos^2 x + 2(1-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} \geq 0$$

Consideriamo l'equazione associata:

$$4\cos^2 x + 2(1-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} = 0$$

Le radici di tale equazioni sono

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto la disequazione data è soddisfatta dai seguenti valori di x:

$$\cos x \leq -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

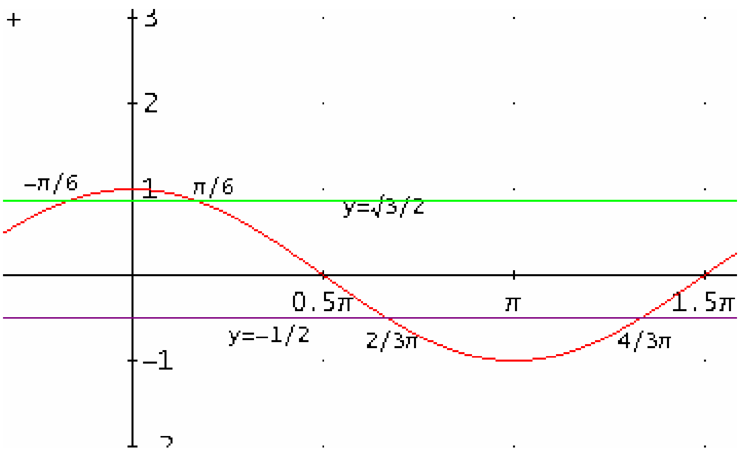
Essendo poi: $\cos x = -\frac{1}{2}$ per $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{per } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad e \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Osservando il grafico si deduce che le soluzioni sono:

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in Z$$



ESEMPIO 2

Risolvere la disequazione $3tg^2x - 1 \geq 0$

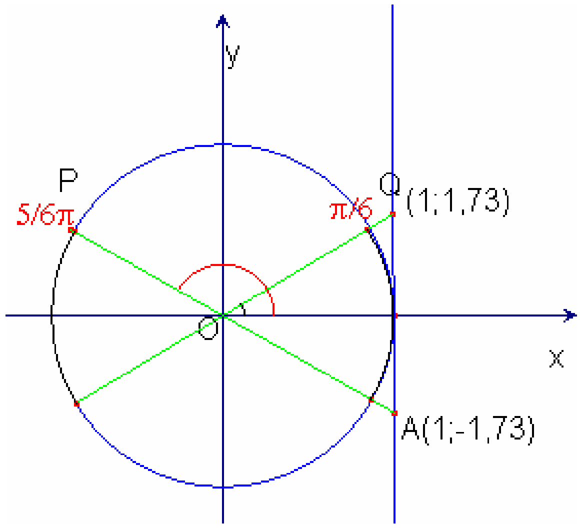
Le radici dell'equazione associata sono $tgx \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $tgx \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$,

cioè $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi$ e

$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad con\ k \in Z$

ossia complessivamente per:

$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + k\pi \qquad con\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



2.3 Disequazioni lineari in seno e coseno

Forniamo un metodo grafico per la risoluzione della disequazione:

$asenx + b\cos x + c > 0$ (oppure $asenx + b\cos x + c < 0$)

Posto: sen x = Y e cos x= X

Risolvere la disequazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} aY + bX + c > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè a determinare i punti della circonferenza goniometrica appartenenti al semipiano:

aY+bX+c > 0

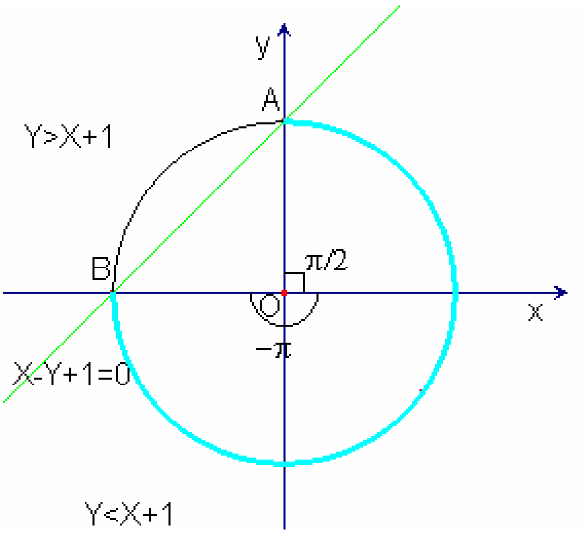
Tali punti sono estremi degli archi soluzioni della disequazione lineare data.

ESEMPIO 4

Risolvere la disequazione $\cos x - senx + 1 \geq 0$

Posto cosx = X e senx = Y dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} X - Y + 1 \geq 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y \leq X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



La retta di Y = X+1 incontra la circonferenza nei punti B(0; 1) e A_1(-1, 0), estremi degli archi:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad e \qquad \pi + 2k\pi \qquad (k \in Z)$$

Dalla figura si deduce allora che le soluzioni sono le seguenti:

$$-\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad con(k \in Z)$$

2.4 Disequazioni omogenee in senx e cosx

Per risolvere un'equazione di grado n in senx e cosx dobbiamo distinguere due casi:

- **n dispari**
- **n pari**

ESEMPIO 6 **(n dispari)**

Risolvere l'equazione $\sqrt{3}senx - \cos x > 0$

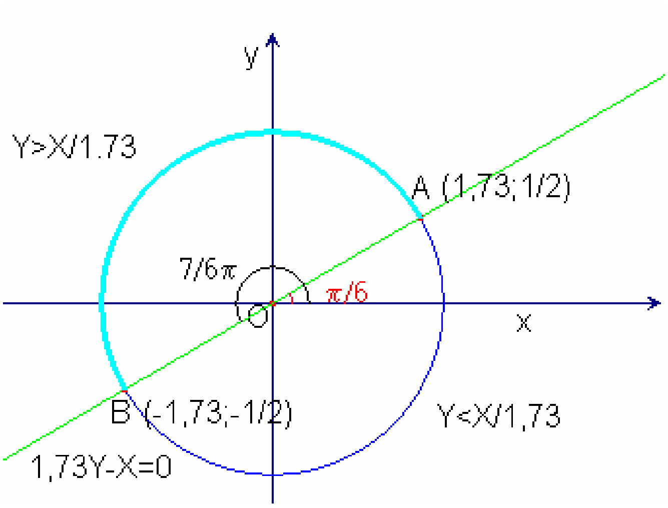
Una disequazione omogenea di 1° grado è lineare e pertanto può essere risolta graficamente considerando il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}Y - X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Ottenuto sostituendo senx =Y e cosx =X.

La disequazione è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$



ESEMPIO 7 **(n pari)**

Risolvere la disequazione $sen^2 x - \sqrt{3}senx\cos x > 0$.

Poiché, per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos^2 x$ è positivo, possiamo dividere per $\cos^2 x$ ottenendo la disequazione:

$$tg^2 x - \sqrt{3}tgx > 0$$

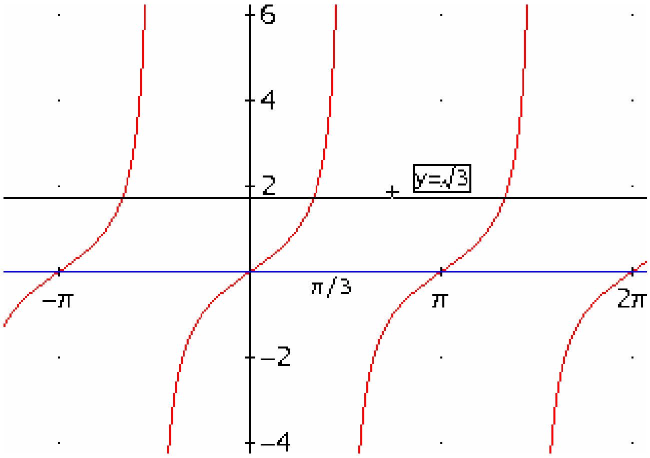
Le radici dell'equazione associata sono $tgx = 0$ e $tgx = \sqrt{3}$

Quindi la disequazione è verificata per gli archi per i quali:

$$tgx < 0 \qquad o \qquad tgx > \sqrt{3}$$

cioè per $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi$

o $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$



a questi valori occorre aggiungere:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

per i quali la disequazione data risulta verificata. In definitiva, unendo le soluzioni, la disequazione è soddisfatta per

$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi$.

