Università degli studi di Ferrara

PERCORSO DIDATTICO

Geometria sintetica piana: Nozioni di base; triangoli, parallelogrammi, trapezi.

21 gennaio 2008

SSIS - VIII ciclo, II anno
Classe A049 - Matematica e Fisica
Specializzando: Maria Vittoria Ludovico

Supervisori
Minni Fabiano
Neri Davide
Tomasi Luigi

Classe destinataria: tenendo conto dei piani di studio della scuola secondaria superiore e i programmi dei bienni della Commissione Brocca, il percorso didattico è rivolto al primo anno di un liceo scientifico in cui l'insegnamento della disciplina "Matematica e Informatica" è previsto con un monte di ore pari a 5 settimanali.

Prerequisiti e loro controllo:

- terminologia di base relativa agli insiemi;
- elementi di logica;
- le relazioni d'ordine e le relazioni d'equivalenza;
- nomenclatura geometrica di base;
- saper rappresentare la situazione attraverso un disegno;
- saper disegnare punti, segmenti, poligoni;
- saper disegnare circonferenze e archi di circonferenza;
- saper salvare e caricare un file in ambiente Cabri;
- conoscere le modalità per la costruzione degli oggetti base : punto, retta, segmento (in ambiente Cabri).

(Questi sono concetti che l'alunno ha acquisito nei suoi studi precedenti o che "sta costruendo in itinere" pertanto, sono da considerarsi appartenenti al "bagaglio" culturale dell'alunno. Essi verranno ripresi e "formalizzati", cercando di sottolineare un "percorso matematico" che riprende concetti noti, "evolvendoli" e non "ignorandoli".)

Obiettivi generali:

- promuovere le facoltà sia intuitive che logiche;
- educare ai procedimenti euristici, ma anche ai processi di astrazione e di formazione dei concetti;
- esercitare a ragionare induttivamente e deduttivamente;
- sviluppare le attitudini sia analitiche che sintetiche.

Obiettivi trasversali:

- sviluppare l'attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi;
- ampliare ulteriormente il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.

Obiettivi di apprendimento:

- dimostrare proprietà di figure geometriche;
- comprendere il senso dei formalismi matematici introdotti;
- adoperare i metodi, i linguaggi e gli strumenti informatici introdotti;
- inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali.

Conoscenze

- I punti, le rette e i piani
- I segmenti e gli angoli
- I triangoli
- I parallelogrammi e i trapezi

Competenze

- Saper utilizzare strumenti informatici per la costruzione delle figure geometriche
- Saper utilizzare i concetti di base della geometria
- Saper dimostrare i teoremi sui triangoli
- Saper dimostrare i teoremi sui parallelogrammi e trapezi

Capacità

- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi non solo "matematici"

Metodologie:

I nuovi argomenti verranno affrontati utilizzando contemporaneamente lezioni frontali e dialogiche in modo da favorire una partecipazione attiva e un'attenzione continuativa degli alunni che potranno dare il loro contributo mediante osservazioni e domande e, magari, anticipazioni.

Nel laboratorio di matematica si utilizzerà il software di geometria Cabri per evidenziare e/o ottenere le proprietà che caratterizzano le figure della geometria piana.

Verranno svolti in classe opportuni esempi, alcuni dei quali serviranno per introdurre e far comprendere nuovi concetti, e altri per applicare e consolidare le conoscenze già acquisite.

Si svolgeranno in classe esercizi di diverso tipo e di difficoltà crescente in modo che siano momento immediato di sostegno e anche di ripasso della teoria.

Verranno assegnati degli esercizi a casa scelti con difficoltà crescente in modo che gli alunni possano acquisire una maggiore familiarità con l'argomento.

Sarà effettuata (all'inizio di ogni lezione) la correzione in classe di quegli esercizi che hanno apportato più incertezze e difficoltà.

In tutto questo procedere, si terrà sempre conto di un riferimento epistemologico e storico dell'argomento, affinché la matematica non sembri una scienza preconfezionata ma, frutto di un'evoluzione.

Materiali e strumenti:

- libro di testo
- lavagna e gessi
- slide di powerpoint
- calcolatrice scientifica
- computer
- software Cabri - géomètre

Sviluppo dei contenuti:

Il percorso didattico realizzato per affrontare l'argomento della geometria sintetica piana è costituito da tre parti:

1. La geometria del piano
2. I triangoli
3. Le rette perpendicolari e parallele, i parallelogrammi e i trapezi

Verifiche e valutazione:

Il controllo dell'apprendimento sarà effettuato mediante verifiche formative e verifica sommativa.

Le verifiche formative consistono nel controllo degli esercizi assegnati per casa, la correzione alla lavagna degli stessi, effettuata dagli allievi, la discussione in classe dei problemi incontrati nello svolgimento degli esercizi e nello studio della teoria, qualche domanda durante le lezioni, lo svolgimento di qualche esercizio alla lavagna.

Le verifiche sommative consistono in prove orali e prove scritte.

Le prove orali serviranno al docente per valutare non solo la teoria appresa dai ragazzi, ma verrà chiesto anche lo svolgimento di qualche esercizio e verranno fatte domande riguardanti le attività di laboratorio.

La prova scritta sarà svolta al termine dell'unità didattica e ha soprattutto il compito di valutare le abilità e permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti.

Per determinare il voto della verifica sommativa verrà attribuito ad ogni esercizio un punteggio.

La diversità di punteggio rappresenterà un diverso livello di difficoltà in termini di conoscenze e abilità.
Per attribuire il punteggio si terrà conto dei seguenti indicatori:

- Conoscenze specifiche
- Competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti
- Capacità logiche ed argomentative
- Completezza della risoluzione
- Correttezza della risoluzione e dell'esposizione

Naturalmente, nel caso di errore nello svolgimento dell'esercizio, verrà attribuito solo parte del punteggio completo. Per fare questo, si stabilirà di volta in volta, a seconda della gravità dell'errore commesso, quanto farlo pesare e di quanto abbassare il punteggio.
Fatto questo, verrà applicata la stessa diminuzione di punteggio a ciascun studente che avrà fatto lo stesso errore.

<u>Tempi dell'intervento didattico:</u>

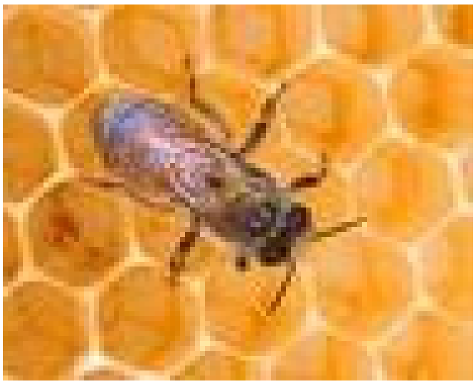
Si stimano all'incirca una quarantina di ore suddivise approssimativamente nel modo seguente:

- ✓ Parte I: 7 ore
- ✓ Parte II: 15 ore
- ✓ Parte III: 15 ore
- ✓ Verifica sommativa: 2 ore + 1 ora di correzione in classe

PARTE I: LA GEOMETRIA DEL PIANO

1.1 Che cos'è la geometria?

Nota didattica: l'idea di partire col chiedere o mostrare agli studenti che il mondo che ci circonda mostra un'infinita varietà di forme geometriche, regolari o irregolari, semplici o complesse, simmetriche o asimmetriche, è finalizzata a far comprendere che la matematica, e in particolare la geometria, con le sue forme e regole fa parte della realtà che ci circonda e non è solo un ente astratto come potrebbe sembrare. Quindi gli studi e i nuovi risultati raggiunti in tale campo possono migliorare la nostra vita.

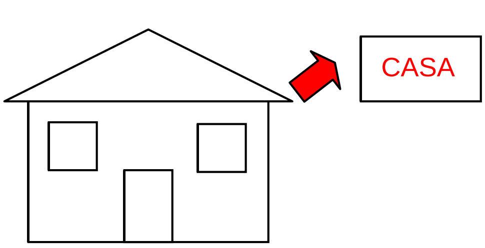


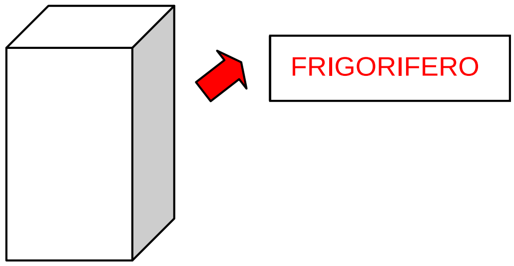
I pianeti, per esempio, presentano forme geometriche riconducibili ai cerchi e alla sfera.
Le celle degli alveari richiamano la forma geometrica dell'esagono.

Le forme geometriche che si ritrovano in natura e soprattutto nell'arte hanno spesso caratteristiche di simmetria, che è sinonimo d'ordine e stabilità.

QUESITO: **come possiamo studiare le proprietà di tutte queste forme geometriche che ritroviamo negli oggetti che ci circondano?**

Il primo passo, che hai già compiuto nei tuoi studi precedenti (nella scuola secondaria di I grado), è quello di eseguire un procedimento di astrazione, simile a quello che utilizziamo, per esempio, quando facciamo un disegno: non disegniamo gli oggetti nei minimi particolari, in modo del tutto fedele alla realtà, ma in forma semplificata, cercando di riprodurne tutte le caratteristiche essenziali.





Questo procedimento di astrazione permette di individuare delle figure geometriche (per esempio, il triangolo, il rettangolo, il cerchio ecc.), cioè dei modelli matematici ideali che servono a descrivere le forme degli oggetti reali che ci circondano.

La branca della matematica che studia le figure geometriche, cioè i modelli matematici degli oggetti fisici, è la **geometria**.

QUESITO: **perché studiare allora ancora le stesse cose?**

Nei tuoi studi precedenti hai già affrontato i concetti fondamentali della geometria, ma l'approccio a questa disciplina è stato prevalentemente intuitivo: hai osservato delle proprietà, riconosciuto delle regolarità e le hai generalizzate, facendo scaturire una **congettura**. (Con questo termine, in matematica, si intende una proposizione che, con buona probabilità, è vera, ma che **non** si è ancora dimostrato essere tale: quindi, in assenza di una dimostrazione, è solo un'ipotesi ragionevole, una congettura appunto.)

Questo ragionamento detto **induttivo** consente di scoprire nuove proprietà, cioè di formulare congetture, ma non ci permette di capire (nel caso in cui la congettura sia vera) perché vale la proprietà espressa nella congettura. Per fare questo ulteriore passo dobbiamo affidarci al ragionamento **deduttivo**.

<u>Nota didattica</u>: in questo percorso didattico affronteremo lo studio della geometria, privilegiando il metodo deduttivo. Questo non significa che abbandoneremo completamente il metodo induttivo. Nelle schede di laboratorio faremo sempre uso di ragionamenti di tipo induttivo, per scoprire nuove proprietà, ma, una volta scoperte le proprietà, ci occuperemo sempre di trovarne delle giustificazioni formulando ragionamenti di tipo deduttivo.

1.2 <u>Cenni storici</u>

<u>Nota didattica</u>: il breve cenno storico ha lo scopo di mettere in evidenza che il metodo deduttivo o, più precisamente, assiomatico-deduttivo, su cui baseremo il presente studio della geometria è stato introdotto dalla necessità di dare una sistematizzazione alla geometria, e che l'evoluzione nell'apprendimento dell'alunno avviene in analogia a quanto è successo nella storia.

La parola geometria deriva dal greco e significa "misura della Terra". Già dal nome puoi quindi intuire che la sua nascita è legata a problemi sostanzialmente pratici. Infatti, secondo quanto tramandano alcuni storici greci, le prime nozioni di geometria sono state sviluppate, già in tempi antichissimi, in Egitto, dove le frequenti inondazioni del Nilo costringevano gli abitanti a ridisegnare spesso i confini dei propri terreni e quindi a misurarli.

Dall'Egitto, queste conoscenze sono passate in Grecia e si sono ulteriormente sviluppate. In particolare nel periodo ellenistico (dal 300 a. C. al 600 d. C.), si differenziano le diverse discipline del sapere, che fiorirono in tutto il loro splendore: un esempio è dato proprio dalla geometria. Non è più la geometria degli Egizi, legata a problemi di misurazione del terreno, ma una vera e propria scienza razionale, staccata da ogni esperienza applicativa e volta a studiare sistematicamente le proprietà delle figure del piano e dello spazio.

Fra gli studiosi che hanno contribuito allo sviluppo della geometria nell'antica Grecia spicca, su tutti, il nome di **Euclide** (vissuto intorno al 300 a. C.). La sua opera principale, intitolata Elementi, è infatti di fondamentale importanza e organizza tutte le conoscenze sviluppate in questo campo dai matematici greci dei due secoli precedenti. Gli Elementi sono costituiti da 13 **libri**: i primi sei riguardano la geometria piana, dal settimo al nono vengono discusse alcune questioni aritmetiche, il decimo riguarda questioni geometriche legate ai numeri irrazionali e negli ultimi tre viene trattata la geometria solida. Nessuna opera matematica ha avuto un influsso paragonabile a quello degli Elementi di Euclide: a parte la Bibbia, nessun libro può vantare tante edizioni! L'importanza degli Elementi deriva, più che dai contenuti, dal fatto che si tratta del primo esempio di quello che oggi diremmo un trattato scientifico, per il suo metodo rigorosamente deduttivo. Euclide fissa un nucleo iniziale di assiomi e da questi assiomi deduce tutte le altre affermazioni (metodo assiomatico-deduttivo).

QUESITO: **che cosa si intende per metodo assiomatico- deduttivo?**

Assiomatico vuol dire indiscutibile, che non è possibile negare perché evidente, certamente vero.
Deduttivo è ciò che si può dedurre, cioè derivare con un ragionamento logico, a partire da alcune premesse vere (**assiomi**); se le premesse sono vere e il ragionamento logico e razionale (**dimostrazione**), le conclusioni che ne derivano saranno, conseguentemente, logiche e vere (**teoremi**).

QUESITO: **in altre parole, che cosa ha fatto Euclide?**

Ha posto alla base del suo studio alcuni enti e alcune considerazioni evidentemente certi e da questi ha dedotto il resto con un ragionamento logico.

<u>Nota didattica</u>: anche noi per il nostro studio, ripercorreremo a grandi passi, e usando lo stesso metodo, il cammino di Euclide per scoprire questa scienza razionale che riguarda lo studio di alcune delle proprietà dei corpi materiali.

Il metodo assiomatico-deduttivo non è poi così innaturale come ti può forse apparire a prima vista. Per esempio, lo hai già utilizzato quando hai imparato un nuovo gioco: inizialmente ti sono state spiegate le "regole del gioco" (gli assiomi). Poi, giocando, hai imparato anche solo inconsciamente alcuni "trucchi" ed elaborato strategie, conseguenze delle regole del gioco (i teoremi).

<u>Attività:</u> Potremmo reinterpretare, dal punto di vista assiomatico-deduttivo, il gioco del tris.

- Parole chiave del gioco: concetti primitivi

✓ Giocatore	✓ Simbolo	✓ Colonna
✓ Mossa	✓ Riga	✓ Diagonale
✓ Casella	✓ Quadrato	

- Regole del gioco: gli assiomi

- ✓ Si assegna ad ogni giocatore un simbolo (per esempio **X** e **0**), quindi sul foglio si disegna un quadrato suddiviso in nove caselle;
- ✓ Si sorteggia il giocatore che fa la prima mossa;
- ✓ Il primo giocatore disegna il proprio simbolo su una delle caselle vuote; il secondo giocatore disegna il proprio simbolo su una seconda casella… e così via a turno;
- ✓ Vince chi per primo riesce a completare una riga o una colonna o una diagonale.

- ➢ Un teorema del gioco del tris è, per esempio: "se il mio simbolo è **X** e ci troviamo nella situazione descritta dalla seguente figura, allora ho vinto":

X	**X**	
0	**X**	
		0

- ➢ Una dimostrazione di questo teorema è la seguente:

"il mio avversario porrà il suo simbolo in una delle due posizioni evidenziate in verde nelle seguenti figure: ma, in ciascuno dei due casi, potrò comunque vincere ponendo il simbolo **X** nelle posizioni evidenziate in giallo".

