Percorso didattico di matematica

Equazioni lineari, Sistemi lineari
Piano Cartesiano
Retta nel Piano Cartesiano

EGISTO CASALI, ssis VIII° ciclo **a.a. 2007/2008**

21 gennaio 2008

1. Destinatari e Contenuti

Questo percorso didattico si rivolge a studenti del Liceo Scientifico di ordinamento.
Si articola in quattro unità didattiche:

- U.D. 1 *Equazioni lineari* , rivolto a studenti del primo anno
- U.D. 2 *Sistemi di equazioni lineari* , rivolto a studenti del secondo anno
- U.D. 3 *Piano cartesiano*, rivolto a studenti del terzo anno.
- U.D. 4 *Retta nel piano cartesiano*, rivolto a studenti del terzo anno.

2. Prerequisiti

U.D. 1
- Scomposizione di polinomi in fattori
- Calcolo algebrico con monomi, polinomi
- Frazioni algebriche
- Prodotti notevoli

U.D. 2
- Ridurre a forma normale equazioni
- Utilizzare il linguaggio degli insiemi
- Risoluzione di equazioni lineari

U.D. 3
- Teoria degli insiemi
- Calcolo algebrico
- Funzioni (primi elementi)
- Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado
- Geometria sintetica
- Valore assoluto

U.D. 4
- Teoria degli insiemi
- Geometria sintetica
- Calcolo algebrico
- Equazioni e disequazioni di primo grado
- Modulo o valore assoluto di una funzione
- Piano e coordinate cartesiane

3. Accertamento dei prerequisiti

Per la comprensione del seguente percorso didattico è indispensabile la conoscenza dei prerequisiti sopra elencati, il cui accertamento avverrà (in ognuna delle U.D.) mediante una verifica. Se necessario si provvederà quindi al recupero dei prerequisiti mancanti. Si cercherà comunque di richiamare concetti e proprietà ogni volta che questi verranno utilizzati.

4. Obiettivi

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, competenze e abilità previste dall'unità didattica
- Comprendere le finalità e acquisire la competenza del calcolo algebrico

- Condurre ad un appropriato utilizzo del linguaggio matematico
- Individuare la strategia di soluzione più adeguata di un problema, in base alle indicazioni ricevute
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico matematico
- Acquisizione e consapevolezza dei vari collegamenti logici che partono dai sistemi lineari
- Riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi
- Ampliare ulteriormente il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative
- Sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite
- Sviluppare la capacità di sistemare logicamente le conoscenze acquisite

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze

- Conoscere la classificazione e la risoluzione di equazioni di primo grado
- Riconoscere, impostare e risolvere problemi di primo grado
- Conoscere come si presenta un sistema lineare
- Conoscere la classificazione dei sistemi lineari
- Conoscere i metodi di risoluzione dei sistemi lineari
- Conoscere la definizione di coordinate cartesiane sulla retta
- Conoscere le relazioni tra segmenti di una retta
- Conoscere la definizione di punto medio di un segmento
- Conoscere la definizione di distanza fra due punti di una retta
- Conoscere la definizione di sistema di riferimento cartesiano
- Conoscere la definizione di distanza fra due punti nel piano
- Conoscere la definizione del punto medio di un segmento nel piano
- Conoscenza dell'equazione implicita ed esplicita della retta
- Conoscenza dei coefficienti m e q (rispettivamente pendenza ed intercetta)
- Conoscenza della condizione di parallelismo e di ortogonalità
- Conoscenza di fascio proprio ed improprio di rette
- Conoscenza dell'equazione che dà la distanza di un punto da una retta

Abilità

- Saper risolvere equazioni di primo grado intere e fratte
- Saper individuare le equazioni algebriche di rette, precisandone le caratteristiche
- Saper impostare e risolvere problemi di primo grado
- Classificare i sistemi di equazioni
- Risolvere un sistema di equazioni
- Rappresentare un sistema nel piano cartesiano
- Applicare il concetto di sistema lineare alla risoluzione di problemi
- Saper rappresentare nel piano prodotto cartesiano, intersezione e unione di insiemi

• Saper individuare le equazioni algebriche di rette precisandone le caratteristiche, riuscire a rappresentare tali equazioni in un riferimento cartesiano ortogonale
• Data una retta ed un punto O saper definire un riferimento (o un sistema di ascisse);
• Dati due punti sulla retta saper determinare la lunghezza algebrica del segmento ed il relativo punto medio.
• Dati due punti qualsiasi sulla retta saper determinare la distanza fra i punti;
• Saper disegnare un punto di coordinate date su un sistema di riferimento cartesiano ortogonale;
• Saper calcolare la distanza tra due punti qualsiasi e relativo punto medio su un sistema di riferimento cartesiano ortogonale;
• Saper disegnare le due bisettrici dei quadranti 1-3 e 2-4 rispettivamente;
• Saper individuare le caratteristiche di particolari punti quali segno delle coordinate in corrispondenza dei differenti quadranti, punti appartenenti a uno dei due assi e altri casi particolari;
• Essere in grado di applicare le conoscenze e le competenze acquisite anche i campi diversi, per esempio in fisica:
- Composizione dei vettori velocità;
- Scomposizione dei moti bidimensionali;
- Studio degli urti elastici;
• Saper ricavare l'equazione della retta
• Saper riconoscere l'equazione della retta
• Data l'equazione di una retta saper determinare la distanza di un punto dalla retta stessa
• Saper disegnare una retta nel piano cartesiano
• Essere in grado di determinare la condizione di perpendicolarità date l'equazioni di due rete
• Determinare l'equazione esplicita della retta
• Trovare un punto che soddisfi l'equazione della retta
• Riconoscere la condizione di parallelismo
• Essere in grado di applicare proprietà già note di geometria sintetica a contesti di geometria analitica
• Essere in grado di risolvere problemi di geometria dandone un'interpretazione analitica
• Essere in grado di applicare le conoscenze e le competenze acquisite nell'interpretazione dei grafici che descrivono sistemi fisici (moto uniformemente accelerato, moto rettilineo uniforme, moto costante).

5. Metodologie didattiche

Durante lo svolgimento delle lezioni si cercherà di richiamare i concetti fondamentali. Per fissare e chiarire il legame tra aspetti algebrici e di geometria analitica, oltre alle esercitazioni in classe, si utilizzeranno, nelle ore di laboratorio matematico il software Cabrì . Al termine di ogni lezione si fisseranno le nuove nozioni attraverso lo svolgimento di esercizi.

6. Materiali e strumenti utilizzati

• Lavagna e gessi
• Libro di testo
• Laboratorio di Matematica dotato di software Cabrì

7. Controllo dell'apprendimento

L'andamento e l'efficacia della metodologia didattica utilizzata vengono controllate attraverso verifiche formative, discussioni in classe, svolgimento di esercizi in classe e a casa e attraverso verifiche sommative.

8. Misurazione

La misurazione si attua attraverso:

- Verifica per l'accertamento dei prerequisiti
- Prove orali individuali
- Verifica sommativa

9. Griglia per la misurazione

Per determinare gli esiti della verifica sommativa attribuiamo ad ogni esercizio un punteggio.
La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia i livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze e abilità per svolgerli.
Il punteggio finale ottenuto sarà poi trasformato in voto seguendo la griglia per la valutazione decisa in collegio docenti della relativa scuola. (Dipartimento di matematica)
Eventualmente, si seguiranno due griglie differenti: una per il biennio ed una per il triennio.

10. Recupero

Affinché l'attività didattica risulti efficace e completa, si prevede di svolgere, eventualmente, attività di recupero così articolate:

- Recupero da effettuare in classe durante le ore curricolari, attraverso la ripresa dei concetti non ben compresi e lo svolgimento di esercizi riguardanti tali argomenti.
- Attività pomeridiane con studenti carenti
- Assegnazione al singolo studente di esercizi mirati, in modo da risolvere i suoi problemi e superare le sue difficoltà

Per individuare gli argomenti che necessitano di recupero, sia a livello collettivo sia a livello individuale, ci si avvarrà di tutti i tipi di verifica.

11. Tempi dell' intervento didattico

Per l' U.D. 1 sono previste 15 ore di lezione frontale più le ore dedicate ad esercizi in aula.
Per l' U.D. 2 sono previste 10 ore di lezione frontale più le ore dedicate ad esercizi.
Per l' U.D. 3 sono previste 10 ore di lezione frontale ed esercizi in aula.
Per l' U.D. 4 sono previste 15 ore di lezione frontale, esercizi e laboratorio.

Sono escluse dal computo le ore necessarie per l' effettuazione e la correzione/discussione della verifica sommativa. I tempi per il raggiungimento degli obiettivi prefissati dipenderanno anche dal livello di apprendimento raggiunto dagli allievi.

12. Bibliografia

" 3x2 Algebra 1 " *M.Scovenna, P.Bucchi, G.Fabbri, R.Silvestroni*. (CEDAM)
" Lineamenti di matematica " *N.Dodero, P.Baroncini, R.Manfredi*. (GHISETTI e CORVI)
" Oggetto Matematica " *P.Avanzini, P.Muri*. (GHISETTI e CORVI)
" Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica " *G.Zwirner*. (CEDAM)

Sviluppo dei contenuti

U.D. 1 : EQUAZIONI LINEARI

Dal problema all' equazione

Un problema è una proposizione con la quale, noti i valori di alcune grandezze (dati), si chiede di determinarne altri (valori incogniti), che abbiano con i dati determinate relazioni. Esempi:

a) Individuare il numero che addizionato a 21 dà come somma il doppio di 19.
b) La somma di tre numeri è 74; se il primo è il doppio del secondo e il terzo supera di 4 il secondo, quali sono i tre numeri?
c) Il perimetro di un rettangolo è 102 cm e l'altezza è 3/5 della base diminuiti di 17 cm. Calcolare l'area del rettangolo.
d) Il perimetro di un rettangolo è 102 cm e l'altezza è 3/5 della base diminuiti di 17 cm. Calcolare l'area del rettangolo.

Se esistono valori dell' incognita (o delle incognite) che verificano le condizioni imposte dal problema, questo si dice possibile ; questo valore (o tale insieme di valori) si dice soluzione del problema.
L' enunciato del problema pone sempre tra i dati e l' incognita un legame, cioè una relazione,che si può scrivere sotto forma di uguaglianza. E' proprio attraverso tale uguaglianza che avviene la ricerca dei valori incogniti del problema.
Sotto opportune condizioni, tale uguaglianza viene detta equazione, la quale ha come obiettivo naturale, quello di " guidarci " verso la soluzione del problema.

Uguaglianze tra espressioni

Si considerino le seguenti espressioni: $A = 6 - 2$ e $B = 3 + 1.$

Poiché sia la prima espressione sia la seconda rappresentano il numero $4,$ consegue che esse sono uguali e si scrive: $A = B.$ E' lecito scrivere allora: $6 - 2 = 3 + 1.$

Siano date le espressioni: $C = 7 - 2$ e $D = 8 - 4.$

La prima espressione rappresenta il numero 5 e la seconda il numero $4.$ Poiché le due espressioni non rappresentano la medesima entità, si dice che esse sono diverse e si scrive: $C \neq D.$ Quindi, si ha: $7 - 2 \neq 8 - 4.$

Siano date le espressioni letterali (polinomi):

$X(a) = a^2 - 3a$ e $Y(a) = a(a - 3),$

dove la lettera a rappresenta un generico numero reale.

I valori numerici rappresentati dalle due espressioni dipendono dai valori che sono attribuiti alla lettera $a.$

Difatti, per $a = 5,$ si ha:

$$X(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 = 25 - 15 = 10, \qquad Y(5) = 5 \cdot (5 - 3) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Si può scrivere, allora: $X(5) = Y(5)$.

Eseguendo la moltiplicazione nella seconda espressione, si ha:

$$Y(a) = a(a-3) = a^2 - 3a.$$

Come si vede, entrambe le espressioni rappresentano la medesima entità, perciò si può scrivere:

$$X(a) = Y(a), \qquad \text{ossia:}$$

$$a^2 - 3a = a(a-3). \qquad (1)$$

La (1) rappresenta un'uguaglianza sempre vera ossia indipendentemente dai valori numerici che siano attribuiti alla lettera a. Si dice che essa è un'uguaglianza incondizionata, la quale è denominata identità.

L'espressione scritta prima del segno di uguaglianza rappresenta il primo membro dell'identità, quella scritta dopo tale segno ne rappresenta il secondo membro.

Siano dati i seguenti polinomi di primo grado in m : $P(m) = 2m - 7$ e $Q(m) = m + 4$.

Per $m = 4$, si ha: $P(4) = 2 \cdot 4 - 7 = 8 - 7 = 1$, $Q(4) = 4 + 4 = 8$.

Si può scrivere: $P(4) \neq Q(4)$.

Per $m = 11$, si ha:

$$P(11) = 2 \cdot 11 - 7 = 22 - 7 = 15, \qquad Q(11) = 11 + 4 = 15.$$

Si può scrivere: $P(11) = Q(11)$.

Come si vedrà prossimamente, le due espressioni date rappresentano un'uguaglianza soltanto per $m = 11$.

Si può dire allora che $2m - 7 = m + 4$ è un'uguaglianza condizionata, la quale è denominata equazione.

Definizioni :

IDENTITA' :L ' identità è un' uguaglianza letterale verificata per qualsiasi valore attribuito alle lettere che vi compaiono.

EQUAZIONE :Un' equazione algebrica è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche che risulta verificata solo da particolari valori delle incognite in essa contenute.

Esempi di identità :

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
5. $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

Bisogna osservare, però, che esistono anche uguaglianze tra espressioni letterali che non sono verificate per alcun valore delle incognite in esse contenute. Tali uguaglianze vengono dette *impossibili* . Alcuni esempi :

1) $b^2 + 3 = 0$
2) $x - 5 = x + 5$

Equazioni. Classificazione

Data un' equazione, le lettere, dai valori delle quali dipende se l' uguaglianza è verificata o no, sono dette incognite (meglio ancora variabili).

Gli eventuali valori della variabile, che fanno assumere valori uguali ai due membri dell' equazione (ossia, la verificano),si dicono soluzioni, o radici dell' equazione.

L' insieme S di tutte le soluzioni si chiama insieme delle soluzioni.

Occorre a questo punto fare la seguente osservazione:

un' uguaglianza che può essere possibile in un certo insieme numerico, può essere impossibile in un insieme numerico diverso. Ad esempio, l' equazione :

$$2x + 1 = 5x - 3$$

è verificata per $x = \frac{4}{3}$, e per nessun altro valore di x .Però, se si vuole che x assuma soltanto valori *interi*, allora tale uguaglianza risulta impossibile nei *numeri interi*.

Questo esempio mette in luce che l' insieme delle soluzioni di un' equazione dipende dal dominio dei due membri dell' equazione; ciò è chiaro se si pensa che S deve essere un sottoinsieme di ciascuno dei domini delle espressioni.

In base a quanto detto, data l' equazione $A(x) = B(x)$ in cui la variabile è x , se D è il dominio comune delle espressioni A(x) e B(x) , in generale si ha :

$$S = \{ r \mid r \in D \quad \text{e} \quad A(r) = B(r) \}$$

D è detto dominio dell' equazione.

In questi termini, se :

$S \subset D$, l' equazione è determinata, (esempio, con $D = \square$, $x - 2 = 6 \Rightarrow S = \{8\}$)

$S = D$, l' equazione è un' identità, (esempio, con $D = \square$, $x^2 - x = x(x-1) \Rightarrow S = \square$)

$S = \varnothing$, l' equazione è impossibile (esempio, con $D = \square$, $x - 1 = x + 3 \Rightarrow S = \varnothing$)

Quando saranno consolidate le tecniche di risoluzione, è opportuno fornire esempi di equazioni le cui soluzioni sono di natura diversa in base al dominio scelto.

Un’equazione si dice algebrica se in essa compaiono soltanto operazioni di tipo algebrico: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, estrazione di radice.

Un’equazione algebrica si dice razionale se in essa non compaiono operazioni di estrazione di radice.

Un’equazione razionale si dice intera se la variabile non compare al denominatore di qualche frazione.

Un’equazione razionale si dice fratta se la variabile è presente nel denominatore di qualche frazione.

Un’ equazione si dice:

numerica, se oltre all’ incognita vi figurano solo numeri,

letterale, se contiene anche altre lettere da considerare costanti

Un’equazione algebrica intera si dice ridotta in forma normale se è del tipo $A(x)=0,$ dove il primo membro è rappresentato da un polinomio in cui è stata fatta la riduzione dei termini simili.

ESEMPI DI EQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE A UNA INCOGNITA RIDOTTE IN FORMA NORMALE

1. $3x-7=0;$
2. $4x^2-8x+1=0;$
3. $x^3-7x^2+4x+3=0;$
4. $x^6-x^2+5x-1=0;$

GRADO DI UNA EQUAZIONE ALGEBRICA INTERA CON UNA VARIABILE

Si dice grado di un’equazione algebrica con una incognita ridotta a forma normale il massimo esponente che l’incognita presenta nell’equazione.

Negli esempi precedenti, le equazioni sono rispettivamente di primo, secondo, terzo e sesto grado.

Si dimostra che il numero massimo delle radici di un’equazione algebrica è espresso dal grado dell’equazione.

Ad esempio:

- Un’equazione di primo grado ammette al massimo una radice.
- Un’equazione di secondo grado ammette al massimo due radici.
- Un’equazione di terzo grado ammette al massimo tre radici.

E così via.

La più generale equazione algebrica intera è rappresentata dall’espressione:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

dove $a_{0,}, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ sono numeri reali (coefficienti) e n è un numero naturale.

Per riconoscere il grado di un' equazione intera occorre ridurla a forma normale.

Alcune osservazioni:

- L' espressione $A(x)$,ridotta a forma normale o è ancora un polinomio nella variabile x , oppure è una costante (un numero).
- Se è una costante, e tale costante è nulla, l' equazione è chiaramente un' identità e tale è chiaramente anche l' equazione data.
- Se è una costante diversa da zero, l' equazione è evidentemente impossibile.
- Se invece è un polinomio nella variabile x , di grado maggiore o uguale ad uno, anche l' equazione $A(x) = 0$ è di grado maggiore o uguale ad uno.

Equazioni equivalenti

Due equazioni algebriche si dicono equivalenti se sono dello stesso grado e ammettono le stesse radici.

Ciò significa che due equazioni sono equivalenti se l' insieme S della prima equazione, coincide con l' insieme S della seconda equazione. E' ovvio quindi che, in tal caso, è indifferente risolvere l' una o l' altra, perché in ogni caso si trova sempre lo stesso insieme S.
Per risolvere un' equazione, si cerca di sostituirla con un' altra equivalente, ma di forma più semplice; reiterando tale ragionamento, applicando opportune trasformazioni,si arriverà a dover esaminare l' equazione equivalente alle precedenti della forma più semplice possibile, stabilendo se l' equazione di partenza (equivalente a quella trovata), è identica, impossibile, o determinata, e, in quest' ultimo caso, determinandone la soluzione.
E' quindi necessario conoscere le trasformazioni che permettono di sostituire un' equazione con un' altra equivalente.
Tali trasformazioni derivano da due teoremi detti Principi di equivalenza delle equazioni.