VERIFICA FORMATIVA

Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

1) $3\cos^2 - sen^2 x = 2$

2) $\cos^2 x + \cos x senx = 0$

3) $sen^2 x + senx \cos x - 2\cos^2 x + 1 = 0$

Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche

4) $2\cos x + 1 < 0$

5) $2sen^2 x - senx > 0$

6) $\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos x - senx > 0$

VERIFICA SOMMATIVA

Risolvere le seguenti equazioni goniometriche:

1) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ (3)

2) $2tg^2 x \cdot senx \cos x = 1 - \cos 2x$ (4)

3) $\left(\sqrt{3} - 1\right) senx \cos x + \left(\sqrt{3} + 1\right)\cos^2 x = 1$ (5)

Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche

4) $\cos x + \sqrt{3} senx > 0$ (5)

5) $tgx \geq 3ctgx$ $\quad$ *nell'intervallo* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (6)

6) $|tgx| \leq \sqrt{3}$ $\quad$ *nell'intervallo* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (7)

U.D.4: TRIGONOMETRIA

1. OBIETTIVI SPECIFICI:

1.1 Conoscenze

- Conoscere le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo utilizzando le funzioni seno, coseno, tangente.
- Conoscere il teorema della corda.
- Conoscere le relazioni tra i lati e gli angoli di triangoli qualunque.
- Conoscere il teorema dei seni
- Conoscere il teorema delle proiezioni.
- Conoscere il teorema del coseno.

1.2 Abilità

- Saper risolvere i triangoli rettangoli.
- Saper risolvere i triangoli qualunque
- Saper risolvere i problemi di trigonometria, usando i teoremi principali e utilizzando equazioni goniometriche.
- Saper risolvere i problemi in cui è necessario utilizzare le applicazioni della trigonometria alla geometria analitica e alla geometria euclidea.

2. CONTENUTI

- Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo in funzione delle funzioni seno, coseno, tangente.
- Risoluzione di un triangolo rettangolo.
- Teorema della corda.
- Teorema dei seni.
- Teorema delle proiezioni.
- Teorema del coseno.

- Risoluzione di un triangolo qualunque.
- Risoluzione di problemi di trigonometria.
- Applicazioni della trigonometria alla geometria euclidea.

3. PREREQUISITI

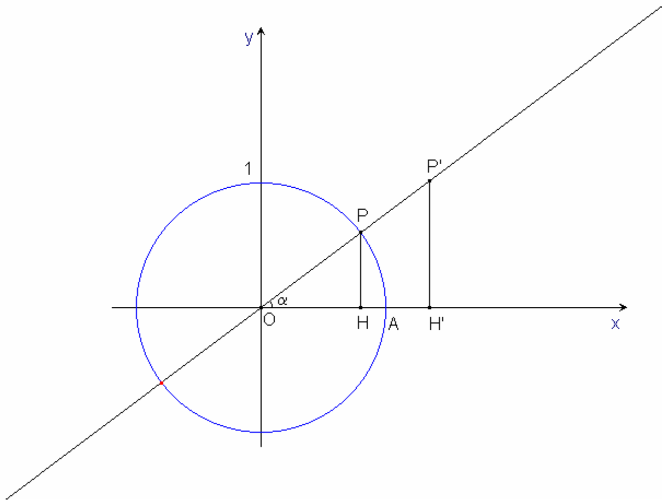
- Funzioni goniometriche;
- Relazioni tra le funzioni goniometriche;
- Formule goniometriche.
- Equazioni e disequazioni goniometriche.

4. SVILUPPO DEI CONTENUTI

In questa unità didattica viene presentata la trigonometria, quella parte della matematica che si occupa delle relazioni che intercorrono tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque.

Nelle unità didattiche precedenti abbiamo definito le funzioni seno, coseno, e tangente utilizzando la circonferenza goniometrica, osservando che queste funzioni dipendono esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo α individuato da un punto P che si muove inverso antiorario sulla circonferenza, a partire dal punto (1,0). Le funzione goniometriche sono state definite come coordinate di particolari punti. Ci proponiamo ora di studiare le relazioni esistenti tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo utilizzando proprio le funzioni seno, coseno e tangente.

1. Consideriamo, sulla circonferenza goniometrica, il triangolo PHO individuato dall'origine O, da un punto P appartenente alla circonferenza e alla sua proiezione H sull'asse delle ascisse.



Per le definizioni di seno e coseno possiamo scrivere:

$$sen\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} \text{ e } \cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$$

dal momento che il raggio OP ha lunghezza 1.

Se ora consideriamo sulla retta a cui appartiene il raggio OP, un punto P' e la sua proiezione H' sull'asse delle ascisse, otteniamo un triangolo OP'H' simile a OPH. Dalla similitudine di questi triangoli segue che:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'H'}}{\overline{OP'}} = sen\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OP'}} = \cos\alpha$$

NOTAZIONI: per comodità di notazione poniamo d'ora in poi OP = a, PH = b, OH = c

Quindi possiamo anche scrivere :

$$sen\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a}$$

In generale possiamo affermare che:

In un triangolo rettangolo il seno di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto ad esso opposto e l'ipotenusa; il coseno dello stesso angolo invece si può definire come il rapporto tra il cateto ad esso adiacente e l'ipotenusa.

Essendo $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, possiamo scrivere $tg\alpha = \dfrac{b}{c}$

Quindi :

In un triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente ad α.

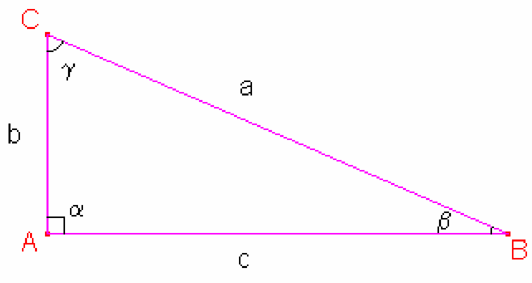
Essendo $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}$, possiamo scrivere $ctg\alpha = \dfrac{c}{b}$.

Quindi:

In un triangolo rettangolo la cotangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto adiacente e quello opposto ad α.

2. <u>RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO</u>

Analizziamo ora le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo rettangolo (lati e angoli).



Indichiamo con A,B,C, i suoi vertici e con a,b,c, le misure dei lati rispettivamente opposti a tali vertici e con α, β, γ le ampiezze degli angoli di vertici rispettivamente A,B,C.

Tenendo presente quanto visto finora possiamo dire che:

$sen\gamma = c/a$, $cos\gamma = b/a$, $tg\gamma = c/b$, $ctg\gamma = b/c$.

e di conseguenza:

$sen\beta = b/a$, $cos\beta = c/a$, $tg\beta = b/c$, $ctg\beta = c/b$.

da queste relazioni si ricavano queste altre:

$c = a\ sen\gamma$, $b = a\ cos\gamma$, $c = b\ tg\gamma$, $b = c\ ctg\gamma$

$b = a\ sen\beta$, $c = a\ cos\beta$, $b = ctg\beta$, $c = b\ ctg\beta$.