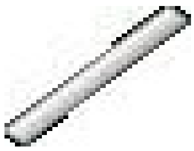
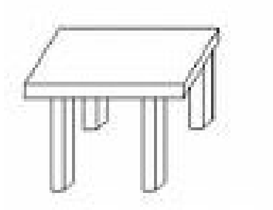
X	**X**	**0**
0	**X**	
	X	**0**

X	**X**	**X**
0	**X**	
	0	**0**

1.3 I primi assiomi della geometria euclidea

1.3.1 I concetti primitivi

Nota didattica: è necessario far comprendere agli studenti che la necessità di assumere dei concetti primitivi deriva dal fatto che sarebbe impossibile definire ogni concetto senza cadere in un circolo vizioso: ogni definizione, infatti, deve contenere termini di cui si conosce già il significato, ossia termini di cui sono già state date le definizioni. Anche queste definizioni conterranno dei termini che devono essere a loro volta definiti e così via… Per interrompere questo procedimento è necessario fissare dei termini di cui si suppone noto il significato e di cui si accetta perciò di non dare alcuna definizione.

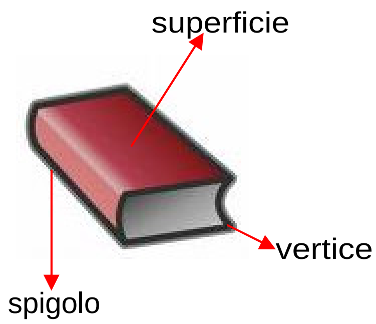




Il gessetto è un corpo. Il tavolo è un corpo. La Luna è un corpo. Qualsiasi oggetto che ci circonda è un **corpo materiale**. Ogni corpo è caratterizzato da certe proprietà che lo distinguono dagli altri oggetti: esso ha, per esempio, un proprio colore, un proprio peso, una propria forma, una propria estensione ed è fatto di determinate sostanze; occupa, inoltre, una certa posizione nello spazio.
È facile rendersi conto che la forma ed estensione sono proprietà assai diverse: una pallina da ping-pong e un pallone da calcio hanno la medesima forma, ma estensione diversa; con due confezioni uguali di plastilina possiamo modellare un cilindro e un cono, che avranno la stessa estensione ma forma differente.

Quando di un corpo ci limitiamo a considerare la **forma** e l'**estensione**, prescindendo da tutte le altre proprietà, diciamo che esso è un **corpo geometrico**.

Naturalmente, noi lavoreremo solo con dei "modelli" materiali dei corpi geometrici, "modelli" che ci aiuteranno a studiali. Anche i disegni sono "modelli" o "immagini" di corpi geometrici.
Per esempio il libro è un corpo materiale; se di esso prendiamo in esame la forma e la grandezza, lo consideriamo un corpo geometrico.
Tracciamo allora un disegno, il più fedele possibile, per poterlo analizzare.

QUESITO: **Cosa noti?**



Superfici, spigoli e vertici ci portano ai tre enti fondamentali della geometria euclidea che sono:

- **il punto** (il nostro vertice);
- **la retta** (di cui il nostro spigolo ci dà un'immagine approssimata);
- **il piano** (di cui le superfici che delimitano il libro ci danno un'idea).

L'ambiente in cui viviamo ci dà solo delle rappresentazioni più o meno appropriate, ma mai esatte, di questi tre enti fondamentali perché gli enti geometrici sono delle astrazioni, sono cioè privi di qualsiasi dimensione e sono caratterizzati solo dallo loro posizione. Se nella realtà osserviamo, per esempio, il segno di una matita ben appuntita

abbiamo l'immagine approssimativa del punto geometrico di cui possiamo dire:

Il punto è il primo ente fondamentale; esso è un concetto primitivo, privo di vera definizione; possiamo provare a immaginarlo come il segno lasciato da una matita ben appuntita su un foglio.

Indicheremo abitualmente i punti con lettere latine maiuscole:

A, B, C, ..., P, Q, ...,

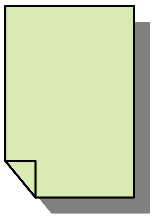
Se osserviamo gli spigoli di un tavolo vediamo l'immagine materiale della **linea geometrica**, che possiamo pensare come un **insieme infinito** e **continuo di punti**.

Indicheremo abitualmente le rette con lettere latine minuscole:

a, b, c, ..., r, s, t, ...,

La retta è il secondo ente fondamentale; possiamo immaginarla come un insieme consecutivo e infinito di punti aventi sempre la stessa direzione.

Osservando infine un foglio di quaderno abbiamo l'immagine materiale della **superficie geometrica**, che possiamo pensare come un **insieme infinito** e **continuo di linee**.



Indicheremo abitualmente i piani con lettere dell'alfabeto greco.

Il piano è il terzo ente fondamentale, possiamo immaginarlo come un insieme continuo e infinito di rette.

RICAPITOLANDO:

Da quanto abbiamo detto risulta chiaro che, nello studio della geometria ci serviremo:

- di **assiomi**, che sono quelle proprietà che vengono assunte come vere e fondamentali;
- di **definizioni** con le quali verranno precisate chiaramente le figure geometriche che si vogliono studiare;
- di **teoremi** che sono quelle proprietà che verranno dedotte con deduzione logica.

Il teorema è una proposizione del tipo:

<u>Se</u> è vera H <u>allora</u> è vera T

e si compone di tre parti fondamentali:
l'**ipotesi** H, che è quanto si suppone sopra gli elementi su cui verte il teorema e ne rappresenta il punto di partenza;
la **tesi** T, costituente il punto di arrivo, in quanto l'obiettivo proposto è di dimostrarne la verità, generalmente non ovvia a priori;
la **dimostrazione** che è il ragionamento logico con cui, partendo dall'ipotesi si giunge alla tesi.
I teoremi, infine, che sono immediata conseguenza di un dato teorema, o di un dato assioma, si dicono **corollari**.

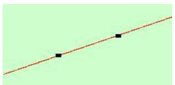
<u>Nota didattica</u>: ora che abbiamo fissato i concetti primitivi, possiamo procedere al secondo passo fondamentale del nostro percorso: introdurre gli assiomi.

1.3.2 <u>Assiomi di appartenenza e di ordine</u>

La geometria che presentiamo prende dunque avvio dagli Elementi di Euclide (è perciò detta euclidea) ed è una teoria assiomatica. Axioma in greco significa "ciò che è ritenuto giusto".

Secondo la nostra intuizione noi possiamo segnare su una retta quanti punti vogliamo.
Inoltre, se fra due medesimi punti distinti tendiamo due fili, essi si adagiano esattamente l'uno sull'altro.
Ebbene, ispirandoci a questi dati intuitivi si ammette il seguente:

ASSIOMA DI APPARTENENZA DELLA RETTA



- **Per due punti distinti di un piano passa una ed una sola retta.**

Diciamo "**una e una sola**" per riassumere due concetti che incontreremo spesso:

a) **esistenza**: dati due punti siamo sicuri che esiste una retta che passa per quei punti;
b) **unicità**: la retta che passa per due punti è unica.

Precisiamo poi che la retta non può essere costituita da un solo punto.

- **Su una retta ci sono almeno due punti.**

In modo analogo, con il prossimo postulato, vogliamo evitare che si possa pensare che il piano sia costituito soltanto da una retta.

- **Per ogni retta di un piano esiste almeno un punto, nel piano, che non le appartiene.**

QUESITO: **Questi tre postulati sono sufficienti per determinare una proprietà riguardante due rette distinte. Sapresti dire quale?**

<u>Due rette distinte possono avere in comune un solo punto.</u>

Infatti, se avessero due punti in comune, esse coinciderebbero, in forza del I assioma, contro l'ipotesi che le vuole distinte. Si noti che in questo teorema si ha:

ipotesi H: due rette distinte dello spazio,

tesi T: hanno al massimo un punto in comune.

La dimostrazione qui non consiste nel far vedere che:

da H consegue T,

ma ha il seguente schema:

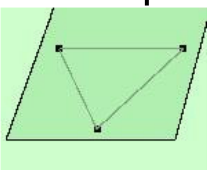
dalla negazione di T consegue la negazione di H.

Questo tipo di ragionamento, indiretto ma logicamente esatto, si chiama **dimostrazione per assurdo**.

Prima di enunciare gli assiomi relativi al piano, facciamo le seguenti considerazioni.
Anche sopra un piano noi riconosciamo intuitivamente la possibilità di segnare quanti punti vogliamo.
Inoltre se consideriamo una porta girevole attorno alla retta congiungente i suoi due cardini, essa non si può più muovere quando se ne fissa un terzo punto, fuori di tale congiungente.
Infine, se sul tavolo da disegno fissiamo, con due puntine, le estremità di un filo, in modo che sia completamente teso, vediamo che esso giace per intero sul piano del tavolo.
Ebbene, ispirandoci a questi dati intuitivi dell'esperienza comune, si ammette il seguente:

ASSIOMA DI APPARTENENZA DEL PIANO

- **Per tre punti non allineati dello spazio passa un piano ed uno solo.**



- **La retta che ha due punti in comune con un piano, giace completamente sul piano.**
- **Il piano contiene infiniti punti e infinite rette.**

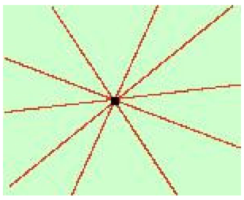
Dall'assioma enunciato si deducono subito le conseguenze:

- Per una retta r e per un punto P non appartenente ad r, passa uno ed un solo piano, cui entrambi appartengono.
- Per due rette incidenti passa uno ed un solo piano.

Le rette incidenti danno infine origine alla seguente

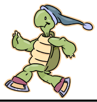
DEFINIZIONE **Si chiama fascio di rette incidenti l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per uno stesso punto A.**

Il punto A si dice **centro** e **sostegno** del fascio. Un fascio di centro A si indica con (A).



Una retta, secondo la nostra intuizione, si può immaginare descritta da un punto che si muove sempre nello stesso verso.

Ma in questo moto sono possibili due versi, uno opposto all'altro.



Per distinguere i due versi, uno viene chiamato **verso positivo** e l'altro **verso negativo**.
S'intende che come verso positivo possiamo prendere uno qualunque dei due, dopo di che l'altro sarà il verso negativo.
Quando sopra la retta è stato fissato il verso positivo, si dice che la **retta è orientata**.
Per indicare il verso positivo della retta ci si serve di una freccia.
Se sopra una retta orientata prendiamo due punti distinti A e B, si dice che A precede B se percorrendo la retta nel verso positivo si incontra prima A e poi B. Nel caso opposto si dice che A segue B.

La nostra esperienza quotidiana ci rende evidenti le seguenti proprietà:

a) Dati due punti qualsiasi A o B di una retta orientata r, si verifica sempre che:
   - o i punti A e B coincidono;
   - o il punto A precede il punto B, nel verso prefissato;
   - o il punto B precede il punto A nel verso prefissato;

   l'una eventualità escludendo l'altra.

È questa la proprietà di tricotomia della relazione precedere.

b) Se tre punti A, B, C di una retta sono tali che il punto A precede il punto B e, a sua volta, B precede C, allora A precede C.

È questa la proprietà transitiva della relazione precedere.
In base a queste prime due proprietà si dice che **la retta è una linea aperta**.

c) Si dice che un punto B è **compreso** tra i punti A e C se esso segue A e precede C.

È allora intuitivo che fra due punti di una retta orientata è sempre compreso un terzo punto, e quindi infiniti.
Questa proprietà si esprime dicendo che **la retta è densa**.

Infine, se a partire da un punto qualsiasi di una retta orientata, procediamo in ciascuno dei due versi, è intuitivo che non incontreremo mai un ultimo punto.

d) Non esiste perciò sulla retta, in ciascun verso, né un primo né un ultimo punto.

Questa proprietà si esprime dicendo che **la retta è illimitata** nei due versi.
Riassumendo possiamo enunciare il seguente:

ASSIOMA DELL'ORDINE

Ogni retta è dotata di due versi naturali, uno opposto all'altro, rispetto ai quali è aperta, densa e illimitata.

Tali versi si chiamano anche **sensi** della retta.

1.3.3 Cenni storici

Gli assiomi che abbiamo assunto e che assumeremo, sono molto di più di quelli assunti da **Euclide** nei suoi Elementi. Euclide aveva fissato soltanto cinque assiomi, ma la critica moderna ha messo in luce che la sua impostazione non era completamente rigorosa poiché faceva implicitamente uso di molti degli assiomi che invece noi dichiareremo. Un sistema rigoroso di assiomi per fondare la geometria su basi "solide" venne formulato dal matematico tedesco **David Hilbert** in un'opera del 1899, intitolata Fondamenti della geometria.

1.4 Le parti della retta e le poligonali

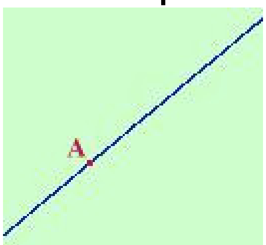
Nota didattica: introduciamo mediante opportune definizioni, alcune figure geometriche che certamente già gli alunni conoscono, almeno a livello intuitivo, dai loro studi precedenti: i segmenti, le semirette, gli angoli, i poligoni… Iniziamo con il precisare che cosa si intende per figura geometrica.

Semirette

Gli assiomi di ordine ci consentono di introdurre la definizione di semiretta.

Data una retta orientata e un suo punto A, chiamiamo semirette:

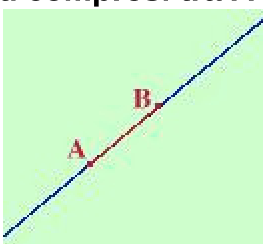
- **L'insieme formato da A e dai punti che lo seguono;**
- **L'insieme formato da A e dai punti che lo precedono.**



Il punto A si chiama **origine** della semiretta.
La definizione afferma che su una retta esistono due semirette opposte, con la stessa origine. L'origine è il solo punto che due semirette opposte hanno in comune.
Possiamo indicare una semiretta, oltre che con una sola lettera minuscola, anche con un simbolo "misto" del tipo Aa, dove la lettera maiuscola indica l'origine della semiretta.

Segmenti

Anche la definizione di segmento è possibile in base a quanto assunto nell'assioma d'ordine.
Data una retta e dei suoi punti, A e B, diciamo segmento AB l'insieme dei punti della retta formato da A, da B e dai punti compresi tra A e B.

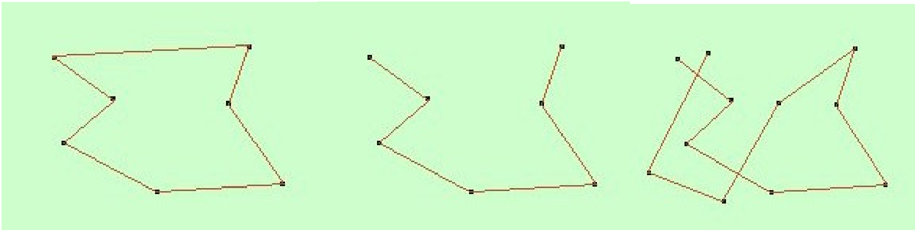


I punti A e B si chiamano **estremi** del segmento, i punti compresi fra A e B sono i **punti interni** del segmento.
Fissati due punti A e B possiamo anche pensare alla retta AB divisa in tre parti: il segmento AB, la semiretta di origine A che non contiene B, la semiretta di origine B che non contiene A. Queste due semirette vengono dette **prolungamenti** del segmento AB.
Due segmenti sono **consecutivi** se hanno in comune soltanto un estremo; sono **adiacenti** quando sono consecutivi e appartengono alla stessa retta.
Un segmento è **nullo** se i suoi estremi coincidono, ossia se è privo di punti interni. Il segmento nullo è costituito da un solo punto. Dato il punto A, AA è un segmento nullo.

Le poligonali

Si dice poligonale una figura costituita da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascun segmento e il successivo siano consecutivi.

In base all'ordine dei segmenti, chiamiamo **primo estremo** della poligonale quell'estremo del primo segmento non in comune con il secondo segmento. Analogamente chiamiamo **ultimo estremo** della poligonale quell'estremo dell'ultimo segmento non in comune con il penultimo segmento.
Una poligonale è **chiusa** se l'ultimo estremo coincide con il primo. In caso contrario la poligonale è **aperta**. Una poligonale è **intrecciata** se almeno due suoi lati (non consecutivi) si intersecano.



