Università degli Studi di Ferrara

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

PERCORSO DIDATTICO:

NUMERI COMPLESSI ED EQUAZIONI ALGEBRICHE. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ALGEBRICHE IN CAMPO REALE E LORO RISOLUZIONE SIA CON IL METODO ALGEBRICO CHE CON QUELLO GRAFICO. (RETTA E PARABOLA)

Specializzanda
Giovanna Bellino

Supervisori di tirocinio
Prof. Fabiano Minni
Prof. Luigi Neri
Prof. Luigi Tomasi

11 – FEBBRAIO - 2008

Anno accademico 2007/2008

CAPITOLO 1

1.1 Finalità dell'insegnamento della matematica

"Se la funzione della scuola è quella di formare il futuro cittadino, l'individuazione delle competenze dell'area logico-matematica risulta una diretta conseguenza dell'individuazione delle competenze di carattere logico-matematico che il cittadino deve possedere per partecipare attivamente alla vita sociale". [Paola, 2001]

I ragazzi spesso non si rendono conto che ciò che imparano durante le ore di matematica potrà avere una ripercussione sul loro futuro e la domanda: "Ma a cosa mi serve tutto questo?" è ricorrente. La risposta che si danno nella maggior parte dei casi è "A niente!" e, forse, sono gli stessi insegnanti che a volte, puntando l'attenzione sulle tecniche di calcolo, sui prodotti, invece che sui processi, contribuiscono a diffondere questa convinzione.

L'idea comune sembra, invece, essere quella di una disciplina arida, dogmatica, fatta di regole rigide e preconfezionate da vendere agli studenti con le "istruzioni per l'uso".

Ciò è dovuto al fatto che stiamo ancora pagando le conseguenze di una tradizione didattica che ha spesso umiliato l'aspetto creativo e problematico della materia a privilegio delle tecniche di calcolo e dei procedimenti meccanici, cui si aggiungeva un impianto simbolico rigidamente imposto.

Così la matematica appare una materia per pochi eletti, anche se ciò è in forte contrasto con la società odierna, nella quale la matematica assume un ruolo portante in molti campi, da quello scientifico a quello tecnologico, da quello economico a quello delle comunicazioni, ecc.

Migliorare la comune immagine della matematica è possibile, ma non basta migliorarne l'"estetica" - proporre una matematica divertente e spettacolare certamente aiuta - occorre convergere l'attenzione sui processi di apprendimento degli allievi, stimolando gli studenti a implicarsi in prima persona nel proprio processo di costruzione della conoscenza [D'Amore, 1999].

Se l'obiettivo che ci si propone è quello di andare oltre la costruzione della conoscenza verso un "uso" della conoscenza (competenza), allora assume grande importanza la sfera affettiva tanto degli allievi, da cui nasce la motivazione, quanto dell'insegnante, che deve far trasparire agli alunni l'amore per la disciplina.

Per costruire conoscenze-competenze è necessario il passaggio dalla motivazione alla volizione da parte degli studenti: "[...] la competenza racchiude in sé come oggetto non solo le conoscenze chiamate in causa, ma fattori metaconoscitivi: l'accettazione dello stimolo a farne uso, il desiderio di farlo, il desiderio di completare le conoscenze che si rivelassero, alla prova dei fatti, insufficienti e dunque lo stesso desiderio di aumentare la propria competenza" [D'Amore, 1999]. Ad ogni argomento proposto si deve pertanto far corrispondere un'azione didattica sugli allievi che deve coinvolgere tanto la sfera cognitiva quanto quella affettiva.

1.2 <u>Le equazioni e disequazioni algebriche nei programmi ministeriali e nei curricoli di Matematica proposte dall'Unione Matematica Italiana</u>

In questo paragrafo si vuole inquadrare l'argomento preso in esame in questo percorso didattico, nel contesto dei programmi ministeriali della scuola secondaria superiore e nei curricoli di Matematica proposte dall'Unione Matematica Italiana.

Analizzeremo:

- i programmi di Matematica nei licei di ordinamento;
- i programmi di Matematica del Piano Nazionale per l'Informatica;
- i programmi di Matematica elaborati dalla Commissione Brocca;
- le proposte di nuovi curricoli di Matematica dell'Unione Matematica Italiana.

1.2.1 <u>I PROGRAMMI DI MATEMATICA NEI LICEI DI ORDINAMENTO</u>

I programmi vigenti nella scuola liceale (Ginnasio e Liceo Classico, Liceo Scientifico), pur essendo datati 1952, sono sostanzialmente quelli della Riforma Gentile del 1923, dal nome del ministro della pubblica istruzione di allora, il filosofo Giovanni Gentile (1875 – 1944).

<u>Ginnasio e Liceo Classico</u>

Nella V classe del Ginnasio è previsto lo studio delle:

- equazioni e problemi di primo grado a un'incognita;

nella I classe del Liceo Classico lo studio di:

- sistemi di equazioni di primo grado;
- equazioni di secondo grado e facilmente riconducibili al primo.

<u>Liceo Scientifico</u>

Al I anno è previsto lo svolgimento del programma di algebra della IV e della V ginnasiale, in particolare:

- equazioni e problemi di primo grado ad una incognita;

Al II anno lo studio delle:

- equazioni di secondo grado o ad esse riconducibili;
- esempi di sistemi di equazioni di grado superiore al primo risolubili con equazioni di primo o secondo grado.

1.2.2 <u>I PROGRAMMI DI MATEMATICA DEL PIANO NAZIONALE PER L'INFORMATICA</u>

Negli anni Settanta e Ottanta, nella scuola secondaria superiore si diffondono varie sperimentazioni di tipo scientifico con l'obiettivo di rinnovare i programmi delle discipline scientifiche.

Nel 1985, per iniziativa dell'allora Ministro della Pubblica Istruzione F. Falcucci, viene iniziato un vasto piano di aggiornamento – Piano Nazionale per l'Informatica – degli insegnanti di matematica e fisica che prevedeva anche finanziamenti adeguati alle scuole per la costituzione di laboratori di informatica.

L'intento del PNI era di introdurre l'informatica nelle scuole di ogni ordine e grado. In realtà il progetto, che pure fu di grande portata, coinvolse solo la Scuola secondaria superiore. Viene fatta la scelta di integrare l'insegnamento di elementi di informatica all’interno dei programmi di matematica e fisica perché approcciarsi all’informatica, in indirizzi non specialistici, dovesse mirare “a creare nella scuola un clima culturale volto a percepire informaticamente problematiche vecchie e nuove”, tranne nelle scuole tecniche indirizzate all’informatica.

Il PNI riguarda quindi soltanto i programmi di matematica e di fisica, mentre le altre materie non vengono toccati, in particolare nei licei, e viene avviato nella scuola a partire dall’anno scolastico 1987/88, come progetto sperimentale proposto dal Ministero stesso.

I programmi del biennio furono elaborati da un comitato di matematici misto, formato da docenti universitari ed ispettori, appositamente istituito dal Ministro. Il comitato, ritenne, sia per la forte evoluzione che si era registrata nel pensiero matematico negli ultimi decenni, sia per la nuova impostazione metodologica che era andata emergendo, che non ci si potesse limitare ad una semplice aggiunta di contenuti, ma fosse necessario un riesame completo delle mete formative, e quindi dei contenuti e delle metodologie. In linea con una visione unitaria del biennio, elaborò due soli programmi, uno più intenso, diciamo di matematica “forte” (licei scientifici, istituti tecnici industriali,...), ed uno più ristretto, detto programma “debole” (licei classici, magistrali,....), che però qualitativamente non si differenzia dal primo.

Diversamente dai vecchi programmi, le scansioni annuali degli argomenti vengono sostituite da 5 grandi temi per il biennio e da 7 temi per il triennio, ciascuno dei quali ha un commento che ne dà la chiave di lettura.

Biennio

Il TEMA 2 “Insiemi numerici e calcolo” prevede al punto e) l’argomento:

- equazioni, disequazioni e sistemi di primo e secondo grado.

Il commento al tema 2 riportato nei programmi ministeriali suggerisce che “Il docente programmerà lo sviluppo da dare al calcolo letterale per abituare l’allievo alla corretta manipolazione di formule, sempre sostenuta dalla comprensione delle procedure da seguire. Si sottolinea, a questo proposito, l’inopportunità del ricorso ad espressioni inutilmente complesse, tenendo presente che la sicurezza del calcolo si acquisisce gradualmente nell’arco del biennio. E’ invece opportuno far osservare che un’espressione algebrica è interpretabile in modo naturale come uno schema di calcolo che può essere illustrato ad un grafo; si potrà anche collegare il calcolo letterale ai linguaggi formali introdotti negli elementi di informatica. Lo studio delle equazioni, delle disequazioni e dei sistemi sarà connesso alla loro rappresentazione sul piano cartesiano, con relative applicazioni a problemi di varia natura; nella risoluzione il docente si limiterà a considerare le soluzioni nell’insieme dei numeri reali. Nel presentare argomenti tradizionali di algebra è opportuno che il docente eviti di dare carattere di teoria ad argomenti che si riducono a semplici artifizi e di fornire classificazioni e regole distinte in situazioni in cui valgono gli stessi principi generali”.

Triennio

Per quanto riguarda i temi del triennio, il PNI dà un suggerimento relativo all'anno in cui svolgere l'argomento. Nel nostro caso si suggerisce la classe terza.

Il TEMA 3 "Funzioni ed Equazioni" prevede al punto 3.a l'argomento:

- disequazioni di II grado. Equazioni e disequazioni fratte e irrazionali. Sistemi di disequazioni.

Si legge nel commento al tema 3: "Nel trattare le disequazioni di secondo grado, come peraltro per le equazioni ed i sistemi, si potranno considerare parallelamente la risoluzione algebrica e la rappresentazione geometrica. Si sottolinea anche l'opportunità di non insistere troppo sulla complessità e ripetitività delle equazioni e disequazioni fratte e irrazionali dovendosi privilegiare sempre, più che la risoluzione fine a se stessa, la comprensione delle loro caratteristiche e delle procedure da seguire. In ogni caso si considereranno soltanto quelle che, ridotte a forma intera, conducono a equazioni e disequazioni di secondo grado".

1.2.3 I PROGRAMMI DI MATEMATICA ELABORATI DALLA COMMISSIONE BROCCA

Contemporaneamente al diffondersi dei programmi di Matematica e Fisica del PNI, nel 1987, la mancata approvazione delle diverse proposte di riforma della Scuola, indusse il Ministro della Pubblica Istruzione a costituire una Commissione, presieduta dall'onorevole Beniamino Brocca – sottosegretario alla Pubblica Istruzione, con il compito di redigere un progetto complessivo di riordino della Scuola secondaria superiore e di riscrivere i programmi della nuova scuola superiore. La Commissione Brocca, composta da più di un centinaio di esperti, ha lavorato per alcuni anni definendo le finalità e l'impianto generale della nuova scuola, elaborando anche i piani di studio degli indirizzi che avrebbero dovuto sostituire la Scuola liceale e tecnica.

La Commissione, suddivisa per gruppi disciplinari e per biennio e triennio, elaborò i nuovi programmi: nel 1998 quelli del biennio e nel 1990 quelli del triennio. Il progetto elaborato dalla Commissione Brocca fu quindi attivato come uno dei tanti progetti sperimentali a partire dall'anno scolastico 1991/1992 con la differenza che questa sperimentazione è stata proposta dallo stesso Ministero della Pubblica istruzione ai vari istituti di istruzione secondaria.

Il progetto riguarda i programmi di tutte le materie (a differenza del PNI che riguarda solo matematica e fisica) e di tutti gli indirizzi e prevedeva una forte "licealizzazione" dell'istruzione secondaria superiore, con l'introduzione di un orario più consistente per le discipline di carattere generale e una certa riduzione – particolarmente nell'istruzione tecnica – delle discipline di carattere tecnico professionale.

La riforma della scuola secondaria superiore proposta dalla Commissione Brocca non venne approvata dal Parlamento.

I programmi della Commissione Brocca diventarono quindi dei programmi facoltativi, introdotti in modo sperimentale nei licei (licei scientifico-tecnologico, liceo linguistico, liceo psico-pedagogico, liceo delle scienze sociali,….).

Analogamente al PNI, la Commissione Brocca propone che gli argomenti dei programmi si articolino: al biennio in 5 temi e al triennio in 7 temi. Solo per il triennio si indicano le possibili classi in cui gli argomenti possono essere trattati.

Biennio, programma A (classico, linguistico, socio- psico- pedagogico e artistico)
Il TEMA 2:"Insiemi numerici e calcolo" prevede al punto 4 l'argomento:
2.4: equazioni, disequazioni e sistemi di primo grado.

Biennio, programma B (scientifico, scientifico - tecnologico, economico)
Il TEMA 2: "Insiemi numerici e calcolo" prevede al punto 4 l'argomento:
2.4: equazioni e sistemi di primo e secondo grado, disequazioni di primo grado.

Il commento al tema 2 che troviamo riportato nei programmi ministeriali, suggerisce al docente "che questi deve programmare lo sviluppo da dare al calcolo letterale per abituare lo studente alla corretta manipolazione di formule, sempre sostenuta dalla comprensione delle procedure da seguire. Si sottolinea, a questo proposito, l'inopportunità del ricorso ad espressioni inutilmente complesse, tenendo presente che la sicurezza nel calcolo si acquisisce gradualmente nell'arco del biennio. È invece opportuno fare osservare che un'espressione algebrica è interpretabile in modo naturale come uno schema di calcolo che può essere illustrato da un grafico; si può anche collegare il calcolo letterale ai linguaggi formali introdotti negli elementi di informatica ".

Triennio, programma A (classico, linguistico, socio – psico – pedagogico, artistico)
Il TEMA 3 "Funzioni ed Equazioni" prevede al punto 3.a) l'argomento :
- equazioni, disequazioni e sistemi di secondo grado.

Si suggerisce la classe terza.

Triennio, programma B (scientifico e scientifico - tecnologico)
Il TEMA 3 "Funzioni ed Equazioni" prevede al punto 3.a) l'argomento :
- disequazioni di secondo grado. Equazioni e disequazioni fratte e irrazionali. Sistemi di disequazioni.

Si suggerisce la classe terza.
Si legge nel commento al tema 3 di entrambi : " che nello sviluppo di equazioni, disequazioni e sistemi di secondo grado si considererà parallelamente la risoluzione algebrica e la rappresentazione geometrica, evitando inutili casistiche particolari; è evidente che in questo caso le soluzioni saranno da ricercare nel campo dei numeri reali ".
Progressivamente, a partire dall'inizio degli anni Novanta, i Programmi della Commissione Brocca sono stati utilizzati come parte integrante per i vari progetti "assistiti" di rinnovamento (Mercurio, Igea, Sirio,….) nell'istruzione tecnica e professionale, proposti dallo stesso Ministero della Pubblica istruzione, dalle varie direzioni.

1.2.4 CURRICOLO DI MATEMATICA PROPOSTO DALL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA (2001 – 2004)

Nel 2000 – anno internazionale della Matematica – l'Unione Matematica Italiana (UMI) ha insediato una Commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai mutati bisogni della società all'inizio del nuovo secolo.

La Commissione ha deciso di elaborare un curricolo di matematica definendone le conoscenze fondamentali da acquisire, indipendentemente, per quanto riguarda il ciclo secondario, dalla varietà dei suoi indirizzi. E' emersa perciò l'idea della "matematica per il cittadino", cioè di un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.

Nel 2001 l'U.M.I. ha presentato una proposta di curricoli di matematica per la scuola primaria e secondaria di I grado. La proposta è stata corredata da numerosi esempi di attività didattiche che la realizzano ed è pubblicata nel volume Matematica 2001.

Nel volume Matematica 2003 e Matematica 2004 si trovano i contenuti di matematica per la parte comune a tutti gli indirizzi di scuola superiore, anch'essi corredati da vari esempi di attività didattiche.

In entrambe le proposte, i curricoli sono strutturati per nuclei, dei quali quattro definiti tematici:

Numeri e algoritmi – Spazio e figure – Dati e previsioni – Relazioni e funzioni

ed altri quattro, detti di processo, - **Argomentare, congetturare, dimostrare – Risolvere e porsi problemi – Misurare - Laboratorio di matematica**, che non hanno contenuti propri, perché trasversali ai primi quattro.

Il Laboratorio di matematica, elencato al termine della lista per la scuola secondaria superiore, era in realtà presente anche nel primo ciclo, ma non come nucleo a sé stante. Il Laboratorio di matematica non costituisce né un nucleo di contenuto né un nucleo di processo, ma si presenta piuttosto come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, sull'uso di strumenti tecnologici e non, finalizzate alla costruzione del significato degli oggetti matematici. Nelle indicazioni metodologiche al curricolo si afferma:

"Il laboratorio di matematica non vuole essere un luogo fisico diverso dalla classe, ma piuttosto un insieme di attività volte alla costruzione di significato degli "oggetti" matematici. Il laboratorio coinvolge quindi persone, strutture, idee".

I progetti di riforma della scuola secondaria superiore più recenti prevedevano due bienni seguiti da un quinto anno di raccordo con gli studi universitari; nel volume Matematica 2003 si trovano proposte per ciascuno dei due bienni e nel volume Matematica 2004 si trova proposto il quinto anno.

Da Matematica 2003, il nucleo "**Relazioni e funzioni**":

Primo biennio

CONOSCENZE

- Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita.
- Sistemi lineari. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite.
- Disequazioni di primo grado in due incognite. Sistemi di disequazioni lineari in due incognite e loro interpretazione geometrica.

ABILITA'

- Utilizzare le proprietà delle operazioni tra i numeri per risolvere un'equazione di primo grado.
- Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.
- Usare disequazioni per rappresentare sottoinsiemi del piano (in particolare, semirette, segmenti, semipiani).

Spunti storici

- Qualche esempio di antiche tecniche, utilizzate dagli Egiziani, dagli Indiani, dagli Arabi, per la risoluzione delle equazioni di primo grado: il metodo della "falsa posizione" semplice.

Si sconsiglia di:

Ridurre lo studio delle equazioni a pure tecniche manipolative per ottenere le soluzioni.

Lo studente innanzitutto dovrà riconoscere e costruire equazioni lineari equivalenti e intenderne il significato.

Secondo biennio

CONOSCENZE

Zeri e segno di funzioni: equazioni e disequazioni di secondo grado, esempi scelti di equazioni, disequazioni, sistemi non lineari.

ABILITA'

- Rappresentare e risolvere problemi di secondo grado, riconoscere problemi di secondo grado privi di soluzioni, rappresentare graficamente e risolvere problemi che si formalizzano con sistemi di secondo grado.
- Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni e disequazioni.

Riflessioni

Il repertorio di esempi di funzioni e equazioni dovrebbe essere abbastanza vasto da coprire le esigenze di applicazioni alla statistica e alla fisica, ma non deve includere funzioni e equazioni inutilmente complicate. Lo studio delle funzioni razionali e delle funzioni lineari va agevolato mediante la composizione di funzioni elementari e con l'uso delle trasformazioni geometriche (in particolare: traslazioni; opportune simmetrie centrali e assiali; cambiamenti delle unità di misura).

Spunti storici

• La ricerca della formula risolutiva per le equazioni di grado superiore al secondo: da Cardano a Galois.

Si sconsiglia di:

• Presentare studio di funzioni e ricerca delle soluzioni di equazioni come problemi separati e tra loro sconnessi.

• Proporre un campionario di regole per risolvere alcuni particolari tipi di equazioni polinomiali e di sistemi, di equazioni e di disequazioni, non lineari. Meglio far sapere (vedi gli spunti storici) che le equazioni algebriche per cui esiste una formula risolutiva sono una sparuta minoranza.

Il curricolo proposto dall'UMI presenta un'attenzione del tutto particolare agli aspetti formativi della matematica, alla matematica nel mondo reale, della stima di un ordine di grandezza, all'uso della approssimazione oltre che dal formalismo matematico, alla visualizzazione dei concetti, allo sviluppo delle capacità di analizzare ed elaborare dati usando anche le nuove tecnologie. Questi aspetti, a volta trascurati nella formazione matematica attuale e nei programmi vigenti, sono fondamentali per avvicinare l'insegnamento della matematica al mondo reale, superando la frattura attuale che la vede separata dalla vita di tutti i gironi e quindi, per troppi allievi, priva di significato. E' opportuno citare a tal proposito un articolo di V. Villani, dove si afferma:

"Per insegnare ad usare la matematica è di fondamentale importanza sfruttare ogni possibile occasione per ricontestualizzarla, ossia per stabilire collegamenti significativi tra la matematica e il mondo reale". [V. Villani, 1995]

Capitolo 2 Percorso Didattico

Il percorso didattico si suddivide in cinque unità:

U.D.1. Equazioni algebriche di primo grado in campo reale e loro risoluzione algebrica e grafica

U.D.2. Disequazioni algebriche di primo grado in campo reale e loro risoluzione algebrica e grafica

U.D.3. Equazioni algebriche di secondo grado in campo reale e loro risoluzione algebrica e grafica

U.D.4. Disequazioni algebriche di secondo grado in campo reale e loro risoluzione algebrica e grafica

U.D.5. Numeri complessi ed equazioni algebriche.

Inizialmente verranno illustrati quelli che si possono definire i "caratteri comuni" alle cinque unità didattiche; successivamente si passerà ad analizzarle in dettaglio specificandone:

- i prerequisiti;
- gli obiettivi specifici;
- i contenuti;
- i tempi dell'intervento didattico;
- le verifiche formative e sommative;
- griglia di valutazione della verifica sommativa, compilata nelle sue parti.

2.1 DESTINATARI

Unità didattica	Istituto	Studenti della classe	Periodo dell'anno in cui verrà svolta l'U.D.	Ore settimanali di matematica previste a livello ministeriale
U.D.1	Liceo Scientifico ad indirizzo PNI	I - II	II-I quadrim.	5(2[1])
U.D.2		I - II	II-I quadrim.	5(2)
U.D.3		II	II quadrim.	5(2)
U.D.4		III	I quadrim.	5(2)
U.D.5		IV[2]	II quadrim.	5(2)

[1] Le ore in parentesi sono di laboratorio.

[2] Nel programma sperimentale del PNI - Piano Nazionale per l'Informatica per i Licei Scientifici i numeri complessi vengono proposti nella classe quarta. L'argomento si inserisce nel Tema n. 2, "Insiemi numerici e strutture". Si cita in particolare "I numeri complessi e loro rappresentazione grafica; radici ennesime dell'unità". Nei commenti ai temi, per quanto riguarda questo argomento, nei programmi del PNI si dice:
"*La trattazione dei numeri complessi si avvarrà anche dell'uso delle coordinate polari e sarà accompagnata da numerose e varie applicazioni; ad esempio le radici dell'unità potranno essere collegate con il problema di inscrivere un poligono regolare di n lati in una circonferenza*."

2.2 PREREQUISITI E LORO ACCERTAMENTO

Per i prerequisiti specifici si rimanda ad ogni singola unità didattica.

Si intendono verificare attraverso il dialogo e lezioni frontali le reali conoscenze ritenute indispensabili per il completo apprendimento degli argomenti che si dovranno trattare. Qualora emergessero gravi lacune, si prevede un percorso di recupero in itinere o pomeridiano. Parallelamente, si tenderà a coinvolgere maggiormente i soggetti deboli, soprattutto durante lo svolgimento di esercizi esemplificativi.

2.3 OBIETTIVI GENERALI DEL PERCORSO DIDATTICO

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dal percorso didattico.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

2.4 OBIETTIVI TRASVERSALI DEL PERCORSO DIDATTICO

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

2.5 OBIETTIVI SPECIFICI

Si rimanda agli obiettivi specifici delle singole unità didattiche.

2.6 CONTENUTI

Per i contenuti si rimanda alle singole unità didattiche.

2.7 SVILUPPO DEI CONTENUTI

Per ogni unità didattica verrà fatta una lista dei contenuti che si intende trattare in classe, ma non tutti verranno sviluppati. Si è scelto, infatti, di sviluppare solo quegli argomenti che risultano fondamentali per la comprensione degli argomenti successivi, e che si presentano meno semplici agli occhi degli studenti.

2.8 METODOLOGIE DIDATTICHE

Lo svolgimento dell'attività didattica avverrà attraverso lezioni dialogate e interattive, dove alle spiegazioni saranno alternate riflessioni collettive, osservazioni, domande flash poste ai singoli alunni. Questo modo di procedere se da un lato contribuisce a mantenere viva l'attenzione degli studenti, dall'altro consente di intervenire in modo mirato ed individuale qualora fosse necessario.

Questo contribuisce ad instaurare in classe un clima di serenità e di dialogo, in cui gli studenti si sentono liberi di esprimere il proprio parere, di esporre i propri dubbi e di chiedere chiarimenti senza paura né di sbagliare né di essere valutati.

Importante è riflettere sulle difficoltà che verranno riscontrate, sulle convinzioni, sugli errori commessi, incoraggiando gli studenti ad assumersi le proprie responsabilità nel processo di apprendimento. L'errore verrà usato come stimolo naturale per riflettere, per interpretare e per modificare apprendimenti non corretti; in questo modo gli errori non sono interpretati negativamente, ma assumono un valore formativo.

Per mantenere elevato il livello di attenzione ed interesse della classe verranno proposte attività coinvolgenti e motivanti ed in quest'ottica è interessante sviluppare un approccio storico sulla risoluzione delle equazioni algebriche. Attraverso la storia della matematica si potrebbero creare situazioni problematiche, in cui stimolare i ragazzi a scoprire procedimenti risolutivi stimolando così lo spirito della ricerca e della scoperta.

Infine, mediante l'utilizzo del software Cabri Géomètre II Plus e Derive , o analoghi, si cercherà di stimolare la creatività degli studenti, facendo presente che il laboratorio sarà utilizzato come parte integrante dell'attività didattica, dal processo intuitivo a quello della formalizzazione.

i quegli esercizi che hanno apportato più incertezze e difficoltà.

2.9 MATERIALI E STRUMENTI UTILIZZATI

- Lavagna tradizionale e quindi anche gessi e cimosa.
- Libri di testo.
- Materiale trovato su alcuni siti internet.
- Lucidi.
- Fotocopie.
- Calcolatrice scientifica.
- Uso del computer con software: Cabri Géomètre II Plus , Derive.
- Schede di lavoro per il laboratorio di informatica.

2.10 CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO

Si ritiene opportuno controllare l'apprendimento degli studenti attraverso due tipi di verifica:

verifiche formative effettuate giorno per giorno attraverso brevi colloqui, esercitazione scritta in classe, verificando l'acquisizione progressiva delle conoscenze, competenze e capacità previste come obiettivi specifici. Questo aiuterà a comprendere meglio le difficoltà che hanno ostacolato l'apprendimento e quindi permetterà di progettare l'attività di recupero in itinere;
verifiche sommative suddivise in:

- scritta che si effettuerà alla fine dell'unità didattica e che permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti;
- orale per controllare il livello di apprendimento e di studio.

2.11 GRIGLIA PER LA VALUTAZIONE

Per determinare gli esiti della verifica sommativa assegniamo ad ogni esercizio un punteggio. La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze, competenze e capacità richieste per svolgerli.
Nell'attribuire il punteggio completo, nullo o nella frazione intermedia, teniamo conto dei seguenti indicatori suggeriti dal Ministero dell'Istruzione per la correzione della prova scritta di Matematica all'esame di Stato:

I. Conoscenze specifiche.
II. Competenze nell'applicare le procedure ed i concetti acquisiti.
III. Capacità logico e argomentative.

Si evidenzia che verranno prese in considerazione anche la completezza nella risoluzione e la correttezza della risoluzione e dell'esposizione, ma nella griglia di valutazione, entreranno tacitamente nelle altre voci.
Nel caso di errore nello svolgimento degli esercizi si attribuisce solo parte del punteggio completo previsto per essi. La griglia di valutazione permette di attribuire un punteggio più oggettivo agli esercizi ed evitare disparità di giudizio del lavoro degli studenti.

2.12 ATTIVITA' DI RECUPERO

Affinché l'attività didattica risulti efficace e completa, si prevede di svolgere eventuali attività di recupero così articolate:
lavoro a casa: ripasso, costruzioni di sintesi e schemi su contenuti e procedimenti;
lavoro in classe: si proporranno nuovi esercizi e schede guidate. Si potrà istituire inoltre uno sportello per gli allievi, in prossimità delle verifiche sommative.
Per individuare gli argomenti che necessitano di recupero, sia a livello collettivo sia a livello individuale, ci si avvarrà della verifica formativa, delle prove orali e dell'attività di collaborazione insegnante-allievo.

2.13 APPROFONDIMENTI

Al termine di ogni capitolo, verranno riportati degli ampliamenti e osservazioni che dovranno sicuramente essere svolti in classe, ma che si è preferito riportare in modo separato dal resto per non interrompere il filo del discorso nei paragrafi in cui viene trattato l'argomento.

2.14 TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO

Si rimanda alle singole unità didattiche.

2.15 GRIGLIE DI VALUTAZIONE

Si propone una griglia di valutazione per la prova scritta e due griglie di valutazione per la prova orale. Queste ultime due, sono sicuramente molto particolareggiate, ma personalmente ritengo che di fronte ad una prova orale, sia molto difficile tener conto di tutti questi indicatori.