- *PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI*

Consideriamo l'equazione:

$$x + 7 = 14$$

il cui insieme soluzione soluzione è $S = \{7\}$.

Se addizioniamo ai due membri dell'equazione uno stesso numero, ad esempio 3 , otteniamo l'equazione

$$x + 7 + 3 = 14 + 3$$

il cui insieme soluzione soluzione è ancora $S = \{7\}$.

L'equazione ottenuta è quindi equivalente a quella di partenza.

Se sottraiamo ai due membri dell'equazione iniziale ($x + 7 = 14$) uno stesso numero, ad esempio 4 , otteniamo l'equazione:

$$x + 7 - 4 = 14 - 4$$

il cui insieme soluzione soluzione è ancora $S = \{7\}$.

L'equazione ottenuta è quindi equivalente a quella di partenza.

Anche se si addiziona o si sottrae un’espressione letterale ai due membri di un’equazione, si ottiene un’equazione equivalente a quella data.
Possiamo quindi enunciare la seguente regola, chiamata **primo principio di equivalenza delle equazioni:**
se si addiziona o si sottrae ai due membri di dominio D di un’equazione, uno stesso numero o una stessa espressione letterale, anch’ essa di dominio D, si ottiene un’equazione equivalente alla data.

E’ importante sottolineare il fatto che l’ espressione letterale che si aggiunge (o si toglie) ad ambo i membri dell’ equazione, deve avere lo stesso dominio dell’ equazione. In caso contrario le equazioni potrebbero non essere equivalenti.

Vediamo ora alcune conseguenze di questo principio:

TRASPORTO DEI TERMINI DA UN MEMBRO ALL’ALTRO DI UN’EQUAZIONE

Consideriamo l’equazione $4x + 14 = 6x$

Applicando il primo principio di equivalenza, sottraiamo ai due membri il numero 14 :

$4x + 14 – 14 = 6x – 14$

Eseguendo i calcoli otteniamo l’equazione equivalente

$4x = 6x – 14$

Confrontando quest’ultima equazione con quella di partenza, osserviamo che il termine noto + 14 è scomparso dal primo membro e compare nel secondo con il segno cambiato:

$4x + 14 = 6x \quad \rightarrow \quad 4x = 6x – 14$

Nello stesso modo possiamo semplificare ulteriormente l’equazione:

$$4x – 6x = – 14$$
$$– 2x = – 14$$

In generale vale **la regola del trasporto:**
in ogni equazione un termine qualsiasi può essere trasportato da un membro all’altro, purchè sia cambiato di segno. In questo modo si ottiene un’equazione equivalente a quella iniziale.

ELIMINAZIONE DEI TERMINI UGUALI NEI DUE MEMBRI DI UN’EQUAZIONE

Consideriamo l’equazione :

$6x – 10 = 4x – 10 + 2$

in cui compare il termine – 10 in entrambi i membri.
Applicando il primo principio di equivalenza**,** possiamo addizionare ai due membri l’opposto di – 10 cioè + 10 e otteniamo

$6x – 10 + 10 = 4x – 10 + 2 + 10$

Eseguiti i calcoli, l’eq. diventa:

6x = 4x + 2

Possiamo quindi notare che in quest' ultima equazione sono scomparsi i due termini uguali che comparivano nella prima (cioè i termini – 10).
In generale vale la regola:
se due termini uguali figurano uno nel primo membro, l'altro nel secondo membro di un'equazione, possono essere eliminati.
Osserviamo in questo caso la possibilità che vengano considerate, in conseguenza di tale procedimento,soluzioni che facciano perdere di significato ai termini dell' altra. Ad esempio:

$$x+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1} \quad \text{non è equivalente a} \quad x=1$$

in quanto la soluzione della seconda equazione fa perdere di significato al termine soppresso.

Riduzione a forma normale

Un' equazione può sempre essere ridotta ad un' altra equivalente, nella quale uno dei due termini sia zero.
Infatti, direttamente dal primo principio,

$$A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)-B(x)=B(x)-B(x) \Leftrightarrow A(x)-B(x)=0$$

• *SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI*

Considieriamo l'equazione:

$$x+7=14$$

il cui insieme soluzione soluzione è $S=\{7\}$.
Se moltiplichiamo i due membri dell'equazione per uno stesso numero ≠0, ad esempio 3 , otteniamo l'equazione

$$3x+21=42$$

il cui insieme soluzione soluzione è ancora $S=\{7\}$.
L'equazione ottenuta è quindi equivalente a quella di partenza.

Se dividiamo i due membri dell'equazione iniziale ($x+7=14$) per uno stesso numero ≠0, ad esempio 2 , otteniamo l'equazione:

$$\frac{x+7}{2}=\frac{14}{2}$$

il cui insieme soluzione soluzione è ancora $S=\{7\}$
L'equazione ottenuta è quindi equivalente a quella di partenza.

Consideriamo adesso l' equazione

$$2x-3=5$$

moltiplicando i due membri per x , diventa:

$$2x^2-3x=5x$$

Tali equazioni non sono equivalenti, perché la prima ha l' unica soluzione *x = 4* , mentre la seconda (si può vedere che..) ha le due soluzioni *x = 4* e *x = 0* .

Perciò, quando si moltiplicano i due membri per un fattore contenente la variabile , si possono introdurre delle soluzioni estranee. Occorre, in tal caso, discutere ogni soluzione dell' equazione risultante per escludere quelle estranee. Tali soluzioni sono quelle che annullano il termine moltiplicato, senza verificare l' equazione proposta.
Diventa necessaria la condizione che il termine moltiplicatore non si annulli, se si vuole ottenere un' equazione equivalente a quella data.

Il discorso è in un certo qual modo opposto, se si vuole dividere entrambi i membri di un' equazione per un termine *M(x)* contenente la variabile *x* . Per esempio, l' equazione:

$x^2-20=x$, dividendone i due membri per x + 4 , diventa

$$\frac{x^2-20}{x+4}=\frac{x}{x+4}\Rightarrow\frac{x^2-20-x}{x+4}=0\Rightarrow\frac{(x+4)(x-5)}{x+4}=0\Rightarrow x-5=0$$

Quest' ultima equazione ammette la soluzione x = 5 , che è anche la soluzione dell' equazione di partenza.
Però, l' equazione proposta ammette anche la soluzione x = - 4 , che è proprio la soluzione di x + 4 =0 , ottenuta uguagliando a zero il polinomio per cui sono stati divisi entrambi i membri.
L' equazione ottenuta non è equivalente a quella data.
Perciò, quando si dividono i due membri per un termine M(x) contenente la variabile, si possono sopprimere delle soluzioni dell' equazione di partenza, e precisamente quelle dell' equazione *M(x) = 0*. Occorre, in tal caso, aggiungere alle soluzioni dell' equazione trasformata, anche le eventuali soluzioni dell' equazione *M(x) = 0* che verificano anche l' equazione data.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema, chiamato **secondo principio di equivalenza delle equazioni:**
se si moltiplicano o si dividono i due membri di un'equazione $A(x)=B(x)$ *di dominio D per uno stesso numero diverso da zero, oppure per una stessa espressione algebrica M(x) , anch' essa di dominio D e che non si annulli mai (fatta salva l' osservazione precedente), si ottiene un'equazione equivalente alla data*.

Dal **secondo principio di equivalenza delle equazioni** derivano alcune importanti conseguenze.

Divisore comune

Se tutti i termini dei due membri dell' equazione sono divisibili per uno stesso numero, si può sostituire all' equazione data, quella equivalente, ottenuta dividendo tutti i termini per tale divisore comune.

Per esempio, poiché tutti itermini dell' equazione :

$$16x+12=4(x-3)-20$$

sono divisibili per 4 ,dividendo i due membri per 4 , si ottiene l' equazione equivalente :

$$4x+3=x-3-5$$

Eliminazione dei denominatori

Consideriamo l'equazione:

$$\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1x}{3}-\frac{1}{2}$$

Riduciamo i due membri dell'equazione allo stesso minimo comun denominatore:

$$\frac{8x+3}{12}=\frac{4x-6}{12}$$

Applicando il secondo principio di equivalenza possiamo moltiplicare entrambi i membri per il minimo comune denominatore (12) e poi semplifichiamo

$$12\cdot\frac{(8x+3)}{12}=\frac{(4x-6)}{12}\cdot 12$$

Otteniamo così l'equazione:

che è equivalente a quella di partenza ma priva di frazioni.
In generale:
un'equazione con coefficienti o termini noti frazionari si può trasformare in una equazione equivalente senza frazioni se si riducono i due membri al minimo comune denominatore e si moltiplicano poi per esso.

Cambio dei segni di un' equazione

Consideriamo l'equazione:

$$-10x-9x=7-26$$

Applicando il secondo principio d'equivalenza, moltiplichiamo per -1 i due membri :

$$(-1)\,(-10\,x\ -\ 9\,x)\ =\ (7\ -26)\,(-1)$$

otteniamo :

$$+10\,x\ +\ 9\,x\ =\ -\,7\ +\ 26$$

che è equivalente a quella iniziale.

In generale:
Se si cambia il segno a tutti i termini di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente alla data.

Osservazione : è importante rimarcare il fatto che le tecniche di calcolo viste, come il trasporto e l' eliminazione dei denominatori (e come tutte le altre) sono conseguenze dei principi di equivalenza delle equazioni.

Equazioni lineari

Un'equazione lineare (nella variabile *x*) è un'equazione che si riduce in forma normale ad un binomio di primo grado nella variabile x , uguagliato a zero :

$$Ax+B=0$$

dove A e B sono costanti. Le equazioni lineari si chiamano anche equazioni di primo grado**.**

A è detta *coefficiente dell' incognita*.
B è detta *termine noto*.

Esempi di equazioni lineari:

- $3x + 2 = x - 1$
- $x + 3 = x$
- $x - 1 = 0$

Data un' equazione lineare di dominio D=□ nella variabile x , $Ax + B = 0$ si ha che :

Se $A = 0$ e $B = 0$, allora S = □ (equazione identica). (1)

Se $A = 0$ e $B \neq 0$, allora $S = \{\ \}$ (non ammette soluzione). (2)

Se $A \neq 0$, allora $S = \{-B/A\}$ (ammette l'unica soluzione $x = -B/A$). (3)

Da ciò deduciamo inoltre che la soluzione di un'equazione lineare del tipo (3), di dominio □ , dove A e B sono numeri interi (e $A \neq 0$), è sempre un numero <u>razionale</u>.

A volte possiamo trasformare equazioni apparentemente “complicate” in equazioni lineari.

Esempio: Equazione data: $(x + 1)^2 = x^2 + 5$

Togliamo le parentesi al membro sinistro ed eseguiamo le trasformazioni indicate a fianco:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5 & \mid \ -x^2 \\ 2x + 1 = 5 & \mid \ -1 \\ 2x = 4 & \mid \ :2 \\ x = 2 & \end{array}$$

che ci dà la soluzione. I monomi x^2 sono stati eliminati e l'equazione si è rivelata lineare.

Alcuni esempi dei casi precedentemente illustrati, in cui supponiamo D=□ :
(in ogni passaggio, è stato applicato il principio di equivalenza appropriato)

- $2(x-2)-(5x-1)+6 = 3(2-x)+7x-1.$

Svolgendo i calcoli, si ha:

$$2x - 4 - 5x + 1 + 6 = 6 - 3x + 7x - 1.$$

Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha:

$$-3x + 3 = 4x + 5.$$

Separando i termini incogniti da quelli noti, si ha:

$$-3x - 4x = -3 + 5.$$

Riducendo i termini simili, si ha:

$$-7x = 2.$$

Moltiplicando entrambi i membri per -1, si ha:

$7x = -2.$

Da cui: $x = -\frac{2}{7}.$ $\qquad S = \left\{ -\frac{2}{7} \right\}$ (caso (3))

- $2(x-1) - 3 = x - (1-x) - 4.$

Svolgendo i calcoli, si ha:

$2x - 2 - 3 = x - 1 + x - 4.$

Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha:

$2x - 5 = 2x - 5.$

Come si vede, i due membri sono identici. Quindi l'equazione è indeterminata.

S = □ (caso (1))

- $3(x-1) + 2 = 2x - (5-x).$

Svolgendo i calcoli, si ha:

$3x - 3 + 2 = 2x - 5 + x.$

Riducendo i termini simili in entrambi i membri, si ha:

$3x - 1 = 3x - 5.$

Sottraendo $3x$ da entrambi i membri, si ha:

$-1 = -5.$ che è senza dubbio FALSO

L' equazione è impossibile .
Essa non è verificata da nessun valore che sia attribuito alla variabile x . $S = \varnothing$ (caso (2))

Osservazione : nel primo esempio, l' equazione è determinata, e l' insieme soluzione è

$$S = \left\{ -\frac{2}{7} \right\}.$$

Si dice anche che l' equazione è VERIFICATA per $x = -\frac{2}{7}.$ Questo perché è possibile

VERIFICARE che l' uguaglianza sia soddisfatta da tale valore, semplicemente andando a sostituire nell' equazione di partenza (o in una qualsiasi delle uguaglianze equivalenti) alla variabile x la soluzione da noi trovata. Se si arriva,svolgendo i calcoli, ad un' uguaglianza tra i due membri, l' equazione è *verificata* per tale valore, e la soluzione trovata è appropriata. In caso contrario, invece, l' equazione *non* è *verificata* per tale valore.

Equazioni frazionarie

Si ricorda che " un'equazione razionale si dice *fratta* se l'incognita è presente nel denominatore di qualche frazione ".
Facciamo verdere ora come la risoluzione di un' equazione frazionaria, si possa far dipendere dalla risoluzione di un' equazione intera.

In generale, un' equazione frazionaria si può presentare nella seguente forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$$

dove *A(x)* , *B(x)* , *C(x)* , *D(x)* sono polinomi nella variabile *x* e *B(x)* e *D(x)* non sono polinomi nulli ed almeno uno di loro non è costante.
Diciamo subito che :
se un' equazione frazionaria è determinata, nessuno dei valori della variabile che rendono nulli i denominatori può essere soluzione dell' equazione stessa.
Infatti per tali valori l' equazione perde significato.
Ad esempio, l' equazione :

$$\frac{x-9}{x-5} - 2 = \frac{5-x}{x-8}$$

nel caso che sia determinata, non può avere come soluzioni quei valori della *x* per i quali risulta:

$x-5=0$ e $x-8=0$, cioè i valori $x=5$ e $x=8$

Esclusi quindi tali valori per la variabile dall' insieme di definizione, si può, nel caso più generale, applicare il *secondo principio d' equivalenza*, come segue:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)D(x) = C(x)B(x)$$

eliminando dalle soluzioni di quest' ultima, quelle eventuali che rendono nullo il prodotto $B(x)D(x)$

Esempio.

$$\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{1}{x-1}$$

i numeratori si annullano per x = 1 , perciò $D = \{x \in R \mid x \neq 1\}$.
Adesso è possibile applicare il principio di equivalenza , moltiplicando entrambi i membri per *(x – 1)* , da cui si ottiene in seguito :

$$x-2x+2=1\,, \quad \text{ossia} \quad -x+2=1$$

e quindi si ha anche :

$$x=1$$

Poiché le equazioni considerate nei vari passaggi sono tutte equivalenti , $S^* = \{1\}$ è il loro insieme soluzione; ma esso non è l' insieme soluzione dell' equazione di partenza. Anzi, per quest' ultima l' insieme soluzione risulta essere $S = \varnothing$, cioè l' equazione data è *impossibile*.

Equazioni letterali

Finora si sono considerate solo equazioni a coefficienti numerici, in cui appunto non figurano altre lettere oltre alla variabile.
In un' equazione possono figurare, oltre alla variabile, altre lettere *a,b,c,d,….* dette *parametri* che si suppone rappresentino valori numerici noti.
In tal caso l' equazione assume una forma più generale,e diventa una particolare equazione numerica quando si assegna ad ogni lettera un determinato valore numerico.
Queste equazioni sono dette *equazioni letterali*.

Risolvere un' equazione letterale significa risolvere le infinite equazioni numeriche che essa rappresenta. Se l' equazione è *determinata* ed è di primo grado, la sua soluzione è in generale data da un' espressione contenente i parametri, ma può anche ridursi, in particolari casi, ad un numero determinato.

Anche queste equazioni si risolvono applicando le regole già esposte per le equazioni numeriche.

E' importante osservare che i valori numerici che le lettere possono assumere devono essere tali da non far perdere di significato a qualche termine dell' equazione.
Inoltre, può accadere che per particolari valori dei parametri, l' equazione risulti impossibile o identica; in tal caso occorre precisare i valori di tali parametri.
Fare queste osservazioni su di un' equazione, significa *discutere l' equazione*.

Facciamo qualche esempio :

- Risolviamo e discutiamo l' equazione :

$$ax - 2 = a - x$$

Applicando i principi di equivalenza e raccogliendo x si ha

$$ax + x = a + 2 \Leftrightarrow (a+1)x = a + 2$$

se $a + 1 \neq 0$ si possono dividere entrambi i membri per $a + 1$ e si ha

$$x = \frac{a+2}{a+1}$$

se $a + 1 = 0$, cioè se $a = -1$ l' equazione è impossibile, essendo

$$0 \cdot x = 1$$

- Risolviamo e discutiamo l' equazione :

$$\frac{m(2x-1)}{1-m} - 1 = \frac{m^2 x - m + 3}{1-m} + m$$

Prima di tutto occorre che sia $1-m\neq 0$ ossia $m\neq 1$. Sotto tale condizione possiamo moltiplicare entrambi i membri per $1-m$, ottenendo

$$m(2x-1)-(1-m)=m^2x-m+3+m(1-m)$$

da cui, eliminando le parentesi e facendo i calcoli, si ha

$$2mx-m^2x=4-m^2 \Leftrightarrow m(2-m)x=(2+m)(2-m)$$

osserviamo che :

se $m=0$ l' equazione è impossibile, avendo : $0\cdot x=4$
se $m=2$ l' equazione è identica , avendo : $0\cdot x=0$

se m è diverso da tutti i valori precedenti il prodotto $m(2-m)$ è diverso da zero, per cui si possono dividere entrambi i membri per tale quantità, ottenendo

$$x=\frac{2+m}{m}$$

e l' equazione risulta determinata.
Ricordiamo inoltre che se $m=1$ l' equazione perde di significato; quindi l' equazione precedente è determinata se e solo se $m\neq 0$, $m\neq 1$, $m\neq 2$.