Ora, tenendo presente il significato convenzionale attribuito ad *a, b, c,* e ad α, β, γ possiamo generalizzare le uguaglianze trovate ed interpretarle come teoremi relativi al triangolo rettangolo:

- *In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso.*
- *In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso.*
- *In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo.*
- *In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella del prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo*

Naturalmente di questi teoremi valgono anche gli inversi; dal primo per esempio possiamo trarre i due inversi:

- *In ogni triangolo rettangolo la misura dell'ipotenusa è uguale al rapporto tra la misura di un cateto e il seno dell'angolo opposto ad esso.*

➢ *In ogni triangolo rettangolo il seno di un angolo acuto è uguale al rapporto tra le misure del cateto opposto e dell'ipotenusa.*

Analogamente per tutti gli altri…

Ci occuperemo ora della risoluzione vera e propria di un triangolo rettangolo.

Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare tutti i suoi elementi; per fare ciò, alla luce di quanto appena visto, è sufficiente conoscere oltre all'angolo retto altri due elementi. Ricordiamo infatti che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \\ sen\beta = \dfrac{b}{a} \quad oppure \quad \cos\beta = \dfrac{c}{a} \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases}$$

Poiché questo è un sistema di quattro equazioni in sei incognite, è sufficiente conoscere due elementi per risolverlo. Di tali elementi almeno uno deve essere un lato poiché esistono infiniti triangoli con gli angoli uguali e ma le misure dei lati diverse.

Vediamo ora qualche esempio.

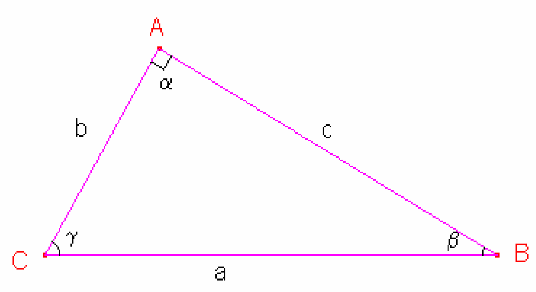
<u>**1.**</u>

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC, note le misure dei cateti:

c = 5 cm

b = 3 cm

Poiché tgβ = b/c allora β= arctg b/c ≈31°.



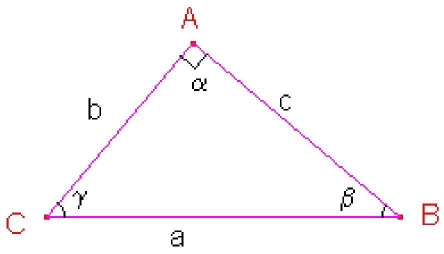
Dall'uguaglianza γ = 90°−β risulta γ ≈ 59°.

Vale poi l'uguaglianza a = c/senγ = 5/0.85 $\approx$ 5.8 cm.

2.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC di cui si conoscono le misure di un cateto e di un angolo acuto.

c = 4cm, γ = 50°



Abbiamo subito β = 40°; poiché c = a senγ,

ricaviamo a = c/senγ = 5.22cm

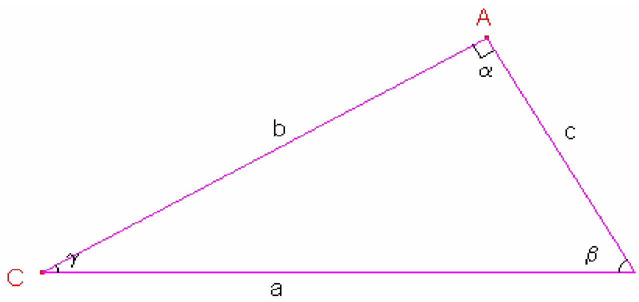
Infine utilizzando il Teorema di Pitagora: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5.22^2 - 4^2} = 3.35cm$.

3.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC conoscendo l'ipotenusa e un angolo acuto.

a = 10cm

β = 60°



Abbiamo subito γ = 30°.

Dalla relazione senβ = b/a otteniamo

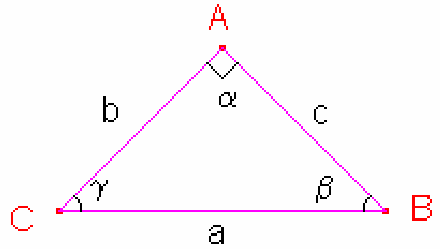
b = a senβ = 8.66cm

ricordando che tgγ = c/b, abbiamo c = b tgγ = 5cm.

4.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC, conoscendo l'ipotenusa e un cateto.

a = 4cm



$c = 2\sqrt{2}$cm

dalla relazione sen $\gamma = c/a$ troviamo

γ = arcsen $c/a = 45°$

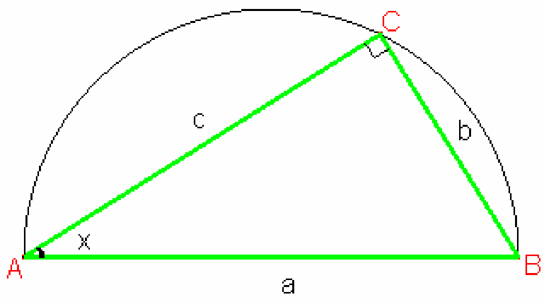
Da cui $\beta = 45°$

A questo punto sembrerebbe superfluo calcolare l'altro cateto dato che è più che evidente che si tratta di un triangolo isoscele… tuttavia vogliamo comunque applicare le conoscenze di trigonometria appena acquisite e quindi calcoliamo b utilizzando la relazione sen$\beta = b/a$ da cui $b = a$ sen$\beta = 2\sqrt{2}$cm.

2.1 Applicazioni geometriche e fisiche. Qualche considerazione sul calcolo vettoriale.

La risoluzione del triangolo rettangolo trova numerose applicazioni sia nella geometria che nella fisica. Ne vediamo qualche esempio.

1. Nella semicirconferenza di diametro *AB = 2r* è inscritto il triangolo ABC di perimetro $r(2+\sqrt{6})$. Risolvere il triangolo.



Indichiamo con *x* l'ampiezza dell'angolo di vertice A. e con a, b, c, rispettivamente i lati AB, BC, AC del triangolo. Per quanto visto prima possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$b = a$ sen$x = 2r$ sen$x$, $c = a \cos x = 2r \cos x$.

Scriviamo allora l'equazione:

$$2r + 2r\,\mathrm{sen}x + 2r\cos x = r\left(2 + \sqrt{6}\right)$$

Dopo le opportune semplificazioni otteniamo:

$$2senx + 2\cos x = \sqrt{6}$$

Che è un'equazione lineare in seno e coseno del tipo

$$asenx + b\cos x = c$$

che sappiamo risolvere mediante opportune sostituzioni:

$$(b+c)tg^2\frac{x}{2} - 2atg\frac{x}{2} + c - b = 0$$

quindi

$$\left(2+\sqrt{6}\right)tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + \sqrt{6} - 2 = 0$$

da cui:

$$tg\frac{x}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 \quad \text{e} \quad tg\frac{x}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2.$$

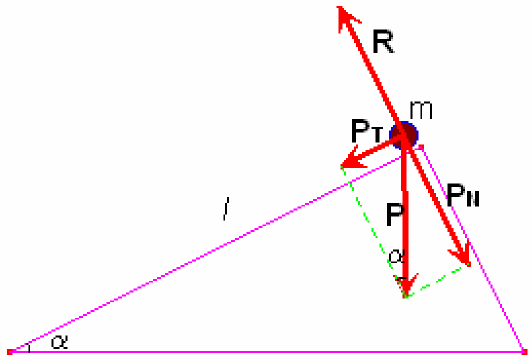
ottenendo infine

x = 15° o x = 75°

Le ampiezze degli angoli del triangolo sono quindi di 15° e 75°, mentre i cateti misurano $\frac{r\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$ l'uno e $\frac{r\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}$ l'altro.