2.15.1 Griglia di valutazione per la verifica sommativa

	CONOSCENZA		COMPETENZA		CAPACITA'	
	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI
ESERCIZIO 1						
ESERCIZIO 2						
ESERCIZIO 3						
ESERCIZIO 4						
TOTALE	12		12		12	

Griglia di valutazione (ad uso del docente)

<table>
<tr><th>PUNTEGGIO GREZZO
(TOT.36)</th><th>VOTO IN DECIMI
(ottenuto con la proporzione)</th><th>VOTO IN DECIMI
(proposta di voto)</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">0-1</td><td rowspan="8">2</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="3">2-3</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="4">3</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="4">3-4</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="3">4-5</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>18</td><td rowspan="4">5-6</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>21</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="4">7</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="4">7-8</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="4">8</td></tr>
<tr><td>29</td><td rowspan="4">8-9</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td><td rowspan="4">9</td></tr>
<tr><td>33</td><td rowspan="4">9-10</td></tr>
<tr><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td></tr>
<tr><td>36</td><td>10</td></tr>
</table>

Capitolo 3 U.D.1 EQUAZIONI ALGEBRICHE DI PRIMO GRADO IN CAMPO REALE E LORO RISOLUZIONE ALGEBRICA E GRAFICA

3.1 PREREQUISITI

- Conoscenza degli insiemi numerici.
- Conoscenza di base logica.
- Conoscenza di uguaglianze numeriche.
- Conoscenza di relazioni e funzioni.
- Saper eseguire le operazioni fra monomi e polinomi.
- Conoscere e applicare i prodotti notevoli.
- Conoscenza delle tecniche di scomposizione dei polinomi.
- Saper determinare il grado di un polinomio ridotto in forma normale.
- Conoscenza del calcolo letterale. Espressioni algebriche letterali.
- Conoscere la definizione di valore assoluto di un numero relativo.
- Conoscenza della diretta proporzionalità e della sua rappresentazione grafica.
- Conoscenza della funzione lineare e della sua rappresentazione grafica.
- Elementi di geometria analitica: le rette parallele agli assi cartesiani.
- Uso del software Derive .

3.2 OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE

- ♦ Conoscere il lato storico dell'argomento trattato.
- ♦ Conoscere il concetto di uguaglianza.
- ♦ Conoscere il concetto di identità.
- ♦ Conoscere il concetto di equazione algebrica.
- ♦ Conoscere il concetto della classificazione delle equazioni (intere e frazionarie, numeriche e letterali).
- ♦ Conoscere il concetto di equazione determinata, indeterminata e impossibile.
- ♦ Conoscere il concetto di equazioni equivalenti.
- ♦ Conoscere il concetto del primo e secondo principio di equivalenza.
- ♦ Conoscere il concetto di grado di un'equazione algebrica.
- ♦ Conoscere il concetto di un'equazione di primo grado ad una incognita e tecniche di risoluzione (equazioni intere numeriche, equazioni intere letterali ed equazioni frazionarie).
- ♦ Conoscere il concetto di sistema.
- ♦ La rappresentazione grafica della funzione lineare: la retta.
- ♦ Il metodo di risoluzione grafica di un'equazione di primo grado.
- ♦ Svolgere esperienze interessanti con il software Derive a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

COMPETENZE

- Saper definire un'equazione algebrica e conoscerne le caratteristiche.
- Saper verificare se due equazioni sono equivalenti.
- Saper enunciare e applicare i principi di equivalenza.
- Saper risolvere equazioni di primo grado ad una incognita intere.
- Saper risolvere equazioni di primo grado ad una incognita intere letterali.
- Saper risolvere equazioni di primo grado ad una incognita frazionarie.
- Saper scomporre polinomi superiori al grado primo, in fattori di primo grado.
- Impostare e risolvere problemi mediante l'uso delle equazioni di primo grado.
- Saper risolvere un sistema di primo grado, usando il metodo di risoluzione più opportuno.
- Risolvere graficamente le equazioni di primo grado.

CAPACITÀ

- Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso di equazioni di primo grado.
- Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

3.3 CONTENUTI

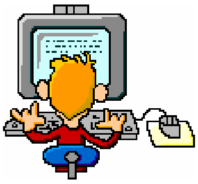
- Breve storia sulle equazioni algebriche e loro risoluzione.
- Le identità.
- Le equazioni ad una incognita.
- Le equazioni equivalenti.
- Il primo e secondo principio di equivalenza.
- Equazioni di primo grado ad una incognita.
- Procedimento di risoluzione delle equazioni di primo grado ad una incognita: equazioni intere numeriche, equazioni intere letterali, equazioni frazionarie.
- La scomposizione di un polinomio di grado superiore al primo in fattori di primo grado, attraverso il metodo della "somma e prodotto".
- Formalizzare e risolvere problemi di primo grado in una incognita**.**
- Sistemi di equazioni di primo grado.
- Sistemi di due equazioni di primo grado in due incognite: determinati, indeterminati, impossibili.
- Classificazione dei sistemi.
- Sistemi equivalenti.
- Metodi algebrici per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite (metodo di sostituzione, del confronto, di riduzione).
- Risoluzione grafica di equazioni di primo grado[3].

[3] I titoli dei contenuti sottolineati, sono stati sviluppati nel capitolo "Sviluppo dei Contenuti".

- Risoluzione e interpretazione grafica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite attraverso l'utilizzo del software Derive.

3.4 SVILUPPO DEI CONTENUTI

3.4.1 Risoluzione grafica di equazioni di primo grado



A questo punto gli studenti saranno portati in laboratorio, inteso come "ambiente" di simulazione, di stimolo e di apprendimento di concetti teorici propri della matematica.

Nella risoluzione di qualsiasi tipo di equazione algebrica (e successivamente disequazione) si cercherà di dare un'impostazione principalmente di tipo grafico. Questo tipo di approccio, permetterà di evidenziare e sottolineare lo stretto legame che c'è tra l'algebra e le conoscenze apprese nella geometria analitica, riferendoci, in particolar modo, alla retta e poi, per le equazioni di secondo grado, alla parabola.

Come è stato già detto nella scorsa lezione, trovare la soluzione di un'equazione di primo grado, del tipo $ax+b=0$, significa trovare quel valore di x per il quale l'uguaglianza tra il primo e il secondo membro è verificata. Sappiamo che tale valore è la soluzione (o radice) dell'equazione, **zero** della funzione $y=ax+b$.
Pertanto si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = ax+b \\ y=0 \end{cases}$$

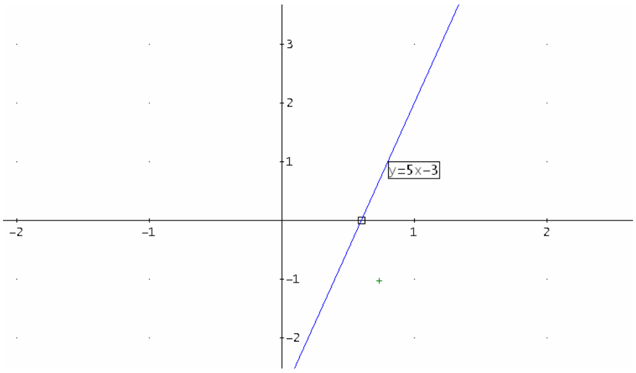
Potremmo così dire che risolvere un'equazione di primo grado $ax+b=0$ equivale a determinare l'eventuale punto della retta $y=ax+b$ appartenete all'asse delle ascisse, cioè di ordinata nulla.

<u>Esercizio</u>:
Risolvere graficamente l'equazione $5x-3=0$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 5x-3 \\ y=0 \end{cases}$$

ossia determinare dove la retta di equazione $y=5x-3$ interseca l'asse delle x.

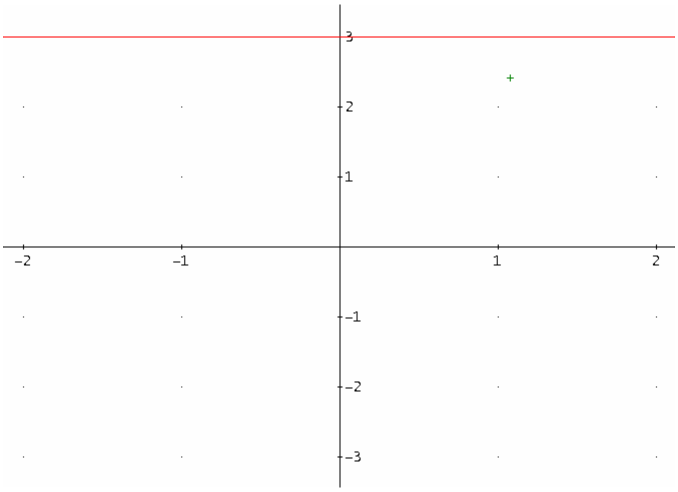
<u>Risoluzione</u>:
Utilizziamo Derive e tracciamo il grafico, in cui si vede che il punto di intersezione con $y=0$ sta tra $1/2$ e 1, precisamente in $x=3/5$.



Esercizio:
Risolvere graficamente l'equazione $y=3$ equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y=3 \\ y=0 \end{cases}$$

Il software Derive visualizza l'immagine riportata sotto e appare chiaro che la retta di equazione $y=3$ non interseca mai l'asse delle x, ma è ad esso parallelo. In effetti il sistema considerato, non ha soluzioni.



3.4.2 Risoluzione e interpretazione grafica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite attraverso l'utilizzo del software Derive

In laboratorio allo studente potrebbe essere proposta una scheda dove si studia la relazione che esiste tra la soluzione algebrica di un sistema di primo grado e la sua rappresentazione grafica.

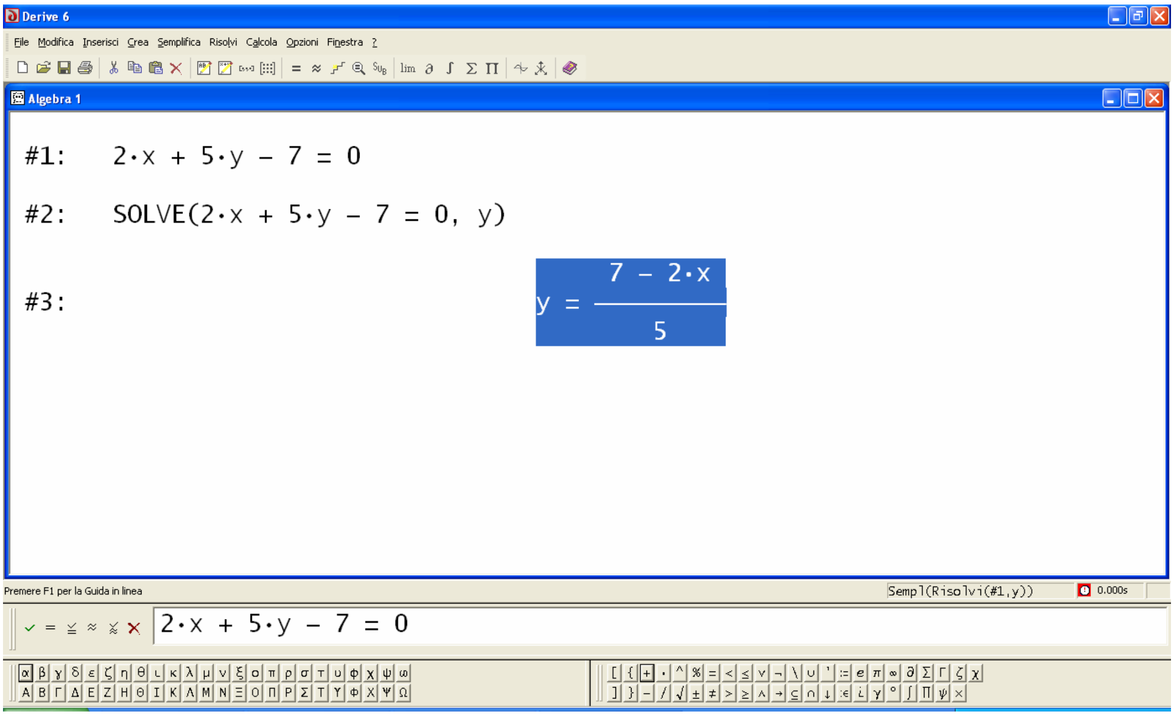
Nota didattica. Prima di proporre tale scheda il docente ha bisogno di fare una premessa per collegare la scrittura $y=mx+q$, con cui abitualmente si indica l'equazione di una retta quando si vuole tracciare il grafico, e la scrittura $ax + by + c = 0$, con cui si vuole scrivere le equazioni di un sistema.

LA RELAZIONE ax+by+c=0 E LA SUA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA.

Dalla relazione $ax + by + c = 0$ all'equazione $y = mx + q$: alcuni esempi.

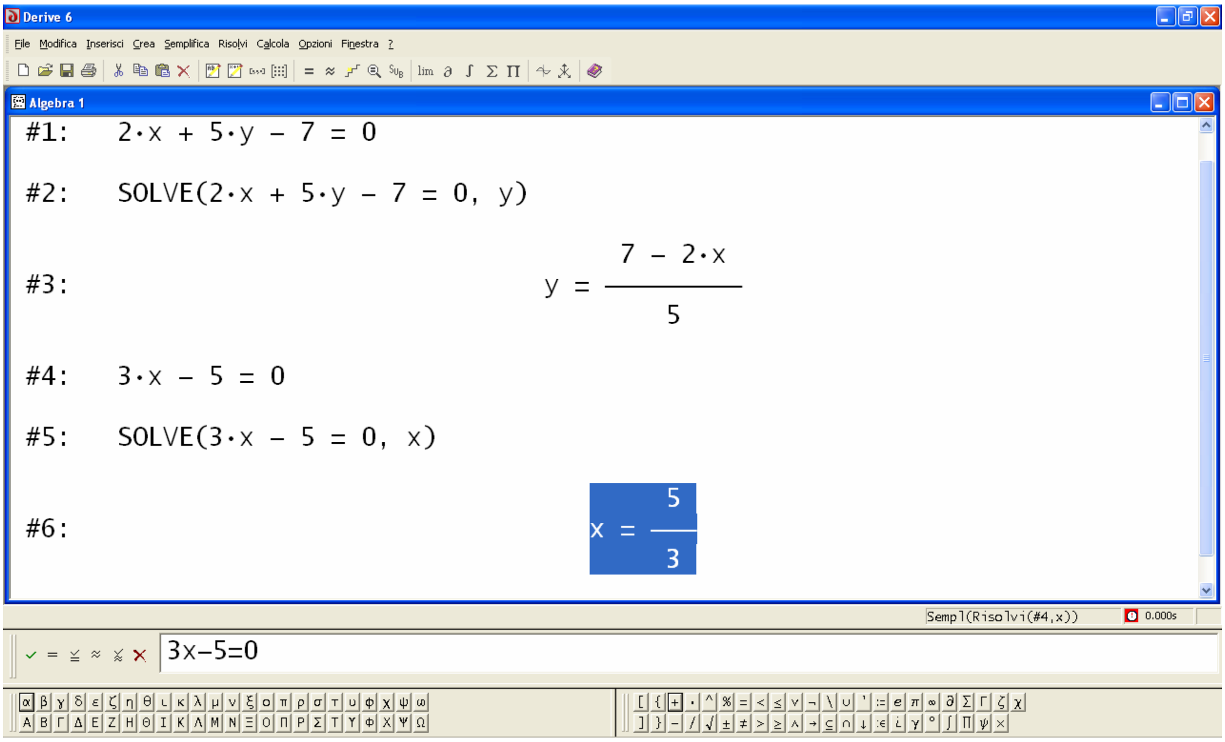
Apri Derive.

- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo ***2·x+5·y-7=0***.
- Con **Invio** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #1, di considerare la y come variabile e di usare il metodo algebrico.



- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #2 e le radici dell'equazione #3.
- Hai ottenuto (riga #3) l'equazione di una retta di coefficiente angolare___________________ che interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata____

- Passa alla pagina grafica (con le finestre affiancate) e verifica la correttezza della tua risposta, tracciando il grafico.
- Ora con ***Crea_Espressione*** attiviamo nuovamente la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $3\cdot x-5=0$ (in questa equazione non compare la y).
- Con **Invio** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #4, di considerare la x come variabile e di usare il metodo algebrico.



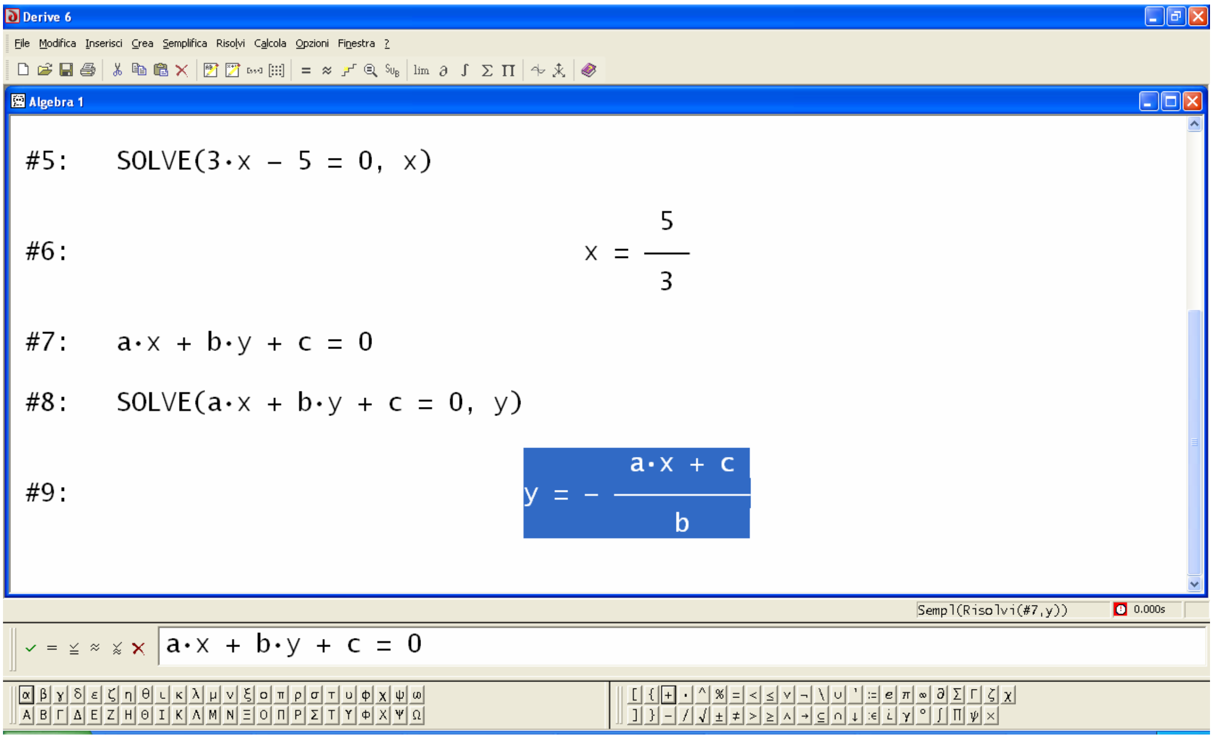
- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #5 e le radici dell'equazione #6.
- Sai spiegare la risposta che hai ottenuto? L'insieme dei punti del piano tale che $x = 5/3$ è____

  ____
- Passa alla pagina grafica e verifica la correttezza della tua risposta, tracciando il grafico.

Dalla relazione $ax+by+c=0$ all'equazione $y=mx+q$: il caso generale.

- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $a\cdot x+b\cdot y+c=0$.

- Con **Invio** la immettiamo nell'etichetta #7 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #7, di considerare la y come variabile e di usare il metodo algebrico.



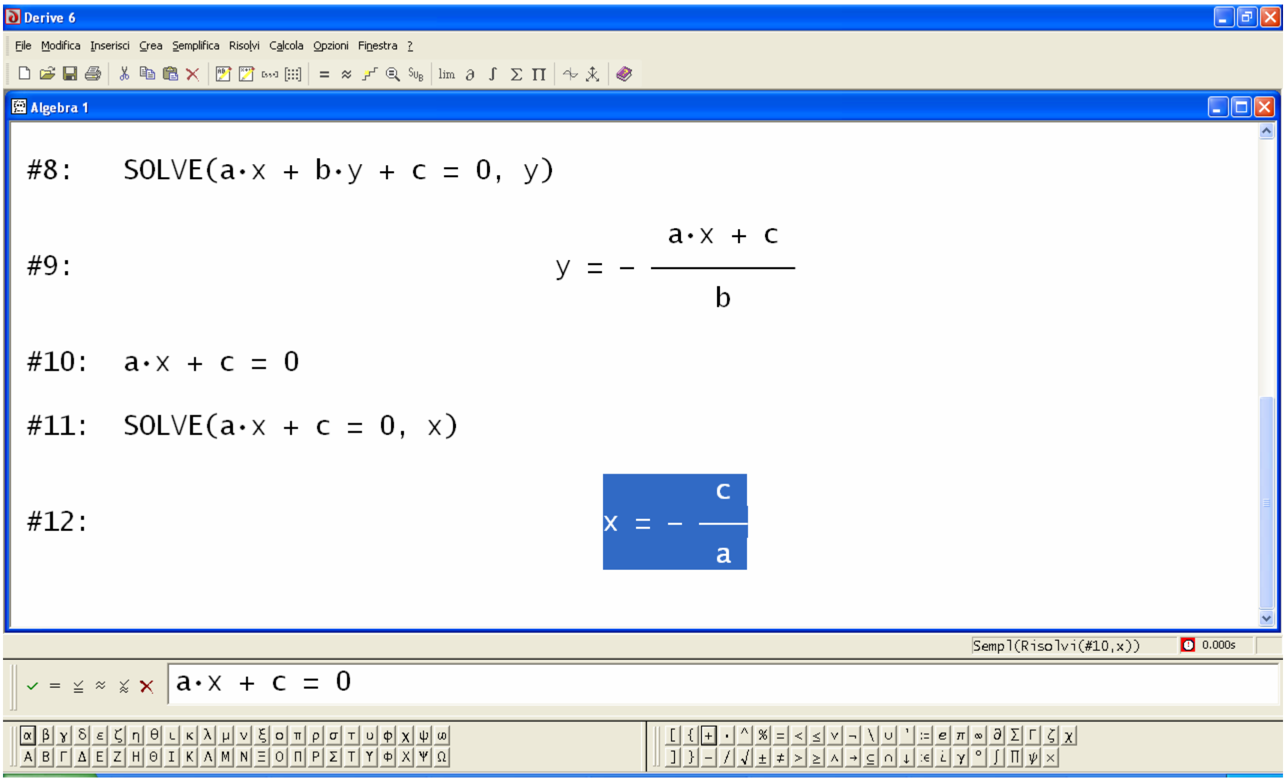
- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #8 e le radici dell'equazione #9.

Viene visualizzata (riga #9) la soluzione rispetto a y dell'equazione $a \cdot x+b \cdot y+c=0$.

- Hai ottenuto l'equazione di una retta di coefficiente angolare______________________ che interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata__________________________
- Attenzione! E' sempre possibile risolvere l'equazione $a \cdot x+b \cdot y+c=0$ rispetto a y?______

Quale condizione bisogna imporre sui parametri a, *b* e c?____

- Ora con ***Crea_Espressione*** attiviamo nuovamente la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $a \cdot x+c=0$.
- Con **Invio** la immettiamo nell'etichetta #10 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #11, di considerare la x come variabile e di usare il metodo algebrico.



- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #11 e le radici dell'equazione #12.

  Viene visualizzata (riga #12) la soluzione rispetto a x dell'equazione $a \cdot x + c = 0$.

- Hai ottenuto l'equazione di____
- Attenzione! E' sempre possibile risolvere l'equazione $a \cdot x + c = 0$ rispetto a x?___________

Quale condizione bisogna imporre sui parametri a e c?____

- Possiamo concludere che l'insieme dei punti (x,y) che soddisfa l'equazione $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, nell'ipotesi che almeno uno dei coefficienti__________e__________sia diverso da zero, è una____

SCHEDA DI LABORATORIO: L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI UN SISTEMA LINEARE

PREREQUISITI

- Che cos'è un sistema di equazioni di primo grado e come si risolve.
- L'equazione della retta e il significato dei parametri che compaiono in tale equazione.
- Passare con Derive dalla forma implicita a quella esplicita di una retta.

OBIETTIVO

- Saper interpretare geometricamente un sistema di primo grado.

INTERPRETIAMO GEOMETRICAMENTE E RISOLVIAMO IL SEGUENTE SISTEMA:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

▶ Completa la tabella seguente.

Equazione del sistema	**Forma esplicita**	**Coefficiente angolare** m	**Ordinata del punto di intersezione con l'asse** y
$x + 2y = 4$			
$x - y = 1$			

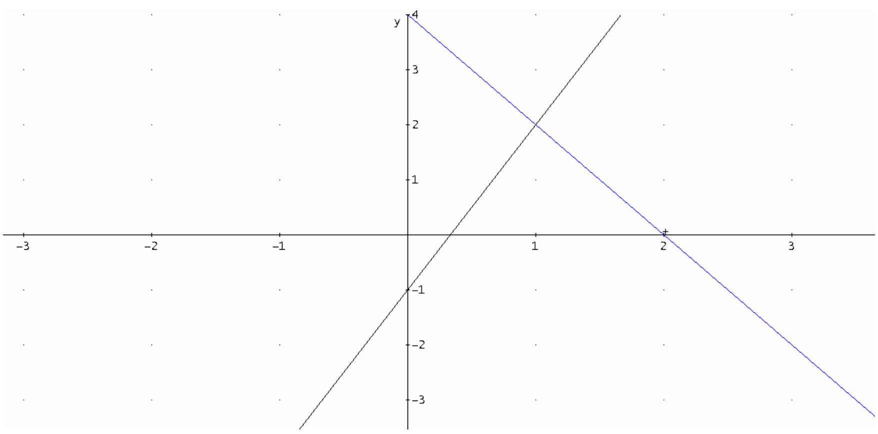
▶ Traccia con *Derive* il grafico delle due rette.

▶ Che cosa osservi?

____

____

▶ I coefficienti angolari delle due rette sono uguali o diversi?________________________



- Determina, usando la ***Modalità traccia***, il punto di intersezione.
- Risolvi il sistema manualmente; confronta la soluzione algebrica con quella che hai ricavato dal grafico.
- Il sistema è risolubile?____
- Quante e quali soluzioni ha?____

3.4.3 Tempi dell'intervento didattico

Per svolgere questa unità didattica si prevedono i seguenti tempi:

Accertamento dei prerequisiti:	2h
Lezioni frontali e svolgimento degli esercizi:	15h
Attività di laboratorio:	3h
Verifica sommativa:	2h
Consegna e correzione verifica sommativa:	1h

Per un totale di 23 ore che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa quattro settimane e mezzo di lavoro. La previsione è da intendersi elastica, perché occorre tener conto dell'andamento e dei processi di apprendimento della classe.

3.4.4 Verifica sommativa U.D. 1

1. Verifica se le seguenti uguaglianze sono identità.

$$-a+b^2+2(a-b)+(a-b)(a+b)=a+b^2-(2b-a^2+b^2)$$

$$\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{5}a\right)3a+a^2=\frac{3}{4}a^2+\frac{2}{5}a^2$$

Le due equazioni riportate di seguito, sono equivalenti? Giustifica la risposta.

$(6x-1)^2+70x-11(x+2)^2=(5x+2)^2-7x$ e $3x-2=2(x-1)+8$

2. Risolvere le seguenti equazioni:

$5(2x-3)+x(2x+3)=2x(x-1)$ per $x\in N$

$$\frac{1-x}{2x-3}+\frac{x+1}{9-4x^2}=\frac{1-x}{2x+3}$$

$$\left(\frac{1}{2}x-b\right)\left(\frac{2}{3}b+x\right)+b(b-x)(b+x)=\frac{1}{2}x^2(1-2b)$$

3. Trovare il numero la cui quarta parte, addizionata col quadruplo del numero stesso, dà per somma 68.

Trovare il numero che, diminuito della sua terza, sesta e nona parte, dà per differenza 14.

4. Risolvere algebricamente e graficamente il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x-6y-1=0 \end{cases}$$

Griglia di valutazione per la verifica sommativa (compilata nelle sue parti)

	CONOSCENZA		**COMPETENZA**		**CAPACITA'**	
	TOTALE	**OTTENUTI**	**TOTALE**	**OTTENUTI**	**TOTALE**	**OTTENUTI**
ESERCIZIO 1	**3**		**4**		**2**	
ESERCIZIO 2	**3**		**2**		**2**	
ESERCIZIO 3	**3**		**3**		**4**	
ESERCIZIO 4	**3**		**3**		**4**	
TOTALE	**12**		**12**		**12**	

Capitolo 4 U.D.2 DISEQUAZIONI ALGEBRICHE DI PRIMO GRADO IN CAMPO REALE E LORO RISOLUZIONE ALGEBRICA E GRAFICA

4.1 PREREQUISITI

Per lo svolgimento di questa unità didattica si ritiene necessaria la conoscenza dei contenuti dell'unità didattica 1 e inoltre:

- Conoscenza delle disuguaglianze numeriche e loro proprietà.
- Conoscenza del concetto di intervallo.

4.2 OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE

- Conoscere il concetto di disequazione algebrica.
- Conoscere il concetto di disequazioni equivalenti.
- Conoscere il concetto di disequazione di primo grado ad una incognita e tecniche di risoluzione (disequazioni intere e disequazioni frazionarie).
- Il metodo di risoluzione grafica di una disequazione di primo grado.
- Svolgere esperienze interessanti con il software Derive a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

COMPETENZE

- Saper definire una disequazione algebrica e conoscerne le caratteristiche.
- Saper verificare se due equazioni sono equivalenti.
- Saper enunciare e applicare i principi di equivalenza.
- Saper risolvere disequazioni di primo grado ad una incognita intere.
- Saper risolvere disequazioni di primo grado ad una incognita frazionarie.
- Risolvere graficamente le disequazioni di primo grado.
- Impostare e risolvere problemi mediante l'uso delle disequazioni di primo grado.
- Saper risolvere sistemi di disequazioni di primo grado.
- Saper risolvere una disequazione di primo grado in una incognita in cui compaia qualche espressione in valore assoluto.

CAPACITÀ

- Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso di disequazioni di primo grado.
- Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

4.3 CONTENUTI

- Le disequazioni.

- Le disequazioni equivalenti.
- Il primo e secondo principio di equivalenza.
- Disequazioni di primo grado ad una incognita.
- Procedimento di risoluzione delle disequazioni di primo grado ad una incognita: disequazioni intere e disequazioni frazionarie.
- Risoluzione grafica di disequazioni di primo grado.
- Formalizzare e risolvere problemi con disequazioni di primo grado ad una incognita.
- Sistemi di disequazioni di primo grado.
- Disequazioni con i valori assoluti.