Applicazioni

E' molto vasto il panorama applicativo delle equazioni lineari. Oltre alla risoluzione di problemi di primo grado (ed alla loro discussione), le equazioni lineari trovano utilizzo intenso nella fisica: in particolare, nell' ultima unità didattica sviluppata (terzo anno del liceo), verrà evidenziato il modo con il quale l' equazione lineare diventa uno strumento per indicare le relazioni tra grandezze fisiche della meccanica.
Soprattutto nel biennio, le equazioni di primo e secondo grado vengono spesso impiegate nella risoluzione di problemi di geometria piana.

U.D. 2 : SISTEMI LINEARI

EQUAZIONI CON PIU' VARIABILI.

Nell' Unità didattica precedente si è osservato come i problemi conducano a delle equazioni ad una variabile. Esistono problemi che portano a considerare equazioni a due o più variabili.

Esempi:

- Determinare due numeri sapendo che la loro somma è 7.
- Determinare due numeri sapendo che la loro differenza è 5.
- Determinare due numeri sapendo che la somma del quadrato del primo, e del secondo è 1 .
- Determinare tre numeri sapendo che la loro somma è 10.

Se indichiamo con x e y i numeri cercati nei primi tre esempi, e con x , y , z i tre numeri cercati nell' ultimo esempio, possiamo impostare l' equazione che ci permette di discutere l' esistenza e la ricerca di tali valori.

Prendiamo a titolo esemplificativo il primo problema.

L' equazione che occorre considerare è :

$$x + y = 7$$

Si tratta di un' equazione a due variabili la cui soluzione consiste nel determinare tutte le coppie di numeri che sostituiti alle incognite x, y trasformino l'uguaglianza data in una identità. In questo caso esistono infinite coppie di numeri che verificano l'equazione. Alcune di tali coppie sono:

$x = 5$ e $y = 2;$ Infatti: $5 + 2 = 7 \mapsto 7 = 7.$

$x = 4$ e $y = 3;$ Infatti: $4 + 3 = 7 \mapsto 7 = 7.$

$x = 10$ e $y = -3;$ Infatti: $10 + (-3) = 7 \mapsto 7 = 7.$

$x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{19}{3};$ Infatti: $\frac{2}{3} + \frac{19}{3} = 7 \mapsto \frac{21}{3} = 7 \mapsto 7 = 7.$

e così via.

L'equazione data è verificata da infinite coppie di numeri. Ha infatti infinite soluzioni.
Per determinare una soluzione particolare dell'equazione data, si può procedere nel modo seguente:

Si supponga di conoscere una delle due incognite. Si ponga, ad
Esempio, $x = 2.$
Sostituendo nell'equazione, si ha: $2 + y = 7$
Così facendo, si arriva ad un' equazione ad una variabile, la cui soluzione è $y = 5.$
Una soluzione dell'equazione data è rappresentata dalla coppia $x = 2$ e $y = 5.$

Tutte le coppie di numeri che riusciamo a trovare (infinite coppie) con tale semplice metodo, sono le soluzioni del problema.

Per risolvere l'equazione: $x + y + z = 10$ che traduce il problema dell' ultimo esempio, si procede nello stesso modo; valgono per essa le stesse considerazioni dell' esempio precedente :

si tratta di un' equazione a tre variabili, la cui soluzione consiste nel determinare tutte le terne di numeri che la verificano.

Definizione

Date due espressioni algebriche A e B ,delle quali almeno una contenga almeno due lettere, dette *variabili*, si dice *equazione in più variabili* , l' uguaglianza :

$$A = B$$

scritta allo scopo di stabilire se esistono valori delle variabili per le quali le due espressioni assumono lo stesso valore, e di determinare tali valori nel caso che esistano.

Le eventuali coppie ordinate di valori delle variabili, che fanno assumere valori uguali ai membri dell' equazione, si dicono soluzioni dell' equazione.
L' insieme S di tutte le soluzioni si chiama insieme delle soluzioni.

Un'equazione si dice algebrica se in essa compaiono soltanto operazioni di tipo algebrico: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, estrazione di radice.

Un'equazione algebrica si dice razionale se in essa non compaiono operazioni di estrazione di radice.

Un'equazione razionale si dice intera se le variabili non compaiono al denominatore di qualche frazione.

Un'equazione razionale si dice fratta se almeno un'incognita è presente nel denominatore di qualche frazione.

Un' equazione,rispetto ai coefficienti, si dice:

numerica, se oltre alle incognite vi figurano solo numeri,

letterale, se contiene anche altre lettere da considerare costanti

Anche per le equazioni in due variabili valgono i principi di equivalenza già considerati per le equazioni in una variabile.
In base a tali principi, si può ottenere un' equazione del tipo $P(x, y) = 0$ dove P(x,y) è un polinomio nelle variabili x e y ,a coefficienti interi e ridotto a forma normale.

In tal caso l' equazione si dice ridotta a forma normale.
Il grado di P(x,y) si dice grado dell' equazione.

Esempio :
l' equazione $3xy - x^2 = 3x^2 - y^2 + 1$ ridotta a forma normale è $4x^2 - y^2 - 3xy + 1 = 0$
ed è di 2° grado.

Equazioni algebriche lineari in due variabili

Un' equazione lineare ridotta a forma normale, si può scrivere

$$ax + by = c$$

dove a,b,c sono tre numeri dati.

Osserviamo subito che:

- se abbiamo $0x + 0y = c$ con $c \neq 0$, allora è <u>impossibile</u>
- se abbiamo $0x + 0y = 0$ allora è un' <u>identità</u>.

Negli altri casi, un' equazione di questo tipo è verificata da infinite coppie ordinate di numeri. Tali coppie rappresentano le <u>infinite soluzioni</u> dell' equazione . Nel nostro esempio iniziale

$$x + y = 7$$

si può scrivere $S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \,,\quad x + y = 7\}$.

Osserviamo che l' equazione $x + y = 7$, pur ammettendo infinite soluzioni, non è un' identità. Essa non è verificata da tutte le possibili coppie di numeri, ma solo da quelle per le quali la somma di tali numeri dà come risultato 7. Una tale equazione è detta <u>indeterminata</u>.

Sistemi di due equazioni in due variabili

Se consideriamo una coppia di equazioni nelle stesse variabili,ciascuna di queste,in generale, ammetterà infinite soluzioni, come già visto. Può verificarsi che almeno una delle soluzioni della prima equazione sia anche soluzione della seconda. Cioè può accadere che abbiano almeno una soluzione in comune.
Ad esempio consideriamo in $\mathbb{R}$ le due equazioni :

$$3x + 2y = 14 \quad \text{e} \quad 5x - 3y = 17.$$

Per quanto detto prima i due insiemi soluzione sono :

$$S_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \,,\quad 3x + 2y = 14\} \qquad \text{e} \qquad S_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \,,\quad 5x - 3y = 17.\}$$

Ora, risulta che $(4,1) \in S_1 \cap S_2$ .Infatti i numeri $x = 4$ $y = 1$ verificano entrambe le equazioni date.

Come visto nell' esempio precedente, la prima equazione è verificata da infinite coppie di numeri e così pure la seconda. La coppia di numeri trovata è una soluzione comune delle due equazioni date.
Se due o più equazioni sono considerate insieme allo scopo di trovare le soluzioni comuni, si dice che l'insieme di tali equazioni costituisce un SISTEMA DI EQUAZIONI.
Per specificare, ad esempio, che le due equazioni seguenti: $3x + y = 8$ e $4x - 3y = 1$ formano un sistema, si scrive :

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}.$$

Ogni eventuale soluzione comune a tutte le equazioni di un sistema, si chiama soluzione del sistema.

Se S_1 ed S_2 sono rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda equazione, risolvere il sistema significa determinare l' insieme

$$S = S_1 \cap S_2$$

Analoghe considerazioni si possono fare per sistemi di tre o più equazioni.
Un sistema si dice :

- determinato, se ammette un numero finito di soluzioni
- indeterminato, se ammette infinite soluzioni
- impossibile, se non ammette soluzioni.

Sistemi equivalenti

Due sistemi si dicono e*quivalenti*, quando hanno lo stesso insieme soluzione.

Quindi, quando tutte le soluzioni del primo sistema sono tutte e sole le soluzioni del secondo sistema, e viceversa.

Si osserva che
- Due sistemi equivalenti ad un terzo, sono equivalenti tra loro
- Se a tutte o ad alcune equazioni di un sistema si sostituiscono altrattante equazioni, rispettivamente equivalenti a quelle sostituite, si ottiene un sistema equivalente al dato.

Occorrerà procedere, quindi , in modo analogo a quello visto per le equazioni, cercando di ottenere sistemi equivalenti di forma più semplice tramite opportune trasformazioni, fino a giungere (sempre che sia possibile) ad un sistema equivalente, in ogni equazione del quale compaia una sola variabile.

Tali successive trasformazioni si possono effettuare applicando opportuni metodi, che verranno considerati in sede di risoluzione di alcuni esempi.

Per ora osserviamo che:

- se in un sistema figura l' equazione $0x + 0y = c$ con $c \neq 0$, il sistema è impossibile, cioè $S = \emptyset$, per via del fatto che contiene un' equazione impossibile.

- se in un sistema figura l' equazione $0x + 0y = 0$, tralasciando tale equazione si ottiene un sistema equivalente a quello di partenza

- se si cambia l' ordine delle equazioni di un sistema si ottiene un nuovo sistema equivalente a quello di partenza. (perché $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$) .

Sistema di due equazioni lineari in due variabili

E’ un caso molto importante di sistema lineare. Esso può essere scritto nella seguente forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad (1)$$

dove a, a’, b , b’ indicano numeri razionali noti. I numeri a, a’, b , b’ si chiamano *coefficienti* delle variabili, mentre c , c’, si chiamano *termini noti*.
Consideriamo ora il problema di decidere se il sistema (1) ammette soluzioni, ed in caso affermativo, quante ne ammette.
Vediamo prima due casi particolari:

• se tutti i coefficienti ed i termini noti sono nulli, allora il sistema (1) si scrive

$$\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$$

e allora ogni coppia (x,y) di numeri razionali è soluzione del sistema.

• se i coefficienti a, a’, b , b’ sono nulli, e almeno uno dei termini noti c, c’, non è nullo, allora il sistema (1) è impossibile.
Tralasciando i casi estremi, vediamo ora due situazioni particolari molto frequenti:

• Sistema lineare diagonale

Un sistema lineare si dice diagonale se, ridotto a forma normale, è del tipo

$$\begin{cases} ax=c \\ b'y=c' \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} by=c \\ a'x=c' \end{cases}$$

con a,b’ diversi da zero, oppure b, a’ diversi da zero.
Tali sistemi si risolvono immediatamente, ottenendo la x da un’ equazione e la y dall’ altra.

Esempio

$\begin{cases} 2x=3 \\ 7y=21 \end{cases}$ ha come soluzione la coppia $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=3 \end{cases}$ cioè: $S=\left\{\left(\dfrac{3}{2};3\right)\right\}$.

• Sistema lineare triangolare

Un sistema si dice triangolare se manca una variabile in una delle due equazioni. Ad esempio:

$\begin{cases} ax=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ con a, a’ , b’ diversi da zero.

E' facile verificare che un sistema triangolare come quello precedente ammette una e una sola soluzione.
Ricavando il valore di x nella prima equazione, lo si sotituisce nella seconda, ottenendo il sistema equivalente :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ y = \dfrac{ac' - a'c}{ab'} \end{cases}$$

• Vediamo ora il caso più generale, in cui i coefficienti delle variabili siano tutti diversi da zero.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

in cui $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a' \neq 0, \quad b' \neq 0$.
In tal caso, si può dimostrare che il sistema lineare è :

• determinato, se $ab' - a'b \neq 0$
• impossibile, se $ab' - a'b = 0$ e $cb' - c'b \neq 0$
• indeterminato, se $ab' - a'b = 0$ e $cb' - c'b = 0$

Tralasciamo la dimostrazione di tale teorema, per vederne subito alcune applicazioni.

• Nel sistema :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x - 4y = 5 \end{cases}$$

individuiamo $a = 5, \quad b = -2, \quad c = 1, \quad a' = 10, \quad b' = -4, \quad c' = 5$
si ha quindi $ab' - a'b = 5 \cdot (-4) - 10 \cdot (-2) = 0$ e $cb' - c'b = 3 \cdot (-4) - 5 \cdot (-2) = -2$, condizioni

per le quali il teorema ci assicura che il sistema è impossibile.
Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per 2 si ottiene il sistema equivalente :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 5x - 2y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Da cui è evidente che non esistono coppie ordinate del tipo (x,y) che soddisfano entrambe le equazioni.

Osserviamo che, in tal caso, i coefficienti delle variabili sono tra loro proporzionali,senza esserlo ai termini noti.

• Nel sistema :

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

individuiamo $a = 3,\quad b = 1,\quad c = 5,\quad a' = 2,\quad b' = 3,\quad c' = 8$

I coefficienti soddisfano alla condizione $ab' - a'b \neq 0$,dunque , dal teorema, si ha che il sistema considerato è determinato, ed ammette una sola soluzione. La ricerca di tale soluzione avviene tramite metodi che verranno più avanti esposti.

Osserviamo che, in tal caso, i coefficienti delle variabili non sono tra loro proporzionali.

• Nel sistema :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 15x + 6y = 3 \end{cases}$$

individuiamo $a = 5,\quad b = 2,\quad c = 1,\quad a' = 15,\quad b' = 6,\quad c' = 3$

I coefficienti delle variabili ed itermini noti soddisfano alla condizione:

$$ab' - a'b = 0 \quad \text{e} \quad cb' - c'b = 0,$$

dunque il sistema è indeterminato. Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per 3 si ottiene il sistema equivalente :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente ad un' equazione in due variabili ($5x + 2y = 1$) ed ha infinite soluzioni.

Tali soluzioni sono le infinite coppie ordinate del tipo $\left(x, \frac{1-5x}{2} \right)$,con $x \in \mathbb{R}$ (ad esempio).

Osserviamo che i coefficienti delle incognite ed i termini noti sono tutti fra loro proporzionali.

Riassumendo le osservazioni fatte, si ha che:

il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ con $a' \neq 0,\quad b' \neq 0,\quad c' \neq 0$ è

• determinato, se i coefficienti delle variabili non sono tra loro proporzionali. Cioè se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

• impossibile, se i coefficienti delle variabili sono fra loro proporzionali, senza esserlo ai termini noti. Cioè se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

• indeterminato, se i coefficienti delle variabili e i termini noti sono tra loro proporzionali. Cioè se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Da ciò che si è detto, il sistema si dovrà risolvere solo nell' ipotesi che sia $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

• Un caso particolare ma piuttosto importante di sistema lineare in due variabili, è quello comprendente equazioni lineari omogenee.

In tale sistema $c = c' = 0$ e quindi esso si presenta nella forma

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$$

Come si può facilmente intuire (e dimostrare), tale sistema ammette sempre la soluzione : $(0,0)$.

Da quanto detto prima segue che se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ il sistema ha l' unica soluzione $(0,0)$;

mentre se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, essendo anche $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, il sistema è indeterminato.

Metodi di risoluzione

Accanto ai metodi per determinare la natura del sistema e delle soluzioni,esistono metodi risolutivi che possono essere presi in considerazione, di volta in volta, a seconda del particolare tipo di sistema con cui abbiamo a che fare. E' opportuno fare esempi di sistemi indeterminati o impossibili.

Iniziamo col considerare il:

- Metodo di sostituzione.

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema e ridotto i monomi simili, consideriamo il sistema nella sua forma più generale

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad \text{nel quale si suppone} \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Si esplicita una delle due equazioni, ossia si ricava una variabile in funzione dell'altra (conviene esplicitare la variabile più "comoda",se c'è questa possibilità) e la si sostituisce nella restante equazione che, riducendosi ad una sola variabile, si risolve facilmente.
Infine il valore della variabile così ottenuto lo sostituiamo nell'equazione in cui l'altra variabile era stata messa in evidenza.

Esempio :

$$\begin{cases} 2(3x+y)=5(x-1) \\ -2(y-3)=5(x+1) \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+2y=5x-5 \\ -2y+6=5x+5 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x-5x=-2y-5 \\ -2y+6-5x-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2y-5 \\ -2y+1-5x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-5 \\ -2y+1-5(-2y-5)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-5 \\ -2y+1+10y+25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2y-5 \\ 8y+26=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-5 \\ 8y=-26 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-5 \\ y=-\frac{26}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2y-5 \\ y=-\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2\cdot(-\frac{13}{4})-5 \\ y=-\frac{13}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{13}{2}-5 \\ y=-\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{13-10}{2} \\ y=-\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{13}{4} \end{cases}$$

Osserviamo che il metodo consiste nel trasformare il sistema dato in uno triangolare equivalente.

• Metodo del confronto.

E' una variante del metodo di sostituzione.
Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema, ridotto i monomi simili,si ottiene il sistema nella forma più generale

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Occorre poi esplicitare entrambe le equazioni rispetto alla stessa variabile ed uguagliarle.
Si ottiene così un'equazione in una sola variabile, facilmente risolvibile.
Il valore ottenuto si sostituisce in una delle due equazioni di partenza (indifferentemente).

Esempio :

$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 9 - 12x \\ -y = 18 - 15x \end{cases}$ cambio segno nella seconda equazione

$\begin{cases} y = 9 - 12x \\ y = -18 + 15x \end{cases}$

uguaglio le due equazioni: $-18 + 15x = 9 - 12x$ da cui $15x + 12x = 9 + 18$

che dà $27x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{27} \Rightarrow x = 1$; tale valore viene riportato nel sistema

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 9 - 12x \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 9 - 12 \cdot 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 9 - 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

• Metodo di riduzione

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema, ridotto i monomi simili e posto il sistema nella forma canonica,

- si individua il *minimo comune multiplo* dei coefficienti di *una variabile*
- si trova il fattore che consente di ottenere tale *m.c.m.* (e il suo opposto) per la variabile considerata
- si sommano algebricamente in colonna le due equazioni: in questo modo scompare una variabile
- si risolve l'equazione così ottenuta ad una sola variabile
- a scelta si può ripetere il procedimento per l'eliminazione dell'altra variabile oppure effettuare il metodo di sostituzione.

Esempio :

consideriamo il sistema ridotto in forma canonica :

$$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases}$$

Cerchiamo di eliminare la *x*: il *m.c.m.* tra 12 e 15 è 60, perciò si moltiplica nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} 5 \\ -4 \end{array} \begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 60x + 5y = 45 \\ -60x + 4y = -72 \end{cases} \quad (+)$$

sommando le due equazioni, si ottiene:

$9y = -27$ da cui $y = -3$

A questo punto è facile sostituire quest' ultimo valore trovato in una delle equazioni equivalenti, per trovare x .
Analogamente (ed in questo caso particolare, più comodamente) è possibile cercare di eliminare la y , dal sistema iniziale :

$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases}$ per eliminare la *y* non sono necessarie altre operazioni.