1.5 Le parti del piano

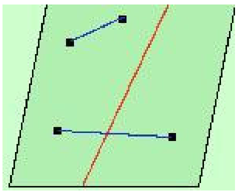
Semipiani

Se tagliamo un foglio lungo un tratto rettilineo che vada da un bordo ad un altro, il foglio si divide in due parti.
Siccome questa proprietà si conserva anche quando il foglio si estende comunque, possiamo attribuirla a tutto il piano.
Inoltre, finché un punto si muove nel piano, restando sempre da una parte della retta, non la attraversa mai; ma non può passare dall'altra parte senza incontrare tale retta.
È questo il contenuto intuitivo del seguente:

ASSIOMA DI PARTIZIONE DEL PIANO

Ogni retta r **di un piano divide l'insieme degli ulteriori suoi punti in due parti non vuote, tali che:**

1. **Se i punti** A **e** B **appartengono a parti diverse, allora il segmento** AB **taglia la retta** r **in un punto.**
2. **Se i punti** C **e** D **appartengono alla stessa parte, allora anche il segmento** CD **è incluso in questa.**

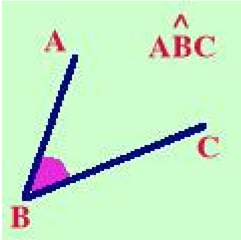


Si dà, allora, la seguente:

DEFINIZIONE **Si chiama semipiano la figura costituita da una di queste due parti e dalla retta r.**

Angoli

Un angolo è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi la stessa origine, incluse le due semirette.



Le due semirette sono i **lati** dell'angolo; il punto origine in comune è il **vertice** dell'angolo.
I punti che appartengono all'angolo, ma non ai suoi lati, sono i **punti interni** dell'angolo. Per indicare un angolo di vertice B e con lati le semirette a e c, usiamo il simbolo $a\hat{B}c$.
Anche il simbolo $A\hat{B}C$ indica un angolo di vertice B, ma con un lato che passa per il punto A e l'altro per il punto C.
Quando due angoli hanno in comune il vertice e un lato, e giacciono nei due semipiani opposti rispetto al lato in comune si dicono **consecutivi**.
Due angoli consecutivi i cui lati non comuni appartengono alla stessa retta sono **adiacenti**.

N. B. Un piano o un semipiano possono essere visti come particolari angoli.

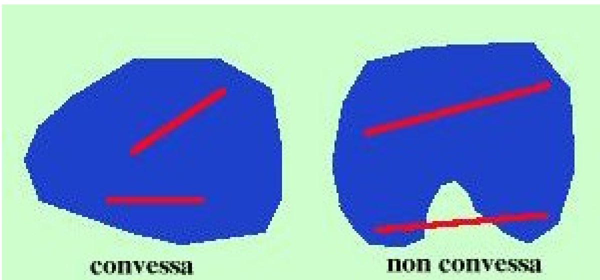
DEFINIZIONE Un angolo è **piatto** quando i suoi lati sono due semirette opposte. L'angolo **giro** è l'angolo i cui lati sono semirette coincidenti e che coincide con l'intero piano. Un angolo è **nullo** quando i suoi lati sono due semirette coincidenti e non comprende altri punti oltre quelli dei lati. Ogni angolo metà di un angolo piatto è un angolo **retto**.

Chiameremo angolo **acuto** ogni angolo minore di un angolo retto, **ottuso** ogni angolo maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto. Due angoli sono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto. Due angoli sono **complementari** se la loro somma è un angolo retto. Due angoli si dicono **opposti al vertice** se i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Un angolo piatto coincide quindi con un semipiano. Spesso lo indichiamo con $\hat{P}$.

1.6 Le proprietà delle figure

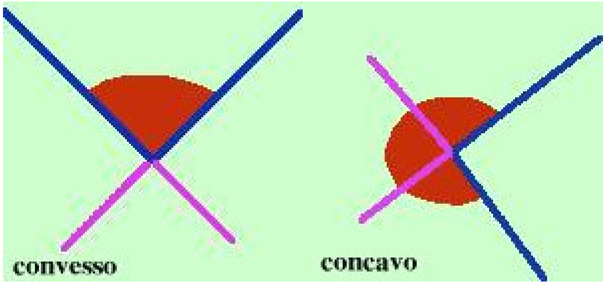
DEFINIZIONE Una figura è **convessa** se due suoi punti qualsiasi sono estremi di un segmento che è contenuto interamente nella figura stessa. Se una figura non è convessa si dice **concava**.



QUESITO: **Sapresti fare un esempio di figura convessa e concava?**

Per dimostrare che una figura è concava è sufficiente individuare anche una sola coppia di punti della figura che siano estremi di un segmento che non è contenuto interamente nella figura.
Il piano, le rette, le semirette, i segmenti, i semipiani sono figure convesse.

Per decidere se un angolo è concavo o convesso, anziché ricorrere alla definizione precedente, possiamo considerare i prolungamenti dei suoi lati.
Se un angolo contiene al proprio interno i prolungamenti dei lati, allora è concavo. Infatti è possibile scegliere due punti in modo che il segmento che li unisce non sia contenuto interamente nell'angolo.
Se un angolo **non** contiene al proprio interno i prolungamenti dei lati, allora è convesso.



Infatti, comunque scegliamo due punti, il segmento che li unisce è contenuto sempre interamente nell'angolo.

1.6.1 La congruenza delle figure

Quando parliamo di movimento rigido intendiamo dire che nella geometria euclidea si può pensare di spostare le figure senza deformarle.
In geometria utilizzeremo la parola **uguaglianza** soltanto per indicare la coincidenza punto a punto di due figure. Useremo invece la parola **congruenza** per indicare la sovrapponibilità punto a punto di una figura su un'altra mediante un movimento rigido.

Esempio:

1. Se diciamo:
   "in un triangolo isoscele due lati sono congruenti",
   stiamo considerando i due lati come due segmenti distinti e affermiamo che è possibile trasportare uno di essi sull'altro con un movimento che non lo deformi e in modo che i punti dell'uno coincidano con i punti dell'altro.
2. Se invece diciamo:
   "in un triangolo isoscele le mediana e l'altezza relativa alla base sono uguali",
   vogliamo dire che lo stesso segmento rappresenta sia l'altezza sia la mediana.

Il concetto di movimento rigido deve essere considerato primitivo.
I movimenti rigidi sono caratterizzati dai seguenti postulati:

- **Tutte le rette sono fra loro congruenti.**
- **Tutte le semirette sono fra loro congruenti.**
- **Tutti i semipiani (e quindi anche gli angoli piatti) sono fra loro congruenti.**

DEFINIZIONE Due figure sono **congruenti** se sono sovrapponibili punto a punto l'una sull'altra mediante un movimento rigido.

Per indicare la congruenza di due figure usiamo il simbolo $\cong$.

La congruenza ha le seguenti proprietà:

- Proprietà riflessiva: ogni figura è congruente a se stessa.
- Proprietà simmetrica: dalla congruenza tra la figura A e la figura B, si deduce la congruenza tra B e A.
- Proprietà transitiva: se la figura A è congruente a B e B è congruente a C, allora A è congruente a C.

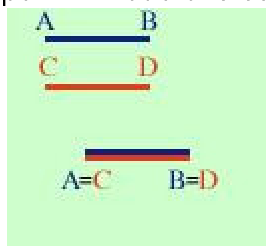
Pertanto, la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza, cioè una relazione su un insieme che gode delle tre proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva.

1.6.2 La lunghezza dei segmenti e l'ampiezza degli angoli

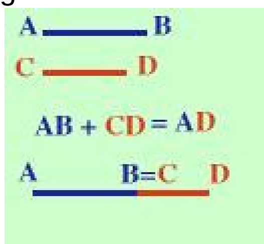
In particolare, la relazione di congruenza fra segmenti permette di ripartire l'insieme di tutti i segmenti del piano in classi di segmenti congruenti tra loro. La caratteristica comune ai segmenti appartenenti a una stessa classe si chiama **lunghezza**. Ogni classe, costituita da segmenti congruenti, individua una e una sola lunghezza. In altre parole due segmenti congruenti hanno lunghezza uguale.

> DEFINIZIONE Il **punto medio** di un segmento è quel suo punto che lo divide in due segmenti congruenti.
> Accetteremo come postulato che esiste sempre il punto medio di un segmento e che sia unico.

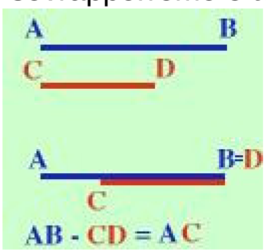
Secondo il postulato della congruenza diremo che due segmenti sono congruenti se, con un movimento rigido, e' possibile sovrapporli in modo che coincidano punto per punto.



Intuitivamente, per sommare due segmenti basterà metterli adiacenti.

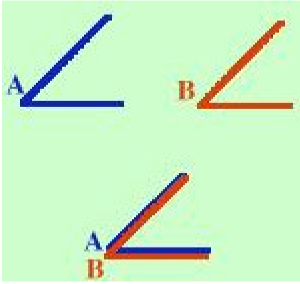


Per fare la differenza fra segmenti li sovrapporremo e toglieremo la parte comune

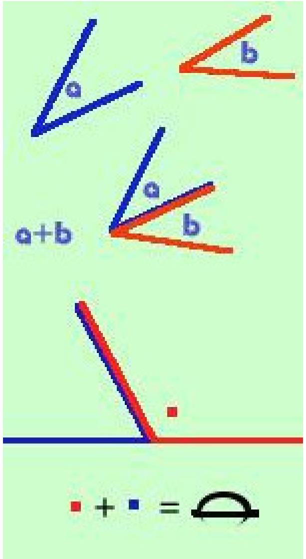


La relazione di congruenza fra angoli permette di ripartire l'insieme di tutti gli angoli del piano in classi di angoli congruenti tra loro. La caratteristica comune agli angoli appartenenti a una stessa classe si chiama **ampiezza**. Ogni classe, costituita da angoli congruenti, individua una e una sola ampiezza. In altre parole due angoli congruenti hanno ampiezza uguale.

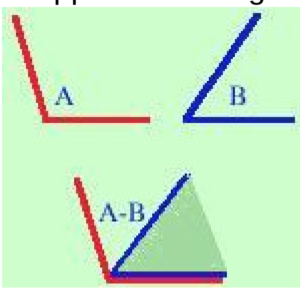
Secondo il postulato della congruenza diremo che due angoli sono congruenti se, con un movimento rigido, e' possibile sovrapporli in modo che coincidano punto per punto.



Intuitivamente, per sommare due angoli basterà metterli uno di seguito all'altro;



Per fare la differenza fra angoli li sovrapporremo e toglieremo la parte comune



DEFINIZIONE La **bisettrice** di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti.

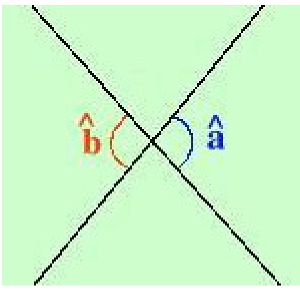
Anche per la bisettrice accetteremo, come postulato, che esiste per qualsiasi angolo e sia unica.

Vediamo ora di dimostrare il primo teorema:

TEOREMA Due angoli opposti al vertice sono congruenti

Nota didattica: si potrebbe abituare i ragazzi, ogni volta che si ha un teorema, a mettere l'enunciato nella forma **se... allora....** **Il** teorema in questione dunque diventerebbe:

Se due angoli sono opposti al vertice allora i due angoli sono congruenti



Ipotesi $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sono opposti al vertice.

Tesi $\hat{a} \cong \hat{b}$.

Dimostrazione

So che $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sono opposti al vertice. Se sommo l'angolo $\hat{a}$ con l'angolo $\hat{c}$ ottengo un angolo piatto.

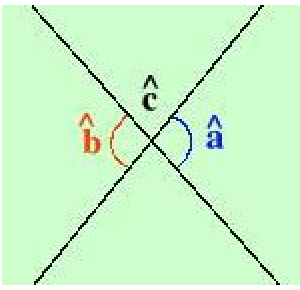
Anche se sommo l'angolo $\hat{b}$ con l'angolo $\hat{c}$ ottengo un angolo piatto.

Per la proprietà transitiva del postulato sulla congruenza, posso scrivere:

$$\hat{a} + \hat{c} \cong \hat{b} + \hat{c}$$

Se da due cose uguali tolgo la stessa cosa ottengo ancora cose uguali, allora tolgo ad entrambi i membri l'angolo $\hat{c}$ e ottengo:

$$\hat{a} \cong \hat{b}$$



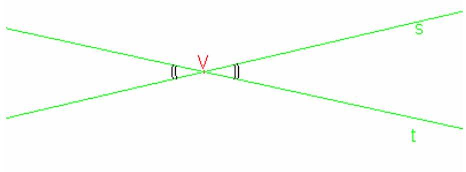
LABORATORIO DI MATEMATICA - Esercitazione guidata

Verifichiamo un teorema.

Gli angoli opposti al vertice sono congruenti.

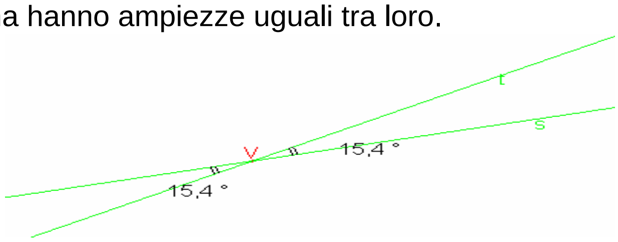
Costruiamo i due angoli

- Nella zona del disegno, con Punti_Punto, disegniamo un punto che chiamiamo V. possiamo farlo subito, battendo la lettera dalla tastiera, oppure in seguito utilizzando Visualizza_Nomi.
- Con Rette_Retta (*) applicato due volte tracciamo due rette che passano per V, che chiameremo s e t.
- Con Visualizza_Segna un angolo, segniamo uno dei quattro angoli che esse formano e il suo opposto al vertice.



Verifichiamo la tesi del teorema

- Con Misura_Misura dell'angolo determiniamo le loro ampiezze e notiamo che hanno lo stesso valore. Selezionato il puntatore, afferriamo, poi, una retta e la spostiamo. Osserviamo che essa continua a passare per il punto V (*) e che gli angoli variano, ma hanno ampiezze uguali tra loro.



Operiamo una costruzione

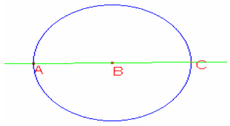
Dato un segmento AB, determiniamo un segmento BC adiacente e congruente a esso.

Costruiamo il segmento dato

- Con Rette_Segmento tracciamo il segmento AB e all'atto della costruzione diamo il nome ai suoi estremi.

Costruiamo il segmento richiesto

- Con Rette_Retta tracciamo la retta passante per A e per B. Usiamo lo strumento Curve_Circonferenza, facendo clic su B (Cabri chiede se è il centro), poi su A (Cabri chiede se AB è il raggio), confermiamo in entrambi casi con un clic e otteniamo la circonferenza.
- Con Punti_Intersezione di due oggetti applicato alla circonferenza e alla retta evidenziamo il punto che chiamiamo C.
- Con Rette_Segmento tracciamo il segmento BC(*).

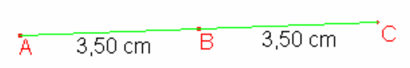


Concludiamo la costruzione

- Con Visualizza_Mostra/Nascondi nascondiamo, facendo clic su di loro, la circonferenza e la retta usate per la costruzione del segmento BC.

Verifichiamo il risultato

- Per controllo applichiamo lo strumento Misura_Distanza e lunghezza ai due segmenti e notiamo che hanno la stessa lunghezza.
- Afferriamo poi il punto B e lo spostiamo: i due segmenti variano, ma restano adiacenti e congruenti, come possiamo vedere dalle misure fornite da Cabri.



(*)Nonostante il carattere «tecnico» di questa attività vi sono alcuni spunti per la discussione; ne segnaliamo alcuni:

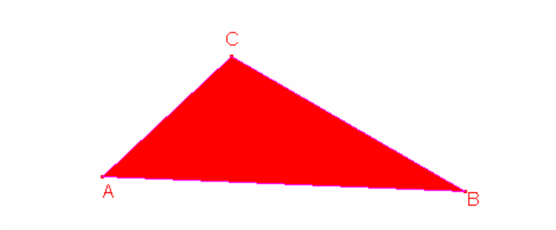
1. dati due punti distinti, esiste un'unica retta a cui essi appartengono;
2. muovendo uno dei due punti, si osserva che esistono infinite rette passanti per l'altro punto;
3. dati due punti distinti, esiste un unico segmento che li ha per estremi ed è contenuto nella retta a cui essi appartengono.