4.4 SVILUPPO DEI CONTENUTI

4.4.1 Le disequazioni

Consideriamo le due espressioni algebriche $5x+2$ e $8-x$ nella variabile x.
Ci domandiamo ora se esistono valori di x per i quali vale la seguente disuguaglianza:

$$5x+2>8-x$$

cioè se esistono valori di x che rendono la prima espressione maggiore della seconda.
Non tutti i valori di x soddisfano la disuguaglianza:

- se sostituiamo a x il numero 3, la disuguaglianza è verificata; infatti 17, valore dalla prima espressione, è maggiore di 5, valore assunto dalla seconda;
- se invece attribuiamo a x il valore -3, la prima espressione assume il valore -13, mentre la seconda assume il valore 11. La disuguaglianza non è allora verificata.

Una disuguaglianza tra due espressioni algebriche in una sola incognita (in una sola variabile) è detta **disequazione in una incognita**.
La scrittura:

$$5x+2>8-x$$

è quindi un esempio di disequazione in una sola incognita, x.

Come per le equazioni, l'espressione a sinistra della disuguaglianza viene detta **primo membro** e l'espressione a destra della disuguaglianza viene detta **secondo membro**. In una disequazione si chiamano **termini noti** gli addendi che non contengono le incognite.
Una disequazione oltre alle lettere che indicano le variabili a cui si è dato il nome di incognite, può contenere anche altre lettere, ma che si ritengono rappresentare numeri fissi: queste lettere si chiamano **costanti**. Per indicare le incognite si userà le ultime lettere dall'alfabeto x, y, z....; le costanti si indicano invece con le prime lettere dell'alfabeto a, b, c...Se poi si richiede di determinare una di queste costanti in modo tale che sia soddisfatta una certa condizione, allora tale lettera prende il nome di **parametro**.
Risolvere una disequazione in un determinato insieme, vuol dire metterla in una forma in cui si possono leggere i valori delle variabili che rendono vera la disuguaglianza. Questi valori, appartenenti all'insieme, si dicono **soluzioni** della disequazione o **radici** della disequazione, l'insieme di questi valori si dice **insieme delle soluzioni** della stessa disequazione, e lo si indicherà con la lettera S.

Osservazione didattica. Quando non faremo precisazione di tipo diverso, cercheremo le soluzioni nell'insieme **R** dei numeri reali.

I SIMBOLI USATI

Un'equazione è stata definita come un'uguaglianza con una variabile, o anche come una proposizione aperta costruita su un segno =.

Invece, una disequazione si può definire come una proposizione aperta costruita su uno dei seguenti simboli:

- $>$ "maggiore di"
- $<$ "minore di"
- $\geq$ "maggiore o uguale a"
- $\leq$ "minore o uguale a"

RAPPRESENTAZIONE DELLE SOLUZIONI

Spesso gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni sono particolari sottoinsiemi di **R** chiamati **intervalli**. Parleremo quindi di **intervallo delle soluzioni**.

Osservazione didattica. Come una equazione è una uguaglianza condizionata, così una disequazione si può considerare come una disuguaglianza condizionata. Però esiste una profonda differenza fra equazione e disequazione, dal punto di vista delle soluzioni: mentre una equazione, se ammette soluzioni (radici) queste sono in numero limitato e determinato, una disequazione, se ammette soluzioni, queste sono in numero infinito, perché i numeri reali appartenenti a qualunque intervallo, per quanto piccolo esso sia, sono sempre in numero illimitato.

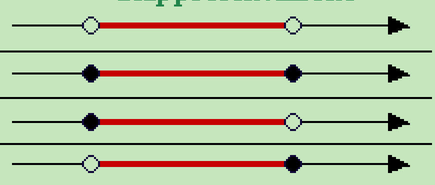
Per rappresentare graficamente l'intervallo delle soluzioni di una disequazione, possiamo fissare su di una retta un sistema di riferimento, e seguire delle regole ben precisate.

Nota didattica. Dal punto di vista didattico dare uno schema è a volte pericoloso, poiché gli studenti tendono ad impararlo a memoria escludendo qualsiasi tipo di ragionamento.

Riportiamo comunque di seguito, per completezza, la seguente tabella riassuntiva dove sono stati indicati con un pallino pieno gli estremi che fanno parte dell'intervallo, con un pallino vuoto gli estremi che ne sono esclusi.

Intervalli limitati

Tipo	Notazione		Rappresentazione
Aperto	$(a;b)$	$a < x < b$	
Chiuso	$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
Aperto a destra	$[a;b)$	$a \leq x < b$	
Aperto a sinistra	$(a;b]$	$a < x \leq b$	



	Tipo	Notazione		Rappresentazione
Intervalli illimitati	Illimitato inferiormente	$(-\infty; a)$	$x < a$	a
	Illimitato superiormente	$(a; \infty)$	$x > a$	a
	Illimitato inf.mente aperto a sinistra	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	a
	Illimitato sup.mente aperto a destra	$[a; \infty)$	$x \geq a$	a

I VARI TIPI DI DISEQUAZIONI

Buona parte della terminologia e delle definizioni usate per le disequazioni è analoga a quella usata per le equazioni.

Una disequazione è **numerica** se nell'equazione non compaiono altre lettere oltre all'incognita. E' **letterale** se invece contiene altre lettere che possono anche essere chiamate parametri.

Una disequazione è **intera** se l'incognita compare soltanto al numeratore, è **fratta** se compare anche al denominatore.

Proponiamo agli studenti il seguente esempio.

Esempio.

Disequazione intera, a coefficienti numerici: $2x > \frac{3+x}{2}$.

Disequazione intera, a coefficienti letterali: $\frac{x}{b} - \frac{3}{a} > \frac{2}{a}$.

Disequazione frazionaria, o fratta, a coefficienti numerici: $\frac{5x-3}{1-x} > 0$.

Disequazione fratta, a coefficienti letterali: $\frac{1}{x} > a$.

4.4.2 Le disequazioni equivalenti

DEFINIZIONE:

Due disequazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Osservazione didattica. Questa definizione di disequazioni equivalenti, che viene riportata nella maggior parte dei libri scolastici, potrebbe risultare ambigua.

Sarebbe necessario dichiarare l'insieme numerico in cui si cercano le soluzioni per affermare se due disequazioni sono equivalenti oppure no.

Le disequazioni $x > 1$ e $x > \frac{3}{2}$ sono equivalenti se l'insieme in cui cerchiamo le soluzioni è **N**, non lo sono se l'insieme in cui cerchiamo le soluzioni è **Q** (oppure **R**) perché, ad esempio, $\frac{3}{2}$ è una soluzione della prima disequazione ma non della seconda. Questo esempio e altri meno banali che si potrebbero fare (anche a proposito dei sistemi di disequazioni), evidenziano quantomeno la necessità di specificare con chiarezza l'insieme numerico nel quale si intende operare. Normalmente si dà invece per scontato che si lavora in **R**, lasciando nel vago cosa succederebbe qualora si lavorasse in **Z** o in **Q**, o in **C**.

4.4.3 Il primo e il secondo principio di equivalenza

Per risolvere una disequazione bisogna in primo luogo trasformarla in un'altra equivalente e più semplice, applicando i seguenti due principi di equivalenza, fondati sulle proprietà delle disuguaglianze.

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA:

Addizionando o **sottraendo** ad ambo i membri di una disequazione uno stesso numero, o una stessa espressione algebrica, contenente l'incognita, risulta una disequazione equivalente alla data.

Come per le equazioni algebriche, anche nel caso delle disequazioni algebriche bisogna far attenzione all'espressione algebrica che viene sommata o sottratta. Per capire il motivo di questa precisazione, studiamo la cosa attraverso un esempio.

Esempio. Sia data la disequazione (di dominio **R**)

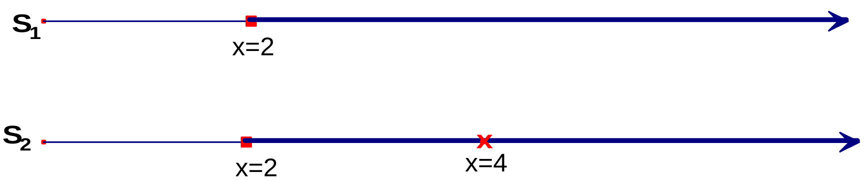
$x \geq 2$. [3-1]

Se a questa sommiamo ambo i membri l'espressione algebrica $-\frac{1}{x-4}$ otteniamo:

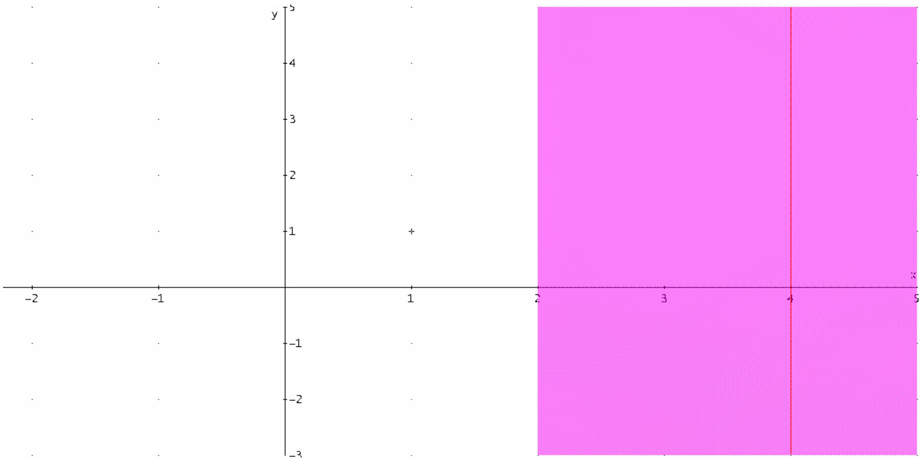
$x + \frac{1}{x-4} \geq 2 - \frac{1}{x-4}$. [3-2]

La [3-1] e la [3-2] non sono disequazioni equivalenti, in quanto non hanno lo stesso insieme di soluzioni. Si ha infatti che le soluzioni della [3-1] sono $S_1 = \{x \in R / x \geq 2\}$, mentre quelle della [3-2] sono $S_2 = \{x \in R / x \geq 2, x \neq 4\}$.

Rappresentando S_1 e S_2 sulla retta reale, lo studente può rendersi conto che se per la [3-1] $x = 4$ è un valore accettabile dell'insieme delle soluzioni, sulla retta reale in cui si rappresentano le soluzioni della [3-2], $x = 4$ viene escluso.



Chiedendo a Derive di rappresentare sul piano cartesiano le soluzioni della [3-2], questo mostra giungendo che il semipiano $x \geq 2$ viene privato della retta $x = 4$.



Dunque, data una o l'altra disequazione:

$$A(x) > B(x)^{4} \qquad A(x) < B(x)$$

da essa si ottengono le disequazioni equivalenti, rispettivamente a una o all'altra:

$$A(x) + K > B(x) + K \qquad A(x) + K < B(x) + K$$
$$A(x) - K > B(x) - K \qquad A(x) - K < B(x) - K$$

dove K rappresenta un numero reale qualunque o una espressione cui figura l'incognita x.

Conseguenza del primo principio di equivalenza

Regola del trasporto.

Un termine di una disequazione può venire trasportato da un membro all'altro, purché venga cambiato di segno.

In particolare: si può sempre fare in modo, col trasporto di termini dal 2° membro al 1°, che il 2° membro di una disequazione sia zero.

Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Risolvere la disequazione (di 1° grado):

$$5x - 6 > 4x + 2$$

Risoluzione. Applicando la regola del trasporto, si trasportano i termini in x nel 1° membro, quelli noti nel 2°:

$$5x - 4x > 2 + 6$$

e riducendo i termini simili:

$$x > 8.$$

Questa disequazione è equivalente alla data, e ha per soluzioni tutti i numeri maggiori di 8; perciò le soluzioni della disequazione data sono:

$$x > 8.$$

[4] $A(x)$, $B(x)$, rappresentano delle espressioni algebriche.

Nota didattica. Il docente fa risolvere molte di queste semplici disequazioni agli studenti pretendendo che ogni passaggio sia adeguatamente motivato. La regola pratica di trasporto di un termine da un membro all'altro, mediante il cambiamento del segno, sia applicata soltanto dopo aver accertato che gli alunni abbiano veramente capito e assimilato le proprietà delle disuguaglianze.

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA:

Moltiplicando o **dividendo** ambo i membri di una disequazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una disequazione equivalente se tale numero è positivo, si ottiene una disequazione equivalente purché si cambi il verso della disuguaglianza, se tale numero è negativo.

Dunque, data una o l'altra disequazione:

$$A(x) > B(x) \qquad A(x) < B(x)$$

se $K > 0$ si ottengono le disequazioni equivalenti rispettivamente a una o all'altra:

$$K \cdot A(x) > K \cdot B(x) \qquad K \cdot A(x) < K \cdot B(x)$$

$$\frac{A(x)}{K} > \frac{B(x)}{K} \qquad \frac{A(x)}{K} < \frac{B(x)}{K}$$

se $K < 0$ le disequazioni equivalenti rispettivamente alla 1° e alla 2° disequazione data sono invece di verso cambiato:

$$K \cdot A(x) < K \cdot B(x) \qquad K \cdot A(x) > K \cdot B(x)$$

$$\frac{A(x)}{K} < \frac{B(x)}{K} \qquad \frac{A(x)}{K} > \frac{B(x)}{K}$$

Osservazione didattica. Cambiando il segno a tutti i termini dei due membri di una disequazione, va mutato il verso di questa, perché il cambiamento di segno equivale alla moltiplicazione per il fattore negativo -1.

Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Risolvere la seguente disequazione (di 1° grado):

$$\frac{5x-1}{2} - 4 > \frac{19x}{4}$$

Risoluzione. Moltiplicando ambo i membri per il numero positivo 4, si eliminano i denominatori e si ottiene la disequazione equivalente:

$$10x - 2 - 16 > 19x$$

Trasportando i termini x nel 1° membro a quelli noti nel 2° membro, si ha:

$$-9x > 18$$

Dividendo ambo i membri per il numero negativo -9, per ottenere una disequazione equivalente alla data bisogna cambiare il verso; risulta quindi:

$$x < -2$$

disequazione equivalente alla data; le soluzioni di questa sono dunque tutti i numeri minori di -2.

Osservazione didattica. Per ottenere da una disequazione un'altra disequazione equivalente, moltiplicando ambo i membri per uno stesso numero, bisogna conoscere il segno di questo numero, onde mutare il verso quando tale segno è negativo. Ciò spiega perché non si possono moltiplicare i due membri di una disequazione per una espressione contenente l'incognita (esempio 1), salvo il caso in cui questa espressione, pur avendo valore indeterminato, abbia un segno definito, perché indipendente dai valori assunti da x (esempio 2).

Esempio 1. Consideriamo sempre la disequazione

$$x \geq 2$$

le cui soluzioni sono $S_1 = \{x \in R / x \geq 2\}$.

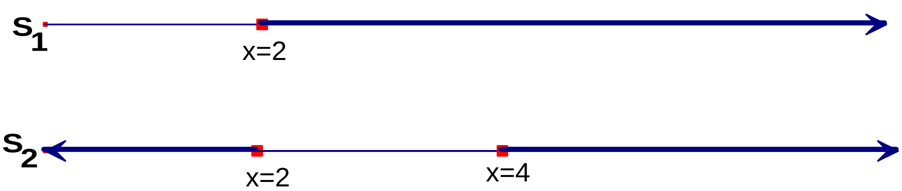
Moltiplichiamo ora l'espressione algebrica $(x-4)$, ottenendo

$$x(x-4) \geq 2(x-4)$$

che non è equivalente a quella data, poiché le soluzioni di questa sono

$$S_2 = \{x \in R / x \leq 2 \vee x \geq 4\}.$$

Rappresentiamo sulla retta reale le soluzioni S_1 e S_2.



Dalla risoluzione grafica il docente fa notare agli studenti che moltiplicando per un'espressione algebrica, si sono aggiunte delle soluzioni, (tute le $x \in]-\infty, 2[$), ma se ne sono anche perse (tutte le $x \in]2,4[$).

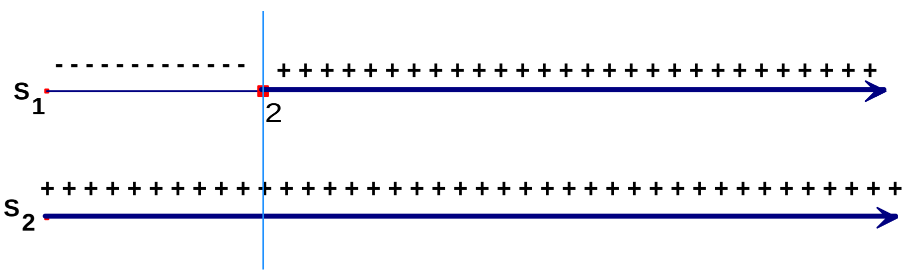
Esempio 2.

Moltiplicando la [3-1] per un'espressione algebrica come (x^2+1), definita $\forall x \in \mathbf{R}$ e sempre positiva, la disequazione ottenuta è equivalente a quella data:

$$x(x^2+1) \geq 2(x^2+1). \quad [3\text{-}3]$$

Le soluzioni S_2 della [3-3] sono le stesse della [3-1], in quanto il fattore moltiplicativo (x^2+1) ha come soluzioni tutto **R**.

Rappresentiamo sulla retta reale le soluzioni S_1 e S_2.



Dalla risoluzione grafica il docente fa notare agli studenti che il contributo di questo nuovo fattore moltiplicativo alle soluzioni della [3-3] è ininfluente.

4.4.4 <u>Disequazioni di primo grado ad una incognita</u>

Il docente fa capire alla classe cosa si intende per grado di una disequazione algebrica.

Il grado di una disequazione algebrica in un'incognita, ridotta in forma normale, è la massima potenza dell'incognita stessa.

Si propone alla classe il seguente esempio.

<u>Esempio</u>.

La disequazione

$$3x > 2$$

è quindi una disequazione algebrica di primo grado.

Come le equazioni, anche le disequazioni di primo grado possono essere sempre trasformate in modo tale che si arrivi alla forma $ax \geq b$ (oppure $ax \leq b$) e a sia un numero reale non negativo.

Si possono allora verificare tre casi:

I. $a \neq 0$

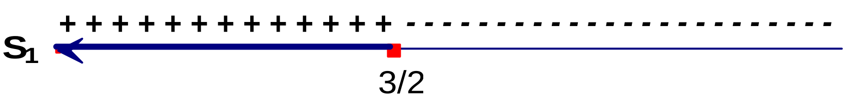
In tale caso è soluzione ogni numero reale x tale che $x \geq \frac{b}{a}$ (oppure $x \leq \frac{b}{a}$).

La disequazione si dice **propria**, l'insieme delle soluzioni è infinito e può essere rappresentato con una semiretta.

Per esempio:

$$\frac{1}{2}(x-1)+2 \geq \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{x-1+4}{2} \geq \frac{3}{2}x \Rightarrow x+3 \geq 3x \Rightarrow x-3x \geq -3 \Rightarrow -2x \geq -3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Dato S_1 l'insieme delle sue soluzioni, si avrà $S_1 = \left\{ x \in R \,/\, x \leq \frac{3}{2} \right\}$. Rappresentiamo sulla retta reale le soluzioni S_1.



II. $a = 0$ **e la proposizione** $0 \geq b$ **(oppure** $0 \leq b$**) risulta vera.**

Ogni numero reale è soluzione: l'insieme delle soluzioni è **R**.

Per esempio:

$$2x-3 \leq 2(x-1) \Rightarrow 2x-3 \leq 2x-2 \Rightarrow 0 \leq 1.$$

III. $a = 0$ **e la proposizione** $0 \geq b$ **(oppure** $0 \leq b$**) risulta falsa.**

Nessun numero reale è, allora, soluzione della disequazione: l'insieme delle soluzioni è vuoto.

Per esempio:

$$2x-3 \geq 2(x-1) \Rightarrow 2x-3 \geq 2x-2 \Rightarrow 0 \geq 1.$$

4.4.5 Risoluzione algebrica di disequazione di primo grado intera e frazionaria

Per risolvere una disequazione **intera** (cioè priva di denominatori in cui figura x) di primo grado, si può procedere in modo analogo alle equazioni intere di 1° grado, con la sola avvertenza di mutare il verso quando i due membri vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero negativo.

Nota didattica. Il prossimo esercizio, come del resto anche gli altri esercizi affrontati in classe con gli alunni, potrebbero essere risolti anche in laboratorio attraverso l'uso del software Derive. Lo studente dopo aver impostato l'equazione e risolta "carta e penna", potrebbe verificare l'esattezza del risultato facendola risolvere al programma.

Proponiamo qui uno di questi esercizi:

Risolviamo nell'insieme dei reali la disequazione $3x-\frac{1}{2}>\frac{x}{4}+3$.

Apri Derive.

- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo ***3·x-1/2>x/4+3***.
- Con ***Invio*** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.

In questa disequazione molto semplice, non sono richiesti passaggi algebrici preliminari; per risolverla portiamo tutti i termini contenenti x al primo membro e le costanti al secondo membro. Per eliminare la x dal secondo membro dobbiamo sottrarre $x/4$ da entrambi i membri.

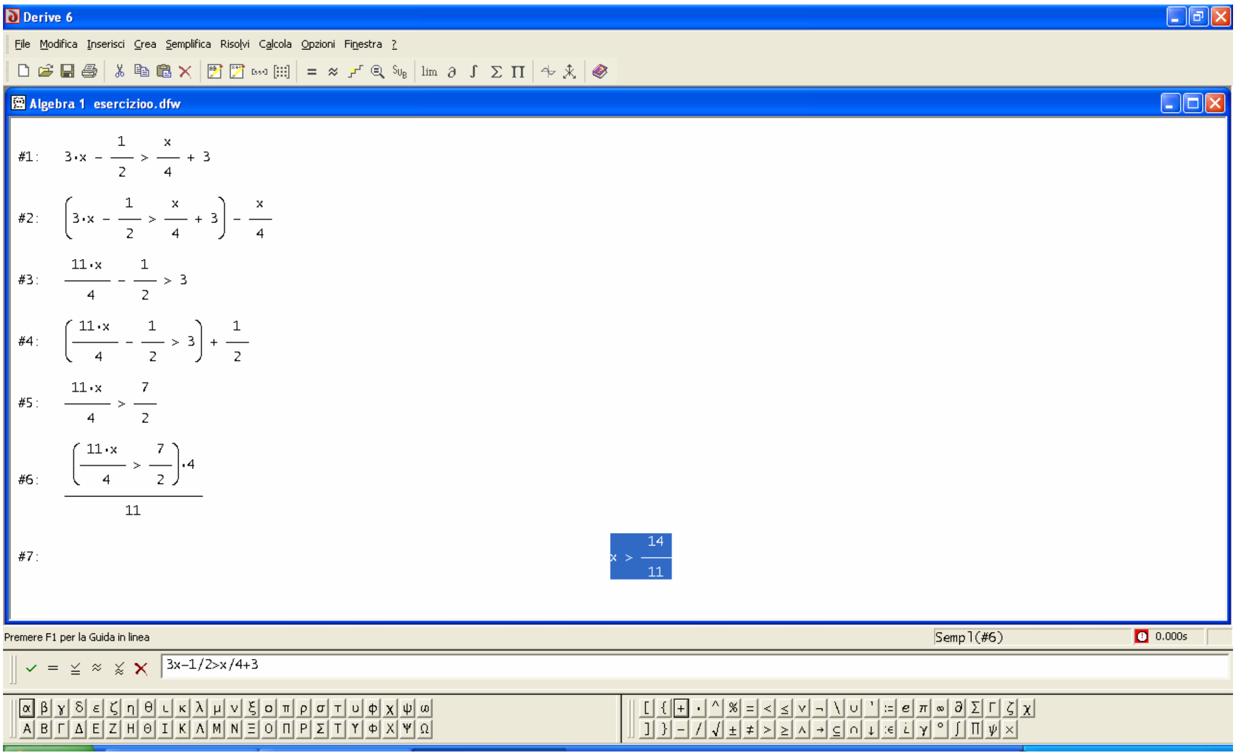
- Evidenzia la disequazione (riga #1); posizionati nella riga di scrittura e batti il tasto F4. Scrivi **–x/4**, immetti e calcola (riga #2 e riga #3).

Sommiamo 1/2 a entrambi i membri per portare le costanti al secondo membro.

- Evidenzia la disequazione della riga #3, apri la finestra di scrittura, batti F4, scrivi **+1/2** e calcola (riga #4 e #5).

La disequazione è ora scritta nella forma $ax>b$. Dividiamo entrambi i membri per 11/4 e otteniamo la soluzione (riga #6 e #7).

Verifichiamo che tutti i passaggi svolti conducano a disequazioni equivalenti: abbiamo sottratto $x/4$ (espressione che è definita per ogni valore reale di x) da entrambi i membri, poi abbiamo sommato 1/2 e infine abbiamo diviso per la costante positiva 11/4.



Se la data disequazione è **frazionaria** (cioè ha denominatori in cui figura l'incognita x), dopo aver trasportato tutti i termini nel 1° membro e ridotto questo in una frazione unica, eseguendo le eventuali operazioni, la data disequazione assume una delle due forme:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad [3\text{-}4] \qquad \text{oppure} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad [3\text{-}5]$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di primo grado nella variabile x.

La [3-4] è soddisfatta per quei valori della x per i quali i due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ assumono valori dello stesso segno, in modo tale che il loro rapporto, nel complesso risulti positivo.

La [3-5] è soddisfatta invece per quei valori della x per i quali i due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ assumono valori di segno contrario, in modo tale che il loro rapporto, nel complesso risulti negativo.

Per la risoluzione delle disequazioni di questo tipo si potrebbe applicare la rappresentazione geometrica. Precisamente sopra una retta orientata, si segna con tratto continuo l'intervallo (o gli intervalli) ove risulta negativo. La stessa cosa si fa sopra una seconda retta per il polinomio al denominatore. Dopo aver fatto ciò, si rivelano quali sono gli intervalli dove i due polinomi assumono valori dello stesso segno e quali sono quelli dove assumono valori di segno contrario.

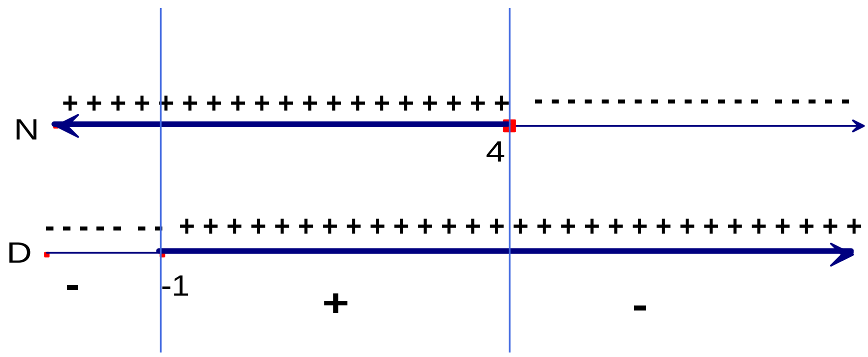
Proponiamo agli studenti il seguente esempio.
Esempio. Risolvere la disequazione

$$\frac{4-x}{x+1} \geq 0$$

Risoluzione. Per studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D) poniamo il polinomio al numeratore ≥ 0, (questo anche se la disequazione avesse avuto segno $<$ o $\leq$), e il polinomio al denominatore sempre >0 e non ≥ 0 altrimenti si andrebbero a considerare anche quelle radici che annullano il denominatore, e questo non avrebbe senso.

$N \geq 0 \quad \rightarrow \quad 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$

$D > 0 \quad \rightarrow \quad x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$



Le x che appartengono agli intervalli che hanno lo stesso segno rendono la disequazione fratta positiva.
Le x che appartengono agli intervalli che hanno segno contrario rendono la disequazione fratta negativa.
Si conclude quindi che per $-1 \leq x \leq 4$ la disequazione data è soddisfatta.
Se il segno della disuguaglianza fosse stato $\leq$ cioè

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

Lo svolgimento dell'esercizio sarebbe stato identico, solamente alla fine come soluzione si sarebbe dovuto scegliere l'intervallo in cui le x rendono i due polinomi di segno contrario cioè

$x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 4$

e quindi la disequazione fratta negativa.

4.4.6 <u>Risoluzione grafica di disequazioni di primo grado</u>

Una disequazione lineare di primo grado in una incognita assume sempre la forma

$$ax+b \geq 0 \quad (a) \qquad \text{oppure} \qquad ax+b \leq 0 \quad (b)$$

Risolvere le disequazioni di questo tipo, corrisponde a risolvere il sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax+b \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y = ax+b \\ y \leq 0 \end{cases}$$

La funzione $y = ax+b$ con $a \neq 0$ è rappresentata nel piano cartesiano da una retta che incontra l'asse delle ascisse nel punto $P\left(-\frac{b}{a},0\right)$.

Stabilire per quali valori di x l'espressione $ax+b$ è positiva o negativa, cioè risolvere la disequazione graficamente, significa trovare per quali valori dell'ascissa i punti della retta hanno ordinata $y = ax+b$ positiva o negativa.