Basta sommare algebricamente le due equazioni :

$$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases} \quad (+)$$

$27x = 27$ da cui $x = 1$

Il valore di y è ricavabile con il metodo di sostituzione da una qualsiasi delle equazioni.

E quindi : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

• <u>Metodo di Cramer</u>

Si chiama matrice quadrata di ordine due una tabella con quattro numeri ordinati in due righe e due colonne, del tipo

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

in cui *e, f, g, h* sono numeri.

Per esempio: $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Si chiama determinante di una matrice quadrata di ordine due $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ e si indica con $\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$ il <u>numero</u> dato dall' espressione $e \cdot h - f \cdot g$. Si ha cioè:

$$\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = e \cdot h - f \cdot g$$

Per esempio :

Il determinante della matrice quadrata $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ è $\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 1$

Dato il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ si chiama matrice dei coefficienti del sistema lineare la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$. Ad esempio :

la matrice dei coefficienti del sistema lineare $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ è la matrice $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Risoluzione:

Dopo aver posto il sistema nella forma canonica $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Si definisce *delta, delta x, delta y*, rispettivamente, le seguenti espressioni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \cdot b' - a'b \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = c \cdot b' - c'b \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = a \cdot c' - a'c$$

La soluzione si trova ponendo

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad ; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Dovrà essere necessariamente $\Delta \neq 0$.

Esempio :

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 = -6 - 5 = -11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 13 & -2 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-2) - 13 \cdot 1 = -20 - 13 = -33$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 3 \cdot 13 - 5 \cdot 10 = 39 - 50 = -11$$

E quindi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3 \qquad\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1$$

Sistemi fratti

I procedimenti indicati per risolvere i sistemi lineari in due variabili, si prestano anche per risolvere sistemi fratti (in cui ci sono denominatori contenenti almeno una variabile). Tali sistemi, ridotti a forma normale, diventano sistemi lineari.
Il metodo di riduzione è analogo a quello visto per le equazioni fratte in una variabile; per questo motivo ci sono gli stessi inconvenienti già visti per le equazioni : potrebbe accadere che il sistema ottenuto con tale riduzione, abbia come soluzione dei numeri che annullano qualche denominatore.
Occorre quindi verificare che le soluzioni trovate soddisfino anche il sistema di partenza.
Visto che la trattazione è analoga a quella delle equazioni fratte, forniamo solo un piccolo esempio:

consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-1} = 1 \\ \dfrac{3x+y}{y+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deve essere $y-1 \neq 0$ e $y+1 \neq 0$ quindi $y \neq \pm 1$

Applicando i principi di equivalenza, e riducendo a forma normale, si ha

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 6x + y = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Poiché la soluzione (0,1) è contrarira alle nostre condizioni (annulla il denominatore della prima equazione), il sistema risulta impossibile.

Sistemi letterali

Per risolvere i sistemi lineari letterali (cioè quelli che oltre alle variabili contengono altre lettere, che vengono considerate parametri) occorre :

- escludere per i parametri quei valori che, eventualmente, fanno perdere di significato ad una (almeno) delle equazioni del sistema.
- vedere, poi, se esistono particolari valori dei parametri per i quali il sistema diventa impossibile, o indeterminato.

In ciò consiste la discussione del sistema.

Risolviamo questo sistema, come esempio:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

da cui si hanno i seguenti sistemi equivalenti:

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ x = -2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(-2-y) + by = 1 \\ x = -2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-a)y = 2a + 1 \\ x = -2 - y \end{cases}$$

Discussione:

• se $b - a \neq 0$, cioè se $b \neq a$: il sistema è determinato, ed ha come soluzione

$$x = \frac{2b+1}{a-b}, \qquad y = \frac{2a+1}{b-a}$$

• se $b = a \quad \text{e} \quad 2a + 1 \neq 0, \ \text{cioè} \ a \neq -\frac{1}{2}, \ \text{allora} \ S = \varnothing$. Il sistema è impossibile

• se $b = a \quad \text{e} \quad 2a + 1 = 0, \ \text{cioè} \ a = -\frac{1}{2}, \ \text{allora} \ S = \{(x, y) \mid y \in \mathbb{R} \ \text{e} \ x = -y - 2\}$. Il sistema è indeterminato.

Sistemi di tre equazioni lineari in tre variabili

Nella risoluzione di problemi di varia natura, si presenta frequentemente il caso di dover risolvere sistemi con tre equazioni lineari, in tre variabili. Tali sistemi si possono risolvere con i metodi studiati per i sistemi di due equazioni lineari. Ridotti in forma canonica, essi sono del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

in cui $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sono i coefficienti delle variabili, e d, d', d'' sono i termini noti.

Alcuni esempi di risoluzione :

• Metodo di sostituzione

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema, ridotto i monomi simili, e portato il sistema nella forma normale, si esplicita la prima delle tre equazioni, rispetto ad una qualsiasi delle tre variabili, ossia si ricava un'incognita in funzione delle altre due, e la si sostituisce nelle restanti equazioni che, riducendosi , si risolvono facilmente.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -10 \\ 3x - 2y - z = -1 \\ x + 4y + 2z = 16 \end{cases}$$ ricavo *y* nella prima equazione e la sostituisco nelle altre due

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ 3x - 2(-2x - 10 + 3z) - z = -1 \\ x + 4(-2x - 10 + 3z) + 2z = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ 3x + 4x + 20 - 6z - z = -1 \\ x - 8x - 40 + 12z + 2z = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ 7x - 7z = -21 \\ -7x + 14z = 56 \end{cases}$$

divido per 7 la seconda e la terza equazione

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x - z = -3 \\ -x + 2z = 8 \end{cases}$$ ricavo *x* nella seconda equazione e lo sostituisco nella terza equazione

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x = z - 3 \\ -(z - 3) + 2z = 8 \end{cases}$$ ricavo *z* nella terza equazione $$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x = z - 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ottenuto il valore di una variabile lo sostituiamo nella seconda
equazione nella quale l'altra variabile era stata messa in evidenza e poi risaliamo
fino alla prima equazione, ottenendo le tre soluzioni, ossia i valori delle tre variabili *x*, *y*, *z*.

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x = z - 3 = 5 - 2 = 2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \cdot 2 - 10 + 3 \cdot 5 = -4 - 10 + 15 \\ x = 2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

• <u>Metodo di Cramer</u>

Si chiama *matrice quadrata di ordine tre* una tabella con nove numeri ordinati in tre righe e tre colonne, del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$ in cui *a ,b, c,a' ,b', c', a'', b'', c''* sono numeri

Si chiama determinante della matrice *A* , e si indica con |*A*| oppure con $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, il

<u>numero</u> : $a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$ in cui i determinanti delle matrici quadrate di ordine

due $\begin{bmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{bmatrix}$ si calcolano con il metodo già visto.

Esempio :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 2(-1-10) + 3(-15) = -20$$

Risoluzione:

dopo aver posto il sistema nella forma canonica $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

Calcoliamo i quattro determinanti *Delta, Delta x, Delta y*, *Delta z,* rispettivamente, le seguenti espressioni :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d' & b' \\ d'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & d' \\ a'' & d'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & d' \\ b'' & d'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & d' \\ a'' & d'' \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

La soluzione si trova ponendo:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Dovrà essere necessariamente $\Delta \neq 0$.

Esempio :

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -12 \\ x - 2y - z = -5 \\ x + y + 2z = 13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[(-4) - (-1)] + 1[2 - (-1)] - 3[1 - (-2)] = -6 + 3 - 9 = -12$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -12 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & -1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -12[(-4) - (-1)] + 1[-10 - (-13)] - 3[-5 - (-26)] = 36 + 3 - 63 = -24$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -12 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[-10 - (-13)] + 12[2 - (-1)] - 3[13 - (-5)] = 6 + 36 - 54 = -12$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -12 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[-26 - (-5)] + 1[13 - (-5)] - 12[1 - (-2)] = -42 + 18 - 36 = -60$$

E quindi:

$$x = \frac{-24}{-12} = 2 \qquad y = \frac{-12}{-12} = 1 \qquad z = \frac{-60}{-12} = 5.$$

Osserviamo il fatto che è essenziale che sia $\Delta \neq 0$.

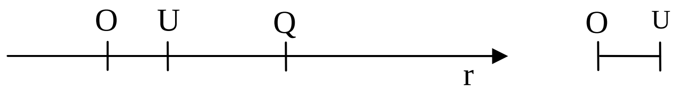
Applicazioni

Applicazioni di varia natura sono attribuibili alle equazioni lineari in due variabili, ed ai sistemi di due equazioni lineari in due variabili. Nell' unità didattica dedicata alla retta nel piano cartesiano si proverà a suggerire i collegamenti tra gli argomenti fino ad ora trattati, ed i temi di geometria analitica. Naturalmente abbiamo già citato i problemi in due ed in tre incognite, come applicazioni naturali dei sistemi lineari.

U.D. 3 : PIANO CARTESIANO

Coordinate Cartesiane su una retta

Per introdurre i sistemi di riferimento partiamo dal concetto di retta orientata.
Data una retta r fissiamo su di essa un punto *O*, detto origine, che la divide in due semirette. Su una di queste due semirette fissiamo un punto *U* e assumiamo il segmento *OU* come unità di misura. Definiamo positiva la semiretta che contiene il punto *U* e negativa l'altra. Tale retta determina una retta orientata che ha un verso positivo e un verso negativo. Si dice che su *r* è stato introdotto un sistema di riferimento o un sistema di ascisse.
E' opportuno disegnare rette con diversa direzione e versi opposti a quello di figura, per evitare la misconcezione che il verso positivo vada sempre preso come in figura.



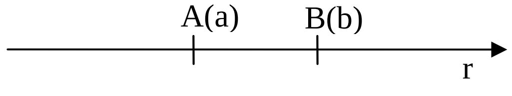
Possiamo definire ora l'*ascissa* di un punto *Q* come il numero reale che rappresenta la distanza del punto Q dall'origine O con la seguente convenzione sul segno:

- Positivo se il punto si trova sulla semiretta positiva
- Negativo se il punto si trova sulla semiretta negativa

Il punto O corrisponde all'ascissa 0 (zero). Per indicare che il punto Q ha ascissa x si utilizza la seguente notazione: *Q(x).*
In questo modo abbiamo definito una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e i numeri reali, per cui sarà sempre possibile associare ad un punto un'ascissa e viceversa ad un'ascissa un unico punto della retta.
In questa fase è utile presentare alcuni esempi numerici di rappresentazioni di punti sulla retta orientata.

Relazioni tra segmenti di una retta

Intendiamo ora introdurre il concetto di segmento orientato, importante anche per la futura trattazione dei vettori.



Fissiamo una retta orientata *r* e due punti *A(a)* e *B(b)* su di essa. Definiamo segmento orientato *AB* il segmento di estremi A e B, concepito come insieme di punti ordinati da A a B. Possiamo ora definire la lunghezza algebrica del segmento orientato AB o misura del segmento orientato AB come la differenza fra l'ascissa *b* e l'ascissa *a*.

$$AB = b-a$$

Osserviamo ora che AB è un numero reale positivo nel caso in cui B segua A, cioè b sia maggiore di a, mentre è un numero reale negativo nel caso in cui B preceda A, cioè b sia minore di a.

Tramite esercizi si applicherà la definizione data con diversi casi numerici in cui i punti A e B si trovano in posizioni diverse rispetto all'origine, verificando la correttezza dell'osservazione precedente.
Inoltre occorre mettere in evidenza l'importanza dell'ordine delle lettere, esplicitando che il segmento orientato *AB* è diverso dal segmento orientato *BA* e vale la relazione

$$AB = -BA$$

Infatti : AB=b-a=-(a-b)=-BA

Per le dimostrazioni che seguiranno, dimostriamo inoltre la Relazione di Chasles, nella quale si afferma che, presi tre punti *A(a), B(b)* e *C(c)* disposti in qualsiasi ordine sulla retta, vale la relazione:

$$AB + BC = AC \qquad (1)$$

o equivalentemente:

$$AB + BC + CA = 0 \qquad (2)$$

Infatti, per la definizione di lunghezza algebrica, si ha:

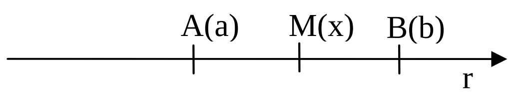
AB = b-a   BC = c-b   CA=a-c

Sostituendo nella (2) si ottiene:

(b-a) + (c-b) + (a-c) = 0

Punto medio di un segmento sulla retta

Abbiamo ora gli strumenti per poter definire la relazione per determinare l'ascissa del punto medio di un segmento AB, con estremi A(a) e B(b).



Sia M(x) il punto medio del segmento AB. Poiché AM = MB, allora

$$x - a = b - x$$

da cui

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Essendo una delle prime dimostrazioni di geometria analitica, è utile sottolineare il fatto che nell'uguaglianza *AM = MB* si considerano segmenti ugualmente orientati. Osserviamo inoltre che si è utilizzato la notazione "*x*" per intendere un'ascissa incognita, mentre *a* e *b* indicano ascisse fissate e sono dunque dei parametri.

Distanza tra due punti della retta

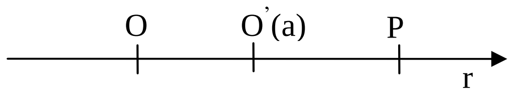
Siano *A(a)* e B*(b)* due punti sulla retta *r*. Definiamo distanza di *A* da *B* o misura del segmento *AB* (in simboli $\overline{AB}$) il valore assoluto della lunghezza algebrica di AB. In formula:

$$\overline{AB} = |b - a|$$

Risulta importante insistere sul fatto che la misura di un segmento, a differenza della lunghezza algebrica, è <u>sempre una quantità positiva</u>.
Dalla definizione data risulta poi possibile fornire una interpretazione geometrica del valore assoluto di '*a*' come distanza del punto *A(a)* dall'origine e della risoluzione (per via grafica) delle equazioni del tipo: $|x| = c$ e delle disequazioni del tipo $|x| \leq c$ e $|x| \geq c$ con $c \in R^+$.

Traslazione sulla retta

Vogliamo introdurre la relazione fra le coordinate di un punto su una retta orientata, considerando due sistemi di riferimento che hanno in comune l'orientazione e l'unità di misura, ma con origini diverse *O* e O'.
Indicando con *a* l'ascissa di O' rispetto ad O e con *x* ed x' le ascisse di un punto *P* rispetto ad O ed O'



si ha: OP=OO' + O'P

sempre valida qualunque siano le posizioni relative dei tre punti (*relazione di Chasles*).

Si ha quindi:

$$x = a + x'$$

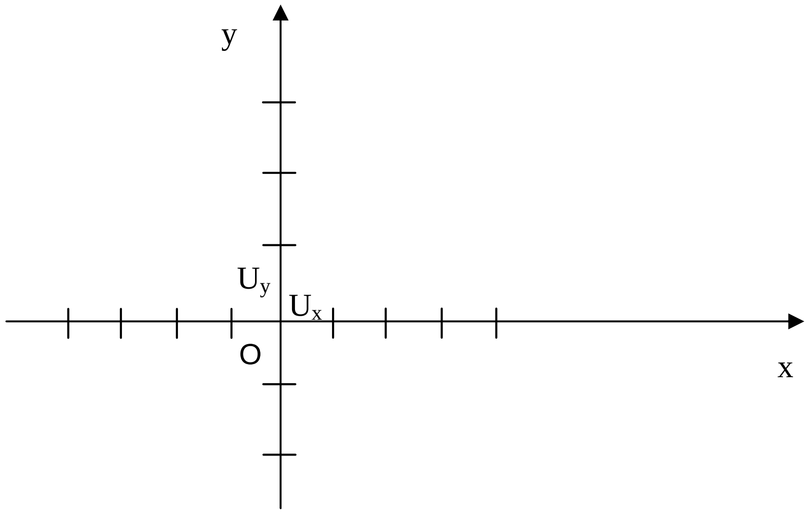
da cui si può ricavare la relazione inversa:

$$x' = x - a$$

Tali formule prendono il nome di <u>Formule di Traslazione</u> sulla retta.

Coordinate Cartesiane nel Piano

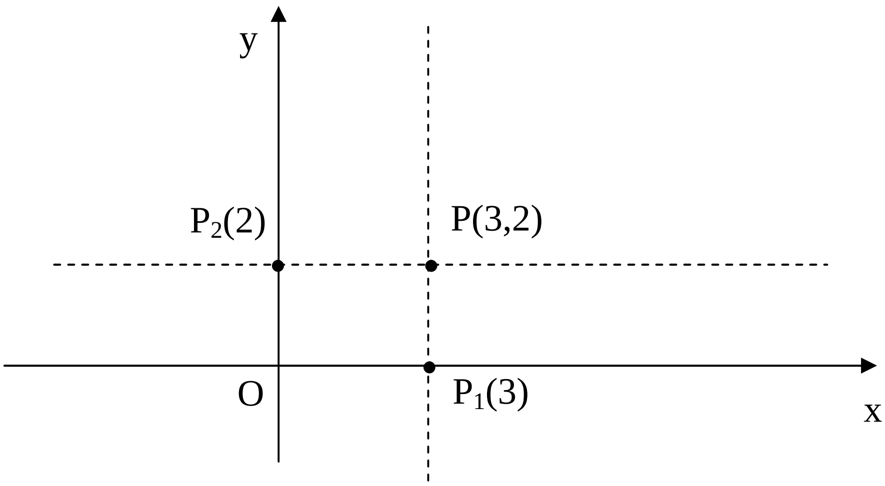
Abbiamo finora visto che su ogni retta possiamo fissare un sistema di riferimento, che mette in corrispondenza biunivoca ogni punto della retta con un numero reale.
Vediamo ora come si può estendere il ragionamento ai punti del piano.
Consideriamo due rette, *x* e *y*, incidenti in un punto *O*, detto <u>origine</u>, ciascuna dotata di un sistema di riferimento di cui O è l'origine per entrambe le rette. Ricordiamo che le unità di misura adottate sulle due rette non devono essere necessariamente uguali.
Le due rette orientate, dette <u>assi</u>, ed il punto O costituiscono un <u>sistema di riferimento</u> che si indica con <u>xOy</u>. Tale sistema di riferimento è detto anche <u>Cartesiano</u>, perché introdotto dal filosofo-matematico francese Cartesio.
Nel caso l'unità di misura per i due assi sia la stessa si parla di sistema <u>Monometrico</u>, altrimenti il sistema si dice <u>Dimetrico</u>. (in figura U_x e U_y)
Se le due rette sono tra loro perpendicolari il sistema di riferimento xOy si dice <u>ortogonale</u>; per distinguere i due assi del sistema ortogonale si conviene chiamare <u>asse delle ascisse</u> o <u>asse x</u> l'asse orizzontale e <u>asse delle ordinate</u> o <u>asse y</u> l'asse verticale.