PARTE II: I TRIANGOLI

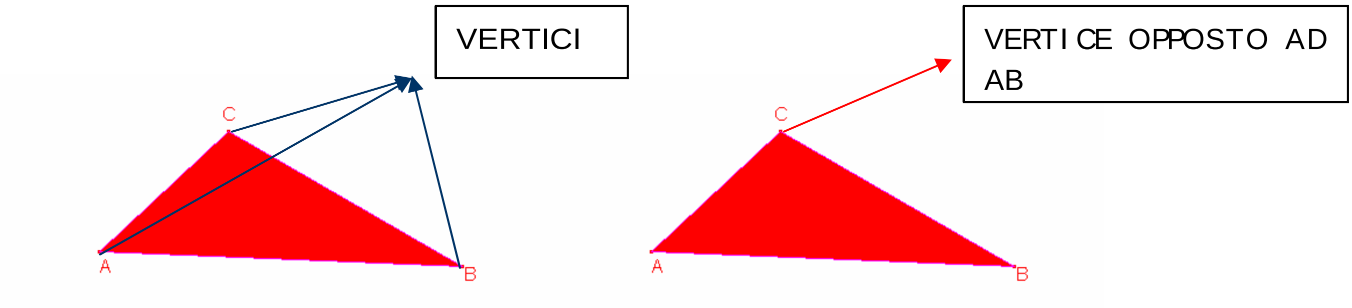
2.1 <u>Considerazioni generali sui triangoli</u>

<u>Nota didattica</u>: in questa lezione ci occuperemo principalmente di studiare la relazione di congruenza applicata ai triangoli, cioè ai poligoni di tre lati. Prima di entrare nel "vivo" della questione, introduciamo le prime definizioni.

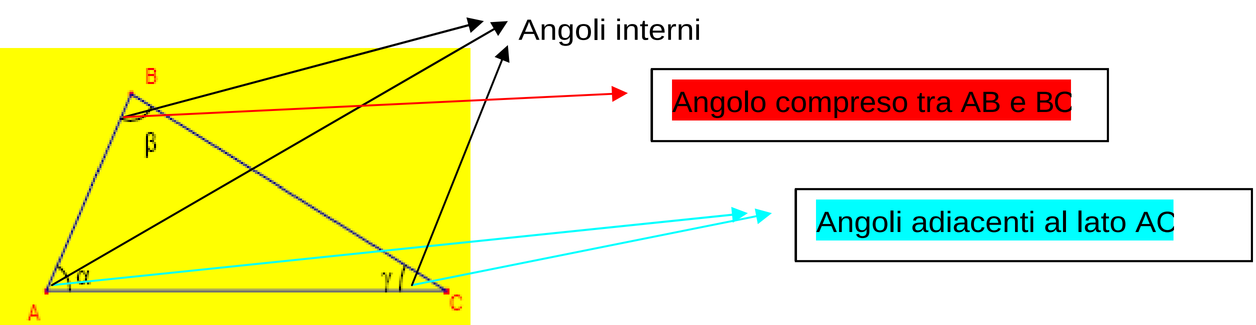
DEFINIZIONE: Un **triangolo** è l'insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa di tre lati e dai suoi punti interni.



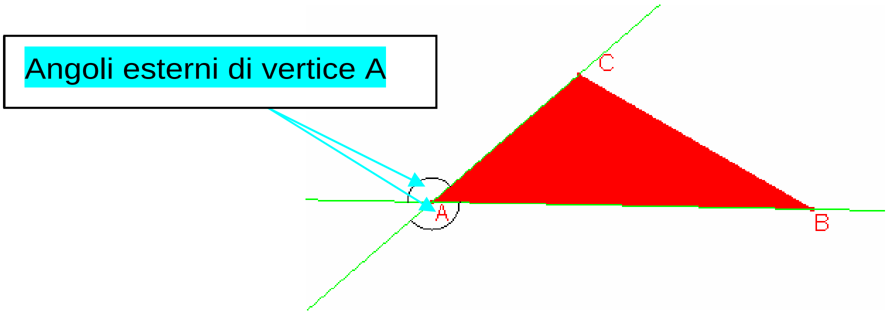
I punti estremi dei tre lati si chiamano **vertici** del triangolo.
Un vertice del triangolo viene detto **opposto** a un lato se non appartiene al lato.



Gli **angoli** individuati da ciascuna delle coppie dei lati del triangolo vengono detti angoli **interni** (o semplicemente **angoli**) di un triangolo e spesso si indicano utilizzando solo la lettera relativa al vertice (per esempio Â).
Essi hanno per vertice un vertice del triangolo e per lati le semirette che contengono i lati del triangolo.
Un angolo interno è **compreso fra due lati** quando i lati dell'angolo contengono i due lati del triangolo.
Un angolo interno è **adiacente a un lato** quando uno dei due lati dell'angolo contiene quel lato del triangolo.
Per ogni lato del triangolo ci sono due angoli adiacenti.



N.B. Un triangolo può anche essere definito come intersezione di tre angoli convessi che hanno i vertici in tre punti non allineati.
Gli **angoli esterni** di un triangolo sono quelli adiacenti agli angoli interni. Per ogni angolo interno di un triangolo ci sono due angoli esterni a esso corrispondenti.

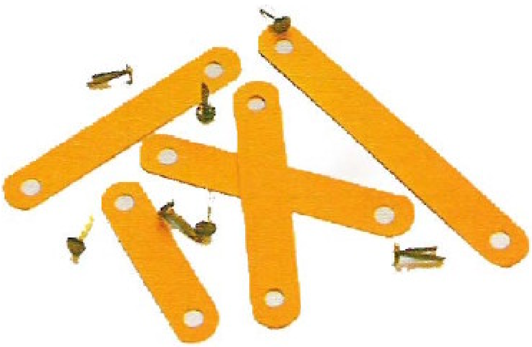


N. B. Per disegnare un angolo esterno occorre prolungare uno dei due lati del triangolo che individuano l'angolo interno. L'angolo esterno è quello compreso fra il prolungamento e l'altro lato.

QUESITO: **Il triangolo è la più semplice figura geometrica. Strutture a sezione triangolare sono frequenti nelle architetture di ogni epoca, grazie alla stabilità e alla facilità di realizzazione.**

Sapresti verificarlo? Cosa ne deduci?

Costruiamo un triangolo con delle barrette di cartone. Foriamo gli estremi delle barrette di cartone e fissiamoli con delle viti.



Appoggiamo il triangolo su un lato cercando di deformarlo: IMPOSSIBILE!!

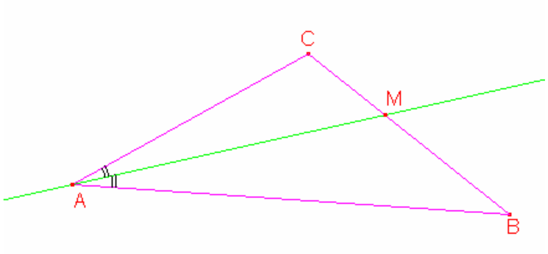
Operazioni con Cabri	Comandi utilizzati
1) disegnare tre punti che chiameremo A, B, C	• Punto • Nomi
2) disegnare il triangolo che ha per vertici i punti precedenti	• Retta_Triangolo

3) muovere a piacimento con il puntatore uno dei vertici	• Puntatore

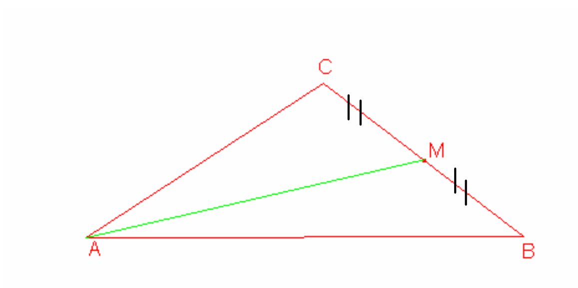
DUNQUE...per quanto proveremo, non riusciremo a deformarlo, esso non cambierà di forma.

Questa è una proprietà caratteristica del triangolo che viene definito una figura rigida o indeformabile. Questa proprietà viene sfruttata nelle costruzioni di ponti e tralicci, nei collegamenti di travi metalliche ecc. in quanto la figura rigida è capace di sopportare sforzi anche notevoli presentando maggiore resistenza alle diverse sollecitazioni a cui è esposta (forza del vento, carichi, terremoti ecc.).

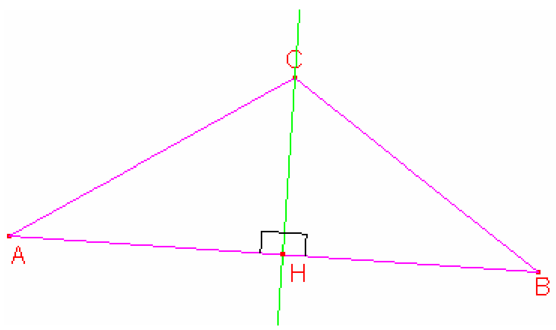
DEFINIZIONE: **Bisettrice relativa a un vertice** _ In un triangolo ABC, la bisettrice relativa al vertice A è il segmento costituito dai punti della bisettrice dell'angolo in A che sono anche punti del triangolo.



DEFINIZIONE: **Mediana relativa a un lato** _ In un triangolo ABC, la mediana relativa a un lato è il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice opposto a quel lato.



DEFINIZIONE: **Altezza relativa a un lato** _ In un triangolo ABC, l'altezza relativa a un lato è il segmento che, partendo dal vertice opposto al lato, incontra il lato steso (o il suo prolungamento) formando con esso due angoli retti.

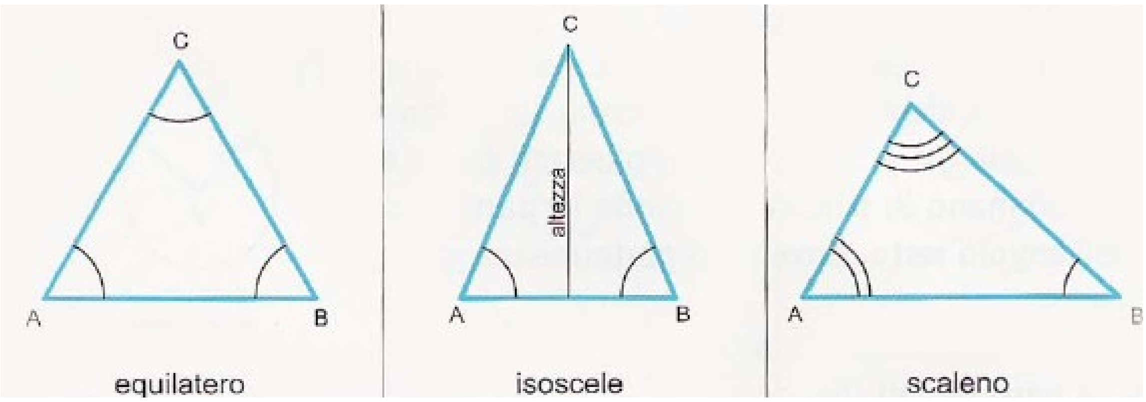


<u>Nota didattica</u>: spesso si pone l'attenzione su un lato e sulla relativa altezza. In questo caso si è soliti disegnare quel lato in posizione orizzontale e chiamarlo base.

Questo non deve far dimenticare che le **altezze di un triangolo**, così come le **bisettrici** e le **mediane**, **sono tre**. Sarà utile a tal proposito non disegnare un triangolo particolare e non limitarsi ad un unico esempio.

In base ai lati un triangolo può essere:

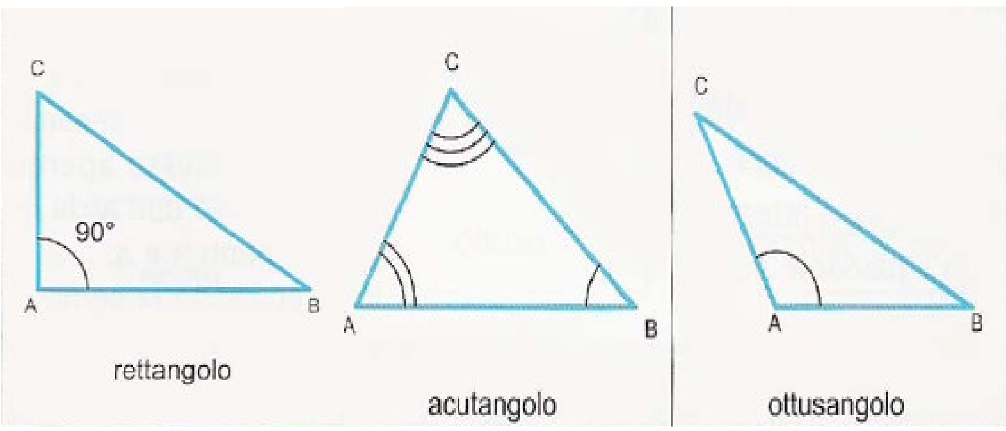
- **equilatero** se ha tre lati uguali;
- **isoscele** se ha due lati uguali;
- **scaleno** se non ha nessun lato uguale.



Nel triangolo isoscele ABC, con AC≅BC, il lato non congruente AB viene detto **base** e i due angoli a esso adiacenti $A\hat{B}C$ e $C\hat{A}B$ si chiamano **angoli alla base**. I lati congruenti, per la loro posizione rispetto alla base, vengono anche chiamati **lati obliqui**. Nel nostro caso si può anche dire: "Il triangolo isoscele di vertice C".

In base agli angoli un triangolo può essere:

- **rettangolo** se ha un angolo è retto;
- **acutangolo** se tutti gli angoli sono acuti;
- **ottusangolo** se un angolo è ottuso.



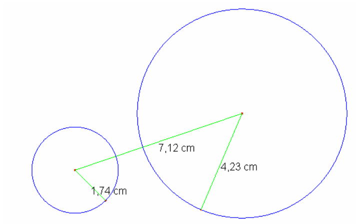
I due lati che formano l'angolo retto vengono chiamati **cateti**, il lato opposto all'angolo retto si chiama **ipotenusa**.

- Disegna un segmento e blocca i suoi estremi col comando Fissa/Libera.
- Disegna due circonferenze che non devono intersecarsi ed aventi centro negli estremi del segmento e raggio a piacere.
- Disegna due segmenti aventi per estremi ciascun centro e un punto della circonferenza.

Cosa puoi dire dei segmenti costruiti?......... per come sono stati costruiti, il segmento fisso è maggiore della somma degli altri due.

- Muovi come vuoi gli estremi liberi della spezzata.

Cosa accade?........ non si riesce mai a costruire un triangolo.

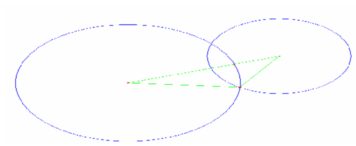


- Allarga ora le circonferenze facendole intersecare.

Cosa puoi dire sei segmenti costruiti?........ per come sono stati costruiti ogni segmento è minore della somma degli altri due.

- Muovi gli estremi liberi della spezzata.

Cosa accade?......... si riesce a costruire un triangolo.



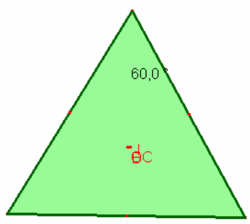
Hai dunque provato che condizione necessaria per costruire un triangolo è che ogni lato sa minore della somma degli altri due.

- Disegna un triangolo e misura i suoi angoli.
- Varia l'ampiezza dei suoi angoli per classificarlo.
- Disegna le tre altezze e chiama ORTOCENTRO il punto d'intersezione.
- Osserva l'ortocentro al variare degli angoli del triangolo.
- Disegna le tre mediane e osserva il BARICENTRO (il punto d'intersezione) al variare degli angoli.
- Disegna le tre bisettrici ed osserva l'INCENTRO (il punto d'intersezione) al variare degli angoli.
- Disegna i tre assi ed osserva il CIRCOCENTRO (il punto d'intersezione) al variare degli angoli.

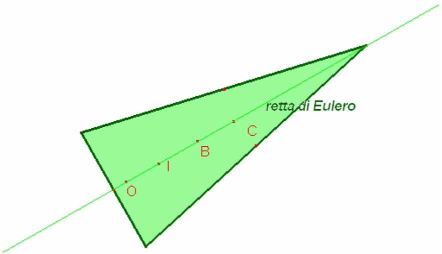
Cosa puoi osservare?.......completa la tabella

	ORTOCENTRO	BARICENTRO	INCENTRO	CIRCOCENTRO
ACUTANGOLO	interno	interno	interno	interno
RETTANGOLO	coincidente con il vertice	interno	interno	coincidente con il punto medio dell'ipotenusa
OTTUSANGOLO	esterno	interno	interno	esterno

E in un triangolo equilatero?......L'ortocentro, il baricentro, l'incentro e il circocentro coincidono.