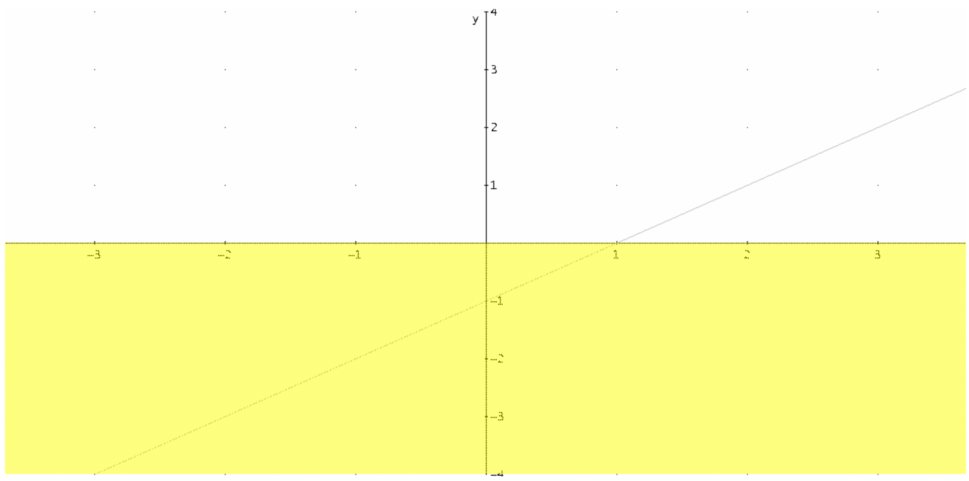
Si propongono alla classe i seguenti esempi.

<u>Esempio</u> 1.

Risolvere la seguente disequazione $5x-4 \leq 2x-1$.

<u>Risoluzione</u>. Dopo aver applicato i principi di equivalenza e alcuni calcoli si trova $x-1 \leq 0$, che è equivalente al sistema $\begin{cases} y = x-1 \\ y \leq 0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono date dall'intersezione della retta $y = x$-1 con il semipiano negativo delle ordinate.

Il risultato è visualizzabile col software Derive riportato di seguito:



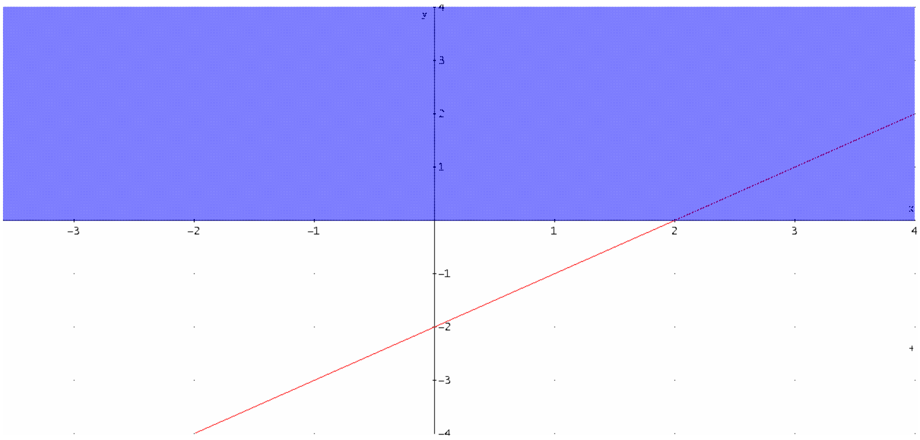
Il software colora il semipiano $x \leq 1$.

Esempio 2.

Risolvere la seguente disequazione $7x-2 \le 3x+10$.

Dopo aver applicato i principi di equivalenza e alcuni calcoli si trova $x-3 \ge 0$, che è equivalente al sistema $\begin{cases} y = x-3 \\ y \ge 0 \end{cases}$, le cui soluzioni sono date dall'intersezione della retta $y = x$-3 con il semipiano positivo delle ordinate.

Il risultato è visualizzabile col software Derive riportato di seguito:



SCHEDA DI LABORATORIO: L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

PREREQUISITI

- Che cos'è una equazione.
- Che cos'è una disequazione.
- Il significato dei coefficienti m e q.
- L'intersezione di una retta con l'asse delle ascisse.

OBIETTIVO

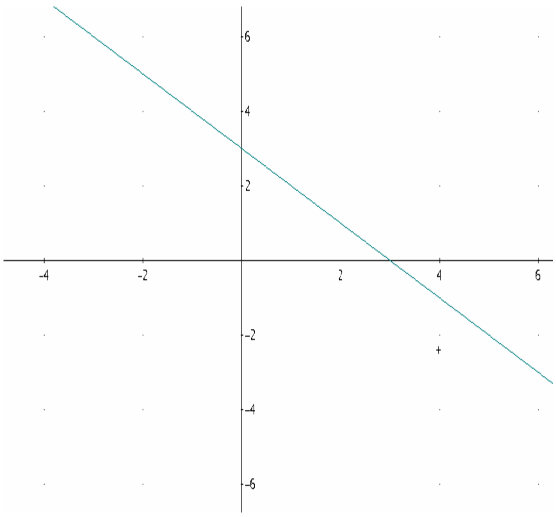
- L'interpretazione geometrica delle disequazioni di primo grado.

Iniziamo ricordando qual è il segno delle coordinate di un punto nel piano; considera un punto non appartenente agli assi e completa la tabella seguente.

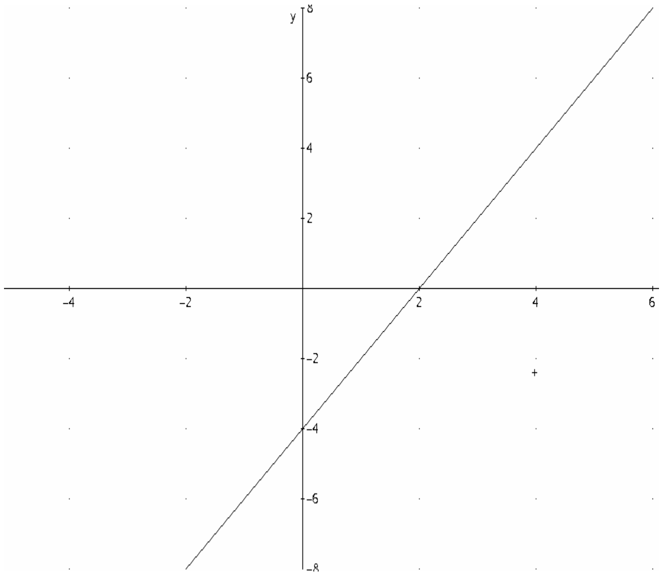
Quadrante	**Segno di x**	**Segno di y**
I	$x > 0$	
II		$y > 0$
III		
IV		

L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO.

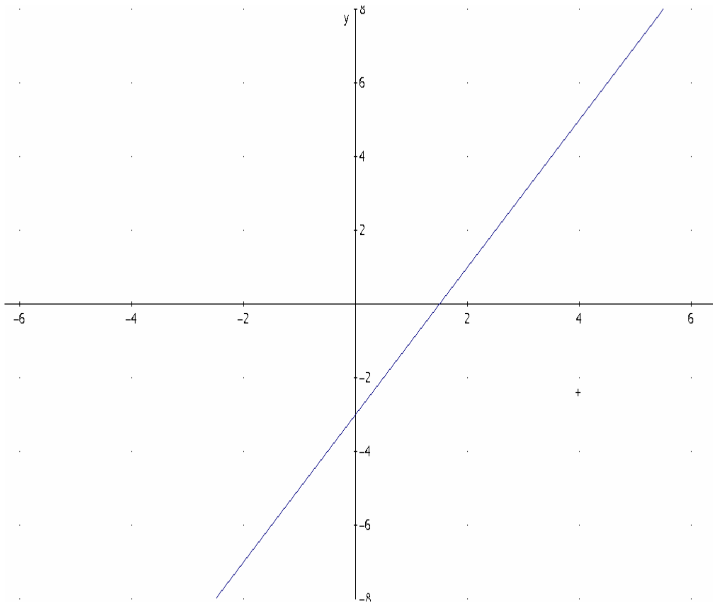
- Scrivi (in quattro passi successivi) le equazioni delle seguenti rette: ***y=2x-4***, ***y=-x+3***, ***y=2x-3***, ***y=-4x-3*** e tracciane il grafico (utilizza sempre le finestre affiancante).
- Nei seguenti grafici indica in verde il sottoinsieme dell'asse x per cui la retta è contenuta nel I – II quadrante, in rosso quello per cui la retta è contenuta nel III – IV quadrante.



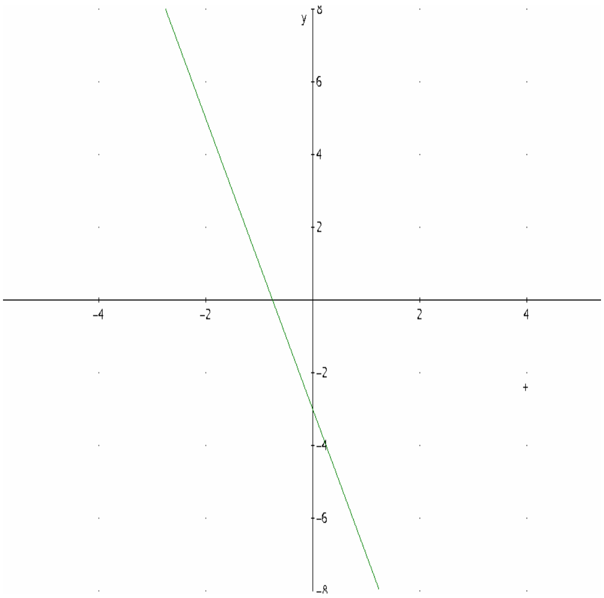
-4
-2
2
4
6
-6



y
8
6
4
2
-4
-2
2
4
6
-2
-4
-6
-8



y
8
6
4
2
-6
-4
-2
2
4
6
-2
-4
-6
-8



y
8
6
4
2
-4
-2
2
4
-2
-4
-6
-8

- Completa la seconda e la quarta colonna della tabella seguente.

Equazione della retta	**Insieme dei punti *x* per cui la retta è contenuta nel I – II quadrante**	**Segno di y**	**Insieme dei punti *x* per cui la retta è contenuta nel III – VI quadrante**	**Segno di *y***
$y = 2x - 4$				
$y = -x + 3$				
$y = 2x -3$				
$y = -4x - 3$				

- Scegli, ad esempio, la prima retta; fissa un valore dell'intervallo che hai indicato nella seconda colonna; sostituiscilo nell'equazione e calcola il valore corrispondente di y; scrivi nella terza colonna $y > 0$ oppure $y < 0$, a seconda del risultato che hai ottenuto. Puoi controllare i risultati che ottieni, posizionando la crocetta sulla retta e osservando nella barra di stato in basso a sinistra i valori delle coordinate del punto.

- Completa la terza e la quinta colonna della tabella.

- Se si sostituisce a x nell'equazione di una retta l'ascissa di uno dei punti per cui la retta è contenuta nel I oppure nel II quadrante, si ottiene sempre y…………………………….

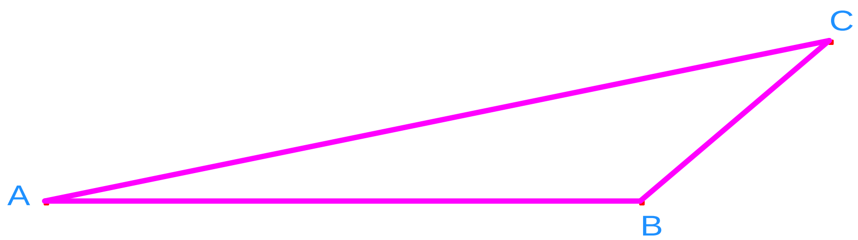
- Se si sostituisce a x nell'equazione di una retta l'ascissa di uno dei punti per cui la retta è contenuta nel III oppure nel IV quadrante, si ottiene sempre y…………………………..

4.4.7 Formalizzare e risolvere problemi con disequazioni di primo grado ad una incognita

Le equazioni e le disequazioni sono tra i modelli più utilizzati per risolvere problemi. "Si chiama problema ogni situazione per la cui soluzione è necessario mettere a punto una strategia per raggiungere il risultato".
In classe assieme agli alunni, si affronteranno diversi esempi e si noterà che comunque nella risoluzione del problema, vi sono alcune "operazioni" da compiere:

1. dopo aver letto attentamente il testo, individuare l'incognita e indicarla con una lettera (x, y, z, ...);
2. definire il dominio dell'incognita prescelta, ossia stabilire quelle limitazioni al valore dell'incognita che garantiscono la possibilità di dare un significato alle soluzioni che si troveranno;
3. esprimere le relazioni tra la grandezza rappresentata dall'incognita e gli altri dati del problema, mediante una disequazione, che si dovrà poi risolvere;
4. l'insieme delle soluzioni dovrà poi essere messo a confronto con il dominio e vedere quali soluzioni sono accettabili.

Esempio 1. Un triangolo ha un lato di 7 cm e un altro di 15 cm. Quali lunghezze può avere il terzo lato?



Risoluzione. Indichiamo con x la lunghezza del terzo lato $(x \in R^+)$. La lunghezza di ogni lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due. Perciò:

$$x < 7 + 15 \Rightarrow x < 22$$

La lunghezza di ogni lato è maggiore della differenza delle lunghezze degli altri due. Perciò:

$$x > 15 - 7 \Rightarrow x > 8$$

Il terzo lato del triangolo può perciò avere come lunghezza un qualunque numero reale compreso tra 8 cm e 22 cm. Ciò si scrive in modo compatto in questo modo:

$$8 < x < 22$$

Esempio 2. Una studentessa ha riportato nelle interrogazioni di matematica i seguenti voti: $5,\ 6\tfrac{1}{2},\ 5\tfrac{1}{2}$. Quale voto deve prendere per avere una media maggiore di 6?

Risoluzione. Indichiamo con x il quarto voto.
Scriviamo gli altri voti in forma decimale:

$$6\,{}^{1}\!/_{2}=6{,}5 \quad \text{e} \quad 5\,{}^{1}\!/_{2}=5{,}5$$

La media dei voti è data dalla somma dei quattro voti divisa per 4:

$$media=\frac{5+6{,}5+5{,}5+x}{4}.$$

Scriviamo la disequazione risolvente (ossia media >6):

$$\frac{5+6{,}5+5{,}5+x}{4}>6$$

Sommiamo i termini simili:

$$\frac{17+x}{4}>6$$

Moltiplichiamo i due membri per 4.

$$17+x>24$$

Ricaviamo x:

$$x>7.$$

4.4.8 Sistemi di disequazioni di primo grado

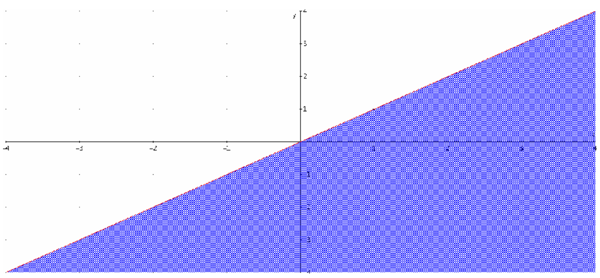
Risolvere un sistema di equazioni vuol dire trovare quel valore o quei valori che sostituiti alle incognite trasformano **tutte** le equazioni del sistema in proposizioni vere.
Analogamente, risolvere un **sistema di disequazioni**, significa trovare i valori che le rendono tutte proposizioni vere.

Esempio 1. Rappresentare nel piano cartesiano le soluzioni del sistema di disequazioni:

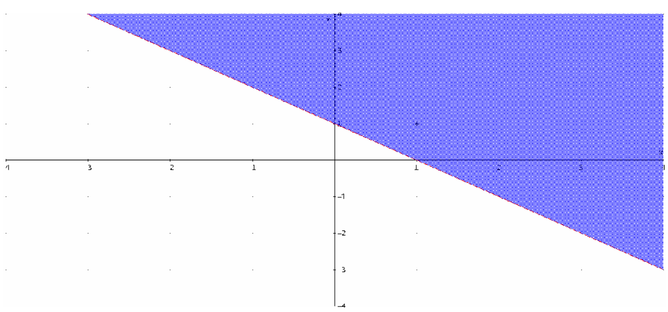
$$\begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y-1\geq 0 \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di disequazioni in due incognite: ciascuna di esse individua una regione di piano. Consideriamo ciascuna disequazione:

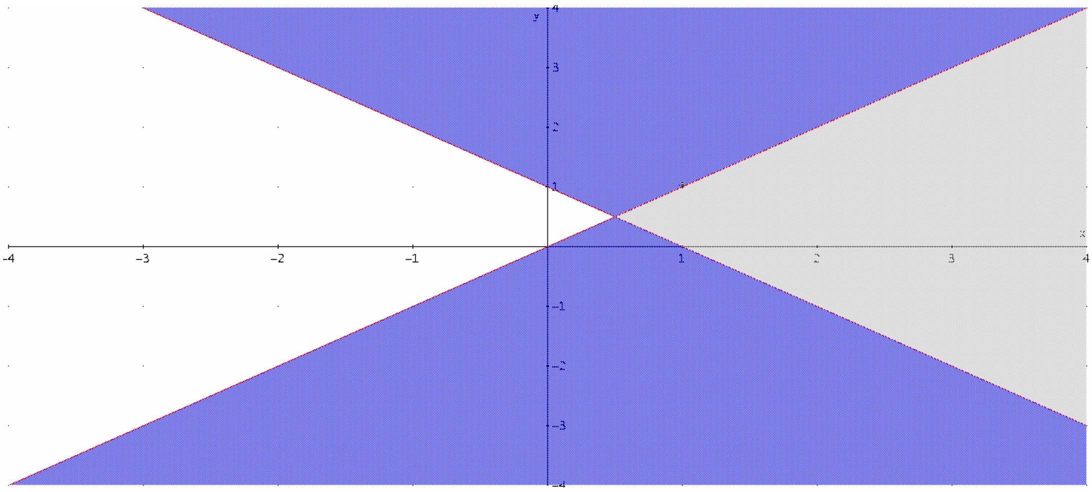
$x-y\geq 0$



$x+y-1\geq 0$



L'intersezione delle regioni individuate è la seguente:



I suoi punti rappresentano le soluzioni del sistema di disequazioni perché le loro coordinate soddisfano tutte le disequazioni del sistema.
In generale, per risolvere un sistema di disequazioni si considerano le singole disequazioni separatamente: si risolvono ad una ad una e si trova così per ognuna di esse l'insieme delle soluzioni. L'intersezione degli insiemi così individuati contiene tutte e sole le soluzioni del sistema dato.
Naturalmente, può darsi che tale insieme intersezione sia vuoto; le disequazioni sono in tal caso tra loro incompatibili: rappresentano delle richieste che non possono essere tutte insieme soddisfatte.

4.4.9 Tempi dell'intervento didattico

Per svolgere questa unità didattica si prevedono i seguenti tempi:

Accertamento dei prerequisiti:	2h
Lezioni frontali e svolgimento degli esercizi:	10h
Attività di laboratorio:	3h
Verifica sommativa:	2h
Consegna e correzione verifica sommativa:	1h

Per un totale di 18 ore che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa tre settimane e mezzo di lavoro. La previsione è da intendersi elastica, perché occorre tener conto dell'andamento e dei processi di apprendimento della classe.

4.4.10 Verifica sommativa U.D. 2

1. Di fianco a ogni disequazione sono scritti alcuni valori. Determina quali sono soluzioni e quali non lo sono.

$3b-1>6+2b$ $\quad b$=0; $\quad b=\frac{1}{3}$; $\quad b$=9; $\quad b$=10.

$2x-4>5x+8$ $\quad x$=-5; $\quad x$=-4; $\quad x$=0; $\quad x=\frac{1}{2}$

Rappresentare sulla retta reale gli insiemi dei valori di $x \in R$ che soddisfano le seguenti relazioni. Scrivili poi sotto forma di intervallo.

$x \leq a$; $\quad x > b$; $\quad b < x \leq c$; $\quad x \geq b$.

2. Risolvi le seguenti disequazioni di primo grado.

$$(x-1)^2+(x-2)^2 \leq 2(x+1)^2+3$$

$$(x+a)(x-a)+1-x^2 > 2(1-a^2)-ax$$

$$\frac{7}{6} > \frac{4x+2}{x-7}$$

3. Risolvi il seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{2} > \frac{2-x}{3} \\ 2x-1 \leq 2x+3 \end{cases}$$

4. Le dimensioni di un rettangolo sono (5+9x) cm e 8 cm. Trova x, sapendo che l'area del rettangolo deve essere minore di quella di un quadrato di lato 20 cm.

Griglia di valutazione per la verifica sommativa (compilata nelle sue parti)

	CONOSCENZA		COMPETENZA		CAPACITA'	
	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI
ESERCIZIO 1	3		3		1	
ESERCIZIO 2	4		3		3	
ESERCIZIO 3	3		2		4	
ESERCIZIO 4	2		4		4	
TOTALE	12		12		12	

Capitolo 5 U.D.3 EQUAZIONI ALGEBRICHE DI SECONDO GRADO IN CAMPO REALE E LORO RISOLUZIONE ALGEBRICA E GRAFICA

5.1 PREREQUISITI

Per lo svolgimento di questa unità didattica si ritiene necessaria la conoscenza dei contenuti delle unità precedentemente trattate e inoltre:

- Conoscenza dei numeri reali.
- Conoscenza della legge dell'annullamento del prodotto.
- Conoscenza del calcolo dei radicali.
- Elementi di geometria analitica: la retta e la parabola.
- Uso del software Derive.

5.2 OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE

- Conoscere il concetto di equazione di secondo grado.
- Conoscere il concetto di un'equazione di secondo grado incompleta (pura, spuria, monomia).
- Conoscere la formula risolutiva.
- Conoscere il concetto di un'equazione di secondo grado completa e tecniche di risoluzione di equazioni frazionarie e di equazioni intere letterali.
- Particolari equazioni di grado superiore al secondo: binomie, trinomie.
- Conoscere il metodo di risoluzione grafica di un'equazione di secondo grado.
- Svolgere esperienze interessanti con il software Derive a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

COMPETENZE

- Saper riconoscere un'equazione di secondo grado.
- Saper distinguere tra equazioni di secondo grado incomplete ed equazioni di secondo grado complete.
- Saper risolvere equazioni di secondo grado numeriche incomplete, numeriche complete, numeriche fratte e letterali.
- Saper scrivere una equazione di secondo grado conoscendone le soluzioni.
- Risolvere equazioni di grado superiore al secondo: binomie, trinomie.
- Risolvere equazioni di grado superiore al secondo componendole in polinomi di 1° e 2° grado.
- Saper risolvere equazioni parametriche.
- Saper risolvere un problema attraverso un'equazione di secondo grado.
- Saper risolvere sistemi di secondo grado.

Capacità

SAPER

- Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso di equazioni di secondo grado.
- Applicare la risoluzione grafica di equazioni di secondo grado a problemi riguardanti altri argomenti.
- Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

5.3 CONTENUTI

- Risoluzione di un'equazione completa di secondo grado.
- Risoluzione di un'equazione incompleta di secondo grado: pura, spuria e monomia.
- Equazioni numeriche intere.
- Equazioni numeriche fratte.
- Relazioni tra i coefficienti e le soluzioni di un'equazione di secondo grado.
- Particolari equazioni di grado superiore al secondo: binomie, trinomie.
- La risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo attraverso la scomposizione in polinomi di 1° e 2° grado.
- Problemi di secondo grado ad una incognita.
- Equazioni con un parametro.
- Formalizzare e risolvere problemi con equazioni di secondo grado ad una incognita.
- Sistemi di secondo grado.
- Risoluzione e interpretazione grafica di un'equazione di secondo grado attraverso l'utilizzo del software Derive.
- La Fisica e le equazioni di secondo grado: il moto parabolico.
- Leggere di matematica: il mondo delle equazioni di Raymond Queneau.

5.4 SVILUPPO DEI CONTENUTI

5.4.1 Risoluzione di un'equazione completa di secondo grado

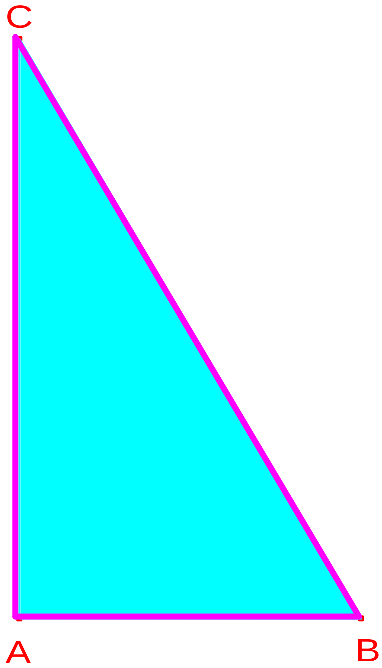
Per introdurre le equazioni di secondo grado si propone agli studenti un problema geometrico dividendo la classe in gruppi. La formalizzazione di questo in forma algebrica, li condurrà a scrivere un'equazione di secondo grado, che risolveranno attraverso la legge di annullamento del prodotto, componendo il polinomio con la regola della "somma e del prodotto" introdotta nella classe prima.

Nota didattica. Con questa attività ci si propone di:

- facilitare l'interiorizzazione e la condensazione dei nuovi concetti;
- creare un ambiente di apprendimento in cui si realizzi:
    - una costruzione collaborativa del sapere, attraverso l'assistenza reciproca e la condivisione sociale;
    - disponibilità all'ascolto;

- responsabilità individuale nello svolgere il proprio ruolo;
- responsabilità collettiva.

Si consideri il seguente problema:
Problema. Determinare le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo sapendo che la loro somma è $21\ cm$ e che l'ipotenusa misura $15\ cm$.



Risoluzione. Sia ABC il triangolo considerato, di ipotenusa BC, come mostrato in figura.
Posto $AB = x$, si ha:
$AB + AC = 21 \longrightarrow x + AC = 21 \longrightarrow AC = 21 - x$
Per il teorema di Pitagora, possiamo scrivere:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \longrightarrow x^2 + (21-x)^2 = (15)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 42x + 216 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 21x + 108 = 0.$$

La regola della "somma e prodotto" porterà gli alunni a cercare due numeri la cui somma sia 21 e il cui prodotto sia 108.
I valori cercati sono allora $x_1 = 9$ e $x_2 = 12$, entrambi accettabili e da cui si deducono i due valori di $AC = 21 - x$:
se $AB = x = 9 \Rightarrow AC = 21 - 9 = 12$;
se $AB = x = 12 \Rightarrow AC = 21 - 12 = 9$.

Nota didattica. La risoluzione di questo problema dovrebbe suscitare negli studenti l'interesse a determinare un metodo più sistematico per ricavare la soluzione dell'equazione di 2° grado.

Consideriamo allora una generica equazione **completa** di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad con\ \ a \in R_0 \quad b, c \in R$$

Il coefficiente a di x^2 si dice **primo coefficiente**; esso deve essere sempre diverso da zero, altrimenti l'equazione diviene di 1° grado.
Il coefficiente b di x si dice **secondo coefficiente** (o "coefficiente del termine medio") e può essere anche uguale a zero.
Il coefficiente c si dice **termine noto** (o anche "terzo coefficiente") e può essere anche uguale a zero.
A questo punto il docente stimola gli studenti ponendo tale quesito: "Quando un'equazione di secondo grado si dice **incompleta?**" Dopo le loro risposte si procederà dicendo che un'equazione di secondo grado si dice incompleta quando i coefficienti b e c (uno o entrambi) sono uguali a zero.

<u>Nota didattica</u>. Si riporta di seguito un errore ricorrente che si trova correggendo delle verifiche sull'argomento che stiamo trattando: quando si tratta di determinare i coefficienti a, b, c delle equazioni di secondo grado e di classificarle in complete e incomplete, al momento di ordinare per gradi l'equazione assegnata, alcuni studenti commettono il seguente errore:

Esempio:

$$2 - 5x - 3x^2 = 0 \dashrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \dashrightarrow \begin{array}{l} a = 3 \\ b = \text{-}5 \\ c = \text{-}2 \end{array}$$

Ciò dimostra che questi studenti considerano fissi i segni, di conseguenza ordinano i termini "senza segno", compiendo una permutazione. Essi considerano pertanto i segni "+" e "-" solo come operatori, dimostrando una scarsa padronanza del concetto di numero intero.

Vogliamo ora ricavare una formula risolutiva per determinare le soluzioni di una equazione completa di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad con\ \ a \in R_0 \quad b, c \in R \qquad [5\text{-}1]$$

Per far questo moltiplichiamo entrambi i membri per $4a$, ottenendo così l'equazione equivalente

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Aggiungiamo ai due membri il termine b^2 e $-4ac$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx. + b^2 = b^2 - 4ac.$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è il quadrato di un binomio, perciò si potrebbe anche scrivere

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad [5\text{-}2]$$

L'espressione $b^2 - 4ac$, che si trova al secondo membro della [5-2], si chiama **discriminante** dell'equazione [5-1] e si indica con la lettera greca maiuscola Δ (delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

<u>Osservazione didattica</u> La parola discriminante è dovuta al fatto che l'essere $b^2 - 4ac$ positivo, nullo o negativo rende differenziate, cioè discrimina, le soluzioni della [5-1].

L'equazione completa di secondo grado potrà essere allora risolta studiando i tre casi possibili:

1° caso. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
2° caso. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
3° caso. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

1° caso. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, risolviamo la [5-2] nell'incognita $(2ax + b)$:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Trasportiamo il termine b nel secondo membro:

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Essendo $a \neq 0$, la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

viene detta **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado.
Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $\Delta > 0$, la radice quadrata $\sqrt{b^2 - 4ac}$ è un numero reale positivo, l'equazione completa di secondo grado ($a \neq 0$) ha perciò due soluzioni reali e distinte.
L'insieme S delle soluzioni è pertanto:

$$S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}.$$

<u>Osservazione didattica</u>. Se a e c hanno segni contrari la radice quadrata $\sqrt{b^2 - 4ac}$ è ancora un numero reale positivo perché il prodotto ac è negativo, allora $-ac$ è positivo ed è perciò positivo anche il discriminante.