2. in figura viene rappresentato un piano inclinato liscio, di lunghezza *l* e inclinazione α; sulla sua sommità è collocato un punto materiale di massa *m*. si determini l'accelerazione con cui il corpo scivola lungo il piano, il lavoro compiuto dalla forza peso durante la caduta e la reazione vincolare del piano.

Nella figura è indicata la scomposizione della forza peso lungo le due direzioni tangente e normale al piano.per le ormai note relazioni si ha:



$P_T = P\ sen\alpha$ e $P_N = P\ cos\alpha$.

Il punto scivola lungo il piano sotto l'azione della componente P_T; la sua accelerazione è:

$$a = \frac{P_T}{m} = \frac{Psen\alpha}{m} = \frac{mgsen\alpha}{m} = gsen\alpha$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso durante la caduta è:

$$L = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l} = Pl\cos(90° - \alpha) = Plsen\alpha = mglsen\alpha\ .$$

Si osservi che *l sen*α è uguale alla quota iniziale del corpo e che pertanto il lavoro compiuto durante la caduta lungo il piano è uguale a quello che verrebbe compiuto da un corpo in caduta libera, cioè lungo la direzione verticale.

La reazione vincolare del piano **R** ha la stessa direzione di $\mathbf{P_N}$, verso opposto e uguale intensità; quindi:

$$R = P_N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha\ .$$

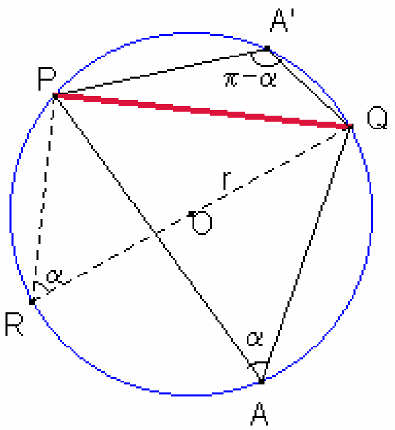
3. <u>RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE</u>

Una conseguenza delle relazioni esistenti tra gli elementi di un triangolo rettangolo è il teorema della corda.

3.1 <u>Teorema della corda</u>

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto tra la misura del diametro ed il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi alla corda.

Dimostrazione



In figura è rappresentata una circonferenza di raggio *r* e centro O ed è tracciata una sua corda PQ.
I punti A e A' appartengono rispettivamente all'arco PQ maggiore e all'arco PQ minore.
Gli angoli in A e A' sono supplementari, di conseguenza avranno lo stesso seno.Tracciamo il diametro della circonferenza avente un estremo in Q e indichiamo con R il suo secondo estremo. Si osserva che gli angoli in R e in Q sono uguali(angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco). Ora osserviamo il triangolo RPQ, esso è inscritto in una semicirconferenza quindi è rettangolo il P, pertanto il suo cateto PQ soddisferà la relazione:

$$\overline{PQ} = \overline{QR} sen\alpha = 2r sen\alpha$$

Per quanto detto prima (l'angolo in A e quello in A' hanno lo stesso seno in quanto sono supplementari) vale anche la relazione seguente:

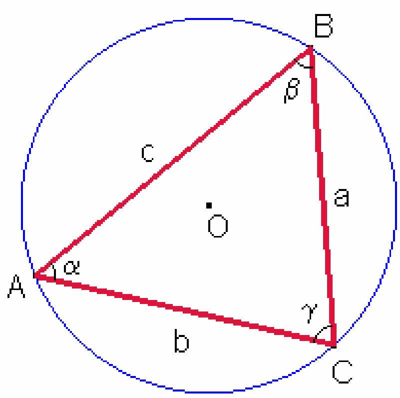
$$\overline{PQ} = 2r sen(\pi - \alpha).$$

c.v.d.

3.2 Teorema dei seni

In un triangolo qualunque il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante.

Dimostrazione



Indichiamo con A, B, C i vertici di un triangolo, con α, β, γ i tre angoli corrispondenti e con a, b, c, i lati opposti rispettivamente ai vertici A; B; C.

dobbiamo dimostrare che vale la relazione seguente:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}.$$

Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo e applichiamo ad ogni lato il teorema della corda, otteniamo:

$a = 2rsen\alpha, \qquad b = 2rsen\beta, \qquad c = 2rsen\gamma$

E quindi

$\frac{a}{sen\alpha} = 2r, \qquad \frac{b}{sen\beta} = 2r, \qquad \frac{c}{sen\gamma} = 2r$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}.$$

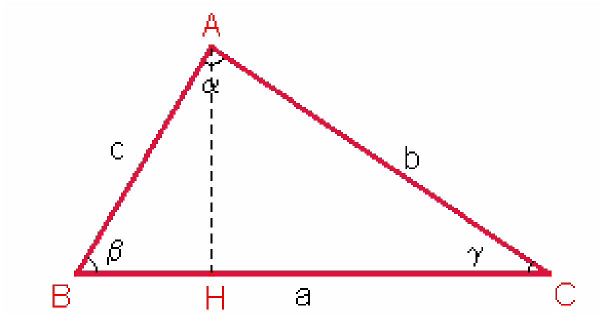
3.3 Teorema delle proiezioni

In un qualunque triangolo la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti di quelle degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ciascuno di questi forma con il lato in questione.

Dimostrazione.

Dobbiamo dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

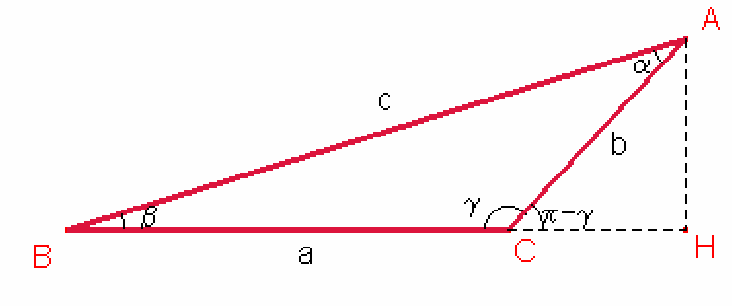


Consideriamo prima il caso in cui il triangolo sia acutangolo;

in questo caso l'altezza AH cade internamente al lato BC, si ha quindi:

$$a = \overline{BH} + \overline{HC} = c\cos\beta + b\cos\gamma.$$

Consideriamo ora il caso in cui il triangolo sia ottusangolo, in caso l'altezza cade sul prolungamento del lato BC, in questo caso si ha quindi:



$$a = \overline{BH} - \overline{CH} = c\cos\beta - b\cos(\pi-\gamma) = c\cos\beta + b\cos\gamma.$$

Per il lato a vale quindi in ogni caso il teorema delle proiezioni; analogamente si dimostra anche per gli altri lati.

Osservazione: *nel caso in cui il triangolo sia rettangolo la tesi segue immediatamente dalle relazioni valide per i triangoli rettangoli.*

Come immediata conseguenza del teorema delle proiezioni, si ha il seguente :

3.4 Teorema del coseno (o di Carnot)

In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, "diminuita" del doppio prodotto delle misure di questi per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Dimostrazione:

Dobbiamo dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\
c &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Dimostreremo che tale relazione vale per il lato a.