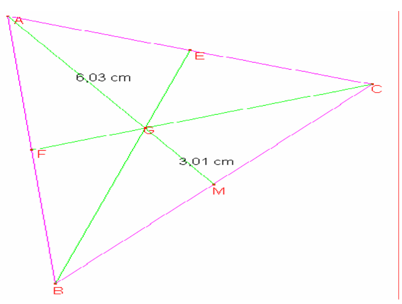


E in un triangolo isoscele?...... L'ortocentro, il baricentro, l'incentro e il circocentro sono allineati e disposti lungo quella che viene chiamata retta di Eulero.



- Misura la lunghezza di ciascun tratto in cui la mediana viene divisa dal baricentro.

Cosa noti?......... Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti di cui quella che ha come estremo il vertice è doppia dell'altra.



2.2 La congruenza dei triangoli

Nota didattica: ora che abbiamo introdotto la principale terminologia sui triangoli, possiamo tornare al problema di cui vogliamo occuparci: lo studio della relazione di congruenza nell'insieme dei triangoli. Il primo passo per iniziare il nostro percorso è precisare quando due triangoli si dicono congruenti.

DEFINIZIONE: Due triangoli si dicono **congruenti** se hanno ordinatamente congruenti i **tre lati** e i **tre angoli**.

La congruenza tra due triangoli viene dunque definita, come è naturale, tramite la congruenza dei lati e degli angoli. C'è però un particolare a cui devi prestare attenzione, l'avverbio "ordinatamente": esso sta ad indicare che le coppie di elementi congruenti non possono essere disposte casualmente. Infatti, lati congruenti devono essere opposti ad angoli congruenti e viceversa. Chiameremo corrispondenti gli angoli opposti o i lati opposti ad angoli congruenti.

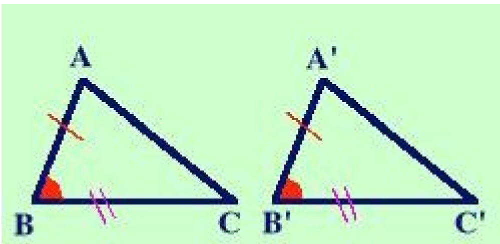
Per controllare se due triangoli sono congruenti, in base alla definizione precedente, dovremmo eseguire sei confronti: tra le coppie di angoli e tra le tre coppie di lati. È possibile semplificare il problema? Ovvero, è possibile stabilire delle condizioni "più economiche" che garantiscono la congruenza di due triangoli?

Come vedremo, la risposta è affermativa: è sufficiente controllare la congruenza di tre coppie di elementi, opportunamente scelti. Presta attenzione: non è detto che, in generale, la congruenza di tre coppie di elementi garantisca la congruenza dei triangoli; gli elementi devono essere scelti, appunto, opportunamente. Per esempio, se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre angoli, non è detto che siano congruenti.
Per affermare che due triangoli sono congruenti è necessario dimostrare che essi sono sovrapponibili punto a punto.

Tuttavia esistono tre criteri, noti come **criteri di congruenza dei triangoli**, che permettono di stabilire la congruenza in modo "più economico", confrontando fra loro coppie di lati e coppie di angoli e non tutte le coppie di punti che si possono individuare nei due triangoli.
Questi criteri mettono in relazione tre elementi del primo triangolo con i tre corrispondenti del secondo triangolo.

2.3 Il primo e il secondo criterio di congruenza dei triangoli

IL PRIMO CRITERIO: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono congruenti.



Ipotesi

1. $AB \cong A'B'$;

2. BC≅B'C';
3. $\beta \cong \beta'$.

Tesi ABC≅ A'B'C'.

Dimostrazione

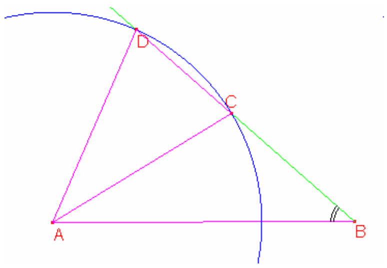
Muovendo (i movimenti sono rigidi!) A'B'C' in modo da sovrapporre il vertice A' al vertice A di ABC e poi facendo in modo che il lato A'B' si sovrapponga al lato AB, cosa osservi?
Osserviamo che:

- Il lato A'B' si sovrappone ad AB, per l'ipotesi 1, quindi A' si sovrappone ad A e B' a B;
- L'angolo β' si sovrappone all'angolo β, per l'ipotesi 3, quindi si sovrappongono le semirette che formano gli angoli di vertici B e B';
- Il lato B'C' coincide con BC, per l'ipotesi 2, quindi C' si sovrappone a C.

Poiché C è sovrapponibile a C' quando A si sovrappone a A', il segmento AC è congruente a A'C'. Con analoghe considerazioni si può affermare la sovrapposizione per gli angoli $B\hat{A}C$ e $B'\hat{A}'C'$ e per $A\hat{C}B$ e $A'\hat{C}'B'$.
Possiamo **concludere** che i triangoli ABC e A'B'C' sono stati sovrapposti, pertanto sono congruenti.

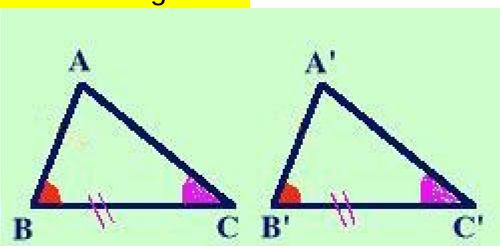
OSSERVAZIONE: Per esprimere il primo criterio di congruenza, la frase "due triangoli, aventi ordinatamente congruenti due lati e un angolo, sono congruenti" non è corretta, come si dimostra nell'esempio seguente.

Se l'angolo congruente non è quello compreso fra i lati congruenti, i due triangoli possono essere diversi.



Disegniamo il triangolo ABC e prolunghiamo il lato BC nella semiretta Bc, puntiamo il compasso in A con apertura AC e disegniamo un arco che interseca Bc in un secondo punto D.
I triangoli ABC e ABD hanno: il lato AB in comune; AC≅AD per costruzione; l'angolo β in comune.
L'angolo β non è l'angolo compreso fra AB e AC, e la figura mostra che ABC e ABD non sono congruenti.

IL SECONDO CRITERIO: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.



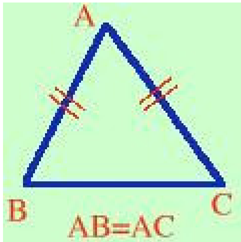
Ipotesi

1. $\delta \cong \delta'$
2. $\beta \cong \beta'$
3. BC $\cong$ B'C'.

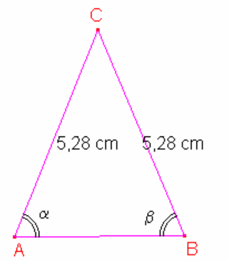
Tesi ABC $\cong$ A'B'C'.

2.4 <u>Le proprietà del triangolo isoscele</u>

TEOREMA DEL TRIANGOLO ISOSCELE: Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti.



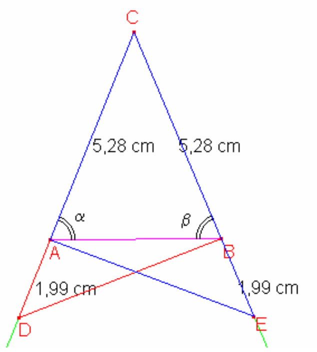
<u>Esercizio</u>: Come applicazione del primo criterio di congruenza dei triangoli, completa la dimostrazione de seguente teorema (inserendo una opportuna giustificazione quando compaiono i tre puntini).



Ipotesi AC $\cong$ BC.
Tesi $\alpha \cong \beta$**.**

Dimostrazione

Prolunghiamo i lati CA e CB, sui prolungamenti scegliamo due segmenti congruenti, BE $\cong$ AD.



Consideriamo i triangoli BCD e AEC. In essi:

- BC $\cong$ AC (per ipotesi)
- CD $\cong$ CE (per ipotesi e costruzione perché somma di segmenti congruenti)

- L'angolo di vertice C è in comune

I due triangoli sono quindi congruenti per il … primo criterio di congruenza.
BD ≅ AE
$C\hat{D}B \cong A\hat{E}C$
Consideriamo i triangoli ADB e AEB. In essi:

- AD ≅ BE (per costruzione)
- BD ≅ AE
- $A\hat{D}B \cong A\hat{E}B$ (perché… angoli corrispondenti di triangoli congruenti)

I due triangoli sono quindi congruenti per il … primo criterio di congruenza.
$D\hat{A}B \cong E\hat{B}A$
$C\hat{A}B \cong A\hat{B}C$ (perché … angoli supplementari di angoli congruenti).

Concludiamo che il triangolo isoscele ABC ha gli angoli alla base congruenti. La dimostrazione ha messo in evidenza che nel triangolo isoscele **gli angoli congruenti sono gli angoli alla base**.

L'INVERSO DEL TEOREMA DEL TRIANGOLO ISOSCELE
Se nel teorema del triangolo isoscele scambiamo l'ipotesi con la tesi, otteniamo il teorema inverso, di cui omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA: Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele.

Ipotesi $\alpha \cong \beta$.
Tesi AC ≅ BC**.**

I due teoremi precedenti si possono riassumere nel seguente modo.

TEOREMA: Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia isoscele è che abbia due angoli congruenti.

Condizione necessaria: Affinché si verifichi "una cosa", deve verificarsi (cioè è necessario che si verifichi) "una condizione". Per esempio, affinché "io possa avere la patente per guidare l'automobile", devo "essere maggiorenne". L'essere maggiorenne è condizione necessaria affinché io possa avere la patente. In altri termini, se non fossi maggiorenne, non potrei avere la patente.

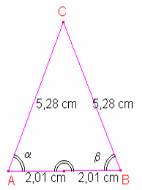
Condizione sufficiente: Affinché si verifichi "una cosa", basta (è sufficiente) che si verifichi "una condizione". Per esempio, affinché "io sia italiano", basta che "io sia abruzzese". L'essere abruzzese è condizione sufficiente affinché io sia italiano. In altri termini, se sono abruzzese, allora sono italiano.

Condizione necessaria e sufficiente: In generale, non è detto che una condizione necessaria sia anche sufficiente. Per esempio, perché una persona possa avere la patente, non basta che sia maggiorenne: deve anche aver superato l'esame.
Non è neppure detto che una condizione sufficiente sia anche necessaria. Per esempio, se sono italiano, non è detto che io sia abruzzese.
Può però capitare che una condizione sia insieme necessaria e sufficiente. Per esempio, "segnare più gol dell'avversario" è condizione necessaria e sufficiente per "vincere una partita

di calcio". Infatti per vincere una partita basta (è sufficiente) segnare più gol. D'altra parte, per vincere la partita si devono (è necessario) segnare più gol.

LA BISETTRICE DEL TRIANGOLO ISOSCELE

TEOREMA: Se un triangolo è isoscele, allora la bisettrice dell'angolo al vertice è anche l'altezza e mediana rispetto alla base.



Ipotesi

1. $AC \cong BC$;
2. CH è bisettrice dell'angolo $\hat{C}$.

Tesi

1. CH è altezza;
2. CH è mediana.

Dimostrazione

Immagina di "tagliare" il triangolo ABC lungo la bisettrice CH. Otterremo due triangoli AHC e HBC. La bisettrice di un angolo divide l'angolo in due parti congruenti, quindi $A\hat{C}H \cong H\hat{C}B$; indicheremo questi due angoli rispettivamente con δ e δ'.
Osserviamo che i triangoli AHC e HCB hanno:

- Il lato CH in comune;
- $AC \cong BC$ per l'ipotesi 1;
- $\delta \cong \delta'$ per l'ipotesi 2;

quindi, sono congruenti per il primo criterio.

In particolare:

- $AH \cong BH$, cioè H è punto medio di AB, pertanto CH è **mediana**;
- $A\hat{H}C \cong C\hat{H}B$.

$A\hat{H}C$ e $C\hat{H}B$ sono adiacenti, quindi supplementari, e quindi sono entrambi angoli retti. Pertanto la bisettrice CH è anche **altezza**.

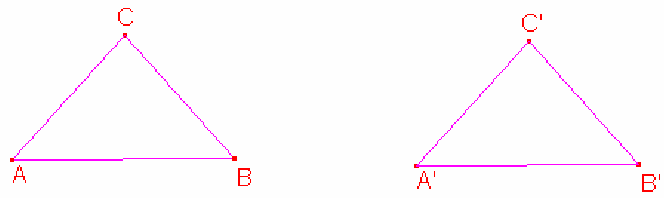
LE PROPRIETA' DEGLI ANGOLI DEL TRIANGOLO EQUILATERO

Poiché un triangolo equilatero può essere visto come isoscele su due basi diverse, dal teorema del triangolo isoscele si deduce la seguente proprietà.

COROLLARIO: Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero è che abbia tutti gli angoli congruenti.

2.5 <u>Il terzo criterio di congruenza dei triangoli</u>

IL TERZO CRITERIO: Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti i tre lati, allora sono congruenti



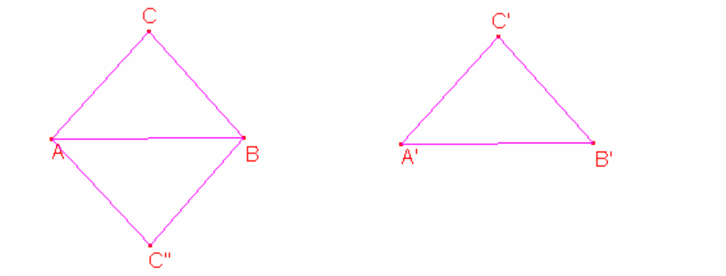
Il terzo criterio di congruenza permette di giustificare la costruzione di un angolo congruente a uno dato e la costruzione della bisettrice di un angolo.

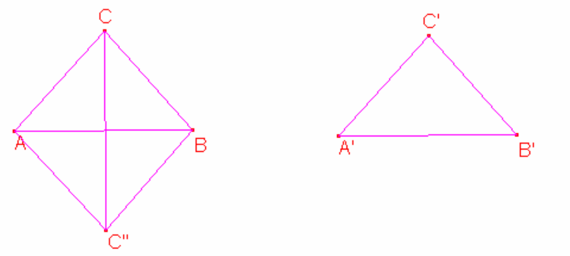
Ipotesi

1. AB ≅ A′B′;
2. BC ≅ B′C′;
3. AC ≅ A′C′.

Tesi ABC ≅ A′B′C′.

Dimostrazione





Disegniamo il triangolo ABC″ ≅ A′B′C′. Il triangolo ACC″ è isoscele sulla base CC″, perché AC ≅ A′C′ ≅ A′C″, quindi $A\hat{C}''C \cong A\hat{C}C''$, perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
Anche il triangolo C″BC è isoscele sulla base CC″, perché BC ≅ B′C′ ≅ B′C″, quindi $C''\hat{C}B \cong C\hat{C}''B$, in quanto anch'essi sono angoli alla base di un triangolo isoscele.
Sommando coppie di angoli congruenti, otteniamo ancora angoli congruenti, quindi $A\hat{C}''C + C\hat{C}''B \cong A\hat{C}C'' + C''\hat{C}B$, cioè $\hat{C} \cong \hat{C}''$.

I triangoli ABC e ABC″ hanno:

- $\hat{C} \cong \hat{C}''$ per la deduzione precedente;
- AC ≅ AC″ perché ACC″ è isoscele;
- BC ≅ BC″ perché BCC″ è isoscele;

pertanto sono congruenti per il primo criterio.
Essendo ABC″ ≅ A′B′C′ per costruzione, per la proprietà transitiva concludiamo che ABC ≅ A′B′C′.

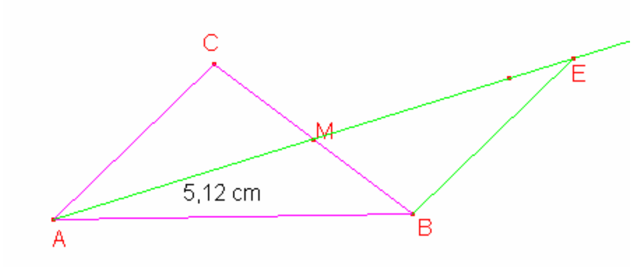
Abbiamo utilizzato 2 volte il teorema del triangolo isoscele e poi il primo criterio.
È possibile ripetere la costruzione e la dimostrazione anche nel caso in cui i due triangoli abbiano un angolo ottuso oppure un angolo retto.

2.6 Le disuguaglianze nei triangoli

IL TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO (MAGGIORE)
In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti ad esso.

Ipotesi ABC è un triangolo.
Tesi $\hat{B}_e \rangle \hat{A}$ e $\hat{B}_e \rangle \hat{C}$.