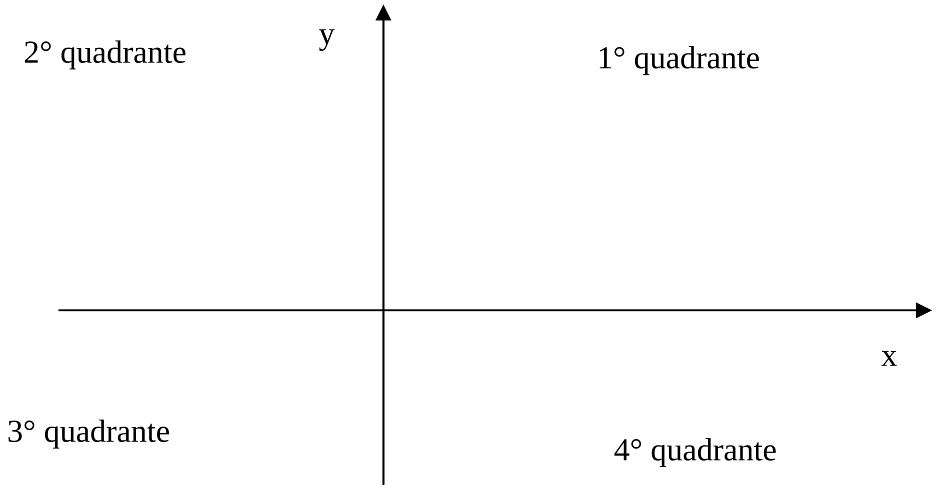
Per introdurre le coordinate dei punti nel piano Cartesiano partiamo da esempi numerici. Consideriamo sull'asse x il punto $P_1(3)$ e sull'asse y il punto P_2 (2) e tracciamo per P_1 e P_2 le rette parallele rispettivamente all'asse y e all'asse x. Il loro punto di intersezione P nel piano sarà individuato dalla coppia di numeri (3;2), che si diranno <u>Coordinate del punto P</u>.

In generale ad ogni punto P del piano viene associata la coppia ordinata di numeri reali (x;y) e viceversa ogni coppia di numeri reali (x;y) individua nel piano un unico punto P.
Si realizza così una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate
$(x; y) \in R \times R=R^2$.

Definiamo *x* <u>Ascissa</u> e *y* <u>Ordinata</u> del punto *P*.



Il sistema di riferimento cartesiano risulta diviso in 4 <u>quadranti</u>. Si definisce primo quadrante quello compreso tra i due semiassi positivi. Procedendo in senso antiorario si denominano poi il secondo, terzo e quarto quadrante, come in figura.



Dalla convenzione adottata segue che:

- I punti del primo quadrante hanno entrambe le coordinate positive;
- I punti del secondo quadrante hanno le ascisse negative e le ordinate positive;
- I punti del terzo quadrante hanno sia le ascisse che le ordinate negative;
- I punti del quarto quadrante hanno le ascisse positive e le ordinate negative,

Risulta ora opportuno evidenziare i seguenti casi particolari, che rivestono una grande importanza nell'affrontare gli esercizi e i prossimi argomenti sul piano Cartesiano:

- I punti sull'asse x hanno ordinata nulla;
- I punti dell'asse y hanno ascissa nulla;
- L'origine O degli assi coordinati ha nulle entrambe le coordinate;
- I punti appartenenti ad una retta parallela all'asse x hanno tutti la stessa ordinata;
- I punti appartenenti ad una retta parallela all'asse y hanno tutti la stessa ascissa.

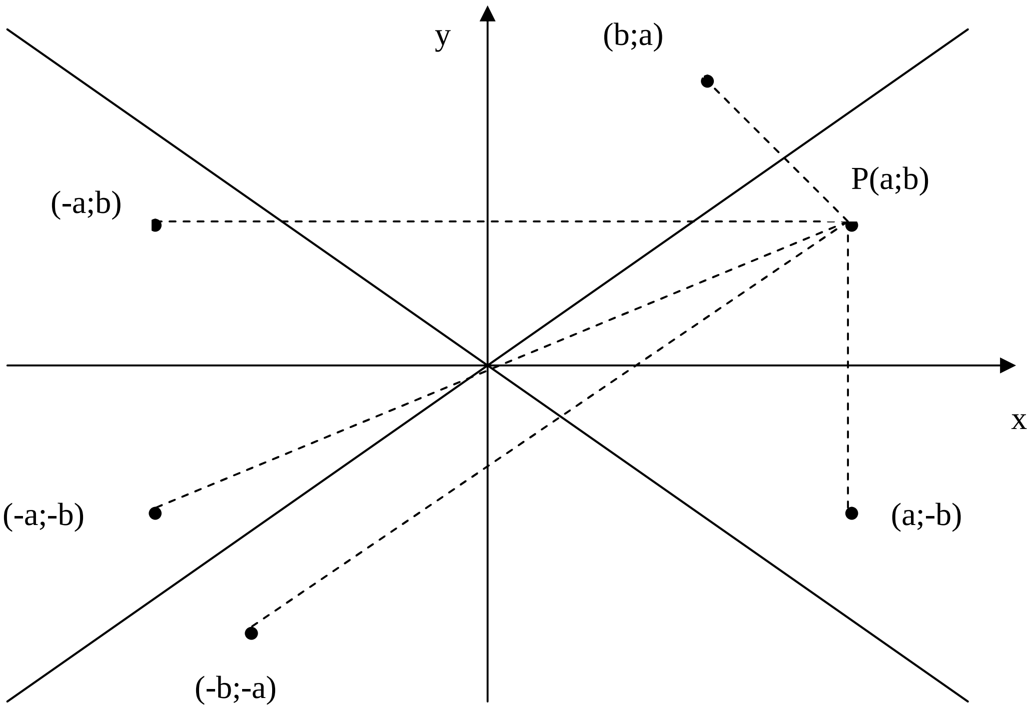
Infine consideriamo le due bisettrici degli angoli formati dai due assi cartesiani, passanti per l'origine O, che sono fra di loro perpendicolari. Una di esse giace nel 1° e nel 3° quadrante, mentre l'altra giace nel 2° e 4° quadrante.
A proposito di queste rette possiamo osservare che:

- I punti appartenenti alla bisettrice del 1° e 3° quadrante hanno tutti le coordinate uguali: $x = y$;
- I punti appartenenti alla bisettrice del 2° e 4° quadrante hanno tutti le coordinate opposte. $x= -y$

Inoltre, ricordando la nozione di simmetria rispetto ad una retta e rispetto ad un punto, si possono fare le seguenti considerazioni:

- Due punti simmetrici rispetto all'asse x hanno la medesima ascissa, mentre le ordinate sono opposte.
- Due punti simmetrici rispetto all'asse y hanno la medesima ordinata, mentre le ascisse sono opposte.
- Due punti simmetrici rispetto all'origine hanno le coordinate opposte.

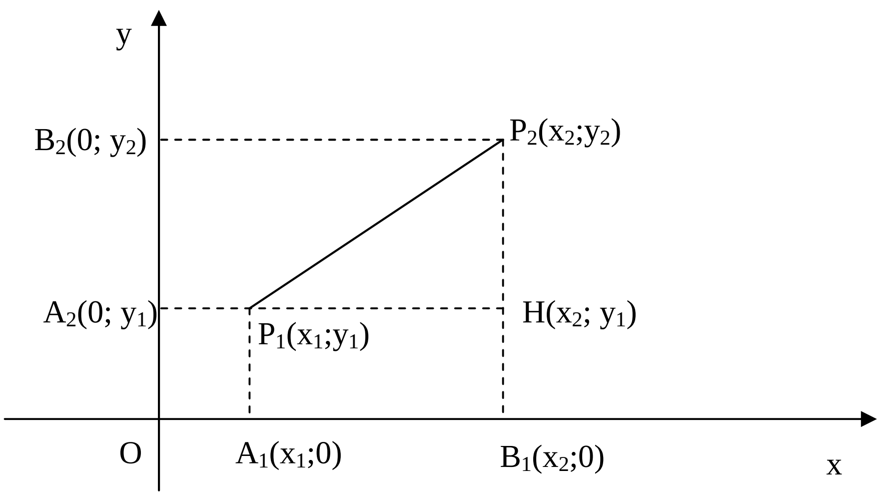
- Due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante si scambiano l'ascissa e l'ordinata.
- Due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante hanno le coordinate scambiate ed opposte



Distanza tra due punti

Dimostriamo ora come sia possibile determinare la distanza tra due punti qualsiasi del piano, utilizzando il teorema di Pitagora.

Siano P_1 (x_1, y_1) e P_2 (x_2, y_2) due punti del piano, vogliamo determinare la distanza che intercorre tra questi due punti.



Consideriamo le proiezioni di P_1 e P_2 sull'asse *x,* che hanno coordinate: A_1 $(x_1, 0)$, B_1 $(x_2, 0)$, e le proiezioni sull'asse *y* con coordinate: A_2 $(0, y_1)$, B_2 $(0, y_2)$. Sia *H* l'intersezione della retta passante per P_1 e parallela all'asse *x* con la retta passante per P_2 e parallela all'asse *y*; ne consegue che il punto *H* ha coordinate *(x_2, y_1)*. Possiamo ora applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *P_1HP_2* la cui ipotenusa è proprio la distanza di P_1 da P_2 . Si ha:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

In particolare, se P_1 e P_2 hanno ordinata uguale y_1, si ha $\overline{P_1P_2} = |x_2 - x_1|$, mentre se i due punti hanno l'ascissa uguale x_1, sarà $\overline{P_1P_2} = |y_2 - y_1|$, in accordo con la definizione di distanza data nel caso della retta. Utilizzando la formula generale, si può ricavare la distanza di un punto P (x, y) dall'origine come:

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Come applicazione della distanza fra due punti, si può proporre il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi nel piano cartesiano, date le coordinate dei tre vertici, utilizzando la formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

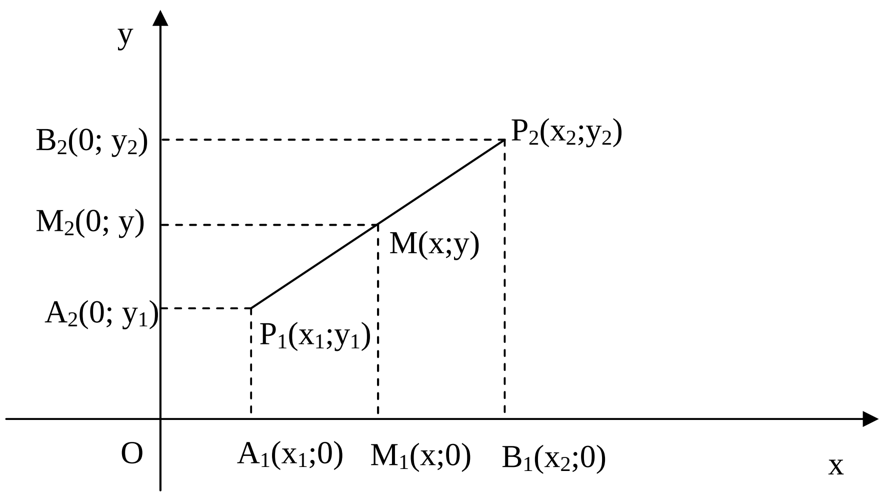
dove p è il semiperimetro e a,b,c sono le lunghezze dei tre lati del triangolo.
Tali grandezze si ricavano per mezzo della suddetta formula.

Laboratorio con Cabri-Géomètre:

Osservazione: Dopo che lo studente ha assimilato questi argomenti, può essere utile mostrare un esempio di sistema di riferimento nel piano non ortogonale ed evidenziare che in questo caso non si può applicare la regola della distanza fra due punti, in quanto risulta inapplicabile il teorema di Pitagora.

Coordinate del punto medio di un segmento

Consideriamo due qualsiasi punti del piano *P_1 (x_1, x_2)* e *P_2 (x_2, y_2)* e sia *M (x, y)* il punto medio del segmento di estremi P_1 e P_2.



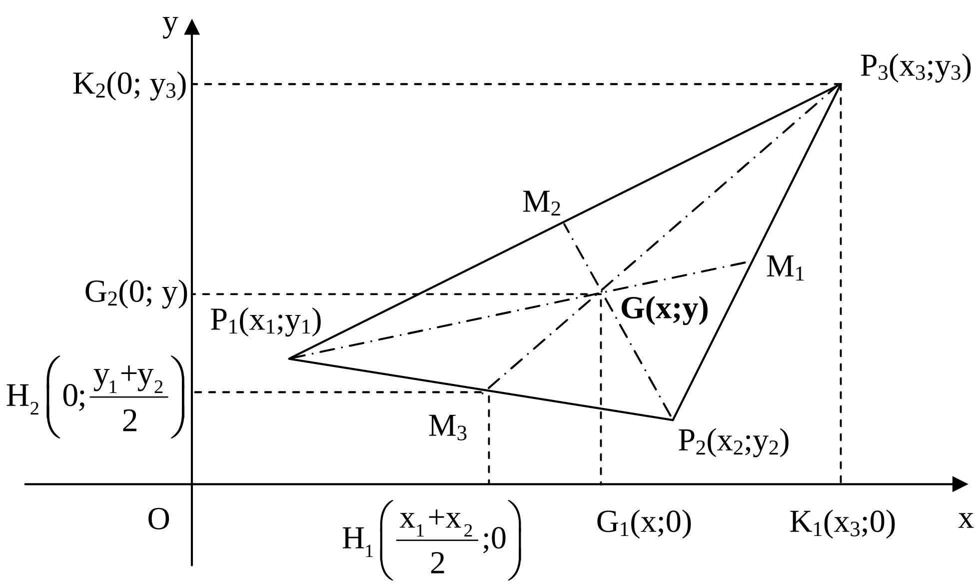
Consideriamo le proiezioni dei tre punti sull'asse *x*: $A_1\ (x_1, 0)$, $B_1\ (x_2, 0)$, $M_1\ (x, 0)$, e sull'asse *y*: $A_2\ (0, y_1)$, $B_2\ (0, y_2)$, $M_2\ (0, y)$.
Per il teorema di Talete, i punti M_1 e M_2 sono rispettivamente i punti medi dei segmenti $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$.
Applicando la formula per la determinazione delle coordinate del punto medio di un segmento su una retta, si ricavano le seguenti relazioni:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Può essere interessante proporre, come quesito, se questa relazione continui a valere anche in un sistema di riferimento cartesiano non ortogonale.

Baricentro di un triangolo

Come applicazione degli argomenti trattati precedentemente ci proponiamo di ricavare una formula generale per determinare le coordinate del baricentro di un triangolo qualunque, una volta note le coordinate dei tre vertici sul piano Cartesiano.
Ricordiamo che il baricentro è il punto di intersezione delle mediane.
Sia dato il triangolo di vertici $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $P_3(x_3;y_3)$ e si traccino le tre mediane per determinare il baricentro $G(x;y)$ (in figura).



Ricordando che il baricentro divide ognuna delle mediane in due parti, una il doppio dell'altra, segue che (mediana M_3P_3):

$$2M_3G = GP_3 \qquad (1)$$

Occorre far notare che la scelta della mediana M_3P_3 è equivalente alla scelta di una delle altre due.
Applicando il teorema di Talete alle rette parallele H_1M_3, G_1G, K_1P_3 tagliate dalla retta trasversale M_3P_3 e dall'asse *x*:

$$H_1G_1:G_1K_1=M_3G:GP_3 \qquad (2)$$

Sostituendo a GP_3 della proporzione (2) la (1) si ottiene:

$$H_1G_1:G_1K_1=1:2$$

Da cui:

$$2H_1G_1 = G_1K_1 \qquad (3)$$

e in modo analogo si ricava:

$$2H_2G_2 = G_2K_2 \qquad (4)$$

Passando alle coordinate cartesiane, si ottengono le seguenti relazioni:

$H_1G_1 = x - (x_1 + x_2)/2$
$G_1K_1 = x_3 - x$
$H_2G_2 = y - (y_1 + y_2)/2$
$G_2K_2 = y_3 - y$
Da cui, sostituendo nella (3) e nella (4), si ottiene:

$$2\,[x - (x_1 + x_2)/2] = x_3 - x \quad , \quad 2\,[y - (y_1 + y_2)/2] = y_3 - y$$

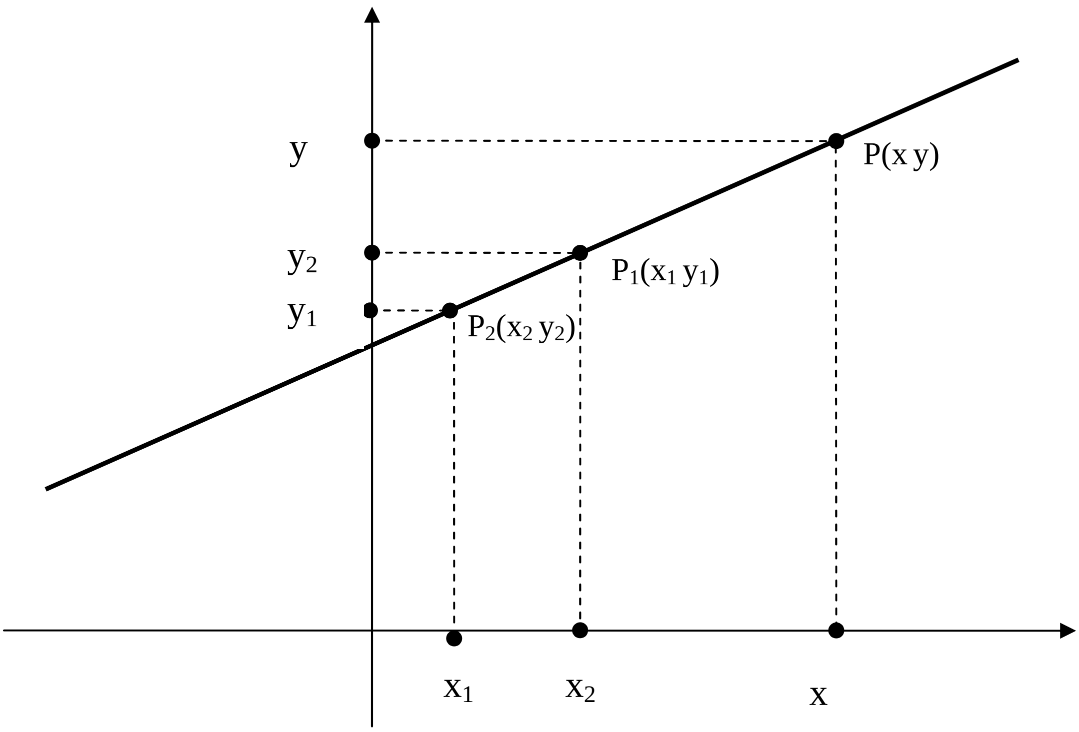
$$2x - x_1 - x_2 = x_3 - x \quad , \quad 2y - y_1 - y_2 = y_3 - y$$

$$x = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3} \qquad y = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}$$

U.D. 4 : LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Ogni retta è rappresentata da un’ equazione di primo grado in due variabili

Nel piano cartesiano individuiamo due punti qualsiasi $P_1(x_1\ y_1)$ e $P_2\ (x_2\ y_2)$ e la retta *r* che passa per entrambi i punti P_1 e P_2. Sulla retta individuiamo un terzo punto che chiamiamo P_3 di coordinate (x,y) qualsiasi (questo equivale a dire che il terzo punto può trovarsi ovunque sulla retta r) come si vede in figura. Utilizziamo il teorema di Talete per trovare una relazione che leghi tra loro che coordinate di questi tre punti.