Si propone alla classe il seguente esercizio.
<u>*Esercizio*</u>. Risolvi la seguente equazione di secondo grado completa:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

<u>*Svolgimento*</u>. Calcoliamo il discriminante dell'equazione:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25.$$

Poiché $\Delta > 0$, l'equazione ammette due radici reali e distinte così indicate:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}.$$

Le soluzioni sono allora:

$$x_1 = -2; \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Osservazione didattica. Delle due soluzioni reali e distinte viene generalmente indicata con x_1 la minore e con x_2 la maggiore.

2° caso. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

L'equazione [5-2] diventa

$$(2ax+b)^2 = 0,$$

da cui

$$2ax + b = 0$$

ossia

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Se $\Delta = 0$, il radicale che compare nella formula risolutiva si annulla e quindi si ottiene una soluzione reale e doppia quindi due soluzioni reali e coincidenti:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

L'insieme S delle soluzioni è allora:

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}.$$

Si propone agli alunni il seguente esercizio.

Esercizio. Risolvi la seguente equazione di secondo grado completa:

$$16x^2 + 24x + 9 = 0.$$

Svolgimento. Calcoliamo il discriminante dell'equazione:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 0.$$

Poiché $\Delta = 0$, l'equazione ammette due radici reali coincidenti.

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{0}}{16}.$$

La soluzione è allora:

$$x_1 = x_2 = -\frac{3}{32}.$$

3° caso. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'equazione

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

l'equazione non ha soluzioni reali perché l'espressione al primo membro è un quadrato di un numero reale; quindi è sempre un numero positivo o nullo, mentre il secondo membro è un numero negativo e quindi, qualunque numero reale si sostituisca a x, l'espressione $(2ax+b)^2$ non può essere uguale all'espressione $b^2 - 4ac < 0$.

L'insieme delle soluzioni è allora:

$S = \varnothing$.

Si propone alla classe il seguente esercizio.

Esercizio 3. Risolvi la seguente equazione di secondo grado completa:

$$x^2 - 3x + 5 = 0.$$

Svolgimento. Calcoliamo il discriminante dell'equazione:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11.$$

Poiché $\Delta < 0$, l'equazione non ammette soluzioni in **R**.

Il docente stimola gli studenti ponendo tale quesito: "L'equazione non ammette soluzioni in **R**" ha senso? "Che bisogno c'è di sottolineare sempre che siamo in **R**"?
L'idea è di porre l'attenzione su quale sia l'effettivo insieme di numeri in cui devono essere cercate le soluzioni e di fare un cenno all'esistenza dell'insieme dei numeri complessi.
Visto l'interesse suscitato degli alunni verso questo argomento, il docente fa leggere la pagina del libro "Il giovane Törless" di Musil in cui è presente un divertente dialogo sui numeri immaginari.
Osservazione didattica. L'utilità di questa lettura consiste nell'indurre lo studente, ogni volta che si trova di fronte a equazioni con delta negativo a rispondere che non ci sono soluzioni in **R**.

FORMULA RISOLUTIVA RIDOTTA DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO COMPLETA

Quando nell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

il coefficiente b è un numero pari, la formula risolutiva può essere semplificata.
Se poniamo $b = 2m$, possiamo scrivere:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2m \pm \sqrt{4m^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2m \pm \sqrt{4(m^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2m \pm 2\sqrt{m^2 - ac}}{2a}$$

da cui finalmente, semplificando per 2, risulta:

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - ac}}{a} \quad \text{con} \quad m = \frac{b}{2}$$

che esprime appunto la **formula risolutiva ridotta**.

Quando si utilizza questa formula, invece del discriminante Δ si deve calcolare $\frac{\Delta}{4} = m^2 - ac$, perché se $\Delta = b^2 - 4ac$, $\frac{\Delta}{4} = \frac{b^2}{4} - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = m^2 - ac$.

Osservazione didattica. Si può scrivere la formula ridotta anche così:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Osservazione didattica. Le precedenti conclusioni sulla natura delle radici (reali distinte, reali coincidenti, complesse coniugate) si possono riferire al discriminante ridotto.

Si propone il seguente esercizio.

Esercizio. Risolvi la seguente equazione di secondo grado:

$$x^2 - 2x - 35 = 0.$$

Svolgimento. Poiché $b = -2, \quad m = -1,$ applichiamo la formula ridotta.

Calcoliamo prima $\frac{\Delta}{4}$ dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot (-35) = 36.$$

Poiché $\frac{\Delta}{4} > 0,$ l'equazione ammette due radici reali e distinte così indicate. Applicando la formula risolutiva ridotta, otteniamo:

$$x = 1 \pm \sqrt{36}.$$

Le soluzioni sono allora:

$$x_1 = -5; \qquad x_2 = 7.$$

Nota didattica. Si riporta di seguito l'analisi di un errore particolarmente difficile che si trova correggendo delle verifiche sull'argomento che stiamo trattando: quando si tratta di scrivere la formula del discriminante di un'equazione di secondo grado e il non utilizzo dell'espressione ridotta.

Esempio. Risolvere l'equazione seguente:

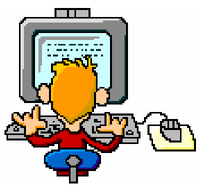
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Alcuni studenti nella risoluzione di tale equazione utilizzano in modo errato la formula del discriminante, che utilizzano peraltro in modo scorretto.

$$\Delta = -(-6) \pm (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (8) = +6 \pm 36 - 32 = 4 \;\Rightarrow\; \Delta = 4$$

Infatti, sostituiscono nella sua formula i valori dei coefficienti correttamente individuati, ma non trascrivono la radice, come avrebbero logicamente dovuto fare, dopodichè "scartano" la prima parte della somma algebrica trovata ("$+6\pm$") e calcolano la rimanente parte, indicando correttamente il tipo di soluzioni. L'analisi di questo errore è particolarmente difficile. Si percepisce, in qualche modo, che gli studenti hanno capito che per determinare il tipo di soluzioni occorre considerare solo il radicando della formula che hanno scritto, ma traducono il loro ragionamento in maniera errata. Il simbolo Δ sembra non avere per loro un significato ben preciso, infatti, lo utilizzano sia per riportare il numeratore della formula risolutiva, sia per calcolare il radicando che compare in essa, pertanto evidenziano una grossa difficoltà nel fare corrispondere alla logica del loro ragionamento, una scrittura algebrica consistente dal punto di vista semantico. Inoltre utilizzano l'uguale in maniera corretta unicamente nel momento in cui operano la scelta finale di effettuare solo il calcolo del radicando e il "rifiuto" di utilizzare l'espressione ridotta.

UTILIZZO DEL SOFTWARE DERIVE



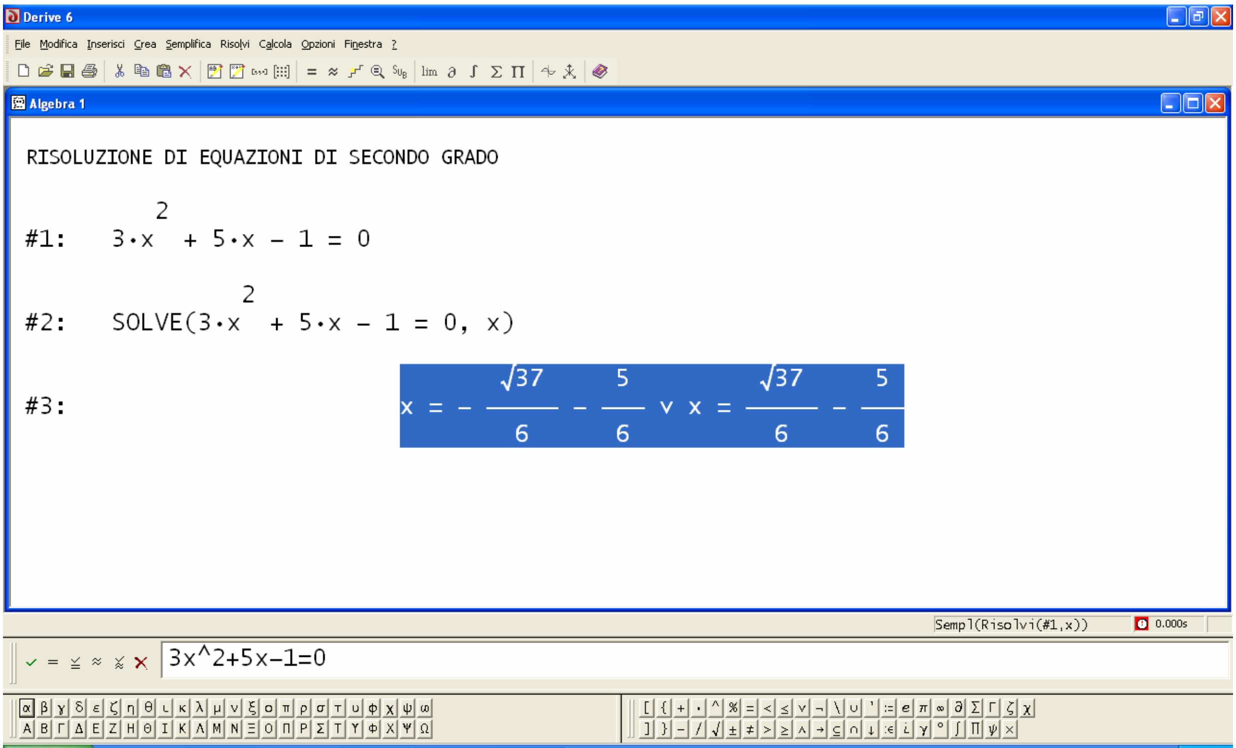
Nota didattica. Questo esercizio, come del resto anche gli altri esercizi affrontati in classe con gli alunni, potrebbero essere risolti anche in laboratorio attraverso l'uso del software Derive. Lo studente dopo aver impostato l'equazione e risolta "carta e penna", potrebbe verificare l'esattezza del risultato facendola risolvere al programma.

Esercizio 1. Risolviamo l'equazione

$$3x^2+5x-1=0$$

Risoluzione

- Utilizziamo il comando o il bottone ***Inserisci_Oggetto testo*** (icona 4) per dare un titolo al lavoro. Esso apre un riquadro nella zona algebrica (riquadro seguente) all'interno del quale scriviamo RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DI SECONDO GRADO.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $3\cdot x$^$2+5x-1=0$.
- Con ***INVIO*** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.



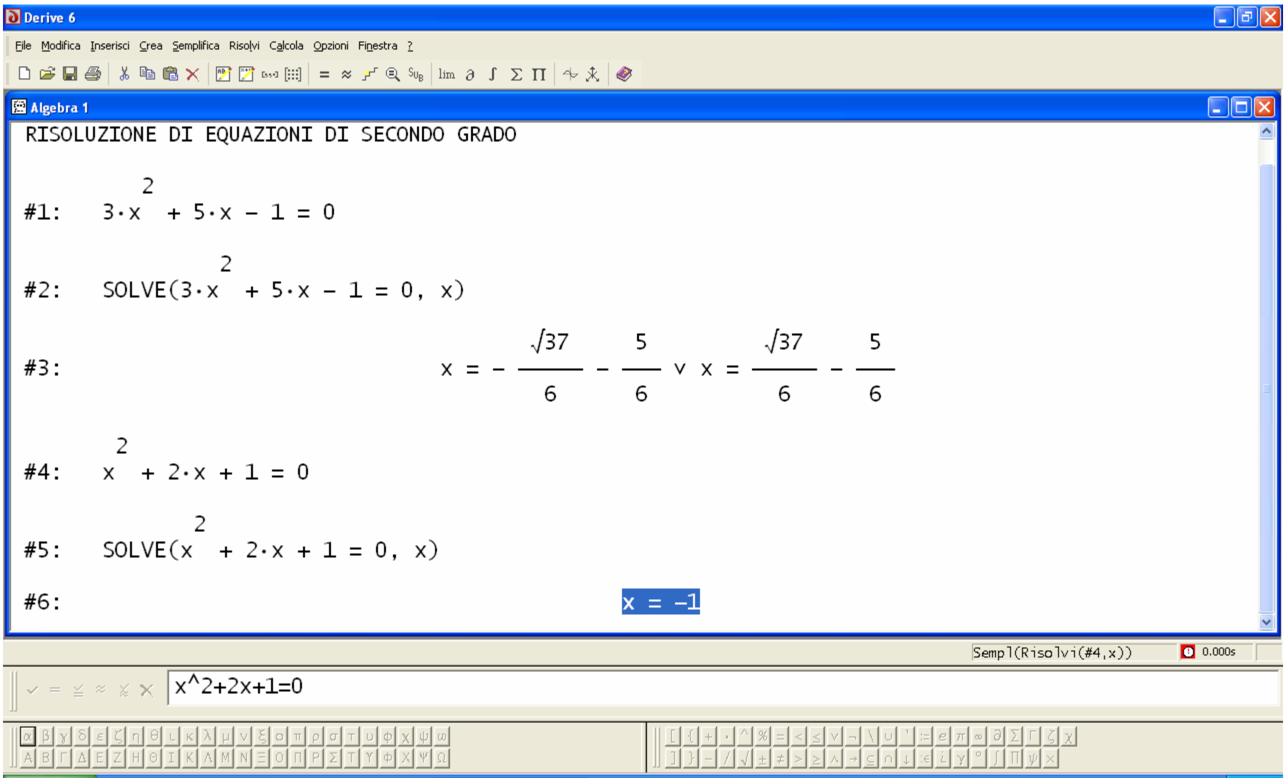
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #1, di considerare la x come variabile e di usare il metodo algebrico.
- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #2 e le radici dell'equazione #3.

Esercizio 2. Risolviamo l'equazione

$$x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0.$$

Risoluzione.

- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $x\text{^}2 + 2 \cdot x + 1 = 0$.
- Con ***INVIO*** la immettiamo nell'etichetta #4 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #4, di considerare la x come variabile e di usare il metodo algebrico.



- Facciamo clic su ***OK***, otteniamo solo l'impostazione della soluzione. Per ottenere poi le radici dell'equazione, adoperiamo su di essa il comando ***Semplifica_Base*** o ***Semplifica_Sviluppa*** o ***Semplifica_Approssima***.

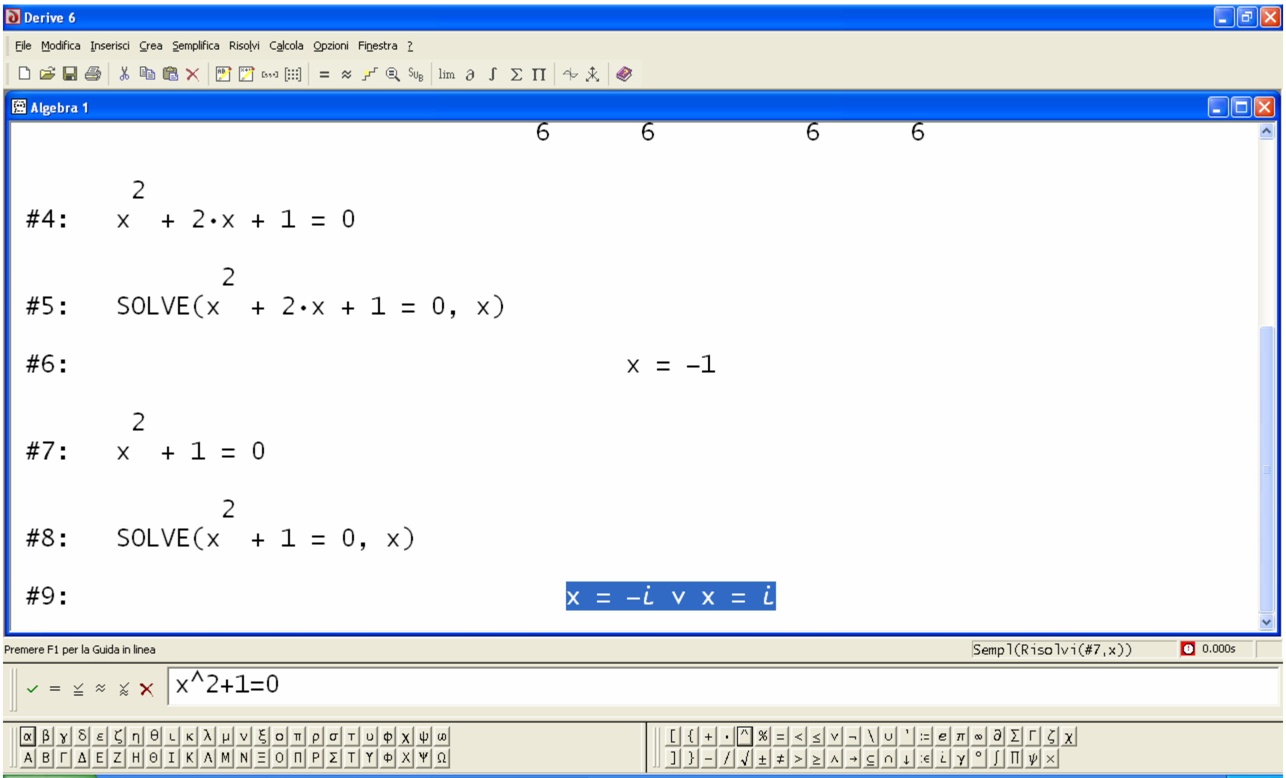
Osservazione didattica. Se il discriminante è zero, Derive scrive sempre una volta sola la soluzione.
I problemi sorgono quando abbiamo a che fare con equazioni prive di soluzioni reali. Infatti Derive calcola le soluzioni sempre in un ambiente più vasto di quello dei numeri reali, l'ambiente dei numeri complessi.

Scriviamo, ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Risoluzione.

- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo x^$2 + 1 = 0$.
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #7 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #7, di considerare la x come variabile e di usare il metodo algebrico.



- Facciamo clic su ***OK***, otteniamo solo l'impostazione della soluzione. Per ottenere poi le radici dell'equazione, adoperiamo su di essa il comando ***Semplifica_Base*** o ***Semplifica_Sviluppa*** o ***Semplifica_Approssima***.

5.4.2 Risoluzione di un'equazione incompleta di secondo grado

EQUAZIONE PURA

Un'equazione di secondo grado

$ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$

è incompleta **pura** se $c\neq 0$ e $b=0$, cioè manca il termine di primo grado in x, e si presenta dunque nella forma

$ax^2+c=0.$

Per determinare le sue soluzioni, trasportiamo il termine noto nel secondo membro e dividiamo tutti i termini per a (essendo $a\neq 0$) : ottenendo così:

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Per la risoluzione dell'equazione pura dobbiamo allora distinguere i due casi seguenti:

1. i coefficienti a e c sono concordi;
2. i coefficienti a e c sono discordi.

1. a e c sono concordi

Se a e c sono concordi, $-\frac{c}{a}$ è negativo; poiché x^2 è positivo o nullo in quanto potenza pari di un numero reale, l'equazione non ha soluzioni reali. Pertanto l'insieme delle soluzioni è $S=\emptyset$.

Esempio. Risolviamo in **R** l'equazione incompleta:

$3x^2+27=0$

Risoluzione. Isoliamo il termine con l'incognita, portando nel secondo membro il termine noto:

$3x^2=-27.$

Dividiamo entrambi i membri per 3:

$x^2=-9$

L'equazione non ha soluzioni reali perché non esiste alcun numero reale il cui quadrato è uguale a un numero negativo. Pertanto l'insieme delle soluzioni è $S=\emptyset$.

2. a e c sono discordi

Se a e c sono discordi, $-\frac{c}{a}$ è positivo; pertanto l'equazione ammette due radici opposte reali e distinte:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

L'insieme delle soluzioni è in questo caso:

$$S = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}; +\sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}.$$

Esempio. Risolviamo in **R** l'equazione seguente:

$$5x^2 - 20 = 0$$

Risoluzione. Isoliamo il termine con l'incognita, portando nel secondo membro il termine noto:

$$5x^2 = 20.$$

Dividiamo entrambi i membri per 5:

$$x^2 = 4.$$

Poiché $x \in$ **R**, consideriamo la radice algebrica:

$$x = \pm\sqrt{4}.$$

Le soluzioni sono allora:

$$x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 2.$$

EQUAZIONE SPURIA

Un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

è incompleta s**puria** se $c = 0$ e $b \neq 0$, cioè manca il termine noto, e si presenta dunque nella forma

$$ax^2 + bx = 0.$$

Per determinare le sue soluzioni raccogliamo a fattore comune la variabile x: ottenendo così:

$$x(ax + b) = 0.$$

Osservazione didattica. Il primo membro dell'equazione è formato dal prodotto di due fattori: il monomio x e il binomio $(ax + b)$.

Per la legge di annullamento del prodotto, per determinare le soluzioni basta uguagliare a zero i due fattori, cioè risolvere le due equazioni di primo grado in cui viene a scindersi l'equazione data:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad ax + b = 0.$$

Le soluzioni della data equazione sono dunque:

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

e sono sempre reali di cui una nulla.

Concludendo, un'equazione spuria ammette in **R** sempre due soluzioni; l'insieme S delle soluzioni è pertanto

$$S=\left\{0;-\frac{b}{a}\right\}.$$

Esempio. Risolviamo in **R** l'equazione seguente:

$$6x^2-5x=0.$$

Risoluzione. Raccogliamo x:

$$x(6x-5)=0.$$

e applicando la legge dell' annullamento del prodotto, si conclude subito che essa ha come soluzioni:

$$x_1=0 \quad \text{e} \quad x_2=\frac{5}{6}.$$

EQUAZIONE MONOMIA

Un'equazione di secondo grado

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{con } a\neq 0$$

è incompleta **monomia** se $c=0$ e $b=0$, cioè mancano sia il termine di primo grado in x sia il termine noto, e si presenta dunque nella forma:

$$ax^2=0.$$

Per determinare le sue soluzioni dividiamo per a (essendo $a\neq 0$); otteniamo:

$$x^2=0.$$

Le soluzioni o radici della data equazione non possono essere più di due.
L'insieme delle soluzioni è $S=\{0\}$.

Esempio. Risolviamo in **R** l'equazione monomia seguente:

$$2x^2=0.$$

Risoluzione. Riscriviamo il monomio in questo modo:

$$x(2x)=0$$

e applicando la legge dell'annullamento del prodotto, si conclude subito che l'equazione ha due soluzioni coincidenti: $x_1=x_2=0$.

5.4.3 Equazioni numeriche intere

Un'equazione di secondo grado si dice numerica se oltre alla lettera che rappresenta l'incognita, non contiene altre lettere. Si dice intera se l'incognita non compare al denominatore.

Per determinare l'insieme delle soluzioni di una equazione numerica intera si procede nel seguente modo:

1) si riduce l'equazione data in forma normale seguendo il procedimento indicato per le espressioni algebriche e applicando i principi di equivalenza già noti per la risoluzione delle equazioni di primo grado;

2) si trasformano i coefficienti a, b, c, qualora non lo fossero, in numeri interi moltiplicando entrambi i membri per un opportuno numero intero (diverso da zero);

3) si stabilisce se l'equazione ottenuta è completa o incompleta e si proceda alla risoluzione a seconda dei casi;

4) nel caso dell'equazione completa:
   - si consiglia di rendere il coefficiente del termine di secondo grado, cioè il primo coefficiente a sempre positivo (per evitare errori nell'applicazione della formula);
   - si consiglia di applicare, quando è possibile, la formula ridotta.

Risolviamo la seguente equazione numerica intera.

Esempio 1.

$$\frac{x^2}{2}-\frac{(x+1)x}{3}=\frac{x(x-3)}{4}$$

Risoluzione. 12 è il minimo comune multiplo dei denominatori; si ha:

$$6x^2-4x^2-4x=3x^2-9x \Rightarrow -x^2+5x=0.$$

Raccogliamo x:

$$-x(x-5)=0.$$

e applicando la legge dell' annullamento del prodotto, si conclude subito che essa ha come soluzioni:

$$x_1=0 \text{ e } x_2=5.$$

5.4.4 Equazioni numeriche fratte

Un'equazione è **frazionaria** o **fratta** se anche in uno solo dei suoi denominatori compare l'incognita.

Il docente ricorda alla classe la seguente definizione.

DEFINIZIONE. Si dice **dominio** di un'equazione l'insieme dei numeri **R** privato degli elementi che rendono nullo almeno uno dei denominatori in essa presenti. L'insieme delle soluzioni è l'insieme del valori che sostituiti alla x rendono vera l'uguaglianza.

Si esaminano ora quelle particolari equazioni numeriche fratte che possono essere ricondotte, dopo aver determinato le condizioni di esistenza dell'equazione e aver applicato i principi di equivalenza, alla forma $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$.

Risolvendo tale equazione si arriva alle possibili soluzioni dell'equazione fratta. Tali soluzioni, se esistono, sono accettate solo se non coincidono con i valori scartati dalle condizioni di esistenza (C.E.).

Risolviamo le seguenti equazioni fratte.

Esempio 1.

$$\frac{x+2}{x}=\frac{5+x}{3-x}.$$

Risoluzione. Le C.E. sono $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 3.$

Moltiplichiamo per il denominatore comune $x(3-x)$; arriviamo così a un'equazione intera:

$$(3-x)\cdot(x+2)=5x+x^2.$$

Svolgendo i calcoli e semplificando si ha:

$$x^2+2x-3=0.$$

Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=1+3=4.$

Poiché $\frac{\Delta}{4}>0,$ l'equazione ammette due radici reali e distinte. Applicando la formula risolutiva ridotta, otteniamo

$$x=-1\pm\sqrt{4}.$$

Le soluzioni sono allora:

$$x_1=-3 \quad \text{e} \quad x_2=1.$$

Tali soluzioni sono accettate, perché non coincidono con i valori scartati dalle C.E.

L'insieme delle soluzioni è $S=\{-3;\ 1\}.$

Esempio 2.

$$\frac{x+3}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{2}{1-x^2}.$$

Risoluzione. Le C.E. sono $x \neq -1 \ \wedge \ x \neq 1.$

Moltiplichiamo per il denominatore comune x^2-1; arriviamo così a un'equazione intera:

$$(x+3)(x+1)+(x+2)(x-1)=-2$$

Svolgendo i calcoli e semplificando si ha:

$$x^2+2x-3=0.$$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=25-24=1.$

Poiché $\Delta>0,$ l'equazione ammette due radici reali e distinte. Applicando la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado otteniamo:

$$x=\frac{-5\pm1}{4}$$

Le soluzioni sono allora:

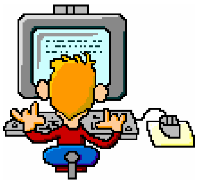
$$x_1=-\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x_2=-1.$$

La soluzione $x=-1$ non è accettata, perché coincide con un valore scartato dalle C.E. pertanto l'insieme delle soluzioni è

$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$

Osservazione didattica. Come per le equazioni di primo grado, anche per le equazioni di secondo grado si può effettuare la verifica delle soluzioni. Si sostituisce in entrambi i membri alla variabile x ogni valore trovato e si verifica che l'uguaglianza sia vera.

UTILIZZO DEL SOFTWARE DERIVE

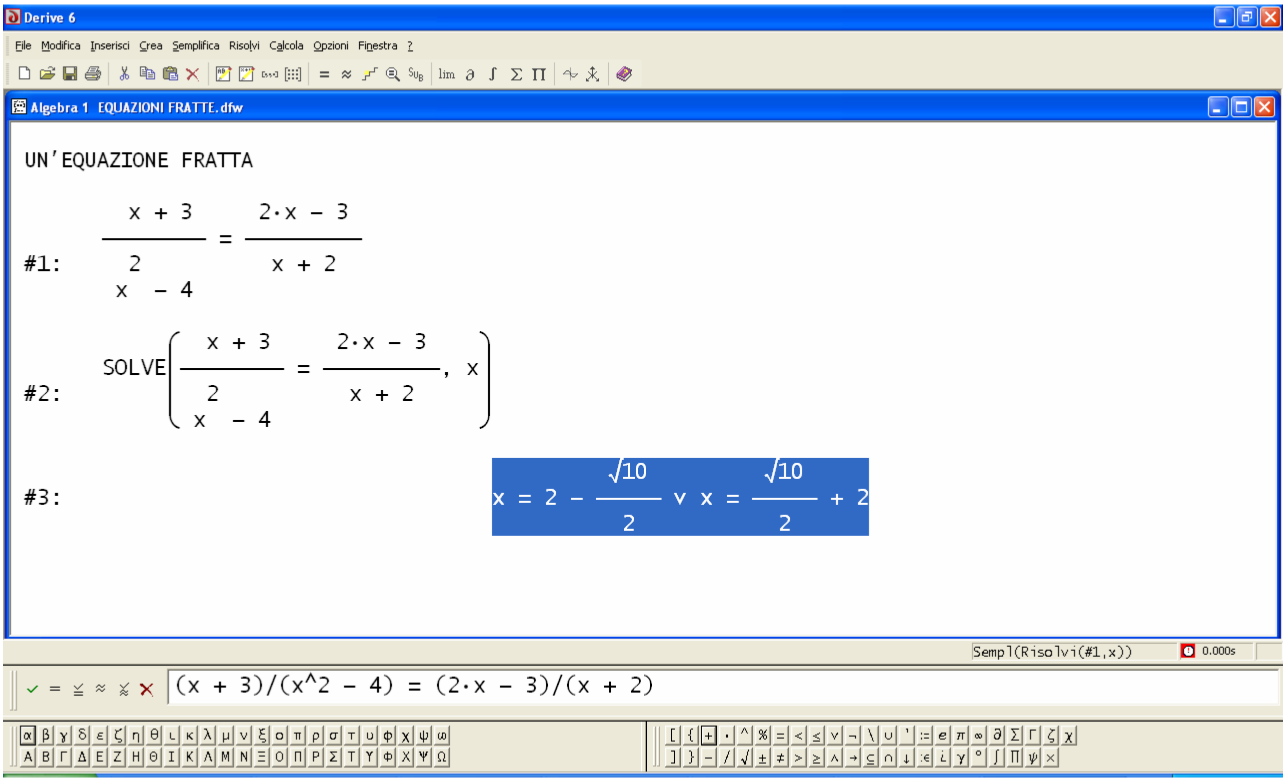


Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{2x-3}{x+2}.$$

Risoluzione.