Dimostrazione



Disegniamo il punto medio M del lato BC e congiungiamo A con M e prolunghiamo il segmento AM di un segmento ME ≅ AM e infine congiungiamo E con B.
I triangoli AMC e BME hanno:

- BM ≅ MC per costruzione;
- AM ≅ ME per costruzione;
- Gli angoli $A\hat{M}C$ e $B\hat{M}E$ opposti al vertice per costruzione, quindi congruenti;

pertanto i triangoli sono congruenti per il primo criterio.

In particolare deduciamo che:

- $M\hat{B}E \cong \hat{C}$;
- Essendo la semiretta BE interna all'angolo $\hat{B}_e$, anche $M\hat{B}E$ è interno a $\hat{B}_e$,

quindi $M\hat{B}E \langle \hat{B}_e$.

Concludiamo che nel triangolo dato l'angolo esterno $\hat{B}_e$ è maggiore dell'angolo $\hat{C}$ interno.
Ripetendo la stessa costruzione a partire dal lato AB, anziché da BC, si dimostra xhe vale la disuguaglianza $\hat{B}_e \rangle \hat{A}$. Pertanto l'angolo esterno $\hat{B}_e$ risulta essere maggiore sia dell'angolo interno $\hat{A}$ sia dell'angolo interno $\hat{C}$.

Da questo teorema si deducono i tre seguenti corollari.

COROLLARI

a. La somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto.

Infatti, essendo $\hat{B}_e$ angolo esterno, esso è maggiore di $\hat{C}$, quindi $\hat{C} \langle \hat{B}_e$.
Aggiungendo ai due membri della disuguaglianza l'angolo interno $\hat{B}$, la disuguaglianza si conserva. Risulta che $\hat{C} + \hat{B} \langle \hat{B}_e + \hat{B}$. Poiché $\hat{B}_e + \hat{B} \cong \hat{P}$, aggiungiamo $\hat{C} + \hat{B} \langle \hat{P}$.

b. Un triangolo non può avere due (o più) angoli retti, né due (o più) angoli ottusi.

c. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti.

LA RELAZIONE FRA LATO MAGGIORE E ANGOLO MAGGIORE

In ogni triangolo, a lato maggiore si oppone angolo maggiore.

Ipotesi

1. ABC è un triangolo;
2. BC $\rangle$ AC.

Tesi $\hat{A}\rangle\hat{B}$.

Vale anche il teorema inverso del precedente.

TEOREMA: In ogni triangolo non equilatero, ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.

COROLLARIO

In ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascun cateto.

LE RELAZIONI FRA I LATI DI UN TRIANGOLO

In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Ipotesi

1. ABC è un triangolo;
2. AB $\geq$ BC.

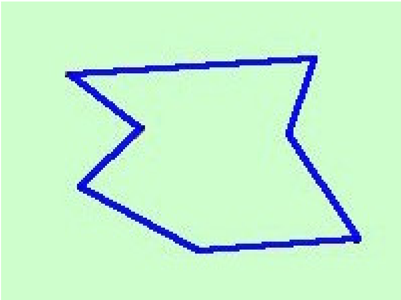
Tesi

1. AC $\langle$ AB+BC;
2. AC $\rangle$ AB-BC.

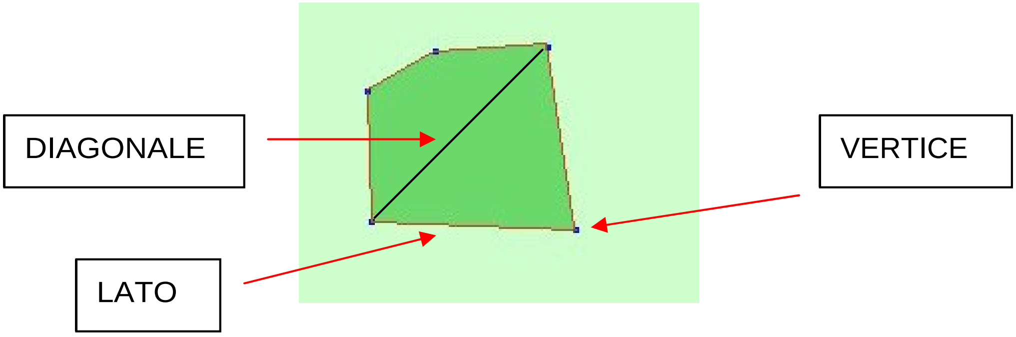
Le disuguaglianze di questo teorema di solito vengono chiamate **disuguaglianze triangolari**.

2.7 Che cosa sono i poligoni

DEFINIZIONE Un poligono è l'insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa non intrecciata e dai suoi punti interni.



Se confrontiamo la definizione di poligono con quella di triangolo, notiamo che ogni triangolo è un poligono avente tre lati. Ai poligoni sono estendibili le definizioni già date per il triangolo relative ai **vertici** e ai **lati**.



Mentre un triangolo è sempre una figura convessa, un poligono può essere **concavo** o **convesso**.

In seguito, se non ci sarà un riferimento esplicito, quando parleremo di un poligono intenderemo un poligono convesso.

Ai poligoni convessi sono estendibili anche le definizioni di **angolo interno** e **angolo esterno** date per i triangoli.

Si introduce inoltre il concetto di diagonale. Le **diagonali** di un poligono sono tutti i segmenti che hanno per estremi due vertici non appartenenti allo stesso lato.

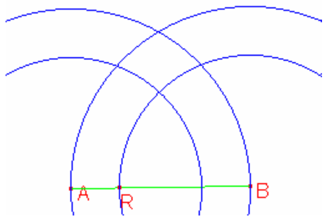
LABORATORIO DI MATEMATICA - Esercitazione guidata

Verifichiamo un teorema.

Se in un triangolo sono congruenti due angoli, lo sono anche i lati a loro opposti

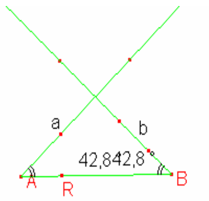
Costruiamo i due angoli congruenti

- Con Rette_Segmento tracciamo un segmento e diamo i nomi A e B ai suoi estremi.
- Con Curva_Circonferenza tracciamo la circonferenza con centro in A e raggio AB e la circonferenza con centro in B e raggio AB.
- Con Punti_Punto su un oggetto poniamo un punto R (a nostra scelta) su AB.
- Con Curva_Circonferenza tracciamo la circonferenza con centro in B e raggio BR.
- Con Costruisci_Compasso tracciamo una circonferenza con centro A e raggio congruente a RB.



Segniamo i due angoli

- Con Rette_Semiretta tracciamo la semiretta uscente da A e passante per il punto d'intersezione fra la circonferenza di centro A e raggio AB e quella di centro B e raggio BR e analogamente tracciamo la semiretta uscente da B e passante per l'intersezione fra la circonferenza con centro B e raggio AB e quella con centro A e raggio RB.
- Con Visualizza_Testo diamo i nomi, a e b, alle due semirette.
- Con Visualizza_Segna un angolo facciamo risaltare l'angolo $b\hat{B}A$ e poi l'angolo $a\hat{A}B$.
- Con Misura_Misura dell'angolo inseriamo le misure dei due angoli, che, data la costruzione, risultano congruenti.



Costruiamo il triangolo

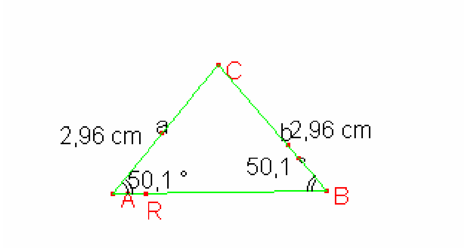
- Con Punti_Intersezione tra due oggetti evidenziamo l'intersezione, fra le semirette a e b, alla quale diamo il nome C.
- Con Disegna_Mostra/Nascondi nascondiamo le circonferenze servite per costruire gli angoli congruenti e le semirette a e b.
- Con Rette_Segmento tracciamo il lato AC e poi il lato BC.

Eseguiamo la verifica della tesi del teorema

- Con Misura_Distanza e lunghezza inseriamo le lunghezze dei lati AC e BC e notiamo che risultano le stesse.
- Compiamo un'altra verifica con lo strumento Verifica_Equidistanti? Applicato agli estremi dei due lati. Cabri manda il messaggio:<u>I punti sono equidistanti.</u>

Verifichiamo le ampiezze degli angoli

Per un ulteriore controllo afferriamo il punto R e lo spostiamo. Notiamo che le ampiezze dei due angoli variano, ma restano uguali fra loro, così come le misure dei due lati opposti AC e BC. Notiamo anche che nello spostamento di R il messaggio non cambia.



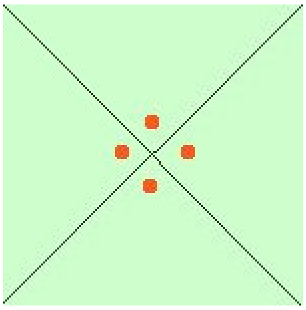
PARTE III: LE RETTE PERPENDICOLARI E PARALLELE, I PARALLELOGRAMMI E I TRAPEZI

3.1 Le rette perpendicolari

Abbiamo visto che per due punti passa una e una sola retta, di conseguenza se due rette hanno come intersezione due punti, allora coincidono. Pertanto due rette distinte possono intersecarsi in un solo punto.

Due rette che si intersecano in un solo punto si dicono **rette incidenti**.

DEFINIZIONE: RETTE PERPENDICOLARI Due rette incidenti sono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli retti.



Una definizione equivalente: due rette incidenti si dicono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli congruenti.

Due rette incidenti che non sono perpendicolari si dicono **oblique**.

IL TEOREMA DELL'ESISTENZA E DELL'UNICITA' DELLA PERPENDICOLARE

Per un punto del piano passa una e una sola retta perpendicolare a una retta data.

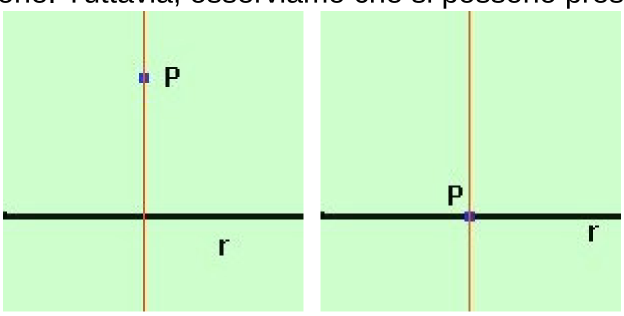
Ipotesi

1. P punto del piano;
2. r retta qualunque.

Tesi

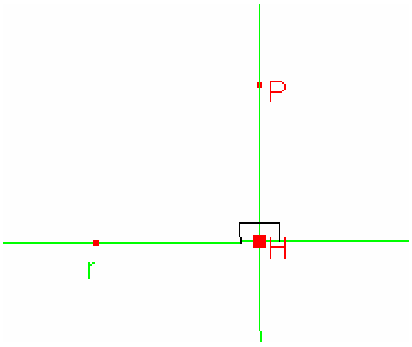
1. esiste una retta s perpendicolare a r passante per P;
2. la retta s è unica.

Omettiamo la dimostrazione. Tuttavia, osserviamo che si possono presentare due casi:

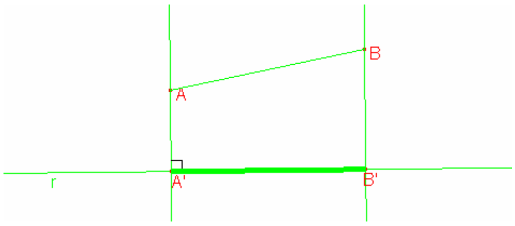


Il punto in cui la perpendicolare interseca la retta si chiama **piede della perpendicolare**.

LE PROIEZIONI ORTOGONALI DI UN PUNTO



La **proiezione ortogonale di un punto** su una retta è il piede della perpendicolare condotta da quel punto alla retta.



La **proiezione ortogonale di un segmento** su una retta è il segmento appartenente alla retta avente per estremi le proiezioni degli estremi del segmento dato.

QUESITO: **Se vuoi attraversare la strada, qual è il percorso minimo che puoi percorrere?**

LA DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

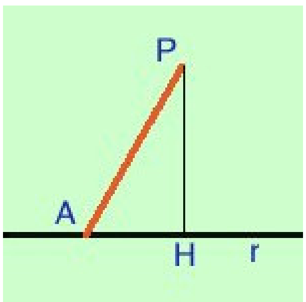
TEOREMA Il segmento perpendicolare condotto da un punto a una retta è minore di ogni segmento obliquo condotto dallo stesso punto alla stessa retta.

Ipotesi

1. PH perpendicolare a r;
2. PA obliqua.

Tesi PH 〈 PA.

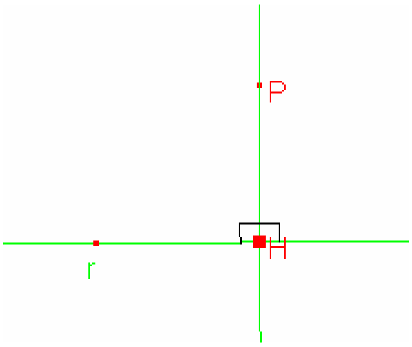
Dimostrazione



Il triangolo APH è rettangolo in H per l'ipotesi 1, quindi il cateto PH è minore dell'ipotenusa PA.

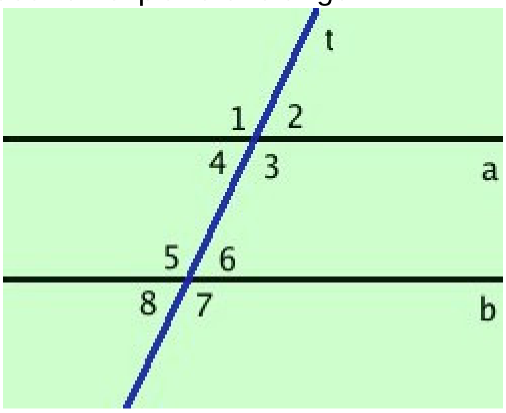
Il teorema precedente ci porta alla seguente definizione.

DEFINIZIONE: DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA La distanza di un punto da una retta è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.



3.2 Le rette tagliate da una trasversale

Consideriamo nel piano due rette a e b e una terza retta t detta **trasversale**, che interseca le prime due. Le tre rette individuano nel piano otto angoli.



Questi angoli vengono denominati a seconda della posizione che occupano rispetto alla trasversale e alle altre due rette. In particolare sono chiamati **interni** gli angoli compresi tra le due rette a e b, **esterni** gli altri.
Gli angoli **alterni** sono da parti opposte rispetto alla trasversale t ma entrambi interni o esterni.
Gli angoli **corrispondenti** sono dalla stessa parte della trasversale t, uno interno e l'altro esterno.
Gli angoli **coniugati** sono entrambi interni (o esterni) dalla stessa parte della trasversale t.

IN SINTESI:

Alterni $\begin{cases} interni: (4;6), (3;5); \\ esterni: (1;7), (2;8). \end{cases}$

Corrispondenti: (1;5), (2;6), (4;8), (3;7).

Coniugati $\begin{cases} interni: (4;5), (3;6); \\ esterni: (1;8), (2;7). \end{cases}$

3.3 Le rette parallele

DEFINIZIONE: LE RETTE PARALLELE Due rette sono parallele quando non hanno alcun punto in comune oppure coincidono.

Da questa definizione si deduce che la relazione di parallelismo fra rette è riflessiva:

$$a \mathbin{/\!/} a.$$

inoltre tale relazione è anche simmetrica, ossia.

se a // b allora b // a.

Consideriamo due rette parallele a e b.

La retta a risulta contenuta interamente in uno dei due semipiani individuati da b; indichiamo tale semipiano con β.

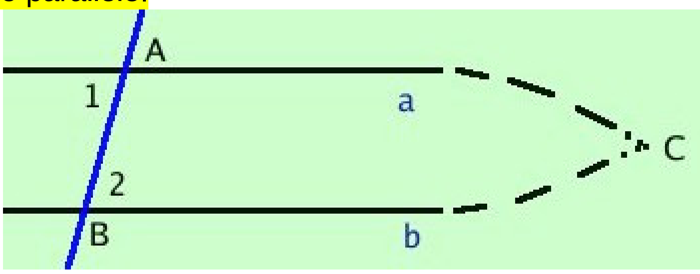
A sua volta la retta b risulta contenuta interamente in uno dei due semipiani individuati da a; indichiamo quest'altro semipiano con α.

L'intersezione fra i due semipiani α e β viene chiamata **striscia**.

Una striscia è una figura convessa poiché un qualunque segmento avente gli estremi all'interno della striscia giace interamente in ognuno dei semipiani e quindi anche all'interno della striscia stessa.