Dal suddetto teorema risulta che

(1.1)
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Da questa relazione è possibile quindi estrapolare attraverso semplici calcoli l’equazione generale della retta nel piano cartesiano, infatti dalla relazione precedente si ha:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow(x-x_1)\cdot(y_2-y_1)-(y-y_1)\cdot(x_2-x_1)$$

(1.2)

$$\Rightarrow(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+x_2y_1-x_1y_2=0$$

ponendo allora

(1.3)
$$\begin{aligned} a &= y_2 - y_1 \\ b &= x_1 - x_2 \\ c &= x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{aligned}$$

si ha infine

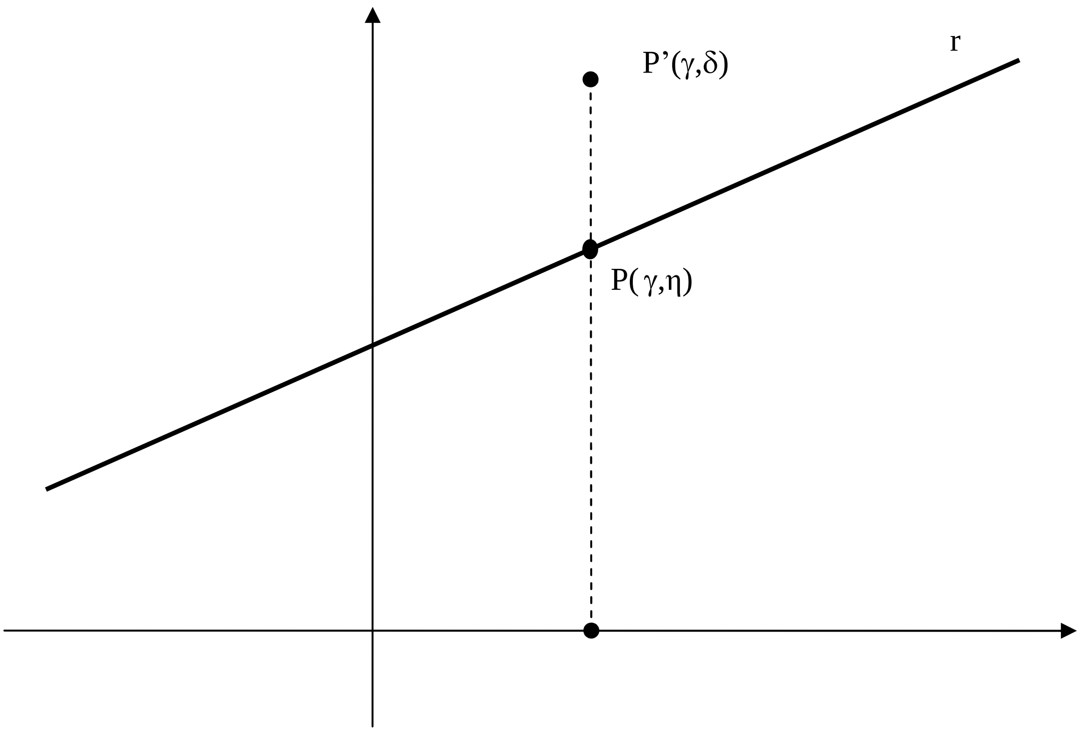
(1.4)
$$ax + by + c = 0$$

L'ultima equazione scritta è detta equazione generale (o cartesiana) della retta, essa è una equazione lineare (di 1° grado) con due variabili.

(Bisogna considerare due fatti fondamentali su questa equazione; la prima è che *l'equazione generale della retta è soddisfatta solo per quei punti che si trovano sulla retta stessa*.
Infatti basta provare a sostituire nell'equazione dei punti esterni alla retta per vedere che non si ottengono soluzioni accettabili.
La seconda cosa da considerare è che *a, b* e *c* sono *coefficienti di grande importanza* che in seguito ci daranno informazioni preziose per l'analisi della retta nel piano.)

In questa equazione *x* e *y* sono le *variabili, a* e *b coefficienti delle variabili* e *c* è detto *termine noto.*
Dall'equazione (1.1) è subito possibile ottenere l'equazione di una retta passante per due punti, basterà sostituire le coordinate (*x;y*) e si avrà una relazione analoga alla (1.4).

E' facile intuire la relazione che intercorre tra l' equazione generale di una retta e le coordinate di un punto appartenente alla retta stessa. Queste ultime devono soddisfare l' equazione.
Ma cosa possiamo dire sui rapporti che intercorrono tra l' equazione stessa e le coordinate di un punto esterno alla retta ?
Consideriamo a tale proposito una retta *r* di equazione generale $ax + by + c = 0$ ed un punto esterno P'.



Facciamo vedere che P' non appartiene alla retta ed ha quindi coordinate che <u>non</u> soddisfano l'equazione generale della retta. Infatti dette (γ,δ) le coordinate di P', chiamiamo P il punto d'intersezione della retta r con la perpendicolare condotta da P' all'asse delle x.
Il punto P ha per ascissa γ, e detta η la sua ordinata, è ovviamente $\delta \neq \eta$. Siccome P sta sulla retta *r* per quanto detto in precedenza le sue coordinate soddisfano l'equazione di *r* :

$$a\gamma + b\eta + c = 0$$

E da qui tenendo presente che $\delta \neq \eta$ segue:

$$a\gamma + b\delta + c \neq 0$$

La retta divide il piano in due semipiani ciascuno dei quali è formato dai punti di coordinate (x,y) tali per cui:

$ax + by + c \geq 0$ oppure $ax + by + c \leq 0$

Essendo $\delta > \eta$ si ha $a\gamma + b\delta + c > 0$

Pertanto il valore della <u>funzione</u> :

$$f(x, y) = ax + by + c$$

lineare in *x,y* dipende dal punto P(x,y) in cui si calcola, e tale funzione calcolata in punti che stanno su semipiani opposti rispetto ad *r* ,dà valori di segno opposto.

Possiamo subito fare considerazioni importanti:

- Tutti e soltanto i punti della retta r hanno per coordinate coppie di numeri che soddisfano l' equazione (1.4). E' opportuno proporre esempi in cui le coordinate di punti interni soddisfano l' equazione, ed esempi in cui per punti esterni alla retta ciò non accade.

- In base a ciò che si è detto risulta evidente che la relazione (1.1) rappresenta l' equazione di una retta non parallela a nessun asse coordinato, passante per due punti di coordinate note $P_1(x_1\ y_1)$ e $P_2\ (x_2\ y_2)$. E' opportuno a questo punto proporre esempi in cui a partire dalle coordinate di due punti, si arriva all' equazione della retta passante per tali due punti.

- Nel considerare la relazione (1.1), e nei passaggi successivi effettuati per arrivare all' equazione cartesiana della retta *r* , non si è accennato al problema che si presenterebbe se fosse $y_1 = y_2$ oppure $x_1 = x_2$; tale situazione sarebbe la conseguenza del fatto che i punti $P_1(x_1\ y_1)$ e $P_2\ (x_2\ y_2)$ fossero stati presi su una retta parallela all' asse *x* o parallela all' asse *y* . Questi casi non possono essere trattati attraverso lo steso percorso visto in precedenza.

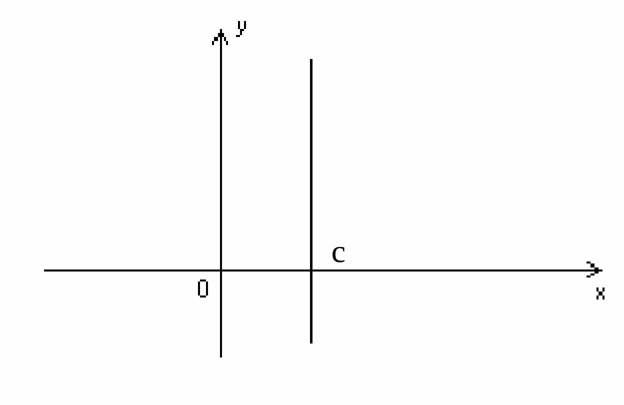
Vediamo come si può arrivare alle equazioni cartesiane della retta parallela all' asse *y* e della retta parallela all' asse *x*.
Consideriamo una retta *r* parallela all' asse *y*. Chiamiamo *c* l' ascissa del punto di intersezione di r con l' asse x ; si vede che tutti e soltanto i punti di r hanno per ascissa il numero *c*.
Tutti e soltanto i punti di r hanno per ascissa un numero che soddisfa l' equazione

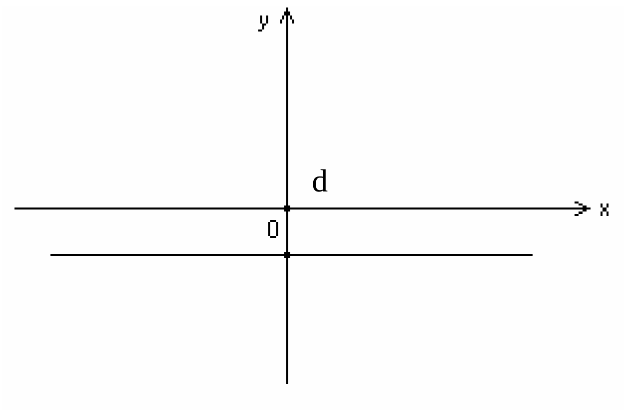
$$x - c = 0$$

Quest' ultima si chiama <u>equazione cartesiana della retta r parallela all' asse y</u>.
Analogamente al caso precedente, si prova che :

Una retta parallela all' asse x e che incontra l' asse y in un punto di ordinata d è rappresentata analiticamente dall' equazione

$$y - d = 0$$





E' opportuno fare esempi in cui vengono "costruite" rette parallele ad un asse coordinato, a partire dalla loro equazione, e viceversa, esempi in cui, data la rappresentazione grafica, bisogna ricavare l' equazione.
Osserviamo inoltre che le equazioni di rette parallele ad uno degli assi sono lineari in una sola variabile.
Come casi particolari che vedono $c = 0$ o $d = 0$ possono essere messe in evidenza le equazioni degli assi cartesiani.

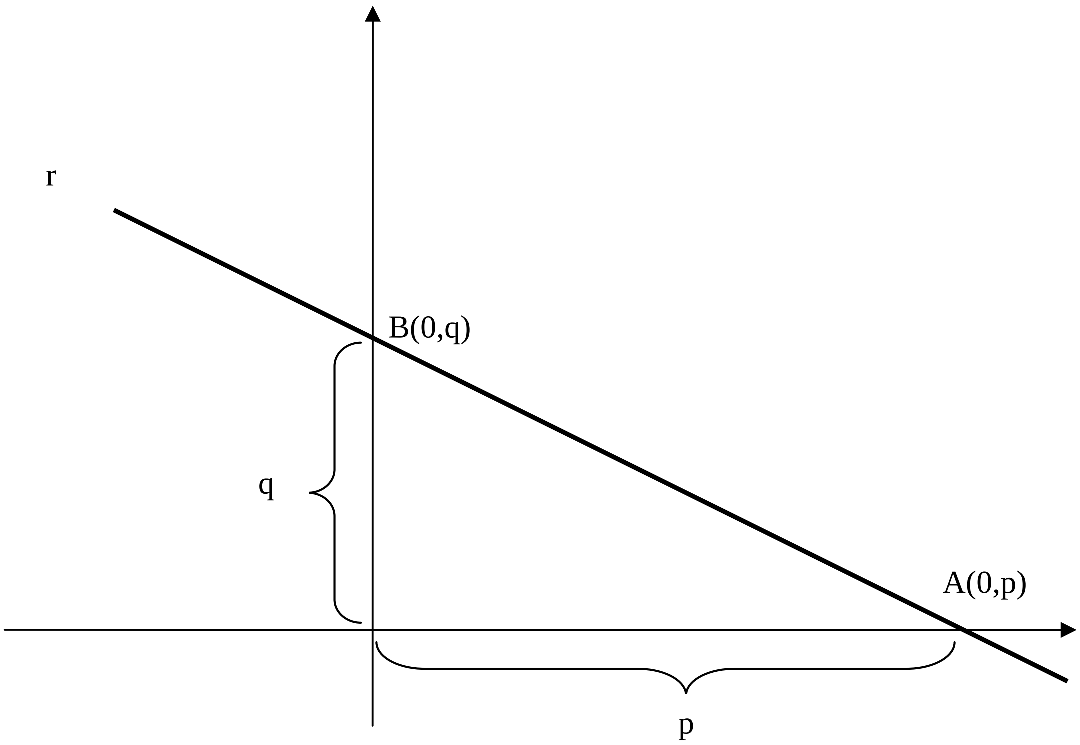
• Abbiamo visto che ad ogni retta del piano cartesiano si può associare un' equazione di primo grado in due variabili (o in una variabile, nel caso di rette parallele ad uno degli assi).
Può sorgere il dubbio che il risultato trovato non si possa invertire. Cioè, possono esistere equazioni del tipo $ax + by + c = 0$, le cui infinite soluzioni rappresentano punti del piano che non stanno sopra una stessa retta ?
In effetti, poco più avanti nell' unità didattica, verrà fatto vedere, attraverso esempi che considerano tutti i casi possibili, che *ad ogni equazione di primo grado in due variabili corrisponde una retta i cui punti hanno per coordinate le soluzioni dell' equazione stessa*.

A questo punto possono essere proposti esercizi in cui :

- data l' equazione della retta, si chiede di rappresentarla in un sistema di assi cartesiani, trovando le coordinate di due punti appartenenti alla retta stessa.
- data l' equazione della retta, si chiede di verificare l' appartenenza di alcuni punti, alla retta stessa.
- vengono proposte equazioni di rette in cui $c = 0$, per pervenire al risultato che *se nell' equazione di una retta manca il termine noto, la retta passa per l' origine*. E' interessante far notare che vale anche il viceversa.(anche questo fatto verrà ripreso in seguito)

Equazione segmentaria della retta

Se nell'equazione implicita della retta tutti i coefficienti sono diversi da zero, allora abbiamo una retta che non passa per l'origine ed interseca i due assi in due punti distinti A e B.
Le misure $p = \overline{OA},$ e $q = \overline{OB}$ dei segmenti orientati, di origine O, che la retta stacca sugli assi cartesiani, si dicono intercette della retta. Siccome questi punti stanno sulla retta allora soddisfano l'equazione stessa della retta, cioè risulta:



$$ap + c = 0 \qquad e \qquad bq + c = 0$$

da cui si ricava

$$p = -\frac{c}{a}; \qquad q = -\frac{c}{b}$$

e siccome l'equazione si può scrivere sotto la forma:

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

Si ha:

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ che si dice <u>equazione segmentaria</u> della retta.

Come si vede anche dalla precedente figura, dai valori assunti dai coefficienti si possono estrapolare informazioni immediate sulla rappresentazione grafica della retta. Per esempio, le intercette possono essere ricavate immediatamente.

<u>Casi particolari:</u>

Una volta conosciuta l'equazione generale della retta ci potremmo chiedere (come detto prima) cosa accadrebbe se alcuni dei coefficienti *a, b, c,* si dovessero annullare. Per chiarezza e completezza suddividiamo le tre possibilità in casi distinti cioè

a = 0 e b ≠ 0   a ≠ 0 e b = 0   a ≠ 0 e b ≠ 0

(In nessun caso nell'equazione della retta si possono avere *a* e *b* contemporaneamente nulli, nel qual caso l'equazione non descrive una retta).