- Utilizziamo il comando o il bottone ***Inserisci_Oggetto testo*** per (icona 4) per dare un titolo al lavoro. Esso apre un riquadro nella zona algebrica (riquadro seguente) all'interno del quale scriviamo UN'EQUAZIONE FRATTA.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $(x+3)/(x\text{^}2-4) = (2x-3)/(x+2)$.
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #1, di considerare la *x* come variabile e di usare il metodo algebrico.



- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #2 e le radici dell'equazione #3.
- Se invece facciamo clic su ***OK***, otteniamo solo l'impostazione della soluzione. Per ottenere poi le radici dell'equazione, adoperiamo su di essa il comando ***Semplifica_Base*** o ***Semplifica_Sviluppa*** o ***Semplifica_Approssima***.
- Se scegliamo il metodo numerico, *Derive* attiva un procedimento di approssimazione e mostra in formato decimale.

Per default Derive rappresenta i numeri decimali con dieci cifre (dieci totali fra cifre intere e decimali), se desideriamo variare il numero delle cifre di un numero decimale, diamo **Opzioni_Modalità**, scegliamo il segnalibro **Semplificazione** e, nella finestra di dialogo corrispondente, interveniamo sul campo **Cifre**.

5.4.5 Relazioni tra i coefficienti e le soluzioni di un'equazione di secondo grado

Consideriamo un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ e $\Delta \geq 0$. In queste condizioni gli alunni sanno già che le soluzioni dell'equazione saranno due, reali e distinte (o coincidenti se $\Delta = 0$):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

SOMMA DELLE RADICI

Indichiamo con s la somma delle radici $x_1 + x_2$:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} =$$

$$= -\frac{b}{a}$$

ottenendo così:

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

PRODOTTO DELLE RADICI

Indichiamo con p il prodotto delle radici $x_1 \cdot x_2$:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})\cdot(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ottenendo così:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Osservazione didattica. Nel caso $\Delta = 0$ le radici dell'equazione diventano:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

La somma delle radici è:

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

ma quella del prodotto cambia,

$$p = x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2}$$

Il docente stimola gli alunni ponendo tale quesito: "C'è una relazione fra $\frac{c}{a}$ e $\frac{b^2}{4a^2}$"?

Invita gli allievi ad affrontare la questione e a discuterne. Non mancherà di guidare la discussione, facendo un po' per volta riflettere sul significato $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$$

Dividiamo per $4a^2$ (essendo $a \neq 0$)

$$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

quindi:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Si può dunque concludere che in ogni equazione di secondo grado:

la somma delle radici è uguale all'opposto del quoto fra il secondo e il primo coefficiente,
il prodotto delle radici è uguale al quoto fra il termine noto e il primo coefficiente.

Come da una data equazione di secondo grado si può ottenere, senza risolverla, la somma s e il prodotto p delle radici, così conoscendo s e p, si può risalire all'equazione.

Ciò da origine alle seguenti applicazioni:

1° Applicazione
Dati la somma s e il prodotto p delle radici di una equazione di secondo grado, costruire l'equazione stessa.

Data l'equazione in forma normale,

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

possiamo sempre dividere i due membri per a, poiché siamo nell'ipotesi $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Scriviamo $\frac{b}{a}$ come $-\left(-\frac{b}{a}\right)$:

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ricordando che $-\frac{b}{a}$ è la somma delle radici e $\frac{c}{a}$ è il prodotto, possiamo scrivere:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Nota didattica. Si riporta di seguito un errore ricorrente che si trova correggendo delle verifiche sull'argomento che stiamo trattando: quando si tratta di provare a lavorare con i coefficienti per dimostrare che dalla forma $ax^2 + bx + c = 0$, si può arrivare all'equivalente $x^2 - sx + p = 0$, alcuni studenti nel dividere tutti i membri per a (essendo $a \neq 0$)

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

commettono il seguente errore nel semplificare:

$$x^2 + bx + c = 0.$$

In effetti sono molti gli studenti che non padroneggiano il senso dei simboli che viene loro insegnato a manipolare: hanno difficoltà a percepire l'algebra come strumento di pensiero, a capire le generalizzazioni e a cogliere le analogie.

Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Determinare l'equazione di secondo grado le cui radici hanno per somma $-\frac{3}{4}$ e per prodotto $-\frac{5}{8}$.

Risoluzione. Dati:

$$s=-\frac{3}{4} \qquad p=-\frac{5}{8}$$

L'equazione cercata è:

$$x^2-sx+p=0$$

Nel caso considerato, si ha:

$$x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}=0$$

cioè:

$$8x^2+6x-5=0.$$

2° Applicazione

Determinare due numeri conoscendo la loro somma s e il loro prodotto p.

Siano x e y i numeri incogniti. Conoscendo $x+y$ e xy, si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$$

Tale sistema si risolve sostituendo alla y, nella prima equazione, l'espressione $\frac{p}{x}$.

Osservando però che l'equazione di secondo grado (per esempio nella incognita t):

$$t^2-st+p=0$$

ha per radici due numeri che hanno per somma s e per prodotto p (cioè proprio i valori richiesti per x e y), conviene risolvere il sistema per mezzo di tale equazione, detta **equazione ausiliaria** o risolvente del sistema, che fornisce contemporaneamente i valori di entrambe le incognite.

Se t_1 e t_2 sono le radici dell'equazione ausiliaria, il sistema ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x=t_2 \\ y=t_1 \end{cases}$$

ottenute scambiando le radici, perché la somma e il prodotto di due numeri sono commutativi.

Osservazione didattica. Un sistema quello ora risolto, che conserva invariate le sue equazioni quando le incognite vengono permutate tra loro, si dice simmetrico. I tipi di sistemi simmetrici sono innumerevoli; il sistema considerato, essendo il più semplice, si chiama sistema simmetrico elementare.

Esempio. Trovare due numeri che abbiano per somma $2m$ e per prodotto m^2-4.

Risoluzione. Indicando con x e y i due numeri incogniti, la cui somma è $2m$ e il cui prodotto è m^2-4, si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2m \\ xy = m^2 - 4 \end{cases}$$

L'equazione ausiliaria è:

$$t^2 - 2mt + m^2 - 4 = 0$$

Risolvendola si ha:

$$t = \begin{cases} x \\ y \end{cases} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - (m^2 - 4)}}{2} = m \pm \sqrt{4} = m \pm 2 \begin{cases} m + 2 \\ m - 2 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x = m + 2 \\ y = m - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = m - 2 \\ y = m + 2 \end{cases}$$

I numeri richiesti sono $m + 2$ e $m - 2$, permutabili.

3° Applicazione

Scomporre un trinomio di secondo grado in un prodotto di fattori di primo grado.

Osservazione didattica. Sono i trinomi di secondo grado, ordinati rispetto alle lettere m, z, y, i trinomi seguenti:

$$8m^2 + 2m - 3 \qquad 12z^2 - 7z + 1 \qquad y^2 - 5y + 6$$

Ogni trinomio di secondo grado, ordinato rispetto a una data lettera, si può sempre scomporre nel prodotto di due fattori di primo grado.
Si assuma come tipico trinomio di secondo grado il trinomio in cui la lettera ordinatrice è x, con $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c$$

se l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha $\Delta \geq 0$, le soluzioni x_1 e x_2 (al più coincidenti), dell'equazione sono anche dette **zeri** del trinomio.
In questo caso il trinomio può essere scomposto in fattori mediante la relazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Osservazione didattica. Quando il discriminante dell'equazione è positivo, i due fattori sono distinti, quando è uguale a zero i due fattori sono uguali e il trinomio si trasforma nel prodotto $a(x - x_1)^2$, cioè è un quadrato perfetto in x; finalmente, quando il discriminante è negativo, i due fattori hanno termini complessi.
Ciò premesso, supposto $a \neq 0$, $\Delta \geq 0$ e raccogliendo a si ha:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Utilizzando le relazioni

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2\,, \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$ e osservando che $$\frac{b}{a} = -\left(-\frac{b}{a}\right)$$

scriviamo:

$$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] = a[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2] =$$

Raccogliamo x fra i primi due termini e x_2 fra gli altri due termini:

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$

Raccogliamo $(x - x_1)$, giungendo alla scomposizione voluta:

$$= a(x - x_1)\cdot(x - x_2).$$

<u>*Esempio*</u> *1*. Scomporre in fattori il seguente trinomio:

$$5x^2 - 7x + 2.$$

<u>*Risoluzione*</u>. Gli zeri del trinomio sono le soluzioni dell'equazione

$$5x^2 - 5x - 30 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 4\cdot 5\cdot(-30) = 25 + 600 = 625;$$

Poiché $\Delta > 0$, l'equazione ammette due radici reali e distinte. Risolvendo l'equazione, si trova:

$$x = \frac{+5 \pm \sqrt{625}}{10}.$$

Le soluzioni sono allora:

$$x_1 = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = 3.$$

La scomposizione del trinomio è:

$$5x^2 - 5x - 30 = 5(x - 3)(x + 2).$$

<u>*Esempio*</u> *2*. Scomporre in fattori il seguente trinomio:

$$4x^2 - 12x + 9.$$

<u>*Risoluzione*</u>. Gli zeri del trinomio sono le soluzioni dell'equazione

$$4x^2 - 12x + 9 = 0.$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 36 = 0;$$

Poiché $\frac{\Delta}{4} = 0$, l'equazione ammette due radici reali e coincidenti. Applicando la formula risolutiva ridotta, otteniamo:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{4}.$$

La soluzione è allora:

$$x_1 = x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

La scomposizione del trinomio è:

$$4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

5.4.6 **<u>Problemi di secondo grado ad una incognita</u>**

<u>Nota didattica</u>. Con le conoscenze acquisite fino a questo punto, il docente potrebbe iniziare con la classe a risolvere problemi di secondo grado ad una incognita e

ritardare la presentazione dei successivi argomenti presenti in questa unità didattica. Ciò permetterebbe agli alunni di fissare meglio questa prima parte, così importante anche per le applicazioni future.

Un problema si dice di secondo grado quando la sua risoluzione dipende da quella di una equazione o di un sistema di secondo grado.
Ai problemi di secondo grado si estende quanto è stato esposto sulla risoluzione algebrica dei problemi di primo grado; precisamente, la trattazione algebrica di un problema si svolge attraverso le seguenti fasi:
1°) **Scelta dell'incognita o delle incognite**.
Spesso l'enunciato medesimo del problema suggerisce quali incognite si devono assumere; in molti casi invece la scelta è affidata all'intuizione di chi risolve il problema.
E' bene a tal proposito osservare che vi sono problemi nei quali dalla scelta dell'incognita può dipendere la trattazione più o meno facile del problema.
2°) **Traduzione del problema in equazioni** (ossia "intavolazione delle equazioni del problema").
Questa è la parte in cui si possono incontrare talvolta le maggiori difficoltà. Nei casi più semplici, l'equazione o le equazioni sono ispirate dall'enunciato stesso del problema, mentre in altri casi bisogna "scoprire" attraverso ragionamenti le relazioni esistenti fra dati e incognite, e nei problemi di algebra applicata alla geometria si devono spesso applicare teoremi geometrici e regole di misura.
3°) **Definire il dominio dell'incognita prescelta**, ossia stabilire quelle limitazioni al valore dell'incognita che garantiscono la possibilità di dare un significato alle soluzioni che si troveranno.
4°) **Risoluzione dell'equazione o del sistema di equazioni**.
Qui si applicano i procedimenti stabiliti dall'Algebra e la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.
5°) **Interpretazione delle soluzioni e discussione delle formule risolutive.**
L'equazione o il sistema che traducono un problema sono ordinariamente più generali delle relazioni fra dati e incognite del problema stesso: cioè le radici trovate, mentre sono soluzioni dell'equazione o del sistema, possono essere solo in parte (e talvolata anche nessuna) soluzioni del problema.

Facciamo qui di seguito due esempi.
Esempio 1. La differenza tra il doppio del quadrato di un numero naturale dispari con il quadrato del numero successivo dispari è 353. Determiniamo i due numeri.

Dati:
La differenza tra il doppio del quadrato di un numero naturale dispari con il quadrato del numero successivo dispari è 353.
Obiettivo:
Trovare i due numeri.

Risoluzione. Indicando con a e $a+2$ i due numeri scriviamo:

$$2a^2-(a+2)^2=353.$$

I numeri richiesti verificheranno quindi l'equazione

$$a^2-4a-357=0$$

e, risultando l'equazione da risolvere di secondo grado, i numeri richiesti sono, se esistono, due.
Essi esistono dato che è $\Delta=361>0$; perciò l'equazione ha due radici reali e distinte.
Applicando la formula risolutiva ridotta, otteniamo:

$$a=2\pm\sqrt{361}.$$

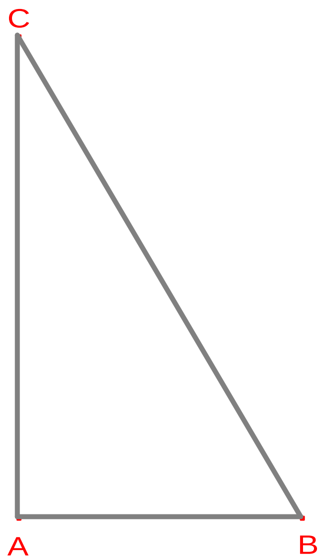
Le soluzioni sono allora:

$$a_1=-17 \quad \text{e} \quad a_2=21.$$

$a=21$ è soluzione accettabile, perché 21 è un numero naturale; a = -17 non è accettabile.
I due numeri sono allora 21 e 23.

Esempio 2. In un triangolo rettangolo ABC il cateto AC supera di 2 cm il cateto AB. Calcoliamo il perimetro del triangolo ABC, sapendo che la somma dei quadrati dei tre lati è $200\ \text{cm}^2$.

Dati:
$\overline{AC}=\overline{AB}+2$ (in cm);
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=200$ (in cm^2).



Obiettivo:

$2p\ ABC$.

Risoluzione. Posto $\overline{AB}=x$, si ha:

$$\overline{AC}=2+x$$

Per il teorema di Pitagora, possiamo scrivere

$$\overline{CB}^2=x^2+(2+x)^2.$$

Risolviamo allora l'equazione:

$$x^2+(2+x)^2+x^2+(2+x)^2=200$$
Svolgendo i calcoli e semplificando si ha:
$$x^2+2x-48=0.$$
Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=1+48=49.$

Poiché $\frac{\Delta}{4}>0,$ l'equazione ammette due radici reali e distinte. Applicando la formula risolutiva ridotta, otteniamo
$$x=-1\pm\sqrt{49}.$$
Le soluzioni sono allora:
$$x_1=-8 \quad \text{e} \quad x_2=6.$$
$x=-8$ non è accettabile, perché un numero negativo non può esprimere la misura di un segmento;
$x=6$ è soluzione accettabile.

Calcoliamo le misure dei lati del triangolo:
$\overline{AB}=6$ (in cm)
$\overline{AC}=8$ (in cm)
$\overline{BC}=10$ (in cm)
e il perimetro
$2p\ ABC = 24$ (in cm)

5.4.7 <u>Equazioni con un parametro</u>

Un'equazione si dice con un parametro quando, oltre all'incognita, contiene anche una lettera (che è un numero reale), chiamata **parametro**.

<u>*Esempi*</u>. Sono equazioni con un parametro di secondo grado:

- $x^2+2x+k=0$ dove x è la variabile e k è il parametro;
- $(m-1)x^2-2mx+m-1=0,$ con $m\neq 1,$ dove x è la variabile e m è il parametro;
- $x^2+(a-1)x+a^2=0,$ dove x è la variabile e a è il parametro;
- $x^2+(k+1)x-21=0,$ dove x è la variabile e k è il parametro.

L'esistenza e i valori delle radici di un'equazione con un parametro dipendono dal valore che si attribuisce al parametro nell'insieme dei numeri reali. Ci domandiamo allora se esistono valori del parametro per i quali le radici sono soggette a particolari condizioni.

Chiariamo quanto detto con gli esempi seguenti.
<u>*Esempio*</u> *1*. Data l'equazione con un parametro $x^2+2x+k=0,$ vogliamo determinare per quali valori del parametro k:

a. le radici sono reali e distinte;
b. le radici sono reali e coincidenti;
c. non esistono radici reali;
d. le radici sono opposte,

e. una radice è nulla;
f. una radice è uguale a -3.

Risoluzione.

a. Le radici sono reali e distinte.
Ricordiamo che un'equazione di secondo grado ammette radici reali e distinte quando $\Delta > 0$. Calcoliamo il discriminante $\frac{\Delta}{4} = 1 - k$. Poiché deve essere $\Delta > 0$, abbiamo:
$1 - k > 0$ cioè $k < 1$.
Quindi, per $k < 1$, l'equazione ammette radici reali e distinte.

b. Le radici sono reali e coincidenti.
Ricordiamo che un'equazione di secondo grado ammette radici reali e coincidenti quando $\Delta = 0$.
Risolviamo allora l'equazione $1 - k = 0$.
Quindi, per $k = 1$, l'equazione ammette radici reali e coincidenti.

c. Non esistono radici reali.
Ricordiamo che un'equazione non ammette radici reali quando $\Delta < 0$.
Risolviamo allora la disequazione $1 - k < 0$.
Quindi, per $k > 1$, l'equazione non ammette radici reali.

d. Le radici sono opposte.
Un 'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, ammette radici opposte sole se è un'equazione pura, cioè manca il termine di primo grado. Deve allora essere $b = 0$. Nel nostro caso è invece $b = 2$. Concludiamo che non esiste nessun valore di k che rende opposte le radici dell'equazione.

e. Una radice è nulla.
Un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, ammette una radice nulla solo se è un'equazione spuria, se manca cioè il termine noto. Deve allora essere $c = 0$ e, nel nostro caso, $k = 0$. Pertanto, per $k = 0$ l'equazione ammette una radice nulla.

f. Una radice è uguale a -3.
Ricordiamo che un numero reale è soluzione di un'equazione se, sostituito alla variabile, rende il primo membro uguale al secondo. Sostituendo a x il valore -3 otteniamo $9 - 6 + k = 0$; risolviamo l'equazione nella variabile k. Allora, per $k = -3$, una radice dell'equazione è -3.

Esempio 2. Data l'equazione $(m-1)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$, con $m \neq 1$, vogliamo determinare per quali valori del parametro m:
a. l'equazione ammette radici reali;
b. la somma delle radici è 4;
c. il prodotto delle radici è -1;

d. le radici sono reciproche;
e. le radici sono opposte.

<u>*Risoluzione*</u>.

a. L'equazione ammette radici reali.

Un'equazione di secondo grado ammette radici reali quando $\Delta \geq 0$.

Calcoliamo allora il discriminante:

$$\frac{\Delta}{4} = m^2 - (m-1)^2 = m^2 - m^2 - 1 + 2m = 2m - 1.$$

Poniamo $\frac{\Delta}{4} \geq 0$, otteniamo $m \geq \frac{1}{2}$.

Per $m \geq \frac{1}{2}$ le radici sono reali.

b. La somma delle radici è 4.

Sappiamo che, se un'equazione di secondo grado ammette radici reali, la loro somma è $-\frac{b}{a}$.

Nel nostro caso dovrà essere $-\frac{b}{a} = 4$, cioè $\frac{2m}{m-1} = 4$.

Tale equazione è un'equazione fratta nella variabile m. Sotto le condizioni di esistenza $m \neq 1$ e le condizioni di realtà delle radici $m \geq \frac{1}{2}$ l'equazione diventa:

$2m = 4m - 4$, cioè $m = 2$ (soluzione accattata).

Per $m = 2$ la somma delle radici è 4.

c. Il prodotto delle radici è -1.

Sappiamo che, se un'equazione di secondo grado ammette radici reali, il prodotto delle radici è $\frac{c}{a}$. Nel nostro caso dovrà essere $\frac{c}{a} = -1$. Dobbiamo allora risolvere l'equazione $\frac{m-1}{m-1} = -1$.

Tale equazione è impossibile.

Non esistono allora valori di m per i quali il prodotto delle radici è -1.

d. Le radici sono reciproche.

Se un'equazione di secondo grado ammette radici reali, la condizione "radici reciproche" si esprime con la seguente uguaglianza: $x_1 = \frac{1}{x_2}$, o anche:

$x_1 \cdot x_2 = 1$.

Sappiamo che $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; nel nostro caso deve essere allora: $\frac{m-1}{m-1} = 1$. L'equazione è verificata per ogni $m \neq 1$.

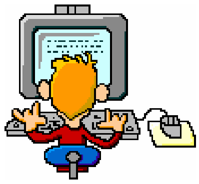
e. Le radici sono opposte.

Se un'equazione di secondo grado ammette radici reali, la condizione "radici opposte" si esprime con la seguente uguaglianza: $x_1 = -x_2$, cioè con $x_1 + x_2 = 0$.

Sappiamo che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Dobbiamo allora risolvere l'equazione $\frac{2m}{m-1} = 0$ nella variabile m. Sotto le condizioni di esistenza $m \neq 1$ e le condizioni di realtà delle radici $m \geq \frac{1}{2}$, l'equazione diventa $m = 0$.

Tale soluzione non soddisfa la condizione $m \geq \frac{1}{2}$.

Pertanto non esistono valori di m che rendono le radici opposte.

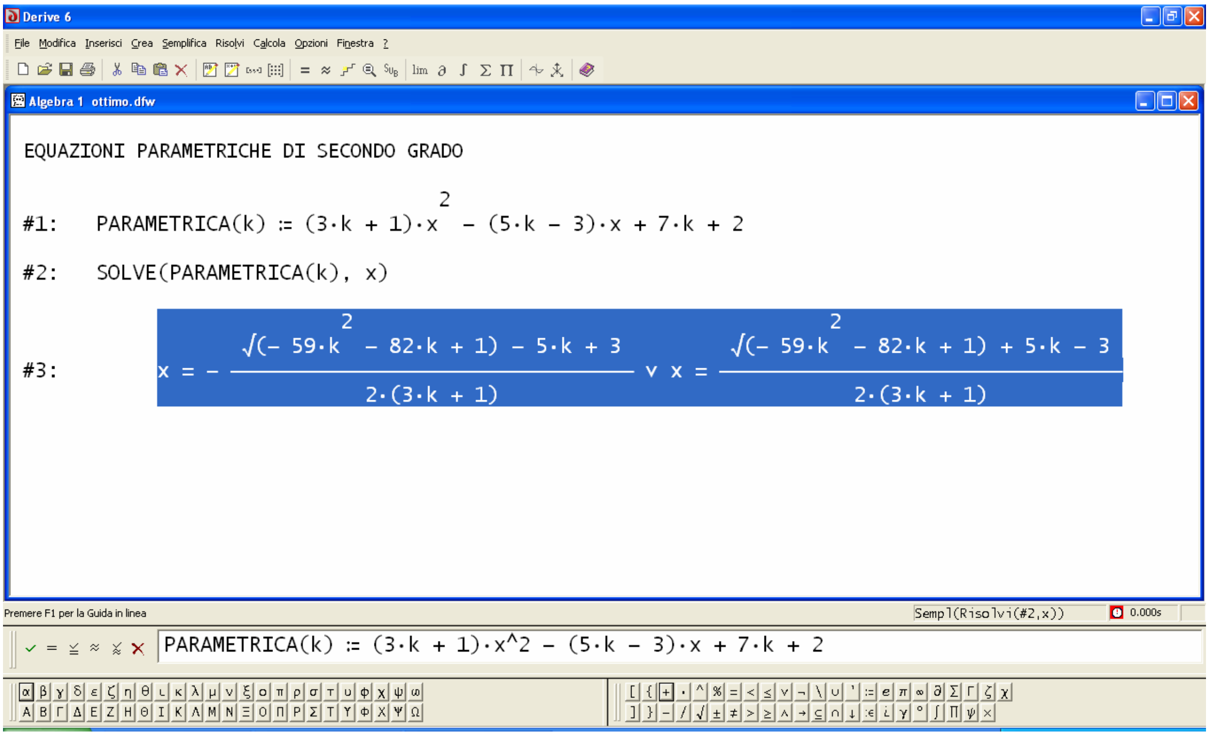


UTILIZZO DEL SOFTWARE DERIVE

Esercizio. Nella data equazione parametrica $(3k+1)\cdot x^2 - (5k-3)\cdot x + 7k + 2 = 0$ vi sono equazioni che hanno come soluzioni due numeri la cui somma vale $\frac{7}{3}$ e il cui prodotto vale $\frac{1}{5}$?

Risoluzione.

- Utilizziamo il comando o il bottone ***Inserisci_Oggetto testo*** per (icona 4) per dare un titolo al lavoro. Esso apre un riquadro nella zona algebrica (riquadro seguente) all'interno del quale scriviamo EQUAZIONI PARAMETRICHE DI SECONDO GRADO.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo la famiglia delle equazioni di secondo grado $PARAMETRICA(k) := (3\cdot k+1)\cdot x\hat{}2 - (5\cdot k-3)\cdot x + 7\cdot k + 2$.
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.
- Ora nella riga di editazione delle espressioni scriviamo $SOLVE(PARAMETRICA(k), x)$.
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #1, di considerare la *x* come variabile e di usare il metodo algebrico.



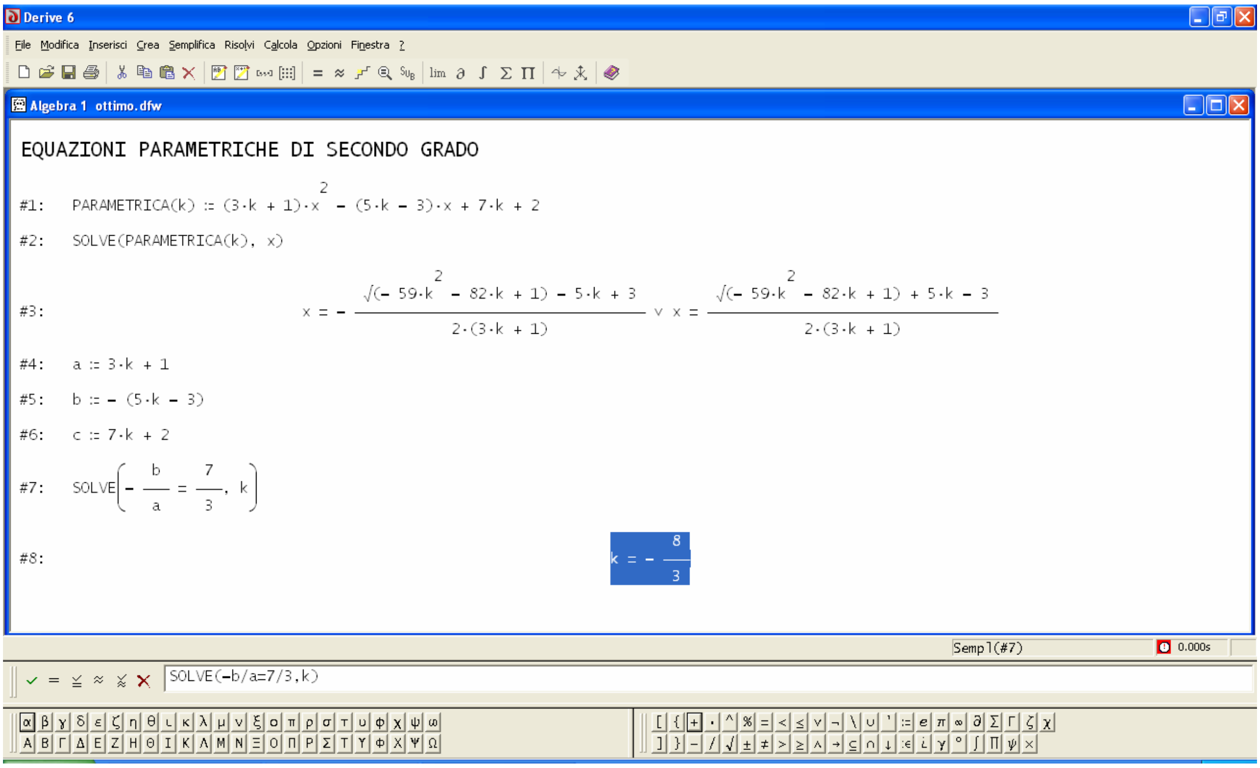
- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #2 e le radici dell'equazione #3.

Osservazione didattica. In teoria determinare le equazioni le cui soluzioni hanno per somma $\frac{7}{3}$ e per prodotto $\frac{1}{5}$ equivale a porre $-\frac{b}{a}=\frac{7}{3}$ e $\frac{c}{a}=\frac{1}{5}$.