Applicando il teorema delle proiezioni ad un triangolo ABC, otteniamo le seguenti uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
a &= b\cos\gamma + c\cos\beta \\
b &= a\cos\gamma + c\cos\alpha \\
c &= a\cos\beta + b\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Moltiplicando la prima uguaglianza per *a,* la seconda per (-*b*), e la terza per (-*c*), otteniamo:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= ab\cos\gamma + ac\cos\beta \\
-b^2 &= -ab\cos\gamma - bc\cos\alpha \\
-c^2 &= -ac\cos\beta - bc\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Addizionando membro a membro le tre identità, otteniamo:

$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\alpha$ *cioè* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

In modo analogo si dimostrano le altre due relazioni.

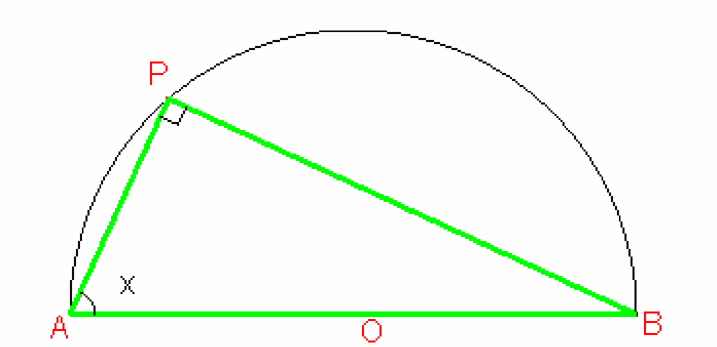
Osservazione: *nel caso in cui il triangolo sia rettangolo il teorema del coseno si riduce a quello di Pitagora.*

Dopo aver preso in considerazione i principali teoremi della trigonometria, utilizziamo le conoscenze acquisite per risolvere alcuni problemi.

1. Su una semicirconferenza di centro O e diametro AB = 2r , scegliamo un punto P tale che sia verificata la seguente relazione:

$$3\overline{PA}^2 + 2\overline{PB}^2 = 9\overline{AO}^2 \qquad (1)$$

Per prima cosa scegliamo l'incognita e studiamo qual è il suo dominio di variazione. Poiché la posizione di P dipende dall'ampiezza dell'angolo PAB, sia x la misura di quest'angolo. Il triangolo PAB è rettangolo quindi



0° ≤ x ≤ 90°. Ricordando le relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo,possiamo dire:

$\overline{PA} = 2r\cos x \qquad e \qquad \overline{PB} = 2r\,senx$

Sostituendo queste espressioni nella (1) otteniamo:

$3(2r\cos x)^2 + 2(2r\,senx)^2 = 9r^2$

Risolviamo:

$12r^2\cos^2 x + 8r^2 sen^2 x = 9r^2 \rightarrow \quad 12\cos^2 x + 8(1-\cos^2 x) = 9 \rightarrow \quad 12\cos^2 x + 8 - 8\cos^2 x = 9$

$4\cos^2 x = 1 \rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad o \quad \cos x = -\frac{1}{2}$

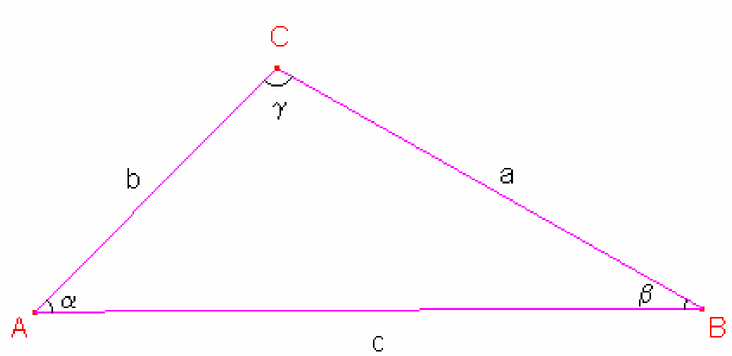
ricordando che deve essere 0° ≤ x ≤ 90° , concludiamo che l'unica soluzione del problema è x = 60°.

2. In un triangolo è a = 10√2 cm, β = 30° , γ = 105° .Risolvere il triangolo.

Determiniamo l'angolo α:

α = 180° - (30° + 105°) = 45°.

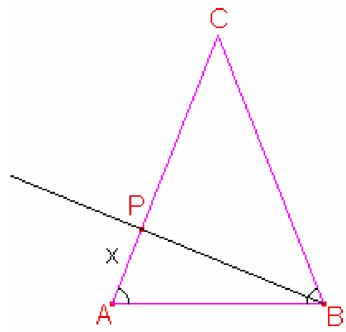
Ora applicando il teorema dei seni determiniamo *b* e *c*:



$$b=\frac{a}{sen\alpha}sen\beta=\frac{10\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}cm=10\,cm\,,$$

$$c=\frac{a}{sen\alpha}sen\gamma=\frac{10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}cm=5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)cm\cong 19{,}32\,cm\,.$$

3. Consideriamo il triangolo isoscele ABC di base AB = 40 a e cos β = 4/5. sia P un punto sul lato AC tale che sia verificata la relazione seguente:



$\overline{PC}^2+\overline{PB}^2=965a^2.$ (1)

Utilizzando le relazioni tra lati ed angoli dei triangoli rettangoli calcoliamo AC:

$$\frac{\overline{AB}}{2}=\overline{AC}\cos\ P\hat{A}B\quad\rightarrow\quad\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{2\cos\ P\hat{A}B}\quad\rightarrow\quad\overline{AC}=\frac{40\,a}{2\cdot\frac{4}{5}}=25\,a$$

A questo punto scegliamo l'incognita e studiamo il suo dominio di variazione. Dato che la posizione di P dipende dalla lunghezza del segmento AP, poniamo x = AP; poiché AC = 25a , abbiamo 0 ≤ x ≤ 25°.

Applichiamo ora il teorema di Carnet, otteniamo:

$$\overline{PB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AP}\cos P\hat{A}B=1600\,a^2+x^2-2\cdot 40a\cdot x\cdot\frac{4}{5}=1600\,a^2+x^2-64ax$$

Sostituendo nella (1) otteniamo

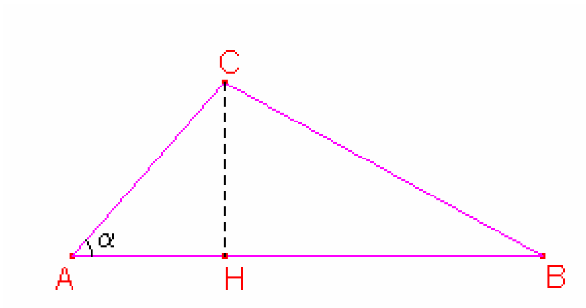
$$(25a - x)^2 + 1600a^2 + x^2 - 64ax = 965a^2$$
$$2x^2 - 114ax - 1260a^2 = 0$$

che risolta rispetto ad x dà come soluzioni: $x_1 = 15a$, $x_2 = 42a$ di cui solo la prima è accettabile, in quanto è all'interno del dominio di variazione.

3.5 APPLICAZIONI

Illustriamo alcune applicazioni della trigonometria: in particolare vediamo come si possono calcolare le aree di triangoli e di quadrilateri , la misura dei raggi, delle circonferenze inscritte e circoscritte ad un triangolo.

1. Area di un triangolo di cui sono note le misure di due lati e dell'angolo tra essi compreso.



Consideriamo un triangolo qualunque con α < 90°.