- a = 0 e b ≠ 0

questo implica che $by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$

essendo sia *c* che *b* dei numeri il loro rapporto darà ancora un numero che indica il punto in cui la retta descritta interseca l'asse delle *y*. Infatti in questo caso abbiamo ottenuto una retta parallela all'asse delle *x* e ad una distanza da questo pari proprio al valore *- c/b*. (Figura 1.3)

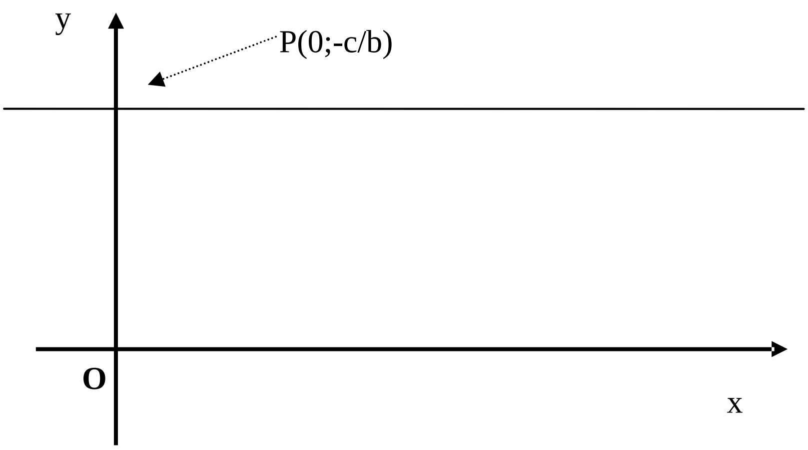


Figura 1.3

- a ≠ 0 e b = 0

questo implica che $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$

analogamente a prima si intuisce che questa rappresenta il caso di una retta parallela all'asse delle *y* e che interseca l'asse delle x in un punto il cui valore è dato proprio dal rapporto *–c/a*. (Figura 1.4)

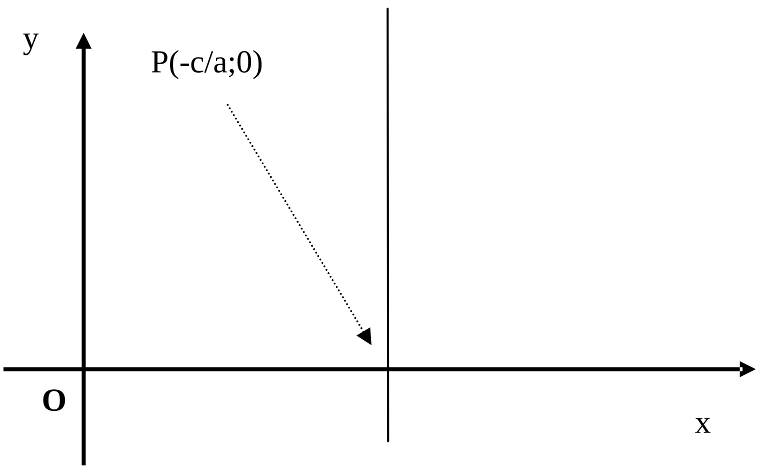


Figura 1.4

- a ≠ 0 e b ≠ 0

Questo rappresenta il caso di una retta che non parallela a nessuno dei due assi cartesiani. (Figura 1.5)

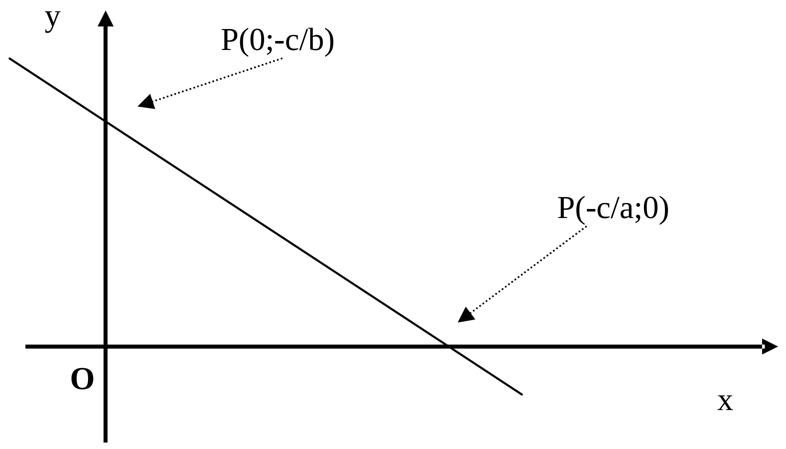


Figura 1.5

Una osservazione importante si può fare, infine sul termine noto (come anticipato prima).
Se *c* = 0 allora la retta passa per l'origine degli assi e ha come unica intersezione il punto P (0;0), questo vale per tutti i casi esaminati prima. (Figura 1.6)

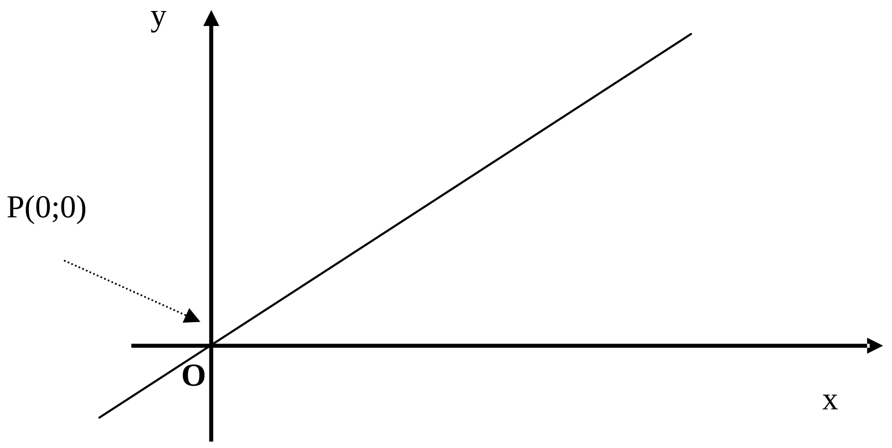


Figura 1.6

Forma esplicita dell'equazione generale della retta:

Dopo aver visto quale sia l'equazione generale della retta e come se ne devono interpretare i coefficienti, cerchiamo la forma esplicita dell'equazione generale.

$$ax + by + c = 0$$

Dalla quale si ottiene

(1.5) $$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

se b ≠ 0 la (1.5) rappresenta l'equazione esplicita della retta.

I due rapporti che compaiono nella (1.5) sono

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$q = -\frac{c}{b}$$

Dove *m* rappresenta la "pendenza" della retta, mentre *q* rappresenta il punto di intersezione tra l'asse delle ordinate e la retta stessa, questo punto è detto anche *intercetta*.
Quindi l'equazione diventa:

(1.6) $$y = mx + q$$

detta equazione esplicita della retta.

Interpretazione angolare del coefficiente *m* :

Prendiamo due punti $P_1(x_1;y_1)$ e $P_2(x_2;y_2)$ e sostituiamoli uno alla volta nell'equazione (1.6), otteniamo due equazioni lineari

(1.7) $$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + q \\ y_2 &= mx_2 + q \end{aligned}$$

dove il coefficiente *q* è uguale per entrambe le equazioni. Sottraendo membro a membro si ottiene quindi

(1.8) $$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= m(x_2 - x_1) \\ m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Come si può vedere nella Figura 1.7 *m* rappresenta il rapporto tra la differenza delle ordinate e quella delle ascisse, ovvero ci dice come varia Δy al variare di Δx .

Si osserva che se Δx = 0 la retta sarà parallela all'asse delle ordinate, mentre se Δy = 0 la retta sarà parallela all'asse delle ascisse (con *m* = 0) .

Si ricava facilmente, anche attraverso esempi, che più grande è *m* in valore assoluto (si farà notare che può essere negativo), più grande è l' angolo che la retta forma con l' asse delle x. Per tale motivo *m* viene detto coefficiente angolare della retta.

Ancora una volta, i valori dei coefficienti ci aiutano, dandoci un' idea quasi immediata di " come sarà fatta " la retta: se $b \neq 0$ si ottiene $m = -\frac{a}{b}$. Mentre se $b = 0$ non si può parlare di coefficiente angolare della retta, e quest' ultima è parallela all' asse y .

Osservazioni:

• Se la retta passa per l' origine, per quanto detto prima, $c = 0$ e la (1.6) diventa

$$y = mx$$

• Consideriamo la *bisettrice* del primo e del terzo quadrante. Ogni suo punto è equidistante dagli assi coordinati. Inoltre le coordinate dei punti di questi quadranti, hanno lo stesso segno. Pertanto l' equazione della bisettrice del primo e del terzo quadrante è:

$$y = x$$

Ragionando analogamente si prova che l' equazione della bisettrice del secondo e del quarto quadrante è:

$$y = -x$$

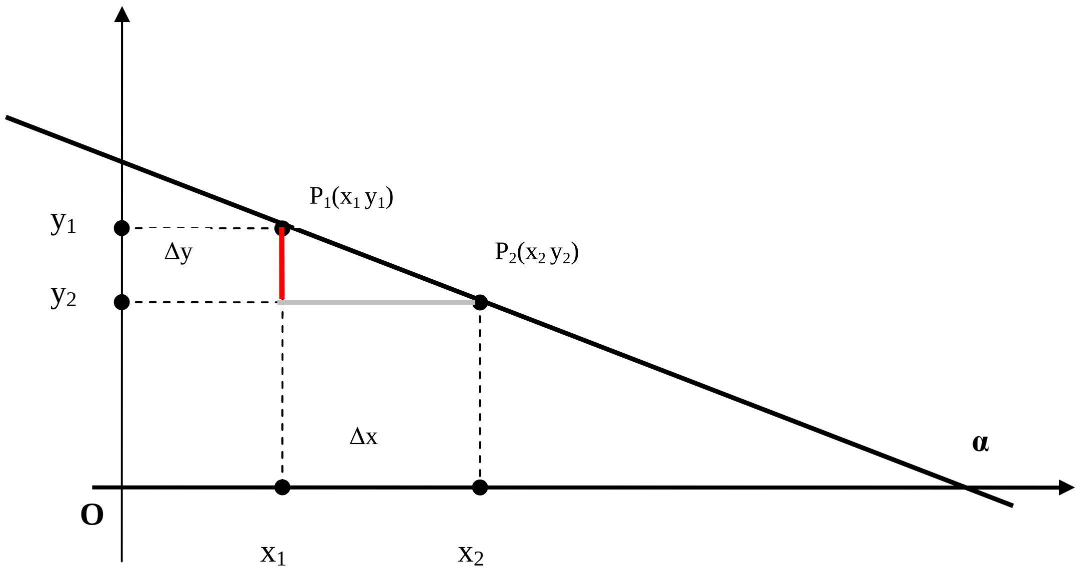


Figura 1.7

Dal punto di vista "grafico" m ci dice quale è la pendenza della retta; per chiarire questo concetto, chiamato α l' angolo che la retta r forma con la semiretta sull' asse x avente punti ad ascisse positive, possiamo dire che se $m > 0$ allora 0° < α < 90° oppure 180° < α < 270° , se m < 0 allora 90° > α > 180° oppure 270° > α > 0° .
In maniera dinamica, questo fatto può essere visto in modo convincente utilizzando *Cabrì*.

Dopo aver visto l'equazione esplicita della retta, quali e cosa sono i parametri che vi compaiono passiamo a considerare altre nozioni fondamentali che risultano utili nell'analisi della geometria piana.

SISTEMI DI RETTE:

Condizione di parallelismo:

Diamo le seguenti definizioni:
Definizione (di rette incidenti) Date due rette r ed s, tali rette si diranno incidenti se hanno uno ed un solo punto di intersezione.

Definizione (di rette parallele) Date due rette r ed s, tali rette si diranno parallele se o non hanno alcun punto in comune o hanno infiniti punti in comune ossia sono coincidenti
Vale allora il seguente

Teorema (della reciproca posizione di due rette nel piano) Date due rette r ed s allora queste due rette saranno o incidenti o parallele

Disponendo allora della equazioni di due rette scritte nella forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

se esiste un punto di intersezione le sue coordinate si otterranno dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Procediamo quindi alla ricerca delle soluzioni di questo sistema utilizzando il metodo dei determinanti (Cramer).
Dobbiamo allora calcolare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$$

Il sistema ammetterà una soluzione e quindi le due rette si intersecheranno in un solo punto se e solo se

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$$

Ossia se:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

E in questo caso le soluzioni saranno date da:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Se Δ = 0 le due rette potranno o non avere alcun punto in comune o avere infiniti punti in comune e quindi saranno parallele. Se Δ = 0 si avrà allora che:

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$$

da cui con semplici passaggi algebrici si ottiene

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$

Ricordando ora che se la retta è scritta nella forma esplicita

$$y = mx + q$$

il coefficiente angolare è:

$$m = -\frac{a}{b}$$

se Δ = 0 ciò significa che

$$m_1 = m_2$$

ossia che le due rette date hanno lo stesso coefficiente angolare. Possiamo allora enunciare il seguente teorema:

Teorema (delle rette parallele) Date le equazioni di due rette scritte nella forma:

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}$$

si potranno verificare i seguenti tre casi:

1. $\Delta \neq 0$ allora le due rette date si intersecheranno in uno ed in un solo punto (incidenti).
2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \quad e \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ allora le due rette sono parallele e non avranno alcun punto in comune.
3. $\Delta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \quad e \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ allora le due rette sono parallele e hanno infiniti

   punti in comune ossia sono coincidenti.

Occorre fare a questo punto diversi esempi, soprattutto per mettere in evidenza,non solo i concetti nuovi inerenti al legame tra i coefficienti e le reciproche posizioni delle rette,ma anche la nuova applicazione appena introdotta dei sistemi lineari, visti adesso come strumento per la ricerca di " punti in comune " .
A tale proposito può essere utile confrontare la teoria della classificazione dei sistemi lineari in base all' esistenza ed alla natura delle soluzioni (considerando quindi anche la proporzionalità dei coefficienti), con l' ultimo schema visto,che riassume la casistica delle posizioni reciproche di rette.

Condizione di ortogonalità:

Definizione (di rette perpendicolari) Date due rette y ed y_1, tali rette saranno tra loro perpendicolari se sono incidenti e formano tra di loro quattro angoli retti.

Possiamo enunciare il seguente:

Teorema (delle rette perpendicolari) Date le equazioni di due rette scritte nella forma esplicita, tali rette saranno tra di loro perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1 .

Dim.
Date due equazioni lineari (che descrivano due rette perpendicolari tra loro)

(1.9)
$$y = mx + q$$
$$y_1 = mx_1 + q$$

se ne vuole costruire la condizione in funzione dei loro coefficienti *m*.
Trasportando le due rette in modo tale che la loro intersezione coincida con l'origine degli assi cartesiani le equazioni precedenti diventano

$$y = mx$$
$$y_1 = mx_1$$

Consideriamo adesso una retta di equazione *x = 1* che interseca le due rette rispettivamente nei punti A (1; m) e B (1; m_1) (vedi Figura 1.9)

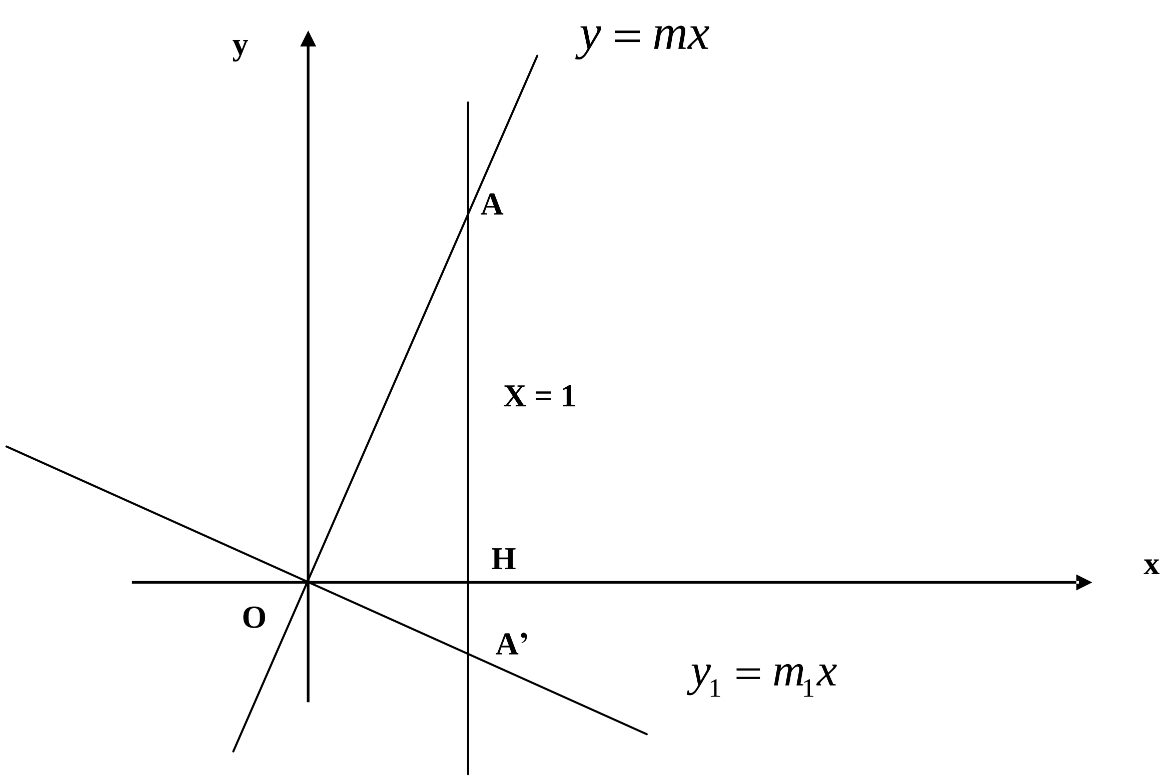


Figura 1.9

In base al teorema di Pitagora e al suo inverso, la condizione necessaria e sufficiente affinché il triangolo *AOA'* sia rettangolo, ovvero che le due rette siano perpendicolari, è che:

1) $\overline{AA'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2$

Essendo

$\overline{AA'} = |m - m'|, \quad \overline{OA} = \sqrt{1+m^2} \quad e \quad \overline{OA'} = \sqrt{1+m'^2}$ la 1) diventa:

$m^2 - 2mm' + m'^2 = 1 + m^2 + 1 + m'^2 \rightarrow -2mm' = 2$ e quindi

$mm' = -1$

o anche $m = -\dfrac{1}{m'}$

Pertanto condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano perpendicolari è che il prodotto dei loro coefficienti angolari sia uguale a -1 ; ossia che il coefficiente angolare dell'una sia l'opposto dell'inverso di quella del'altro.

Se le rette sono date in forma generale :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Essendo $m = -\dfrac{a}{b}$ ed $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ abbiamo la forma più generale che è rappresentata dalla formula:

$$aa_1 + bb_1 = 0.$$

<u>Retta passante per un punto dato e perpendicolare ad una retta data</u>

Dato un punto $P_1(x_1, y_1)$ vogliamo scrivere l'equazione di una retta *p* passante per P_1 e perpendicolare ad una retta data *r* , di equazione:

$$ax + by + c = 0$$

Mentre la retta *p* di equazione:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Affinché questa retta passi per il punto P_1 deve essere:

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$

da cui:

$$c_1 = -a_1x_1 - b_1y_1$$

La condizione di perpendicolarità vincola i coefficienti incogniti, a_1 , b_1 , della retta *p* con quelli dell'equazione data:

$$aa_1 + bb_1 = 0$$

Che fornisce (a meno di un fattore di proporzionalità):

$$a_1 = b, \qquad b_1 = -a$$

tenendo conto di ciò abbiamo:

$$bx - ay - bx_1 + ay_1 = 0 .$$

Quindi l'equazione della retta p è:

$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$$

Se la retta r è data mediante la sua equazione esplicita:

$$y = mx + q \qquad (m \neq 0)$$

Allora l'equazione della retta p è:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Osserviamo che, data la retta s di equazione $y = mx + q$ tutte le rette di equazione $y = -\frac{1}{m}x + k$ sono, qualunque sia k, perpendicolari ad s.

Fascio proprio di rette:

Definiamo un fascio di rette proprio come l'insieme di tutte e sole le rette del piano che passano per uno stesso punto detto centro o sostegno del fascio.

Quindi siano:

$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Le equazioni di due rette distinte r ed r_1 che si incontrano in un punto P.

Si chiama combinazione lineare delle due equazioni, l'equazione:

$$l(ax + by + c) + l_1(a_1x + b_1y + c_1) = 0$$

Ove l ed l_1 sono due numeri qualunque purché non entrambi nulli. Quest'ultima equazione rappresenta una retta s passante anch'essa per il punto P. I numeri l ed l_1 sono detti parametri della combinazione lineare.

Per:

$l \neq 0, \qquad l_1 = 0$

si ritrova l'equazione di r e per:

$l = 0, \qquad l_1 \neq 0$

quella di r_1.