IL TEOREMA DELLE RETTE PARALLELE

Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.



Ipotesi $\alpha \cong \beta$. $(\alpha \equiv 1, \beta \equiv 2)$

Tesi $a \mathbin{/\!/} b$.

Dimostrazione (ragioniamo per assurdo)

Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette a e b non siano parallele ma si incontrino in un punto C.

Osservando il triangolo ABC e applicando a esso il teorema dell'angolo esterno a un triangolo, concludiamo che α è maggiore di β. Siamo giunti a contraddire l'ipotesi che diceva $\alpha \cong \beta$, dobbiamo quindi ritenere falsa la supposizione iniziale.

Allora a e b non possono intersecarsi, esse pertanto risultano parallele.

Più in generale, scriviamo il seguente **criterio per il parallelismo**.

TEOREMA Se due rette, incontrandone una terza,formano:

- Angoli alterni (interni o esterni) congruenti, oppure

- Angoli corrispondenti congruenti, oppure
- Angoli coniugati (interni o esterni) supplementari,

allora le due rette sono parallele.

COROLLARIO Due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele.
Infatti le due rette a e b formano con r angoli corrispondenti congruenti, in quanto sono retti, quindi le rette sono parallele.

LA PARALLELA PER UN PUNTO A UNA RETTA

QUESITO: **è sempre possibile tracciare una retta parallela ad una assegnata?**

L'**esistenza** di una parallela a una retta data e passante per un punto fissato è dovuta al fatto che è sempre possibile costruire una coppia di angoli alterni interni congruenti. Infatti, disegnato un angolo α, si può sempre costruire un angolo β, congruente ad α, alterno interno di α.

L'**unicità** della parallela per un punto a una retta data non si può invece dedurre dalle proprietà finora esaminate e deve essere accettata come postulato. Esso storicamente noto come il **quinto postulato di Euclide** o **postulato delle parallele**.

QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE Data una retta e un punto fuori di essa, è unica la retta passante per quel punto e parallela alla retta data.

OSSERVAZIONI: Il quinto postulato di Euclide fin dalla sua nascita fu guardato con sospetto dai matematici: infatti mentre per la perpendicolarità si può dimostrare che

per un punto si può mandare una sola perpendicolare ad una retta data

la stessa cosa non si riesce a fare per il parallelismo.
Ci furono vari tentativi (per più di duemila anni) per poterlo dimostrare, ma senza ottenere risultati, finché attorno al 1870 furono proposti vari modelli di geometrie in cui erano validi tutti i postulati eccetto quello delle parallele. Fu una rivoluzione, perchè mentre prima si pensava che la matematica derivasse dal mondo reale (e quindi i postulati fossero le basi del mondo reale) da quel momento in poi si svilupparono vari tipi di matematiche valide di per sé senza bisogno di collegamenti con il mondo reale stesso. Queste geometrie in cui sono validi tutti i postulati di Euclide, tranne il quinto, si chiamano, appunto, non euclidee.

L'INVERSO DEL TEOREMA DELLE RETTE PARALLELE
Se due rette sono parallele, formano con una qualunque trasversale due angoli interni congruenti.

Ipotesi r // s.
Tesi $\alpha \cong \beta$.
Nota didattica: potrebbe essere utile far comprendere ai ragazzi che le condizioni del teorema sono necessarie per il parallelismo. Quando le rette sono parallele, valgono tutte queste proprietà, che potranno utilizzare in altre dimostrazioni.

Più in generale, tenendo conto delle osservazioni fatte in precedenza, possiamo affermare che:

TEOREMA
Se due rette sono parallele, allora formano con una trasversale:

- Angoli alterni (interni o esterni) congruenti, e
- Angoli corrispondenti congruenti, e
- Angoli coniugati (interni o esterni) supplementari.

COROLLARIO 1 Date due rette parallele, se una retta è perpendicolare a una di esse, è perpendicolare anche all'altra.

COROLLARIO 2 Due rette perpendicolari a due rette incidenti sono anch'esse incidenti.

LA PROPRIETA' TRANSITIVA DEL PARALLELISMO DELLE RETTE
Enunciamo senza dimostrarlo il seguente teorema.
Due rette parallele a una terza retta sono parallele tra loro.
Ipotesi

1. a // r;
2. b // r.

Tesi a // b.

Dal teorema precedente si ricava che per le rette parallele vale la proprietà transitiva. Infatti, se è vero che a//b e b//c, le rette a e c sono entrambe parallele a b, quindi sono parallele fra loro, ossia a//c.

COROLLARIO Due rette a′ e b′, che siano rispettivamente parallele a due rette a e b incidenti, sono anch'esse incidenti.

Con ragionamenti analoghi a quelli utilizzati per la proprietà transitiva del parallelismo, si dimostra che, **date due rette parallele, se una terza retta incontra una delle due rette allora incontra anche l'altra**.

LE PROPRIETA' DEGLI ANGOLI CON I LATI PARALLELI
DEFINIZIONE In due angoli con i lati paralleli, si dicono concordi i lati che giacciono dalla stessa parte rispetto alla retta che congiunge i vertici. In caso contrario i lati si dicono discordi.

Si può dunque dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA Due angoli che hanno i lati paralleli possono essere congruenti o supplementari:

- sono congruenti se entrambi i lati paralleli sono concordi (oppure discordi);
- sono supplementari se due lati paralleli sono concordi e gli altri due discordi.

3.4 Le proprietà degli angoli dei poligoni

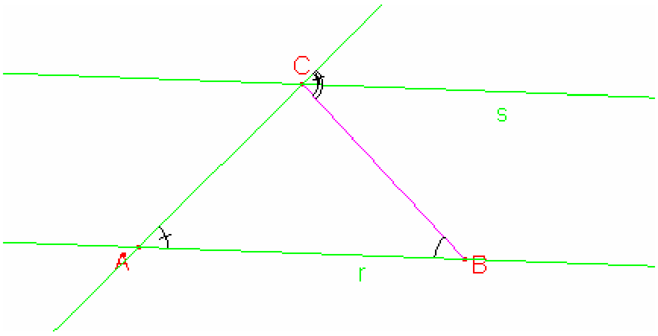
TEOREMA DELL'ANGOLO ESTRNO In un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.

Ipotesi

1. ABC è un triangolo;
2. $\hat{C}_e$ è l'angolo esterno di vertice C.

Tesi $\hat{C}_e \cong \hat{A} + \hat{B}$.

Dimostrazione



Disegniamo la retta s passante per C e parallela alla retta r che contiene AB. La retta s divide l'angolo $\hat{C}_e$ nei due angoli $\hat{C}_2$ e $\hat{C}_1$.

Gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}_1$ sono corrispondenti delle rette parallele r e s tagliate dalla trasversale AC, quindi essi sono congruenti per l'inverso del teorema delle rette parallele.
Gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}_2$ sono alterni interni delle stesse parallele tagliate dalla trasversale BC, quindi sono congruenti, ancora per l'inverso del teorema delle rette parallele.
Poiché $\hat{C}_e \cong \hat{C}_1 + \hat{C}_2$, $\hat{A} \cong \hat{C}_1$, $\hat{B} \cong \hat{C}_2$, possiamo dedurre che $\hat{C}_e \cong \hat{A} + \hat{B}$.

Da questo teorema consegue direttamente (poiché $\hat{C}_e \cong \hat{A} + \hat{B}$ e $\hat{C}_e$ è supplementare dell'angolo interno $\hat{C}$) che:

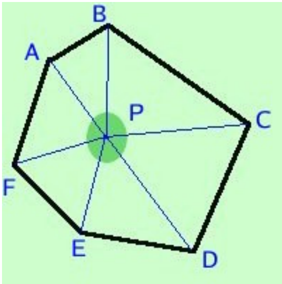
LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO
TEOREMA La somma degli angoli interni di un triangolo qualunque è congruente a un angolo piatto.

COROLLARIO 1 In ogni triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari.

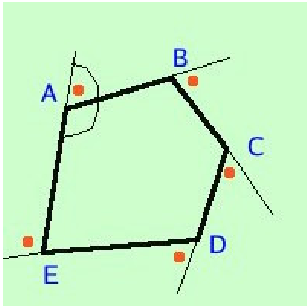
COROLLARIO 2 Ogni angolo di un triangolo equilatero è la terza parte di un angolo piatto.

COROLLARIO 3 Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli qualsiasi. (**SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI GENERALIZZATO**(*))
(*)In quanto non si richiede che gli angoli siano adiacenti al lato.

LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI DI UN POLIGONO CONVESSO
TEOREMA In un poligono convesso di n lati, la somma degli angoli interni è congruente a (n-2) angoli piatti.



LA SOMMA DEGLI ANGOLI ESTERNI DI UN POLIGONO CONVESSO
TEOREMA La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è congruente a un angolo giro.



QUESITO: **In particolare cosa succede se è un triangolo?**

Se il poligono è un triangolo, il teorema è ancora valido. In ogni triangolo la somma degli angoli esterni è congruente a un angolo giro.

QUESITO: **Prova a verificarlo usando CABRI.**

Attività: Il teorema della somma degli angoli esterni di un poligono convesso è collegato alla realtà in modo molto immediato.
Immagina un'aiuola pentagonale convessa e poi prova a pensare di camminare attorno ad essa, lungo il suo recinto.
Se parti da A, quando arrivi in B, per seguire il lato BC, devi cambiare direzione. Per fare ciò devi ruotare su te stesso di un angolo che è proprio l'angolo esterno di vertice B. Ogni angolo esterno rappresenta dunque il cambiamento di direzione necessario per seguire il percorso. Una volta tornato al punto di partenza, nella stessa posizione, cioè con direzione AB, hai ruotato complessivamente su te stesso di un angolo giro.

3.5 <u>I criteri di congruenza dei triangoli rettangoli</u>

OSSERVAZIONE: Se due triangoli sono rettangoli, hanno senz'altro l'angolo retto congruente, pertanto è più facile stabilire se sono congruenti. Basta infatti trovare, oltre all'angolo retto, altri due elementi che siano rispettivamente congruenti (e non tre, come avviene per i triangoli in genere).

QUESITO: **Alla luce di questa considerazione sapresti riscrivere i criteri di congruenza applicati ai triangoli rettangoli?**

- **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti. (I CRITERIO)**
- **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un cateto e un angolo acuto corrispondenti. (II CRITERIO)**
- **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'ipotenusa e un angolo acuto. (III CRITERIO)**

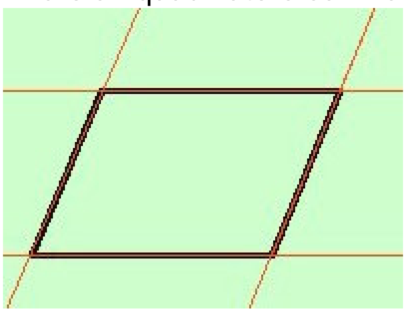
Si può inoltre dimostrare il seguente teorema:

- **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti l'ipotenusa e un cateto.**

Se due triangoli sono rettangoli ed hanno congruenti un lato ed un angolo allora i due triangoli sono congruenti

3.6 Il parallelogramma

DEFINIZIONE Un parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti paralleli.



LE PROPRIETA' DEI PARALLELOGRAMMI

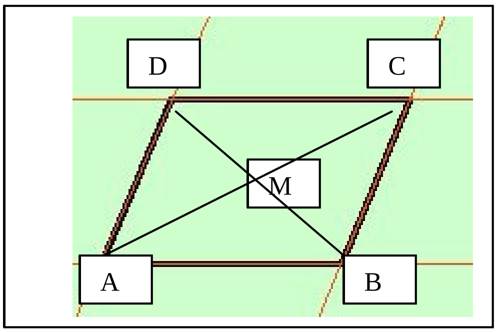
Esaminiamo cinque **condizioni necessarie** affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

TEOREMA

Condizione necessarie

Se un quadrilatero è un parallelogramma allora:

- ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
- i lati opposti sono congruenti;
- gli angoli opposti sono congruenti;
- gli angoli adiacenti a ogni lato sono supplementari;
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio.



Ipotesi ABCD è un parallelogramma.

Tesi

1. $ABD \cong BCD$ e $ABC \cong ACD$;
2. $AD \cong BC$ e $AB \cong CD$;
3. $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$;
4. $\hat{A} + \hat{B} \cong \hat{P}$ e $\hat{C} + \hat{D} \cong \hat{P}$;
5. $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$.

(M = punto di intersezione delle diagonali)

Dimostrazione

Dimostriamo la tesi 1

Nel parallelogramma ABCD tracciamo la diagonale BD. Gli angoli $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ sono alterni interni delle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD, quindi $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$.

Gli angoli $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$ sono alterni interni delle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD, quindi sono congruenti.

I triangoli ABD e BCD hanno:

- $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$;
- $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$;
- Il lato BD in comune;

quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.

Ragionando allo stesso modo con la diagonale AC deduciamo che anche i triangoli ACD e ABC sono congruenti.

Dimostriamo la tesi 2

Dalla congruenza dei triangoli ABD e BCD deduciamo che $AB \cong CD$ e $AD \cong BC$, pertanto i lati opposti del parallelogramma sono congruenti.

Dimostriamo la tesi 3

I triangoli ABD e BCD sono congruenti, quindi $\hat{A} \cong \hat{C}$.

Anche i triangoli ABC e ACD sono congruenti, quindi $\hat{B} \cong \hat{D}$.

Pertanto gli angoli opposti del parallelogramma sono congruenti.

Dimostriamo la tesi 4

Gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono coniugati interni delle rette parallele AD e BC, tagliate dalla trasversale AB, quindi sono supplementari.

Un ragionamento analogo vale anche per gli altri angoli adiacenti ai lati, che pertanto risultano supplementari.

Dimostriamo la tesi 5

Consideriamo i triangoli ABM e DCM.

Essi hanno:

- $AB \cong CD$ per la tesi 2;
- $B\hat{A}M \cong M\hat{C}D$, alterni interni delle parallele AB e DC tagliate dalla trasversale AC;
- $A\hat{B}M \cong M\hat{D}C$, per le stesse parallele tagliate dalla trasversale DB;

quindi sono congruenti per il secondo criterio.

In particolare, hanno $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$, perciò nel parallelogramma le diagonali si intersecano nel loro punto medio.

Vale inoltre il seguente **criterio per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma**. Esso fornisce quattro **condizioni sufficienti**, e indipendenti tra loro, affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

TEOREMA

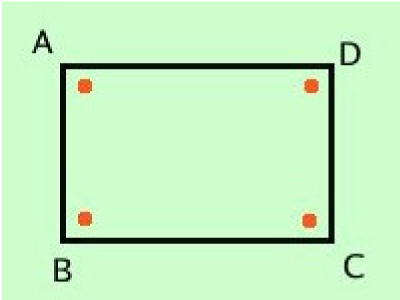
Se un quadrilatero convesso ha:

- I lati opposti congruenti, oppure
- Gli angoli opposti congruenti, oppure

- Le diagonali che si incontrano nel loro punto medio, oppure
- Due lati opposti congruenti e paralleli,

allora è in parallelogramma.

3.7 Il rettangolo, il rombo, il quadrato



DEFINIZIONE Un rettangolo è un parallelogramma con gli angoli congruenti.

Poiché gli angoli adiacenti a un lato di un parallelogramma sono supplementari, **ogni angolo di un rettangolo è un angolo retto**.

Di conseguenza per affermare che un parallelogramma è un rettangolo è sufficiente dimostrare che ha un angolo retto.

LE PROPRIETÀ DEL RETTANGOLO

TEOREMA Un rettangolo ha le diagonali congruenti.

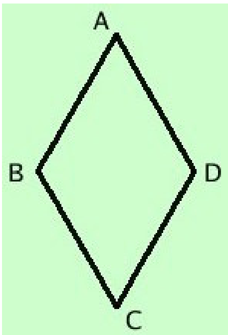
Il teorema è invertibile, cioè vale il seguente **criterio per stabilire se un parallelogramma è un rettangolo**.

TEOREMA Un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo.

LA DISTANZA FRA RETTE PARALLELE

Poiché si può dimostrare che, date due rette parallele, ogni punto di ciascuna retta ha la stesa distanza dall'altra, possiamo chiamare **distanza fra due rette parallele** la distanza di un qualsiasi punto di una retta dall'altra retta.

In un parallelogramma, preso un lato come base, l'**altezza** è la distanza fra il lato opposto alla base e la retta contenente la base.



DEFINIZIONE Un rombo è un parallelogramma con i lai congruenti.

Per il rombo sono valide tutte le proprietà del parallelogramma.