Sappiamo che la misura dell'area di un triangolo è data dalla formula:

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} \qquad (1)$$

Consideriamo allora il triangolo rettangolo ACH;per le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo rettangolo,possiamo dire:

$$\overline{CH} = \overline{CA}\,\text{sen}\,C\hat{A}B$$

Che sostituita nella (1) dà:

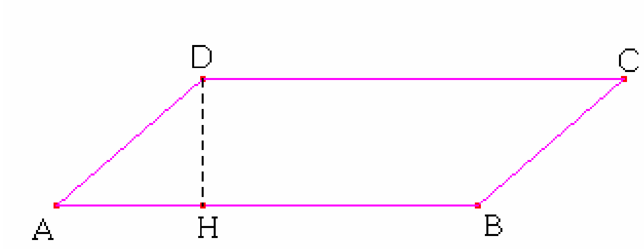
$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA}\,\text{sen}\,C\hat{A}B}{2}$$

Il risultato ottenuto è valido per qualunque altro lato del triangolo e qualunque sia l'ampiezza dell'angolo α. Possiamo quindi generalizzare i risultati ottenuti:

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di una coppia di lati per il seno dell'angolo tra essi compreso.

Area di un parallelogramma di cui sono note le misure dei lati e dell'angolo compreso tra essi.

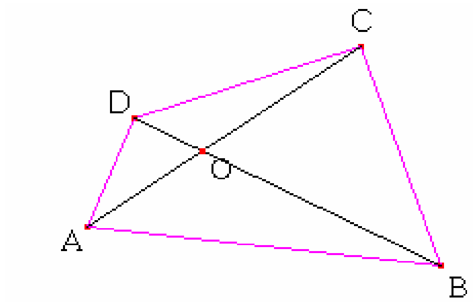
Dato che l'area di un parallelogramma ABCD è il doppio di quella del triangolo ABD;dal risultato precedente risulta che:



L'area di un parallelogramma è data dal prodotto delle misure di due lati consecutivi per il seno dell'angolo tra essi compreso.

Area di un quadrilatero convesso di cui sono note le misure delle diagonali e di un angolo tra esse compreso.

Sia S la superficie del quadrilatero ABCD, e indichiamo con O il punto d'intersezione delle due diagonali. Consideriamo i quattro triangoli DOA, AOB, BOC, COD in cui le diagonali suddividono il quadrilatero. Da quanto visto in precedenza sappiamo che l'area di un



triangolo è data dal semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso, quindi:

$$Area\,(DOA) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OD}\, sen D\hat{O}A}{2}$$

$$Area\,(AOB) = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}\, sen A\hat{O}B}{2}$$

$$Area\,(BOC) = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC}\, sen B\hat{O}C}{2}$$

$$Area\,(COD) = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}\, sen C\hat{O}D}{2}$$

Osserviamo che:

- $D\hat{O}A = B\hat{O}C \quad e \quad C\hat{O}D = A\hat{O}B$ in quanto coppie di angoli opposti al vertice;
- $sen\, D\hat{O}A = sen\, C\hat{O}D$ in quanto tali angoli sono supplementari.

Ora, poiché l'area S è data dalla somma delle aree dei suddetti quattro triangoli, possiamo dire che:

$$S = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OD}\, sen D\hat{O}A}{2} + \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}\, sen A\hat{O}B}{2} + \frac{\overline{OB} \cdot \overline{OC}\, sen B\hat{O}C}{2} + \frac{\overline{OC} \cdot \overline{OD}\, sen C\hat{O}D}{2} =$$

$$\frac{sen\, C\hat{O}D}{2}\left(\overline{OA} \cdot \overline{OD} + \overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OD}\right) =$$

$$= \frac{sen\, C\hat{O}D}{2}\left[\overline{OA}\left(\overline{OD} + \overline{OB}\right) + \overline{OC}\left(\overline{OD} + \overline{OB}\right)\right] =$$

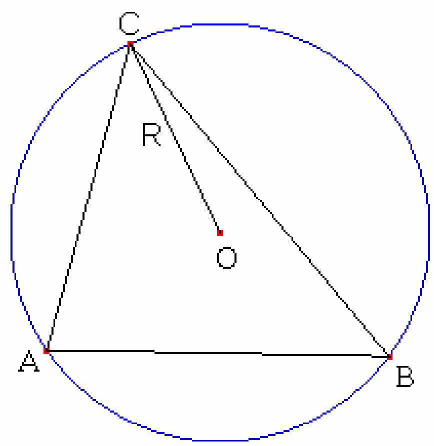
$$= \frac{sen\, C\hat{O}D}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right)\left(\overline{OD} + \overline{OB}\right) =$$

$$= \frac{sen\, C\hat{O}D}{2}\, \overline{AC} \cdot \overline{DB}$$

Generalizzando i risultati così ottenuti, possiamo dire che:

L'area di un quadrilatero convesso è data dal semiprodotto delle misure delle sue diagonali per il seno di un angolo tra esse compreso.

Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo in funzione delle misure dei lati e dell'area



Consideriamo il triangolo ABC inscritto nella circonferenza di raggio R; i suoi lati sono corde di tale circonferenza. Allora per il teorema della corda possiamo dire che:

$$R = \frac{\overline{AC}}{2\, sen A\hat{B}C}$$

Moltiplichiamo e dividiamo R per $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$,

otteniamo: $R = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2\overline{AB} \cdot \overline{BC}\, sen A\hat{B}C}$

Indichiamo con S la superficie del triangolo ABC, sapendo che:

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}\, sen A\hat{B}C}{2}$$

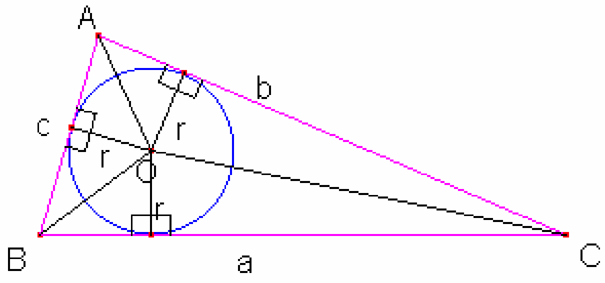
Possiamo dire che $R = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}{4S}$.

Generalizzando i dati così ottenuti possiamo dire che:

La misura del raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo è uguale al rapporto tra il prodotto della misura dei suoi tre lati e il quadruplo dell'area del triangolo.

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo in funzione dell'area del triangolo e della misura dei lati

Consideriamo il triangolo ABC circoscritto alla circonferenza di raggio r e centro O. Indichiamo con a, b, c, le misure dei lati del triangolo. L'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree dei triangoli AOB, BOC, AOC:



$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{a+b+c}{2}r = p \cdot r$$

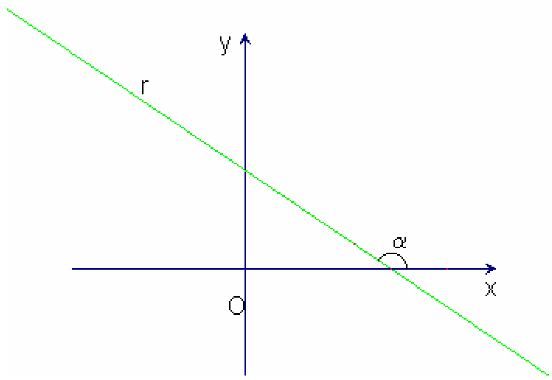
Dove p indica il semiperimetro del triangolo.