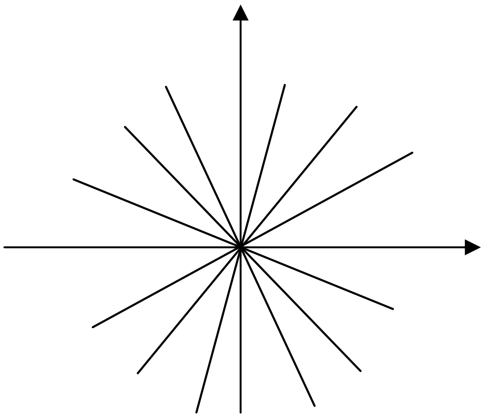
Possiamo quindi dire che *l'equazione di una retta di un fascio proprio si può scrivere sotto forma di combinazione lineare delle equazioni di due rette distinte del fascio.*
A condizione di mantenere $l \neq 0$ si può porre:

$$t = \frac{l_1}{l}$$

e quindi avere la forma :

$$ax + by + c + t(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$$

al variare di t si ottengono tutte le rette del fascio meno la r_1 , la quale corrisponde infatti alla coppia $l = 0, \qquad l_1 \neq 0$.



Fascio improprio di rette:

Possiamo definire un fascio improprio di rette come l'insieme di tutte e sole le rette di un piano parallele ad una retta data.

Data quindi una retta di equazione

(1.11) $$ax + by + c = 0$$

Risulta evidente per quanto detto prima che i coefficienti a e b non variano se consideriamo tutte le rette che si trovano nelle stesso piano della (1.11) e ad essa parallela, poiché il coefficiente angolale m rimane invariato. L'unico termine che cambia è invece il termine noto c . Quindi possiamo dire che *l'equazione del fascio di rette improprio* sarà dato dalla equazione

(1.12) $$ax + by + K = 0$$

Dove K varierà a seconda della retta del fascio che si va a considerare.

Distanza di un punto da una retta:

Cerchiamo ora un' equazione che ci consenta di trovare la *distanza di un generico punto da una retta data*; questa relazione risulta spesso di grande utilità.

Consideriamo un punto generico $P_1(x_1;y_1)$ e una generica retta di equazione $ax + bx + c = 0$.
Utilizzando la relazione trovata per la condizione di perpendicolarità troviamo l'equazione della retta ortogonale a quella data e passante per il punto P_1 .

Scriviamo quindi

$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$$

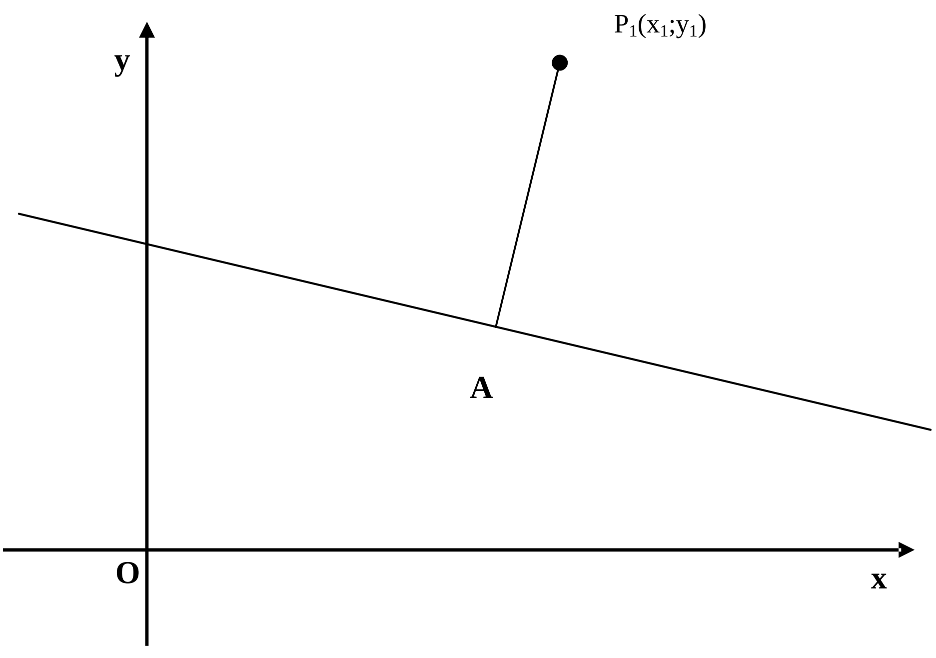
ora troviamo le coordinate del punto di intersezione tra le due rette risolvendo il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0 \end{cases}$$

una volta trovate le coordinate del punto di intersezione con i soliti calcoli sarà possibile conoscere la distanza tra il punto e la retta.
Per comodità diamo la formula generale per trovare la distanza.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ecco la figura di riferimento:



Osservazione

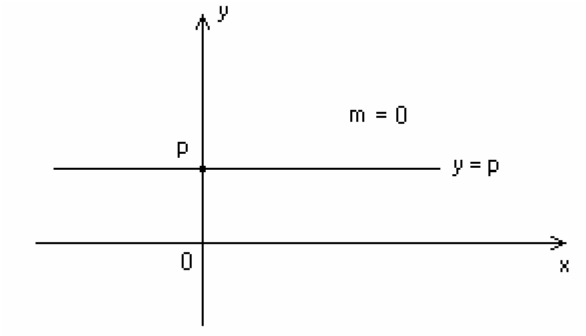
E' semplice intuire che ogni funzione polinomio di primo grado in ha per grafico una retta.

Si dice allora che la funzione $y = mx + q$, il cui grafico è una retta, è l'equazione della retta stessa.
Potremmo chiederci se vale il viceversa. Cioè : data una retta (con la relativa equazione), essa rappresenta sempre il grafico di una funzione ?
Proviamo a dare la risposta a questa domanda, facendo un paio di considerazioni (alcune già introdotte) sul coefficiente angolare m .

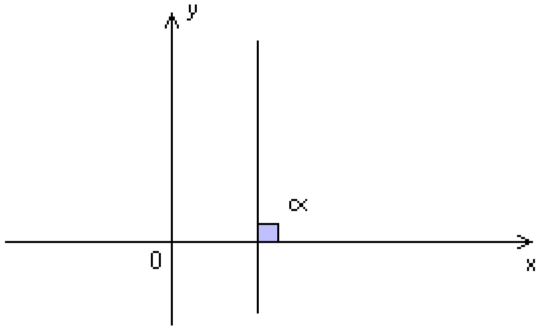
• Se $m = 0$, la pendenza è nulla e la retta è parallela all'asse delle x . In questo caso l'equazione della retta si riduce a :

$$y = p$$

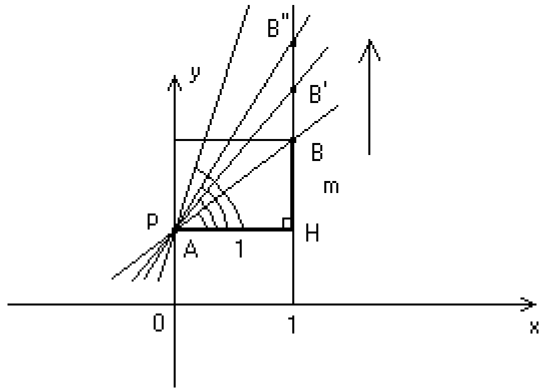
Graficamente :



Cosa succede se l'angolo α che la retta forma con l' asse delle ascisse è un angolo retto ?
In questo caso la pendenza è infinita ed m , definito come un rapporto fra cateti, non può essere calcolato numericamente; esso non assume alcun valore reale.



La cosa potrebbe essere vista (come passaggio al limite) partendo da una certa pendenza ed aumentandola progressivamente. Si vede così che il parametro m tende all'infinito. Per questo motivo si dice che la pendenza è infinita :

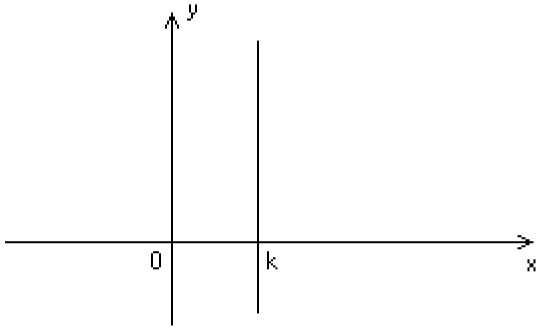


Il rapporto fra i cateti BH , B'H , B''H ecc. ed il cateto AH (supposto costante = 1) tende quindi all'infinito.

Abbiamo così "scoperto" che non tutte le rette del piano sono rappresentabili da una funzione del tipo

$$y = mx + q$$

Le rette di equazione $x = k$:



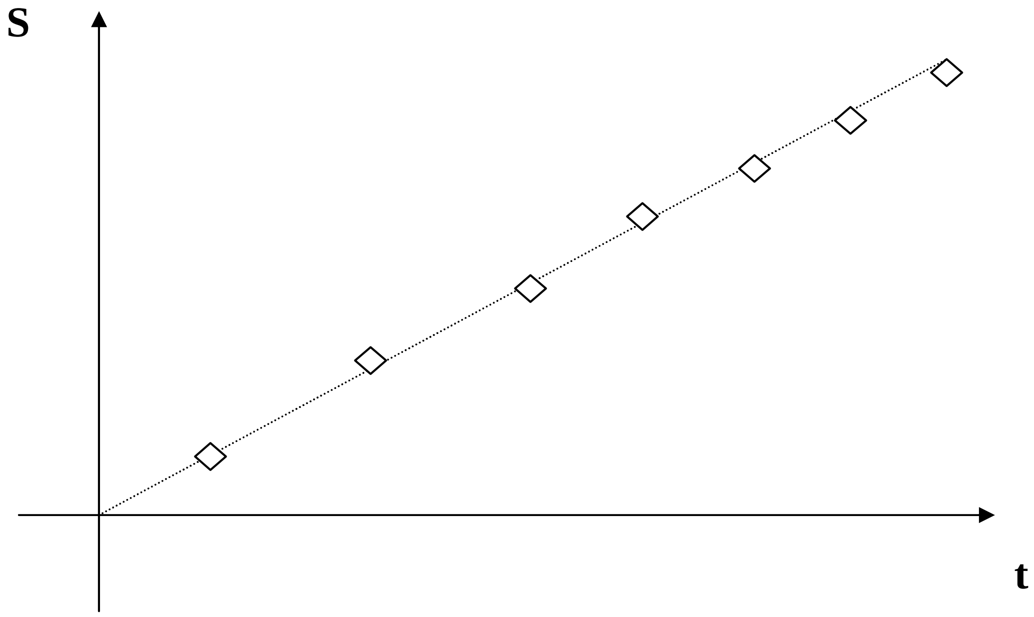
dove k è un numero reale qualunque, sono rette parallele all'asse delle y . Queste rette non rappresentano una funzione; perché una funzione, per essere tale, deve avere una sola immagine per ogni valore di x .
In questo caso, per il solo valore $x = k$ corrispondono infiniti valori di y .

Considerazioni ed applicazioni

Lo studio della retta intesa come equazione lineare e come funzione, risulta spesso utile anche per la comprensione di molte leggi fisiche. Infatti quando si studiano leggi della fisica , come ad esempio il moto dei corpi, è utile rappresentare queste leggi con dei grafici. In fisica l'uso dei grafici risulta di fondamentale importanza per lo studio dei fenomeni e per l'immediata comprensione dell'evoluzione del fenomeno stesso. Di seguito faremo alcuni esempi che più frequentemente si possono incontrare.

• Moto rettilineo uniforme:

Uno dei primi moti che si studiano quando si affronta la questione del moto dei corpi è il moto rettilineo uniforme. In un ipotetico esperimento si potrebbero registrare con un cronometro i tempi che l'oggetto (una biglia o un carrello senza attrito) impiega a percorrere delle distanze. Una volta raccolti i dati allora essi possono essere inseriti in un grafico spazio-tempo.



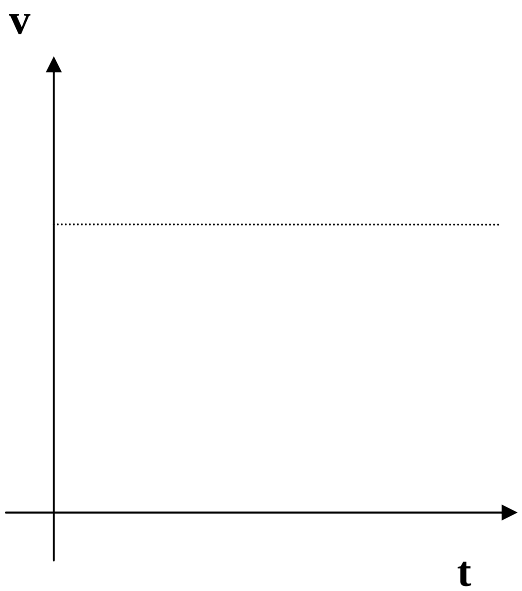
Dove sull'asse delle ordinate segniamo i dati relativi allo spostamento dell'oggetto, mentre sull'asse delle ascisse segnamo i tempi registrati con il cronometro. Se il moto dell'oggetto è di tipo rettilineo uniforme, allora i nostri dati si disporranno in questo grafico (grossomodo) lungo una linea retta. Infatti l'equazione del moto rettilineo uniforme è

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

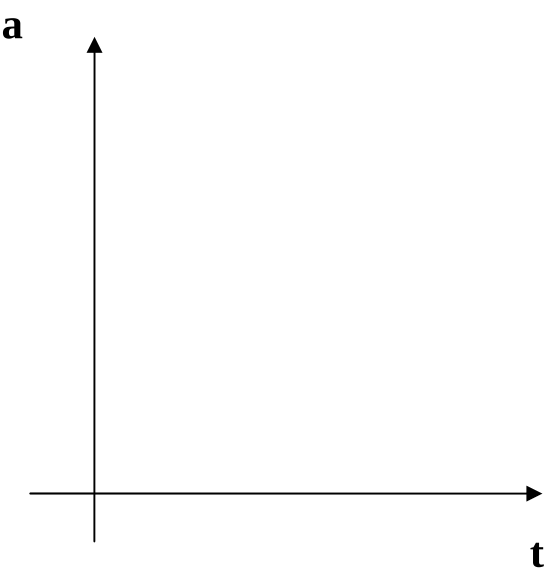
Più conosciuta nella forma $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Infatti nel moto rettilineo uniforme l'oggetto percorre distanze uguali in intervalli di tempo uguali.

Si faccia attenzione al fatto che il grafico può essere diverso pur rappresentando lo stesso fenomeno. Ad esempio sempre analizzando il moto rettilineo uniforme è facile vedere che se sull'asse delle ordinate mettiamo i valori della velocità, otterremo un grafico analogo a quello sottostante: nel grafico di sinistra vediamo che il moto è descritto da una retta parallela all'asse del tempo, proprio perché se la velocità rimane costante per tutta la durata dell'esperimento allora essa avrà un valore che rimarrà inalterato al variare del tempo. Nel grafico di destra invece il moto è descritto da una retta che è parallela all'asse del tempo ed essendo (nel caso di questo moto) l'accelerazione sempre uguale a zero allora la retta che descrive il moto è coincidente con l'asse del tempo.

Valore costante della velocità



Valore nullo dell'accelerazione



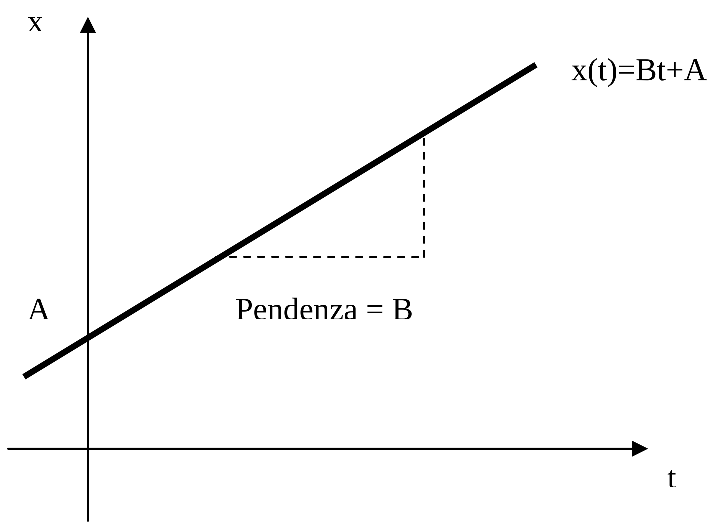
In molti altri casi così come in questo la dipendenza lineare dei parametri fisici può essere rappresentata da una retta.
Ora vediamo come le equazioni della fisica nel caso del moto considerato in realtà altro non sono che equazioni di rette.
Patiamo dall'equazione vista prima

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

prendendo $t_0 = 0$ riscriviamo l'equazione nella forma

$$x = vt + x_0$$

Ma questa altro non è che $x(t) = Bt + A$ ovvero proprio l'equazione esplicita della retta, dove i coefficienti A e B sono rispettivamente l'intercetta e la pendenza della retta stessa.



::

Proposta di verifica sommativa

Esercizio n° 1

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto *P* e perpendicolare alla retta *r* dati:

a) *P(1;5)* $r: x-4y=0$

b) *P(4;6)* $r: y=2x$

c) *P(3;-4)* $r: 3x+2y-1=0$

Esercizio n° 2

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto *P* e parallela alla retta *r* dati:

a) *P(1;2)* $r: x-4y+5=0$

b) *P(3;4)* $r: y=-4x+9$

c) *P(5;5)* $r: x+6y-2=0$

Esercizio n° 3

Calcolare la distanza *d* del punto *P* dalla retta *r* dati:

a) *P(1;1)* $r: 2x-3y-17=0$

b) *P(-1;7)* $r: x-4=0$

Esercizio n° 4

Determinare la distanza *d* fra le rette parallele *r* ed *s* di equazioni:

$$r : y = \frac{1}{2}x - 2 \; ; \qquad s : 3x - 6y + 4 = 0$$

Esercizio n° 5

Determinare l'equazione della retta *r* passante per il punto *P(1;2)* e perpendicolare alla retta *s* determinata dai punti *A(2;0)* e *B(3;1)*, e calcolare l'area del triangolo *PAB*

Esercizio n° 6

Dopo aver determinato le coordinate del punto *C* equidistante da *A(8;1)* e *B(6;4)*, e appartenente alla retta $3x - 2y - 6 = 0$ trovare l'area del triangolo *ABC.*

Esercizio n° 7

Le equazioni delle rette contenenti i lati di un triangolo sono:

$$AB : x - 2y + 4 = 0 \; ; \; BC : 3x + y - 4 = 0 \; ; \; AC : x + 5y + 4 = 0$$

a) Determinare le coordinate dei vertici *A,B,C;*
b) Determinare l'equazione della retta *t* parallela alla retta *AB* e passante per *C* e l'equazione della retta *n* perpendicolare ad *AB* e passante per B
c) Detto *D* il punto d'intersezione tra *t* ed *n* , determinare l'area del trapezio *ABCD*;
d) Determinare il punto *P* della retta *BC* equidistante da *A* e da *C*.