Possiamo quindi procedere in tal modo:

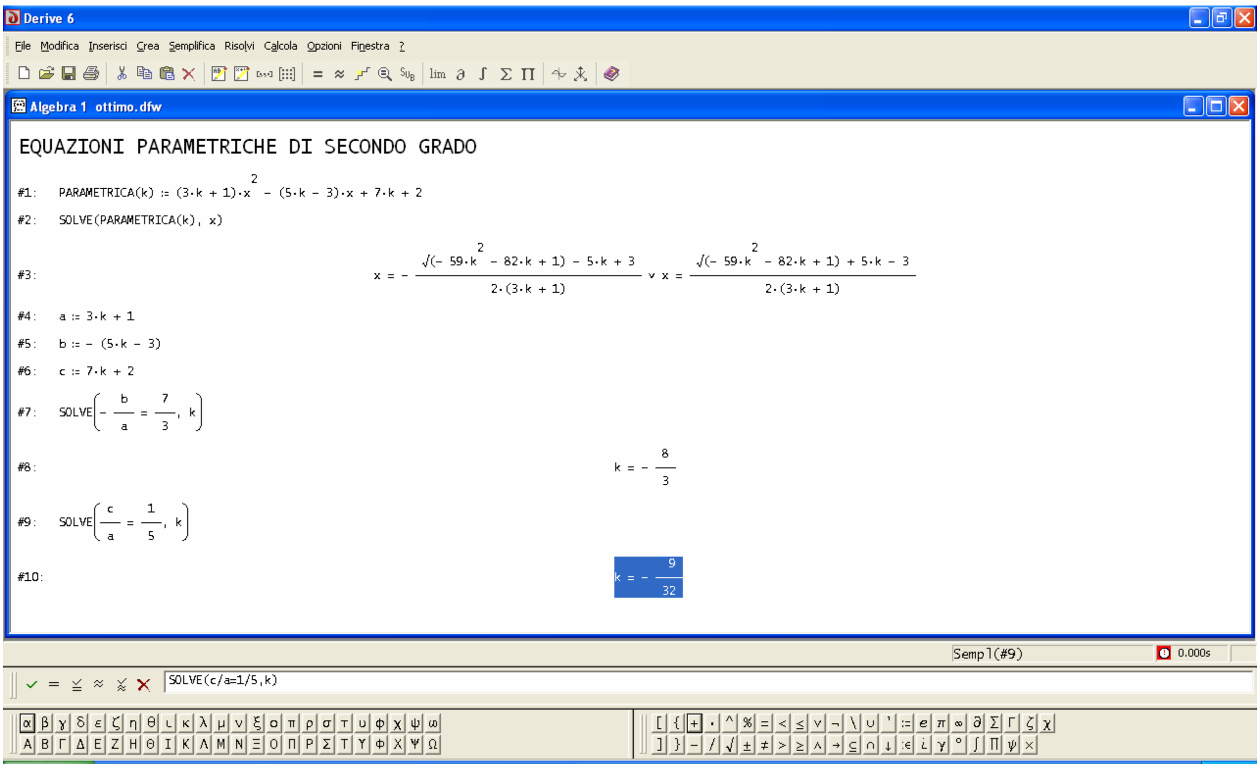
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $a := 3\cdot k + 1$
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #4 della zona algebrica.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $b := -(5\cdot k - 3)$
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #5 della zona algebrica.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $c := 7\cdot k + 2$
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #6 della zona algebrica.
- Ora nella riga di editazione delle espressioni scriviamo $SOLVE(-b/a = 7/3, k)$
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #7 della zona algebrica.

- Diamo ***Semplifica_Base*** ottenendo nella #8 la semplificazione.



Allo stesso modo determiniamo le equazioni le cui soluzioni hanno per prodotto $\frac{1}{5}$.

- Nella riga di editazione delle espressioni scriviamo $SOLVE(c/a=1/5,k)$
- Con **INVIO** la immettiamo nell'etichetta #9 della zona algebrica.
- Diamo ***Semplifica_Base*** ottenendo nella #10 la semplificazione.



5.4.8 Risoluzione e interpretazione grafica di un'equazione di secondo grado attraverso l'utilizzo del software Derive

Risolvere graficamente l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$, equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$$

ossia determinare i punti di intersezione di tale parabola $y=ax^2+bx+c$ con l'asse delle ascisse.

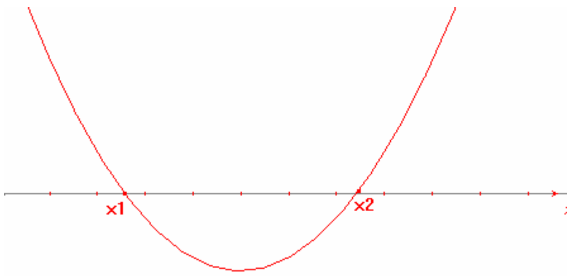
Osservazione didattica. Il docente fa notare alla classe che le coordinate del vertice della parabola, nel riferimento Oxy, sono:

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Dunque possono presentarsi tre casi diversi e, a seconda che $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$, il vertice avrà posizioni diverse e la parabola intersecherà l'asse delle x in due punti reali distinti, oppure in un sol punto (due punti reali coincidenti) oppure in nessun punto.

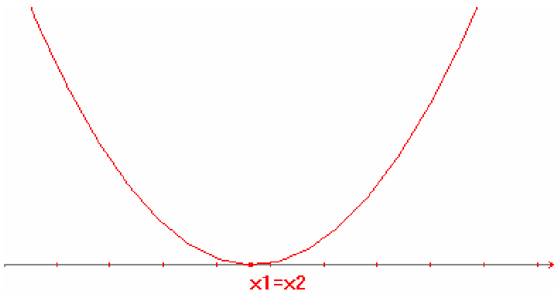
1° caso. $\Delta=b^2-4ac>0$

L'equazione $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$ ammette due radici reali e distinte x_1 e x_2 che sono le ascisse dei punti d'intersezione con l'asse x;



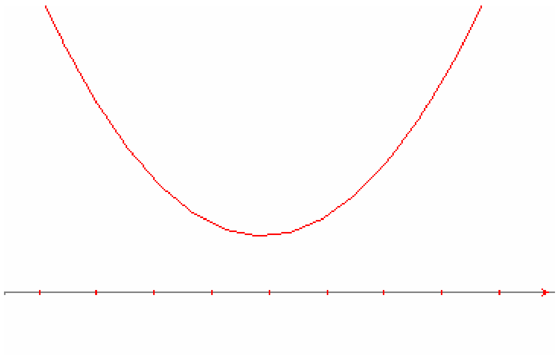
2° caso. $\Delta=b^2-4ac=0$

L'equazione $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$ ammette due radici reali e coincidenti $x_1\equiv x_2$, ascissa del punto di tangenza della parabola con l'asse x;



3° caso. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ non ammette radici reali. La parabola non interseca l'asse delle x:



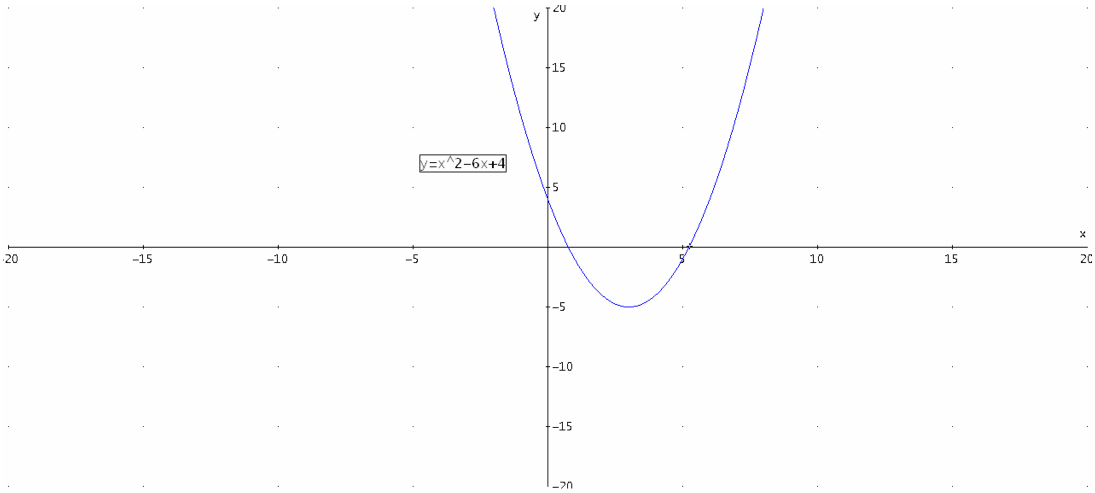
SCHEDA DI LABORATORIO: INTERPRETAZIONE GEOMETRICA E RISOLUZIONE ALGEBRICA DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Studiamo algebricamente e geometricamente l'equazione $x^2 - 6x + 4 = 0.$

Apri Derive.

► Scrivi **x^2-6x+4**, immetti e traccia il grafico (utilizza sempre le pagine affiancate verticalmente) e modifica in modo opportuno la zona visualizzata.

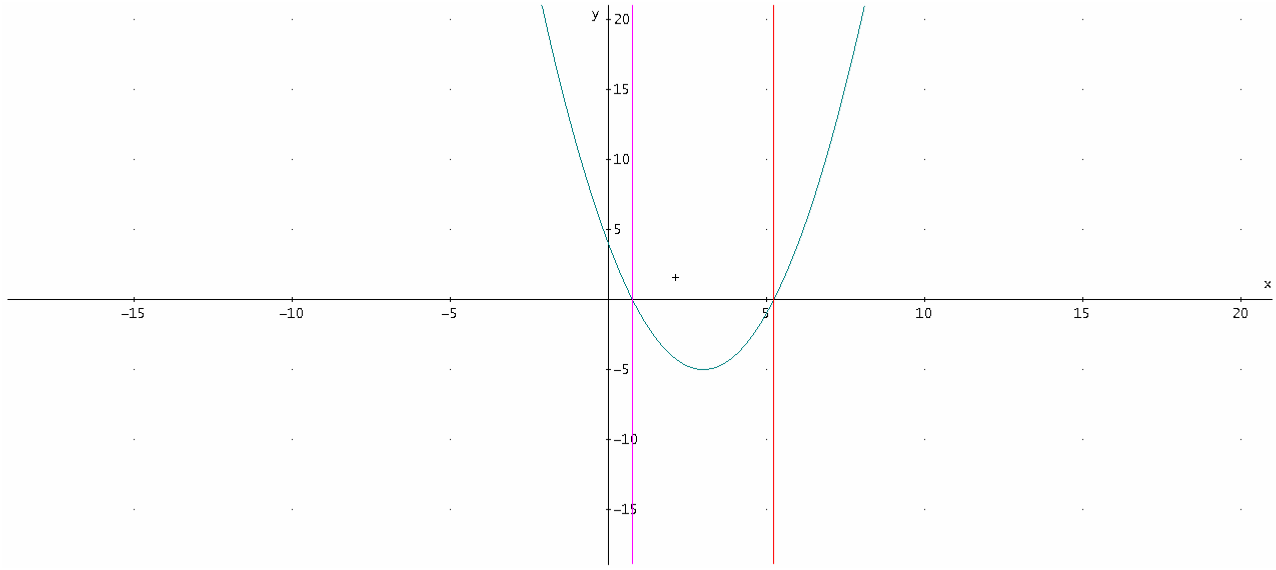
► Osserva la parabola che hai disegnato; scegli *Opzioni*, *Modalità traccia*; spostando il cursore con le frecce della tastiera rispondi alle domande seguenti.



- Il vertice della parabola è nel punto______________________________________
- Il suo asse di simmetria è la retta di equazione x =__________________________
- La concavità è rivolta verso____
- Esistono punti di intersezione tra la parabola e l'asse x?_____________________
- Se sì, quanti sono?____
- Se sì, quali sono? (approssimali con il cursore)_________________________
- La parabola è contenuta nei quadranti_________ e ___________, quindi la funzione $y = x^2 - 6x + 4$ assume valori sia_____________ sia ________________________

► Ora scrivi **x^2-6x+4=0** e immetti.

- Scegli *Risolvi Algebricamente*; nella finestra clicca su *Risolvi Espressione*; nella finestra che compare scegli *Metodo Algebrico* e *Dominio soluzione Reale* e clicca su *Risolvi*.
- Ora fai tracciare a *Derive* il grafico delle soluzioni dell'equazione.



>> Cosa osservi?____

>> E' giusto ciò che vedi? Perché_______________________________________

5.4.9 La Fisica e le equazioni di secondo grado: il moto parabolico

Con questo strumento, di grande efficacia didattica, si può verificare la legge di composizione dei moti[5] della cinematica del punto materiale, qui approssimato con una piccola biglia di metallo. In particolare si ha l'immediato riscontro visivo che un corpo soggetto all'accelerazione di gravità e scagliato in avanti con una certa velocità descrive, cadendo a terra, un tratto di parabola appartenente al piano individuato dai due vettori (velocità e accelerazione di gravità) che caratterizzano il moto.

Manovrando il dispositivo di rilascio della biglia (vedi foto), essa percorre lo scivolo incrementando gradualmente la propria velocità. Quindi, non appena la biglia lascia lo scivolo con una certa velocità (con direzione parallela al suolo per costruzione), essa si troverà soggetta all'accelerazione di gravità: il piano di traiettoria risulta dunque perpendicolare al suolo. Ora si immagini un sistema di riferimento cartesiano con vertice posizionato in corrispondenza della fine dello scivolo, asse delle y orientato verso il basso e asse delle x orientato nel senso del moto. Per studiare la traiettoria della biglia si analizzano i due moti indipendenti lungo gli assi del sistema di riferimento scelto e precisamente:

- il moto rettilineo uniforme lungo x di equazione $x = v_0 t$, in cui t è il tempo e v_0 la velocità lungo x di distacco della biglia (velocità che si mantiene costante fino all'arrivo al suolo), essendo x_0 e t_0 nulli;
- il moto uniformemente accelerato verso il basso di equazione $y = \frac{1}{2} g t^2$, con

$g = 9{,}8 m/s^2$ l'accelerazione di gravità che, in una regione ristretta della superficie terrestre, si può considerare con buona approssimazione costante durante il moto in direzione e modulo (è evidente che in questo ragionamento non si tiene conto della

---

[5] In generale la traiettoria di un punto materiale nello spazio è una curva più o meno complessa. Ma il moto di questo stesso punto può essere descritto, ad esempio in coordinate cartesiane, come somma di tre moti rettilinei indipendenti lungo gli assi del sistema di riferimento.
Questa è l'idea di fondo che sta alla base della composizione dei moti, cioè di quell'operazione che permette di studiare il moto di un punto materiale come somma di moti elementari nella direzione degli assi del sistema di riferimento cartesiano (se questo è effettivamente comodo o, altrimenti, rispetto ad un altro sistema di riferimento più appropriato) in modo indipendente l'uno dall'altro.
Ad esempio, la traiettoria percorsa con moto rettilineo uniforme di un punto materiale che segua la diagonale di un cubo che ha per lati gli assi cartesiani è esprimibile come somma di tre moti elementari rettilinei uniformi lungo tali assi. Di conseguenza le equazioni (parametriche) del moto sono $x = v_0t$, $y = v_0t$ e $z = v_0t$, dove t è la variabile temporale.
Alla luce di queste considerazioni, indicata con t la variabile temporale, le equazioni parametriche del moto sono x = rcos(At), y = rsin(At) e z = Bt, con A e B opportune costanti per far in modo che il punto non solo segua l'elica con la velocità angolare assegnata (costante A), ma che inoltre esso si sposti ad ogni giro di una quantità lungo l'asse z proprio pari al passo p (costante B).

resistenza dell'aria, altrimenti la funzione $y = f(t)$ sarebbe diversa), essendo t_0, y_0 e v_{0y} nulli.

Da $x = v_0 t$ si ricava il tempo di caduta t e lo si sostituisce nell'equazione $y = \frac{1}{2} g t^2$:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Essendo g e v_0 delle costanti, questa equazione si può scrivere nella forma

$$y = ax^2$$

che rappresenta una parabola, come volevasi dimostrare.

5.4.10 Leggere di matematica: il mondo delle equazioni di Raymond Queneau

Nota storica. Raymond Queneau (1903 – 1976), scrittore francese dedito a molte attività, dalla scrittura narrativa alla poesia, alla pittura, al cinema.
Ripercorrendo brevemente la sua attività in campo letterario, ricordiamo la fondazione nel 1960 del Laboratorio di letteratura potenziale. Lo scopo di questo laboratorio lo possiamo rintracciare nelle parole dello stesso Queneau: <<proporre agli scrittori nuove "strutture di natura matematica o anche inventare nuovi procedimenti artificiali e meccanici, che contribuiscano all'attività letteraria: sostegni all'ispirazione, per così dire, oppure anche, in qualche modo, un aiuto alla creatività>>.
Un gruppo, quindi, che programmaticamente si proponeva di seguire nella costruzione letteraria strutture predefinite, quasi di tipo matematico; di esso hanno fatto parte, tra gli anni Sessanta e gli anni Settatanta, anche lo scrittore francese Georges Perec e l'italiano Italo Calvino.
Tra i romanzi di Queneau, ricordiamo Esercizi di stile, I fiori blu, Zazie nel metrò, Suburbio e fuga e la Piccola cosmogonia portatile, piccolo poema che esamina giocosamente gli sviluppi delle scienze dalla natura.

La lettura che segue è tratta invece da Odile, scritto nel 1937 e di carattere autobiografico: il personaggio di questo breve romanzo è Travy (in cui è riconoscibile Queneau stesso), messo in crisi, nel suo orgoglio e nel suo lasciarsi vivere, dagli interrogativi a lui posti dalla giovane donna Odile.
Travy, nella sua razionalità, è attratto dalla matematica; osserva positivamente il suo sviluppo e la possibilità di utilizzare il suo linguaggio per risolvere problemi apparentemente incomprensibili: ha fiducia nelle lettere, nei simboli e nelle equazioni, nel mondo formale che così si costruisce. Proprio per questo resta sconcertato dai limiti dell'algebra: dall'impossibilità di trovare formule per risolvere equazioni di grado superiore al quarto e manifesta i suoi dubbi al suo interlocutore, Saxel, molto meno attratto da questi studi.

-*Ebbene, torniamo alle sue equazioni.*
- *Non l'annoia troppo?*
- *Cercherò di resistere.*

- Sa che cosa significa risolvere un'equazione?
- Mi pare.
- Lo dica.
- Ehm. Trovare il valore dell'incognita.
- Come?
- Facendo dei calcoli.
- Ma quali?
- Ebbene, addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni.
- E poi.
-Ce ne sono più di quattro?
- Credo.
- Ah sì, è vero, bisogna anche estrarre la radice, come faceva lo scienziato Coseno.
- E' l'operazione inversa dell'elevazione a potenza.
- Si possono fare meravigliosi giochi di parole con queste espressioni.
- Lei fa dei giochi di parole?
- Che vuole: lo spirito moderno. Torniamo alle sue equazioni, cameriere una birra.
- Quante operazioni farà per calcolare la sua incognita?
- Come quante?
- Ma sì, quante?
- E che ne so?
- Un numero finito o un numero infinito di operazioni?
- Un numero infinito: ne ha delle buone lei. E chi avrebbe il tempo?
- Ecco il volgare buon senso che parla. Ma l'avverto che in analisi, ad esempio, si hanno costantemente espressioni che implicano un numero infinito di operazioni.
- Lei mi umilia.
- Ma poiché si tratta di operazioni algebriche, non usciremo dal campo dell'algebra e non cercheremo la risoluzione delle equazioni che tramite un numero finito di operazioni algebriche e particolarmente di radicali.
- Comincia a interessarmi. Continuiamo?
- Continuiamo. Allora a cosa applicheremo queste operazioni?
- Risposta non difficile! A ciò che si conosce.
- Alle quantità note.
- E' quel che ho detto.
- Molto bene. Ora che abbiamo un'idea precisa di quel che significa risolvere un'equazione, cerchiamo la risoluzione dell'equazione di primo grado.
- E' puerile!, esclamò Saxel, c'e solo una divisione da fare. Conosco perfettamente il trucco, l'ho imparato da un professore di matematica. Sa, ero sempre il primo in matematica, al liceo.
- Allora è arrivato fino al secondo grado?
- Se ci sono arrivato! Meno b più o meno radice quadrata di b due meno quattro ac su due a, toc: e voilà! Glu glu glu glu, hanno una buona birra qui.
- E che cosa le sembra notevole in questa formula?
- La mia intelligenza diventa prodigiosa: la radice quadrata. La radice quadrata, ecco cosa c'è di notevole. Ora capisco dove vuole arrivare: è luminoso, semplice, bello. Per l'equazione di terzo grado bisognerà estrarre una radice cubica, di quarto grado una radice quarta, per il quinto grado una radice quinta, per il sesto grado una radice sesta e così via. E' logico, no? Logicamente semplice, no?
- No. A partire dal quinto grado rien ne va plus.
- Non c'è motivo.
- E' impossibile risolvere algebricamente le equazioni di grado superiore al quarto, eccetto in particolarissimi casi. In generale non si può.
- Il fatto è che non ci si sa fare.
- Si può dimostrarlo.

- Ma è scandaloso.
- Proprio così. E' scandaloso perché esiste una realtà ribelle al linguaggio algebrico – logico, una realtà che ci supera e che non si può esprimere con un linguaggio inventato dalla nostra regione, perché tiene in scacco il meccanismo di ricostruzione razionale di questo mondo. Come fa arenare il meccanismo razionale di questo mondo, suppongo. Ma non creda che le cose si fermino qui e che l'intelligenza rinunci a proseguire l'esplorazione di quel campo. Si scontra con uno ostacolo, cerca di superarlo, e tramite una nuova teoria, la teoria dei gruppi, scoprirà nuove meraviglie. Certamente uno spirito potente concepirebbe questo reale in un sol lampo; la nostra debolezza ci obbliga a dei sacrifici.

[R. Queneau, Odile, Feltrinelli, Milano, 1985]

5.4.11 <u>Tempi dell'intervento didattico</u>

Per svolgere questa unità didattica si prevedono i seguenti tempi:

Accertamento dei prerequisiti:	1h
Lezioni frontali e svolgimento degli esercizi:	14h
Attività di laboratorio:	3h
Verifica sommativa:	2h
Consegna e correzione verifica sommativa:	1h

Per un totale di 21 ore che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa cinque settimane di lavoro. La previsione è da intendersi elastica, perché occorre tener conto dell'andamento e dei processi di apprendimento della classe.

5.4.12 Verifica sommativa U.D. 3

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$4\cdot(x^2+1)+4\cdot(x-1)\cdot(x+1)=7x$

$\frac{x+1}{2}=\frac{x^2-1}{4}-\frac{x-8}{10}$

$x^2+8x-9=0$

$\frac{x-2}{2x+1}-\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{x^2+1}{4x^2-1}$

2. Determiniamo i due numeri che hanno come somma $s=6\sqrt{2}$ e come prodotto $p=16$.

3. Data l'equazione di secondo grado nell'incognita x

$(k-1)x^2+(2k-5)x+k+1=0,$

Determiniamo per quali valor del parametro k sono soddisfatte le condizioni:

a) le soluzioni sono reali e distinte;

b) le soluzioni sono reali e coincidenti;

c) non esistono soluzioni reali;

d) una radice è nulla.

4. Un rettangolo ha il perimetro di 38 cm e l'area di 84 cm^2. Determina la lunghezza dei lati.

Griglia di valutazione per la verifica sommativa (compilata nelle sue parti)

	CONOSCENZA		COMPETENZA		CAPACITA'	
	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI
ESERCIZIO 1	4		3		3	
ESERCIZIO 2	3		2		1	
ESERCIZIO 3	3		3		4	
ESERCIZIO 4	2		4		4	
TOTALE	12		12		12	

Capitolo 6 U.D.4 DISEQUAZIONI ALGEBRICHE DI SECONDO GRADO IN CAMPO REALE E LORO RISOLUZIONE ALGEBRICA E GRAFICA

6.1 PREREQUISITI

- Per lo svolgimento di questa unità didattica si ritiene necessaria la conoscenza dei contenuti delle unità didattica precedentemente trattate.

6.2 OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE

- ♦ Conoscere il concetto di segno di un trinomio di secondo grado.
- ♦ Conoscere il metodo di risoluzione di una disequazione di secondo grado per via algebrica.
- ♦ Conoscere il metodo di risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado.
- ♦ Conoscere il concetto di disequazioni fratte.
- ♦ Conoscere il concetto di disequazioni parametriche.
- ♦ Svolgere esperienze interessanti con il software Derive a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

COMPETENZE

- ♦ Saper operare con i trinomi di secondo grado.
- ♦ Saper risolvere le disequazioni di secondo grado.
- ♦ Saper risolvere disequazioni fratte di secondo grado.
- ♦ Saper risolvere disequazioni parametriche di secondo grado.
- ♦ Saper risolvere un problema attraverso una disequazione di secondo grado.
- ♦ Saper risolvere sistemi di secondo grado.
- ♦ Saper risolvere graficamente una disequazione di secondo grado.

Capacità
SAPER

- ♦ Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- ♦ Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso di disequazioni di secondo grado.
- ♦ Applicare la risoluzione grafica di equazioni di secondo grado a problemi riguardanti altri argomenti.
- ♦ Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

6.3 CONTENUTI

- Le disequazioni di secondo grado.
- Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado.

- Segno di un trinomio di secondo grado.
- Terminologia e principi di equivalenza.
- Disequazioni di secondo grado ad una incognita.
- Disequazioni fratte.
- Formalizzare e risolvere problemi con disequazioni di secondo grado ad una incognita.
- Sistemi di disequazioni di 2° grado e misti (1° e 2° grado).
- Disequazioni parametriche di secondo grado.
- Applicazioni delle disequazioni di secondo grado.

6.4 SVILUPPO DEI CONTENUTI

6.4.1 Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

Recenti studi di didattica della matematica hanno evidenziato le difficoltà incontrate dagli studenti relativamente alle disequazioni nelle scuole superiori italiane e all'ingresso all'Università. In questi lavori i risultati negativi sono principalmente ricondotti ad un tipo d'insegnamento "tradizionale" dell'algebra, incentrato esclusivamente su di un approccio computazionale, in cui le disequazioni sono viste "come una successione di simboli priva di ogni semantica" e le sole trasformazioni formali danno loro un qualche significato. Troppo spesso i nuovi oggetti matematici vengono proposti/imposti a partire dalle loro definizioni formali, privilegiandone fin dall'introduzione l'aspetto strutturale su cui gli studenti non possono aver effettuato alcuna personale ed adeguata esperienza; è giustificato in tali circostanze il disagio provato dai ragazzi ed il loro senso di estraneità nei confronti della matematica.

Nota didattica. Al fine di giungere alla miglior comprensione di un oggetto matematico, ritengo opportuno che il docente potrebbe iniziare con la classe a risolvere graficamente una disequazione di secondo grado. In questo modo si cerca di individuare una "relazione" tra algebra e geometria; agli occhi degli studenti le disequazioni diventano "oggetti concreti".

Risolvere graficamente la disequazione

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (ax^2 + bx + c < 0) \quad \text{con } a \neq 0$$

significa trovare per quali valori dell'ascissa i punti della parabola hanno ordinata $y = ax^2 + bx + c$ positiva (o negativa), cioè per quali valori di x la parabola sta "sopra" (o "sotto") l'asse x, in altre parole il tutto equivale a risolvere il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y > 0 \end{cases} \qquad [6\text{-}1]$$

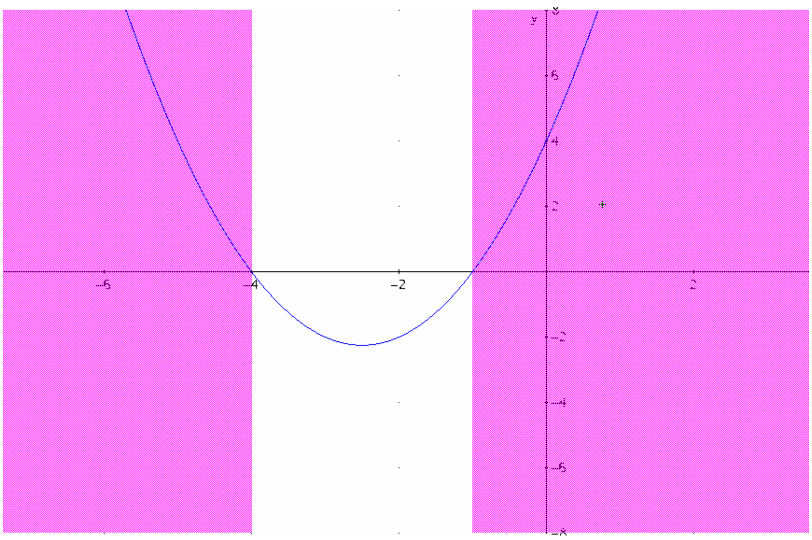
L'interpretazione grafica di tale sistema è la seguente: determinare i punti del piano cartesiano le cui coordinate soddisfano sia l'equazione sia la disequazione del sistema [6-1]. Nel piano cartesiano $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola e $y > 0$ rappresenta il semipiano delle ordinate positive, escluso l'asse delle ascisse.

I punti le cui coordinate soddisfano il sistema [6-1] sono perciò quei punti della parabola $y = ax^2 + bx + c$ che si trovano internamente al semipiano delle ordinate positive. Poiché nella disequazione da risolvere compare solo l'incognita x, l'insieme delle soluzioni sarà costituito dall'insieme delle ascisse di tali punti.
Se invece nella disequazione da risolvere compare il $\geq$, si dovranno considerare come soluzioni, oltre ai punti della parabola che giacciono internamente al semipiano generato dall'asse x, anche gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x.

Si propone alla classe il seguente esempio.
Esempio. Risolvere la disequazione $x^2 + 5x + 4 \geq 0$.

La disequazione data equivale a risolvere il sistema $\begin{cases} y = x^2 + 5x + 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Si devono quindi determinare i punti della parabola $y = x^2 + 5x + 4$ che giacciono nel semipiano delle ordinate positive o nulle. La parabola incontra l'asse delle x nei punti la cui ascissa è data dalla soluzione dell'equazione $x^2 + 5x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \vee x = -1$. I punti della parabola che si trovano nel semipiano delle ordinate positive sono quelli che hanno ascissa minore o uguale di -4 e maggiore o uguale di -1, ossia quelli per cui si ha: $x \leq -4 \vee x \geq -1$.
L'insieme delle soluzioni è quindi costituito dall'unione dei due intervalli chiusi e illimitati: $]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$



Se la disequazione da risolvere è del tipo

$$ax^2 + bx + c < 0$$

si considererà il sistema

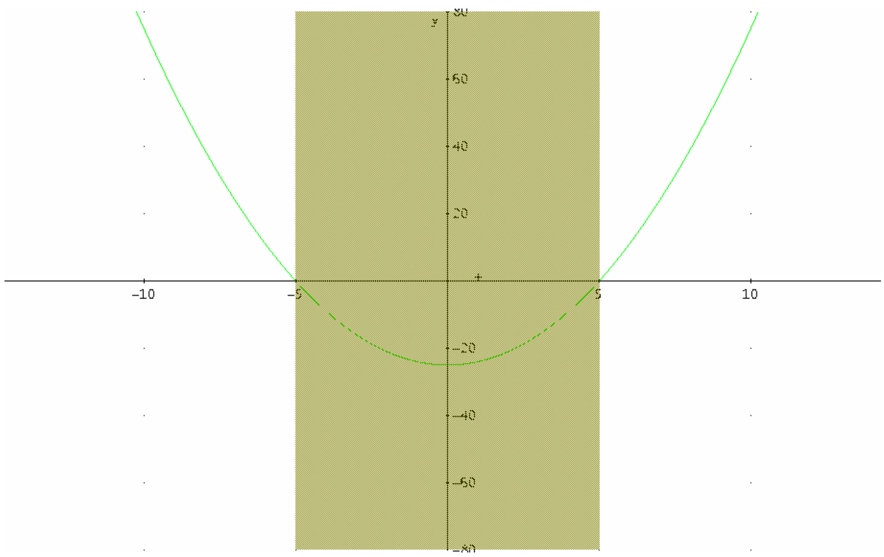
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y < 0 \end{cases}$$

Si dovrà perciò determinare l'insieme dei punti della parabola $y = ax^2 + bx + c$ che si trovano nel semipiano delle ordinate negative e quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione sarà rappresentato dall'insieme delle ascisse di tali punti.
Se invece nella disequazione da risolvere compare il segno $\leq$, si dovranno considerare come soluzioni, oltre ai punti della parabola che giacciono internamente al semipiano generato dall'asse x, anche gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x.