Allora possiamo dire che: $r = \frac{S}{p}$

Generalizzando i risultati così ottenuti possiamo dire che:

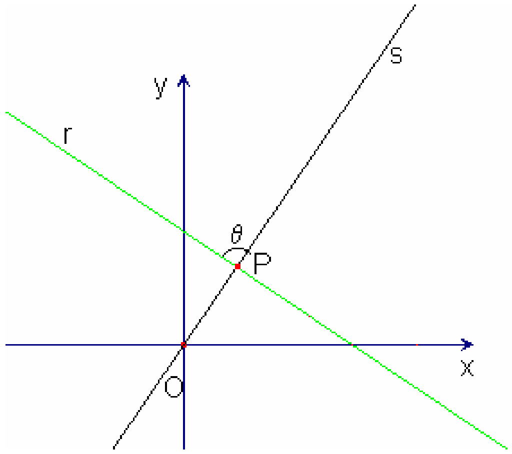
La misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è uguale al rapporto tra l'area e la misura del semiperimetro del triangolo.

3.6 UNA APPLICAZIONE DELLA TRIGONOMETRIA ALLA GEOMETRIA ANALITICA

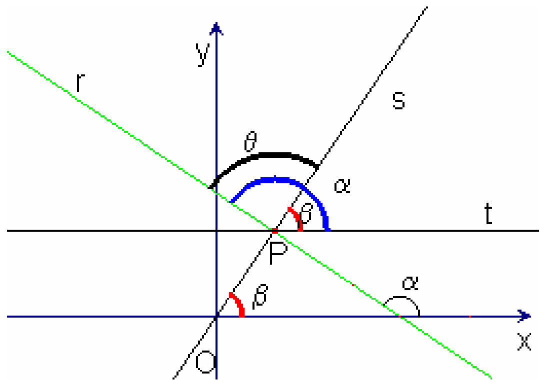


Angolo formato da due rette

Consideriamo il piano cartesiano xOy ed una generica retta r di equazione y = mx + q. il coefficiente angolare m rappresenta il valore della tangente goniometrica dell'angolo α che la retta r forma con l'asse delle ascisse, ossia m = tg α



Consideriamo ora due rette incidenti r ed s, e cerchiamo la relazione che intercorre tra i loro coefficienti angolari ad uno degli angoli da esse formati. Sia y = mx + q l'equazione della retta *r* e y = m'x + q' l'equazione della retta *s*.le due rette incidenti formano quattro angoli a due a due congruenti perché opposti al vertice. Supponiamo che le due rette non siano perpendicolari, vogliamo calcolare il valore della tangente degli angoli acuti θ formati da *s* e *r*.



Conduciamo ora per P la parallela *t* all'asse delle ascisse. L'angolo che essa forma con *r* è congruente all'angolo α che la retta *r* forma con l'asse delle ascisse, abbiamo quindi che ***tg*** $\boldsymbol{\alpha}$ **= *m***. L'angolo che t forma con r è congruente all'angolo β che la retta *s* forma con l'asse delle ascisse, abbiamo quindi che ***tg*** $\boldsymbol{\beta}$ **= *m'***.

L'angolo θ è dato quindi dalla differenza tra α e β.

Se r ed s non sono perpendicolari possiamo affermare che:

$$|tg\theta| = |tg(\alpha - \beta)| = \left|\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}\right| = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|$$

Osservazione

1. Questa formula non si può applicare nel caso in cui le due rette siano perpendicolari,perché in tal caso, il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1 ed il denominatore 1-mm' diventerebbe uguale a 0 rendendo priva di significato l'espressione al secondo membro.
2. Quando invece le rette sono parallele $\theta = 0$ quindi tg $\theta = 0$ e m = m'.
3. Se la retta r è parallela all'asse delle ascisse, $\theta = \beta$.
4. Se la retta r è parallela all'asse delle ordinate, $\theta = \pi/2 - \beta$.

VERIFICA FORMATIVA

1) **Risolvi il triangolo rettangolo, sapendo che uno degli angoli acuti misura 30°,e il cateto adiacente ad esso misura 2.**
2) **Risolvi il triangolo di lati: $a=\sqrt{3}$ $b=1$ $c=1$**
3) **Trova l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo sapendo che un cateto misura 21cm e l'altezza relativa all'ipotenusa misura 84/5cm.**
4) **Risolvi un triangolo tale che: $b=125$ $\alpha=59°$ $\gamma=73°$.**
5) **Calcola l'area, la misura del raggio inscritto, e del raggio circoscritto relativamente al triangolo avente: $a=3$ $b=4$ $\alpha=45°$.**

VERIFICA SOMMATIVA

1. **La lunghezza di una corda AB di una circonferenza è 6; uno degli angoli al centro che insistono sulla corda AB è 240°. Determina la lunghezza del lato dell'esagono regolare inscritto nella stessa circonferenza. (5)**

2. **In un triangolo di area 2(1+√3) il lato opposto all'angolo di 105° misura 2(1+√3). Determina il perimetro del triangolo, sapendo che BC e AB misurano rispettivamente 2r e r√6. (5)**
3. **Calcola l'area, il raggio della circonferenza circoscritta e di quella inscritta relativamente al triangolo di cui conosci:**
   a=3 α=45° β=30°. (6)
4. **Determina l'area di un parallelogramma avente i lati che misurano, rispettivamente, 12 e 15 e il seno dell'angolo acuto compreso uguale a 2/3. (3)**
5. **Calcola l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle seguenti rette:**
   $$3x - y + 7 = 0$$
   $$x - 2y + 3 = 0$$
   (4)
6. **in un sistema ortogonale xOy considera i tre punti A(-1,2); B(5,3); C(1,6). Risolvi il triangolo ABC. (7)**

5. Metodologia didattica:

Le strategie didattiche che si intendono adottare sono: lezioni frontali, lettura guidata del libro di testo, discussione in classe per dar luogo a lezioni di tipo dialogico, utilizzo dei software didattici Cabri Géométre, per quanto riguarda l'introduzione del concetto di radiante e del grafico della funzione *seno*, Derive per quanto riguarda il grafico delle funzioni goniometriche, delle loro inverse e dei grafici deducibili. Infine la storia della Matematica come strumento metodologico per inquadrare da un punto di vista storico le nozioni e i concetti introdotti, con brevi accenni, affinché la matematica non sembri una scienza data una volta per tutte ma frutto di una evoluzione. Si farà attenzione a fare molti esempi una volta che si è introdotto un nuovo concetto perché esso possa essere più chiaro. Si assegneranno esercizi per casa, facendo attenzione a correggere in classe quelli che hanno dato maggiore difficoltà.

6. Materiali e strumenti utilizzati:

Per quanto riguarda i sussidi didattici, si utilizzeranno:
la lavagna tradizionale, il libro di testo, la calcolatrice scientifica. Si farà poi uso del laboratorio di matematica mediante l'utilizzo di Cabri e Derive……

7. Controllo dell'Apprendimento:

Si ritiene opportuno controllare l'apprendimento degli studenti attraverso due tipi di verifica:
verifiche formative: effettuate anche giorno per giorno attraverso il controllo dei quaderni, la risoluzione di esercizi in classe, per acquisire maggiori capacità di maneggiare i concetti appena spiegati e discussioni in classe per dar modo agli studenti di chiarire i loro dubbi;

verifiche sommative suddivise in:

- ✓ scritta che si effettuerà alla fine di ogni unità didattica e che permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti;
- ✓ orale per controllare il livello di apprendimento e di studio;

8. Valutazioni:

Le interrogazioni orali saranno tese ad individuare se l'alunno possiede una conoscenza approfondita e consapevole, valutando anche il modo di argomentare e l'organicità dell'espressione. Negli elaborati scritti invece verrà valutata soprattutto la capacità di applicare le conoscenze per risolvere quesiti di vario genere attraverso l'uso di tecniche, metodi e procedure specifiche, nonché di abilità logiche. Tali elaborati verranno valutati attraverso l'attribuzione ad ogni esercizio di un punteggio. La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia i livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze, abilità per svolgerli.
Nell'attribuire il punteggio si terrà conto di:

- competenze e capacità logiche,
- correttezza e completezza nella risoluzione,
- conoscenze specifiche,
- chiarezza e ordine nel processo seguito.