LE PROPRIETÀ DEL ROMBO

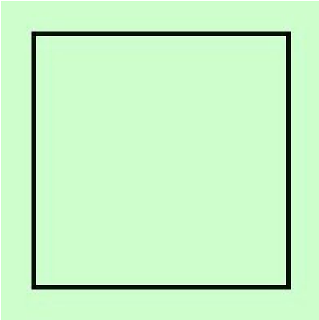
TEOREMA Un rombo ha le diagonali che sono perpendicolari fra di loro e bisettrici degli angoli.

Vale anche il seguente **criterio per stabilire se un parallelogramma è un rombo**.

TEOREMA
Se un parallelogramma ha:

- Le diagonali perpendicolari, oppure
- Le diagonali che sono bisettrici degli angoli,

allora è un rombo.



DEFINIZIONE Un quadrato è un parallelogramma con gli angoli e i lati congruenti.

LE PROPRIETÀ DEL QUADRATO
TEOREMA Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari e bisettrici degli angoli.

Vale inoltre il seguente **criterio per stabilire se u parallelogramma è un quadrato**.

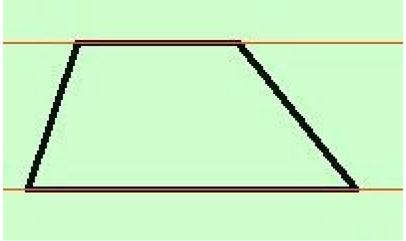
TEOREMA
Se un parallelogramma ha:

- Le diagonali congruenti e perpendicolari, oppure
- Le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo,

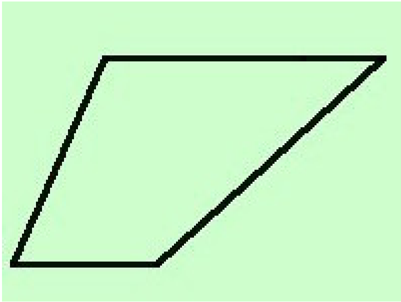
allora è un quadrato.

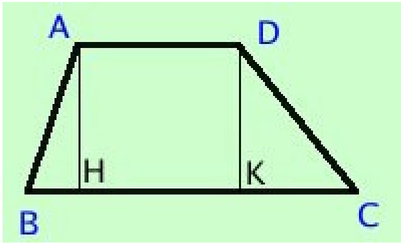
3.7 Il trapezio

DEFINIZIONE Un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli.

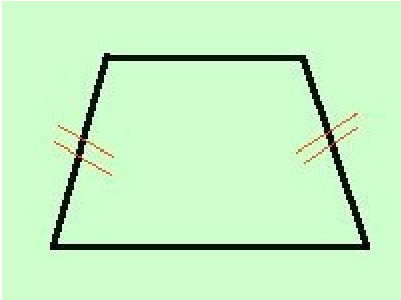


I due lati paralleli si chiamano **basi**; una è la **base maggiore**, l'altra la **base minore**. I due **lati obliqui**, non paralleli, vengono anche chiamati semplicemente **lati** del trapezio. La distanza fra le due basi è l'**altezza** del trapezio.

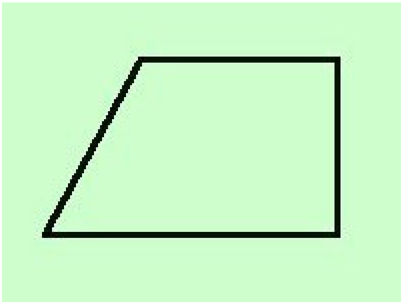




DEFINIZIONE Un trapezio isoscele è un trapezio che ha i lati obliqui congruenti.



DEFINIZIONE Un trapezio rettangolo è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alla base.



IL TEOREMA DEL TRAPEZIO ISOSCELE

In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.

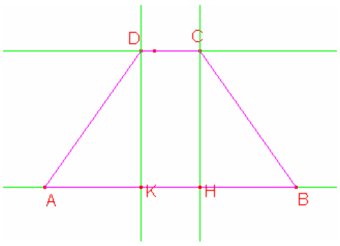
Ipotesi

1. ABCD è un trapezio;
2. $AD \cong BC$.

Tesi

1. $\hat{A} \cong \hat{B}$;
2. $\hat{C} \cong \hat{D}$.

Dimostrazione



Tracciamo le altezze CH e DK. Il quadrilatero KHCD ha, per costruzione, gli angoli retti, quindi è un rettangolo, pertanto possiamo scrivere $DK \cong CH$.

Osserviamo i triangoli rettangoli AKD e HBC. Essi hanno:

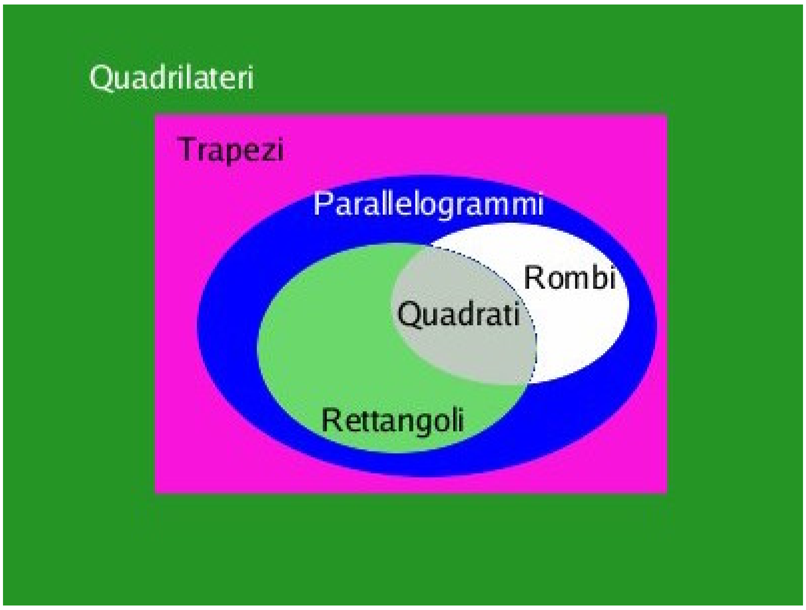
- $AD \cong BC$ per ipotesi;
- $DK \cong CH$ per la deduzione precedente;

quindi sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.
In particolare, sono congruenti gli angoli $\hat{A} e \hat{B}$.
L'angolo $\hat{D}$ è supplementare di $\hat{A}$ e l'angolo $\hat{C}$ è supplementare di $\hat{B}$, quindi i due angoli $\hat{C}$ e $\hat{D}$, supplementari di due angoli congruenti, sono congruenti.

COROLLARIO In un trapezio isoscele, gli angoli opposti sono supplementari.

L'INVERSO DEL TEOREMA DEL TRAPEZIO ISOSCELE
Se in un trapezio gli angoli adiacenti a una delle basi sono congruenti, il trapezio è isoscele.

E' possibile rappresentare graficamente la famiglia dei quadrilateri mediante la relazione di inclusione ricordando che un parallelogramma e' anche un trapezio e che un rombo e' un parallelogramma, eccetera.

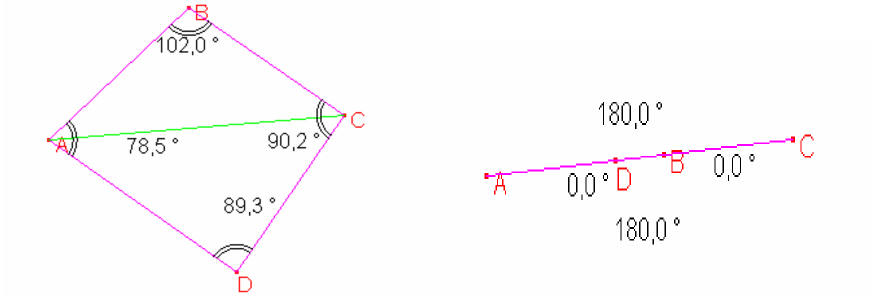


I quadrati sono contemporaneamente rettangoli e rombi quindi capitano nell'intersezione dell' insieme dei rettangoli con quello dei rombi.

- Disegna un quadrilatero, utilizzando il comando POLIGONO, e chiama A, B, C, D i quattro punti.
- Misura i suoi angoli e i suoi lati, utilizzando il comando Misura dell'angolo e Distanza e lunghezza
- Muovi ognuno dei quattro vertici ed osserva.

Nella costruzione di un quadrilatero qualunque non ci sono relazioni vincolanti tra i lati, gli angoli o le diagonali; pertanto durante la deformazione tutto può variare

- Traccia ora la diagonale AC e poi rappresenta la situazione limite in cui il quadrilatero ABCD è completamente schiacciato. Cosa puoi affermare?



La diagonale AC divide il quadrilatero in due triangoli che hanno ciascuno la somma degli angoli interni pari a 180°; pertanto il quadrilatero di partenza avrà la somma degli angoli interni pari a 360°.

LABORATORIO DI MATEMATICA - Esercitazione guidata

Verifichiamo una proprietà

Disegniamo un parallelogramma ABCD e le sue diagonali che s'incontrano in O. Consideriamo i punti E ed F (E su OB ed F su OD) in modo che $OE \cong OF$. Verifichiamo che i segmenti AE e CF sono congruenti.

Costruiamo il parallelogramma

- Disegniamo un parallelogramma generico, basandoci sulla definizione.
- Con Rette_Retta tracciamo due rette incidenti e con Costruisci_Retta parallela tracciamo due rette ad esse parallele.
- Con Punti_Intersezione di due oggetti segniamo i vertici del parallelogramma e assegniamo loro i nomi A, B, C e D.
- Con Rette_Segmento tracciamo i quattro lati del parallelogramma sovrapposti alle quattro rette.

Costruiamo il resto della figura

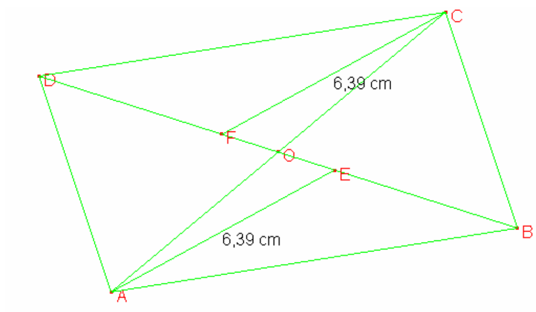
- Con Disegna_Mostra/Nascondi nascondiamo le rette usate per la costruzione del parallelogramma.
- Con Costruisci_Punto medio applicato ai punti B e D determiniamo il punto O.
- Con Rette_Segmento tracciamo i segmenti OB e OD (che formano la diagonale BD) e il segmento AC (l'altra diagonale).
- Con Punti_Punto su un oggetto evidenziamo sul segmento OB il punto E.
- Con Curve_Circonferenza tracciamo la circonferenza di centro O e raggio OE e con Punti_Intersezione di due oggetti segniamo il punto F, come intersezione fra la circonferenza e il segmento OD.

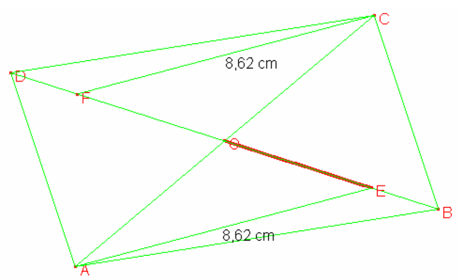
Verifichiamo la proprietà

- Nascondiamo la circonferenza con Disegna_Mostra/Nascondi.
- Con Rette_Segmento congiungiamo A con E e C con F. Con Misura_Distanza e lunghezza ricaviamo le misure dei segmenti AE e CF. Le misure sono uguali, a conferma della proprietà da verificare.

Analizziamo il disegno

- Attiviamo Visualizza_Animazione, quindi portiamo il puntatore sul punto E.
- Vediamo comparire una molla, che con il mouse tendiamo. Rilasciamo la molla e vediamo il punto E scorrere sul segmento OB.
- Vediamo il punto F e i segmenti AE e FC, vincolati per la costruzione a E, muoversi e le misure aggiornarsi rimanendo però sempre uguali fra loro. Fermiamo l'animazione con un clic.





VERIFICA SOMMATIVA

1. Che cos'è un assioma? Scegli la risposta esatta, fra le quattro proposte:
    a) Un termine che non viene definito
    b) Una proposizione che si assume vera senza darne una giustificazione
    c) Una proposizione che si deduce dai concetti primitivi
    d) Nessuna delle precedenti risposte è esatta

2. La frase "su una retta ci sono almeno due punti" costituisce:
    a) Una definizione
    b) Un postulato
    c) Un teorema
    d) Una proprietà
    e) Una osservazione

3. Trasforma nella forma "Se…, allora…" i seguenti enunciati.
    a) "Per essere promosso devo avere la sufficienza in tutte le materie"
    b) "Ogni corpo non vincolato cade verso il centro della Terra"
    c) "Toccando il fuoco ci si brucia"

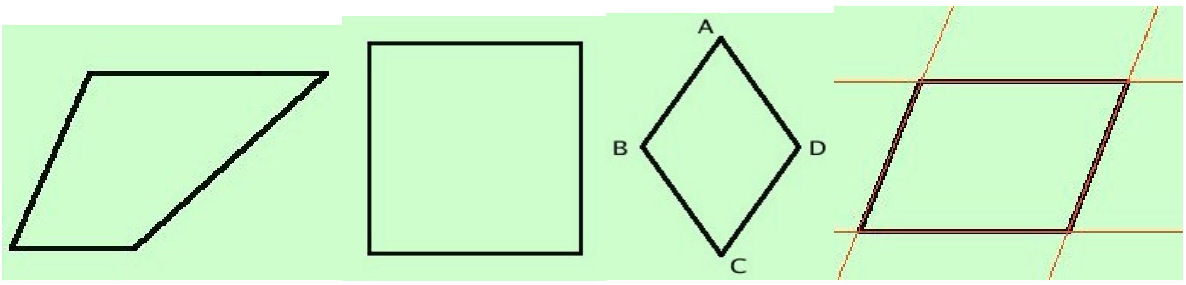
4. Dopo avere fissato su una retta un verso di percorrenza, rappresenta su di essa quattro punti A, B, C e D, in modo che A preceda C e B sia compreso tra C e D (rispetto all'ordine indotto dal verso di percorrenza)

5. Disegna un triangolo isoscele ABC di vertice A. Prolunga i lati AB e AC dalla parte di B e C di due segmenti congruenti rispettivamente BD e CE. Indica con M il punto medio della base BC. Unisci M con D e poi con E. Dimostra che i triangoli ADM e AEM sono congruenti.

6. In un triangolo rettangolo ABC, retto in $\hat{B}$, l'angolo $\hat{A}$ è la diciottesima parte di un angolo piatto. Quanto è l'angolo $\hat{C}$?

7. Traccia l'altezza CH relativa alla base maggiore AB di un trapezio isoscele ABCD: Prendi su AB un punto E tale che $EH \cong HB$. Dimostra che il quadrilatero AECD è un parallelogramma.

8. Riconosci fra i quadrilateri della figura i parallelogrammi.
   Per ogni parallelogramma della figura, disegna l'altezza relativa a un lato, scelto come base.



9. Sulla retta r disegniamo nell'ordine tre punti A, B, e C, e il punto medio M di BC.
Dimostriamo che $BM = \frac{AC - AB}{2}$.

n. esercizio	Punti attribuiti
1	**1**
2	**2**
3	**3 (1 per ogni risposta corretta)**
4	**2**
5	**9**
6	**4**
7	**11**
8	**4 (1 per ogni risposta corretta)**
9	**4**
TOT	**40**

Griglia di valutazione ottenuta con la proporzione che fa corrispondere al massimo punteggio 10.

0-4	5-8	9-12	13-17	18-21	22-26	27-30	31-34	35-38	39-40
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Bibliografia:

- TESTI SCOLASTICI

1. Bergamini M.; Trifone A.: CORSO BLU DI MATEMATICA, Zanichelli
2. G. Zwirner; I. Scaglianti; A. Brusamolin Mantovani: LE BASI DELLA MATEMATICA Volume primo Per il biennio delle scuole medie superiori, CEDAM
3. L. Sasso: MATEMATICA A COLORI, Petrini
4. W. Maraschini: IL NUOVO FORMAT, Paravia

Tutti i testi presentano più o meno la stessa suddivisione degli argomenti. Ad eccezione del 4° libro, in cui non vengono trattati i quadrilateri. Tutti presentano una ampia tipologia di esempi ed esercizi al termine di ogni argomento.

- QUADERNI DI CABRI P.L. Pezzini, M. Garetto TECNOLOGIE PER LA DIDATTICA CABRI