9. Recupero:

Alla fine di ciascuna verifica, se saranno riscontrati casi di insufficienza, si organizzeranno attività di recupero finalizzato a colmare le lacune riscontrate.
Tali attività potranno essere effettuate nei seguenti modi:
lavoro a casa: ripasso, esercizi, costruzioni di sintesi e schemi su contenuti e procedimenti;
lavoro in classe: si proporranno nuovi esercizi e schede guidate. Si potrà istituire inoltre uno sportello per gli allievi, in prossimità delle verifiche sommative.

10 Tempi dell'intervento didattico

I tempi previsti sono:

Presentazione dei contenuti e esercizi proposti in classe	**Ore previste**
Angoli, archi e loro misura	1
Funzioni seno, coseno, tangente e cotangente. Circonferenza goniometrica.	2
Variazioni delle funzioni goniometriche elementari. Relazioni tra funzioni goniometriche di uno stesso angolo	2
Interpretazione goniometrica del coefficiente angolare di una retta. Relazione tra le funzioni goniometriche di particolari coppie di angoli associati.	2
Le inverse delle funzioni goniometriche elementari.	2
Le formule goniometriche	3
Equazioni goniometriche	3
Disequazioni goniometriche	3
Risoluzione dei triangoli rettangoli e teorema della corda	2
Teorema dei seni, delle proiezioni, del coseno	2
Applicazioni della trigonometria	3
Attività con Derive	2
Commento alle verifiche formative (4)	4

(recupero in classe)	
Verifiche Sommative (4)	8
Correzione e consegna delle verifiche sommative	4
TOTALE	43

11. Misurazione

La misurazione si attua attraverso:

- prove orali individuali;
- quattro verifiche sommative.

12. Griglia per la misurazione

Per determinare gli esiti della verifica sommativa attribuiamo a ciascun esercizio che ne fa parte un punteggio. Il punteggio di un esercizio rispetto al punteggio di un altro rispecchia le differenze in termini di conoscenze, competenze e capacità che sono coinvolte dagli esercizi.

Nell'attribuire il punteggio completo, nullo o una frazione intermedia del punteggio teniamo conto dei seguenti indicatori (sono quelli suggeriti dal Ministero della Pubblica Istruzione per la correzione della prova scritta di matematica):

- conoscenze specifiche;
- competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti;
- capacità logiche ed argomentative;

- completezza della risoluzione;
- correttezza della risoluzione e dell'esposizione.

La necessità di attribuire una parte del punteggio totale di un esercizio si presenta di frequente ed è una procedura delicata. Per evitare disparità di trattamento, ravvisati gli errori che intervengono, si decide quanto farli pesare, di quanto calare il punteggio di fronti a tali errori, e la stessa diminuzione di punteggio è applicata ad ogni studente che incorra nello stesso errore.

Allegato 1

Griglia di Misurazione

Punteggio Grezzo (Totale 30)	**Voto in Decimi (ottenuto con la proporzione)**	**Voto in decimi (una proposta)**
0	0-1	3
1		
2		
3		
4	1-2	
5		
6		
7	2-3	
8		
9		
10	3-4	4
11		
12		

<table>
<tr><td>13</td><td rowspan="3">4-5</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">5-6</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">7</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">7-8</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">8</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="3">8-9</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="3">9-10</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td><td>10</td></tr>
</table>

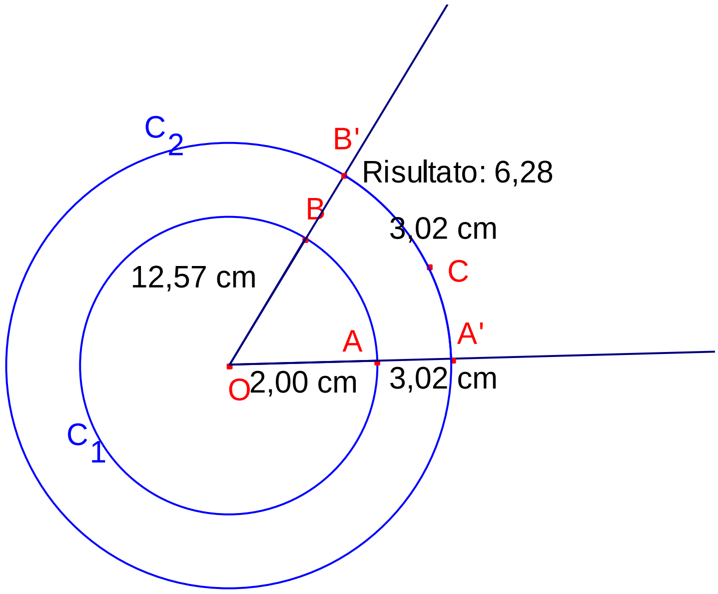
Allegato A

Attività con Cabri: Definizione di radiante

1) Costruire un punto *O*.
2) Costruire la circonferenza di centro *O* e raggio arbitrario (a piacere) che chiameremo C_1.
3) Con lo strumento punto su un oggetto, costruire un punto che chiameremo *A* sulla circonferenza.
4) Costruire il segmento $\overline{OA}$.
5) Con lo strumento distanza o lunghezza misurare il segmento $\overline{OA}$ appena creato.
6) Con lo strumento trasporto di misura trasportare la lunghezza del segmento $\overline{OA}$ sulla circonferenza a partire da *A.*
7) Sia *B* il punto sulla circonferenza in modo che *OA=AB*
8) Costruire il segmento $\overline{OB}$.
9) Tracciare poi le semirette *OA* e *OB* rispettivamente
10) Prendere poi un punto *A'* sulla semiretta *OA.*
11) Costruire la circonferenza di centro *O* e passante per *A'* che chiameremo C_2.
12) Indicare con *B'* l'intersezione tra la circonferenza C_2 e la semiretta *OB*.
13) Con lo strumento distanza o lunghezza misurare la lunghezza della circonferenza C_1.
14) Con lo strumento calcolatrice fare la seguente $\frac{\text{lunghezza della circonferenza}}{\overline{\text{OA}}}$. Uscirà il valore 6.28.

15) Con lo strumento punto su un oggetto prendere un punto *C* sull'arco $\overset{\frown}{A'B'}$
16) Con lo strumento arco di circonferenza creare l'arco $\overset{\frown}{A'CB'}$
17) Misurare la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{A'B'}$ con lo strumento distanza o lunghezza

Misurare la lunghezza del segmento $\overline{OA'}$ con lo strumento distanza o lunghezza.



Bibliografia

L. Lamberti – L. Mereu – A. Nanni, *Corso di matematica 1b*, ed Etas

Eserciziario ricco e ben strutturato, la parte teorica è forse un po’ concisa.

M. Bergamini- A. Trifone- G. Barozzi, *Manuale blu di matematica*, Zanichelli

Teoria ben sviluppata, ricca di esempi; gli esercizi sono in ordine di difficoltà e sono presenti numerosi spunti per le attività di laboratorio.

L. Tonolini – F. Tonolini, *Metodi analitici,* Minerva Italica

Nonostante l’età resta uno dei testi più chiari e completi sotto ogni punto di vista

PMA (progetto matematica Archimede), *I matemoduli,* Archimede edizioni

Trattazione teorica caratterizzata da notevole chiarezza espositiva senza rinunciare al necessario rigore, l’eserciziario ricco e suddiviso in livelli di difficoltà, con domande aperte e schede di autovalutazione per ogni capitolo. Interessante alla fine del testo la sezione per il recupero con sintesi, esercizi svolti ed esercizi proposti.