Si propone alla classe il seguente esempio.
Esempio. Risolvere la disequazione $x^2 - 25 \leq 0$.

Tale disequazione equivale a risolvere il sistema $\begin{cases} y = x^2 - 25 \\ y \leq 0 \end{cases}$

Si devono quindi determinare i punti della parabola $y = x^2 - 25$ che giacciono nel semipiano delle ordinate negative o nulle (l'asse x compreso). La parabola incontra l'asse delle x nei punti la cui ascissa è data dalla soluzione dell'equazione $x^2 - 25 = 0 \rightarrow x = -5 \vee x = +5$. I punti della parabola che si trovano nel semipiano delle ordinate negative sono quelli che hanno ascissa minore o uguale di -5 e maggiore o uguale di +5, ossia quelli per cui si ha: $-5 \leq x \leq +5$.
L'insieme delle soluzioni è quindi costituito dall'intervallo chiuso e limitato: $[-5, +5]$.



La lezione continuerà, analizzando tutti i casi possibili, con $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.
Solo dopo aver a lungo insistito su questa analisi grafica delle disequazioni di secondo grafico, si potrà fornire agli alunni la classica tabella riassuntiva delle soluzioni di una disequazione di secondo grado.

6.4.2 Segno di un trinomio di secondo grado

Consideriamo la funzione polinomiale di secondo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{con} \quad a \neq 0$$

vogliamo stabilire il segno di $f(x)$ al variare di x, ossia esaminare per quali valori di x, $f(x)$ è maggiore di zero oppure minore di zero.
L'insieme numerico nel quale opereremo è l'insieme **R** dei numeri reali. Le radici del trinomio, ossia della funzione quadratica, sono le soluzioni reali, se esistono, dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Indicheremo con x_1 e x_2 tali radici e converremo quando sono distinte che sia $x_1 < x_2$.
L'intervallo (x_1, x_2) è detto **intervallo delle radici**. Si dice che un numero c è **interno** all'intervallo delle radici se è c compreso tra i due numeri; si dice invece che il numero c è **esterno** all'intervallo se è $c < x_1$ oppure $c > x_2$.
A tale scopo esaminiamo il grafico della funzione

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

poiché il segno di $f(x)$ equivale al segno dell'ordinata dei punti della parabola.
Si presentano tre casi secondo il segno di Δ:

1° caso. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

La parabola interseca l'asse x in due punti di ascissa rispettivamente x_1 e x_2.
Possiamo quindi concludere che ***f*(*x*) assume lo stesso segno di *a* (ovvero è concorde con *a*) per** $x < x_1$ e $x > x_2$ **ossia per valori esterni all'intervallo delle due radici, assume segno opposto a quello di *a* (ovvero è discorde con *a*) per** $x_1 < x < x_2$ **ossia per valori interni all'intervallo delle due radici.**

2° caso. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

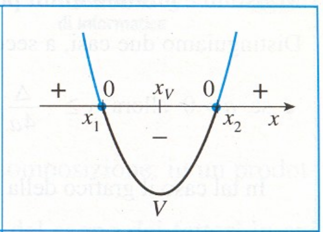
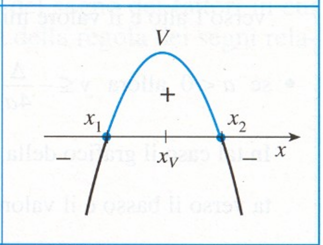
La parabola risulta tangente all'asse delle ascisse nel punto $x = -\dfrac{b}{2a}$ per due valori coincidenti di x. Possiamo concludere che ***f*(*x*) è concorde con *a* per ogni** $\boldsymbol{x} \in R - \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$

3° caso. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

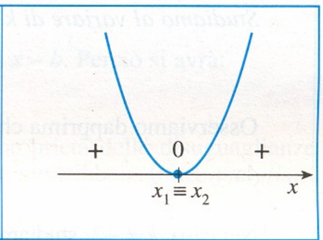
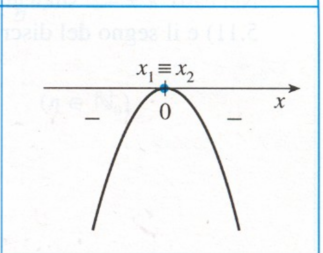
La parabola non interseca l'asse x perché $f(x)$ non si annulla per alcun valore reale attribuito alla x. Possiamo quindi concludere che **$f(x)$ è concorde con a per qualsiasi valore attribuito alla x.**

Nota didattica. Dal punto di vista didattico dare uno schema è a volte pericoloso, poiché gli studenti tendono ad impararlo a memoria escludendo qualsiasi tipo di ragionamento.
Riportiamo comunque di seguito, per completezza, la classica tabella riassuntiva delle soluzioni di una disequazione di secondo grado.

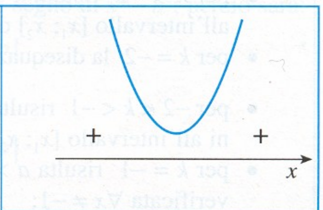
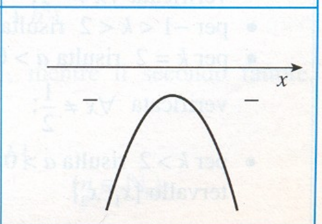
1. $\Delta > 0$

$a > 0$	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	x_1 x_2 → x: $+$ 0 $-$ 0 $+$	
$a < 0$	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	x_1 x_2 → x: $-$ 0 $+$ 0 $-$	

2. $\Delta = 0$

$a > 0$	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$x_1 \equiv x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ → x: $+$ 0 $+$	
$a < 0$	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$x_1 \equiv x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ → x: $-$ 0 $-$	

3. $\Delta < 0$

$a > 0$	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	→ x: $+$	
$a < 0$	$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	→ x: $-$	

6.4.3 Disequazioni di secondo grado ad una incognita

Una disequazione di secondo grado ad una incognita è rappresentata dalla seguente **forma normale**:

$ax^2+bx+c\geq 0$ oppure $ax^2+bx+c\leq 0$ $\quad con\ a\in R_0 \quad b,c\in R$

Lo studio del segno del trinomio di secondo grado preso in esame precedentemente ci permette di risolvere le disequazioni quando sono scritte in forma normale.

Per determinare l'insieme delle soluzioni di una disequazione di secondo grado in una incognita si procede nel seguente modo:

1) si eseguono i calcoli indicati e si riduce la disequazione a forma intera;
2) si scrive l'equazione associata e la si risolve;
3) si applicano le considerazioni espresse nel paragrafo precedente relative al segno del trinomio di secondo grado.

Dopo aver risolto una disequazione può essere necessario rappresentare graficamente l'intervallo (o gli intervalli) in cui essa è verificata. Indicherò gli intervalli con una linea **continua** delimitata ad ogni estremo da un **punto** che è pieno se tale estremo è incluso e vuoto se esso è escluso.

Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Risolviamo la seguente disequazione numerica intera:

$$-10x-8x^2-3>0$$

Poiché non è ordinata, la riscriviamo:

$$-8x^2-10x-3>0.$$

Poiché il coefficiente di x^2 è $-8<0$, moltiplichiamo i due membri per -1 e cambiamo verso della disequazione:

$$8x^2+10x+3<0.$$

Risolviamo l'equazione associata:

$$8x^2+10x+3=0$$

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$ dell'equazione:

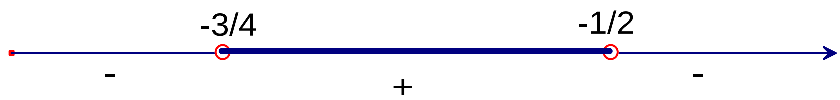
$$\frac{\Delta}{4}=(+5)^2-8\cdot 3=25-24=1$$

$$x=\frac{-5\pm 1}{8}\Rightarrow x_1=-\frac{3}{4};x_2=-\frac{1}{2}$$

La disequazione è verificata per i valori di x interni all'intervallo delle radici, ossia per

$$-\frac{3}{4}<x<-\frac{1}{2}$$

Rappresentiamo graficamente l'intervallo S



6.4.5 Disequazioni fratte

Una disequazione si dice **fratta**, o frazionaria, se la variabile x compare almeno in uno dei denominatori. Essa può essere espressa nella forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

o in quelle analoghe con i segni $\geq$ e $\leq$.

Per risolvere una disequazione fratta si deve studiare il segno del numeratore $A(x)$, e il segno del denominatore $B(x)$ e quindi stabilire il segno del rapporto $\frac{A(x)}{B(x)}$. In ogni caso si deve tener presente che è necessario escludere dalle soluzioni quei valori di x che annullano anche un solo denominatore.

Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Risolviamo la disequazione fratta

$$\frac{x^2-2x-3}{4x-x^2} \leq 0.$$

Risoluzione. Per studiare il segno del numeratore (N) e del denominatore (D) poniamo il polinomio al numeratore ≥ 0, (questo anche se la disequazione avesse avuto segno $>$ o $\geq$), e il polinomio al denominatore sempre >0 e non ≥ 0, altrimenti si andrebbero a considerare anche quelle radici che annullano il denominatore, e questo sarebbe insensato.

Nota didattica. Sarà opportuno sottolineare che non si sta ponendo una condizione sul numeratore e sul denominatore, ma se ne sta studiando il segno per capire per quali di x sono positivi e per quali, negativi.

Studiamo ora il segno del numeratore, ponendo $N = x^2-2x-3 \geq 0.$

L'equazione associata alla disequazione è $x^2-2x-3=0.$ Calcoliamo prima $\frac{\Delta}{4}$ dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = (-1)^2 - 1\cdot(-3) = 4.$$

Poiché $\frac{\Delta}{4} > 0,$ l'equazione ammette due radici reali e distinte così indicate. Applicando la formula risolutiva ridotta, otteniamo:

$$x = 1 \pm \sqrt{4}.$$

Le soluzioni sono allora:

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 3.$$

Il coefficiente del termine di secondo grado è $1>0$, la disequazione è soddisfatta per $x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 3.$

Studiamo il segno del denominatore, ponendo $D = 4x - x^2 > 0.$

L'equazione associata alla disequazione è $4x-x^2=0.$ Raccogliamo x:

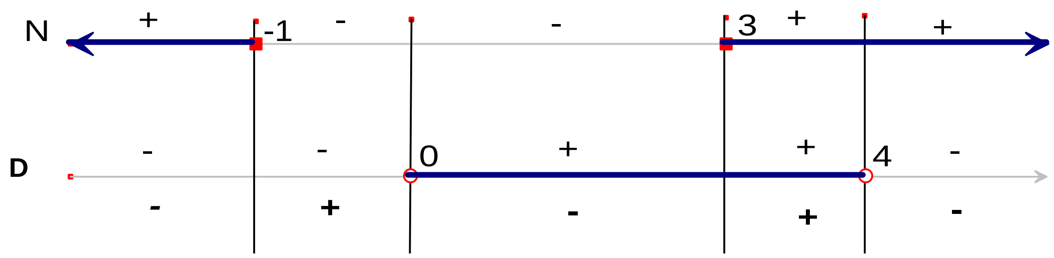
$x(4-x)=0.$

e applicando la legge dell' annullamento del prodotto, si conclude subito che essa ha come soluzioni:

$x_1 = 0$ e $x_2 = 4.$

Il coefficiente del termine di secondo grado è $-1<0$, la disequazione è soddisfatta per $0<x<4$.

Prepariamo lo schema grafico risolutivo che permette di confrontare gli intervalli di soluzione delle due disequazioni:



La disequazione è perciò verificata per: $x \le -1 \ \vee \ 0<x\le 3 \ \vee \ x>4.$

6.4.6 Disequazioni parametriche di secondo grado

IL SIGNIFICATO DI "DISCUSSIONE"

Data una equazione a coefficienti numerici, le sue radici, numericamente determinate, manifestano in modo evidente la loro natura (numeri reali o numeri complessi) e il loro segno (positivo o negativo).

Data invece una equazione a coefficienti letterali, le sue radici, salvo casi eccezionali, sono espressioni in cui figurano le medesime lettere dei coefficienti. Attribuendo a tali lettere, che rappresentano numeri in forma indeterminata, particolari valori numerici, le radici dell'equazione risultano numericamente determinate, e possono essere reali, positive o negative, oppure complesse, a seconda dei valori numerici arbitrariamente attribuiti alle lettere dei coefficienti.

Nelle equazioni letterali dunque **le radici sono funzioni dei coefficienti**, e se questi a loro volta dipendono dai valori che può assumere una stessa lettera (detta "**parametro**"), anche le radici di quella equazione (detta "**parametrica**") sono funzioni di tale parametro.

Chiariamo quanto detto con l'esempio seguente.

Esempio. Nella seguente equazione letterale di secondo grado:

$3mx^2+(m-2)x+4m+1=0$

i tre coefficienti a, b, c sono funzioni di uno stesso parametro m, perché:

$a=3m \qquad b=m-2 \qquad c=4m+1$

Perciò anche le radici dell'equazione sono funzioni del parametro m.

Se si vuole che le radici di una equazione letterale soddisfino a determinate condizioni (cioè risultino per esempio reali o positive, oppure reali, positive e non maggiori di un dato numero, ecc.), è necessario conoscere come variano le radici al variare dei coefficienti (o del parametro) per stabilire in quali intervalli i valori che assumono le lettere, o il parametro, soddisfano quelle condizioni.
La ricerca di tali intervalli dà origine a un procedimento che costituisce la **discussione** della data equazione.

Alle equazioni letterali di secondo grado si possono applicare vari metodi di discussione. Tra questi, il metodo che appare più semplice è quello dalla **discussione diretta**, che consiste nel tradurre direttamente sulle espressioni (letterali) delle radici dell'equazione le condizioni a cui esse devono soddisfare, traendo, con ragionamenti e operazioni convenienti, le conseguenze e quindi le conclusioni. Questo metodo si applica nelle più semplici equazioni di secondo grado (vedi paragrafo 5.4.7).
Nelle equazioni di secondo grado si preferisce di solito uno dei metodi di **discussione indiretta**, nei quali, oltre alla data equazione:

$$ax^2+bx+c=0$$

si considera la "funzione associata", che si ottiene ponendo:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

e trasformando l'incognita x in una variabile indipendente.
Fra la data equazione e la funzione associata esiste un legame fondamentale: le radici dell'equazione rappresentano nella funzione associata i valori della variabile x per i quali la funzione si annulla (gli "zeri" della funzione), e nella interpretazione grafica tali radici sono le ascisse delle eventuali intersezioni della parabola $f(x)$ con l'asse delle x (vedi paragrafo 4.5.8).

DISCUSSIONE DELLA REALTA' DELLE RADICI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Nelle equazioni di secondo grado a coefficienti letterali:

$$ax^2+bx+c=0$$

la condizione di **realtà** (o di "realità") delle radici trae origine dalla formula risolutiva, perché in questa esiste una espressione dei coefficienti (il discriminante $\Delta=b^2-4ac$), che essendo radicando di un radicale quadratico, non deve assumere valori negativi: infatti, non esiste nel campo reale la radice quadrata di un numero negativo. Perciò si può concludere:

Affinché le radici di una equazione di secondo grado siano reali, è necessario e sufficiente che ai coefficienti dell'equazione (o al parametro) si attribuiscono valori che rendono negativo il discriminante, cioè valori tali che si abbia:

$$b^2-4ac\geq 0$$

Se si può applicare la formula risolutiva ridotta, la condizione di realtà può essere riferita al "discriminante ridotto".

Chiariamo quanto detto con gli esempi seguenti.

Esempio 1. Determinare per quali valori di m sono reali le radici della equazione:

$$x^2 - 3mx + 4 = 0$$

Risoluzione. Poiché $\Delta = 9m^2 - 16$, condizione necessaria e sufficiente perché le radici siano reali è che m assume valori tali che si abbia:

$$9m^2 - 16 \geq 0$$

Risolvendo questa disequazione rispetto a m (il grafico di Δ in funzione di m è una parabola con la concavità rivolta in alto), dopo avere osservato che $\Delta = 0$ per $m = \pm\frac{4}{3}$, si conclude che la radici sono reali se:

$$m \leq -\frac{4}{3} \quad \vee \quad m \geq \frac{4}{3}.$$

Esempio 2. Determinare per quali valori di k sono reali le radici dell'equazione

$$x^2 + kx + k^2 - 3 = 0$$

Risoluzione. Poiché $\Delta = k^2 - 4(k^2 - 3) = -3k^2 + 12 = 3(-k^2 + 4)$ le radici dell'equazione sono reali se:

$$-k^2 + 4 \geq 0$$

Risolvendo questa disequazione rispetto a k (il grafico di Δ funzione di k è una parabola con la concavità in basso), dopo aver osservato che $\Delta = 0$ per $k = \pm 2$, si conclude che le radici sono reali se:

$$-2 \leq k \leq 2.$$

Esempio 3. Determinare per quali valori di q sono reali le radici dell'equazione

$$x^2 - 3qx + 2q^2 - 1 = 0$$

Risoluzione. Poiché $\Delta = 9q^2 - 8q^2 + 4 = q^2 + 4$ le radici dell'equazione sono reali se $q^2 + 4 \geq 0$. Come appare evidente (e risulta risolvendo questa disequazione in q) la disuguaglianza è verificata per ogni valore reale del parametro q: le radici della data equazione sono sempre reali e distinte.

DISEQUAZIONI PARAMETRICHE DI SECONDO GRADO

Esempio. Risolvere la disequazione $x^2 - 2kx + k^2 - k > 0, \quad k \in \mathbf{R}$.

Il discriminante del trinomio a primo membro cambia di segno al variare di k e precisamente, essendo $\frac{\Delta}{4} = k$, e $\Delta \geq 0$ per $k \geq 0$.

Si distinguono perciò tre casi:

1. $k < 0$. Il Δ è negativo e perciò il trinomio è in questo caso sempre concorde con il primo coefficiente, cioè positivo. Quindi se $a < 0$, la disequazione è verificata per qualsiasi valore reale di x.

2. $k=0$. Il Δ è nullo e il trinomio, che in questo caso ha radici $x_1=x_2=0$, è positivo per qualsiasi valore reale di $x\neq 0$. Quindi per $k=0$, la disequazione è verificata per $x\neq 0$.

3. $k>0$. Il Δ è positivo e le radici del trinomio sono $x_{1,2}=+k\pm\sqrt{k}$. Affinché la disequazione sia verificata, il trinomio deve risultare concorde col primo coefficiente e pertanto si deve sostituire a x i valori esterni all'intervallo delle radici x_1 e x_2. Quindi per $k>0$, la disequazione è soddisfatta per $x<+k-\sqrt{k} \quad \vee \quad x>+k+\sqrt{k}$.

UTILIZZO DEL SOFTWARE DERIVE

Esercizio. Determiniamo per quali valori di k la seguente disequazione nell'incognita x:

$$(2-k)x^2-2(k+1)x+3k+1>0$$

a) ammette soluzioni esterne all'intervallo delle radici;

b) ammette come soluzioni tutte le x reali, tranne un solo valore.

Nell'ultimo caso, sostituiamo nella disequazione i valori di k trovati e tracciamo il grafico delle parabole corrispondenti.

Svolgimento.

Inseriamo la disequazione

- Diamo ***Crea_Espressione*** e nella linea di editazione delle espressioni digitiamo il primo membro della disequazione: $(2-k)x\text{^}2-2(k+1)x+3k+1$. Battiamo **INVIO**.

$$\#1:(2-k)\cdot x^2-2\cdot(k+1)\cdot x+3\cdot k+1$$

Troviamo le radici

Usiamo ***Risolvi_Algebricamente*** e otteniamo le espressioni delle due radici in funzione di *k*.

$$\#2: \quad x=\frac{\sqrt{(4\cdot k^2-3\cdot k-1)}-k-1}{k-2} \quad \vee \quad x=\frac{\sqrt{(4\cdot k^2-3\cdot k-1)}+k+1}{2-k}$$

Rispondiamo al primo quesito

Imponiamo al coefficiente di x^2 e al discriminante di essere maggiori di zero.

- Impostiamo e risolviamo il corrispondente sistema di disequazioni, utilizzando ***Risolvi_Sistema***. Richiediamo a *Derive* che il sistema sia formato da due disequazioni, aprendo una finestra di dialogo.

- Nel campo della prima disequazione digitiamo: $2-k>0$ (il coefficiente di x^2).

$\#3: SOLVE\ ([2-k>0,\ 4\cdot k^2-3\cdot k-1>0],\ [k])$

- Nel campo della seconda disequazione importiamo con F3 il discriminante, contenuto in #2, a fianco del quale digitiamo >0.
- Indichiamo che la variabile è *k* e facciamo clic su ***Risolvi***; otteniamo le soluzioni del sistema.

$\#4:\ [k<-\frac{1}{4},\ 1<k<2]$

Rispondiamo al secondo quesito.

Troviamo i valori di k che rendono una disequazione risolta per tutti i valori reali tranne uno, fra quelli che rendono il discriminante nullo e il coefficiente di x^2 positivo.

$\#5:\ 4\cdot k^2-3\cdot k-1$

Risolviamo l'equazione del discriminante e verifichiamo quali soluzioni rendono positivo il coeficciente di x^2.

$\#6: SOLVE\ ([4\cdot k^2-3\cdot k-1=0],\ [k])$

- Inseriamo il discriminante e con ***Risolvi_Algebricamente*** otteniamo le soluzioni in #7.

$\#7: \left[k=-\frac{1}{4}, k=1\right]$

Ricaviamo le equazioni delle parabole

- Applichiamo ***Semplifica_Sostituisci variabili*** all'etichetta #1, sostituendo a k il valore $-\frac{1}{4}$ e ignorando la richiesta di sostituzione della x.

$\#8:\ \frac{9}{4}\cdot x^2-\frac{3\cdot x}{2}+\frac{1}{4}.$

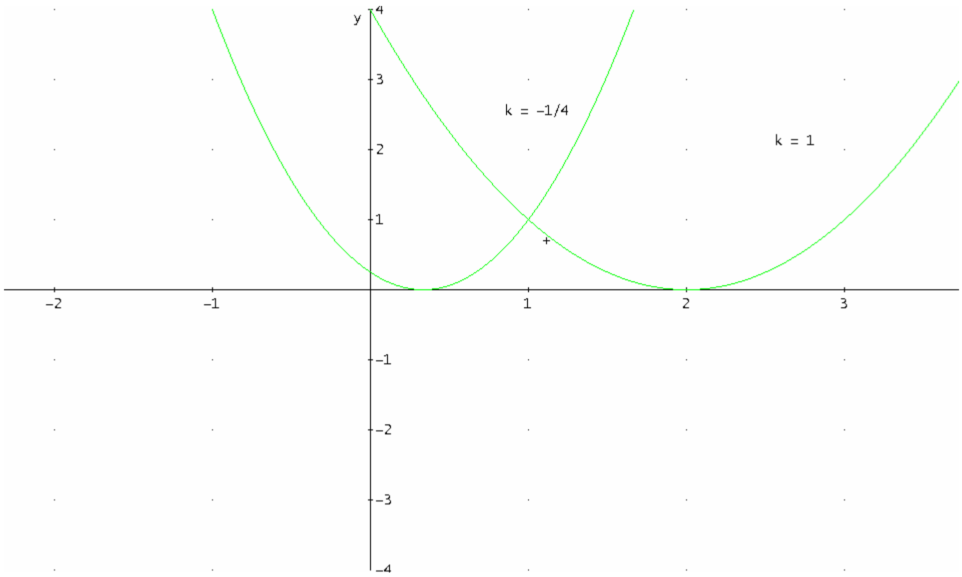
- Ripetiamo le stesse operazioni per *k* = 1.

$\#9:\ x^2-4\cdot x+4.$

- Otteniamo le equazioni di due parabole con il coefficiente di x^2 positivo, quindi i due valori trovati di *k* soddisfano il quesito proposto.

Tracciamo i grafici delle parabole

- Evidenziamo l'etichetta #8, entriamo in ambiente grafico a due dimensioni con il bottone **Finestra_Grafici 2D** dove con **Traccia il grafico** dell'espressione disegniamo la prima parabola.
- Ritorniamo in ambiente algebrico, evidenziamo l'etichetta #9 e operiamo in modo simile per la seconda.



6.4.7 Tempi dell'intervento didattico

Per svolgere questa unità didattica si prevedono i seguenti tempi:

Accertamento dei prerequisiti:	-
Lezioni frontali e svolgimento degli esercizi:	8h
Attività di laboratorio:	3h
Verifica sommativa	2h
Consegna e correzione verifica sommativa:	1h

Per un totale di 14 ore che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa tre settimane di lavoro. La previsione è da intendersi elastica, perché occorre tener conto dell'andamento e dei processi di apprendimento della classe.
L'accertamento dei prerequisiti dell'unità didattica le disequazioni di secondo grado si intende effettuato con l'accertamento dei prerequisiti dell'unità didattica precedente e con la relativa verifica sommativa.

6.4.8 Verifica sommativa U.D. 4

1. Risolvi le seguenti disequazioni:

$$15x^2 - 38x + 11 < 0$$

$$-3 - x^2 \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x - 1}{x + 2} \geq \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4} + 2.$$

2. Determiniamo per quali valori di k la seguente equazione in x ha per radice un valore maggiore di 8 e minore di 20:

$$x + 2k = k \cdot (k + 4) + 5.$$

3. Risolvi graficamente la seguente disequazione:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 > 0.$$

4. Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Griglia di valutazione per la verifica sommativa (compilata nelle sue parti)

	CONOSCENZA		COMPETENZA		CAPACI TA'	
	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI
ESERCIZIO 1	5		2		2	
ESERCIZIO 2	2		2		4	
ESERCIZIO 3	2		4		3	
ESERCIZIO 4	3		4		3	
TOTALE	12		12		12	

Capitolo 7 U.D.5 NUMERI COMPLESSI ED EQUAZIONI ALGEBRICHE

7.1 PREREQUISITI

Per lo svolgimento di questa unità didattica si ritiene necessaria la conoscenza dei contenuti dell'unità didattica 1, 3 e inoltre:

- Conoscenza della struttura dell'insieme dei numeri reali **R**.
- Saper scomporre in fattori un polinomio.
- Conoscenza delle operazioni con i radicali semplici e saperli utilizzare.
- Conoscenza delle funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche e le loro proprietà.
- Conoscenza dei vettori (modulo, somma, prodotto per uno scalare).
- Uso del software Cabri Géomètre II Plus e Derive.

7.2 OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE

- ♦ Conoscere il lato storico dell'argomento trattato.
- ♦ Conoscere la definizione di un numero complesso.
- ♦ Conoscere il piano complesso.
- ♦ Conoscere e saper rappresentare le operazioni fra numeri complessi.
- ♦ Conoscere i numeri immaginari.
- ♦ Conoscere la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.
- ♦ Conoscere la formula di De Moivre.
- ♦ Conoscere le radici n-esime di un numero complesso.
- ♦ Conoscere l'esponenziale del complesso.
- ♦ Svolgere esperienze interessanti con il software Cabri Géomètre II Plus e Derive a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

COMPETENZE

- ♦ Saper rappresentare un numero complesso.
- ♦ Saper svolgere operazioni con i numeri complessi.
- ♦ Saper rappresentare un numero complesso in forma trigonometrica.
- ♦ Saper applicare le operazioni di addizione, prodotto e quoziente ai numeri complessi in forma trigonometrica.
- ♦ Saper calcolare la potenza e la radice ennesima di un numero complesso.

Capacità

SAPER

- Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi più complessi e non risolti in classe.
- Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

7.3 CONTENUTI

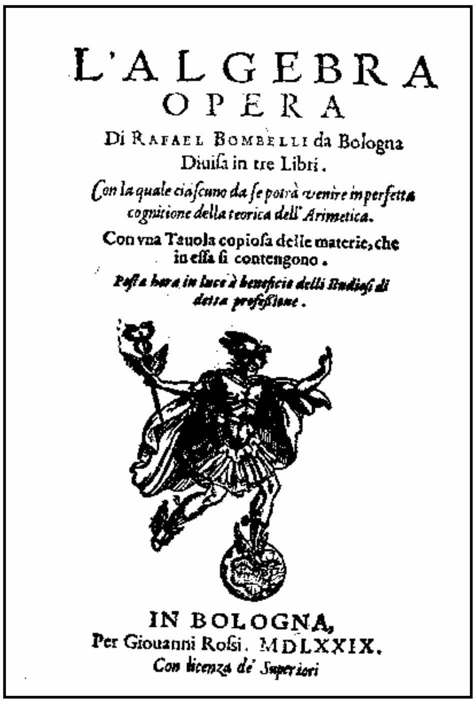
- Breve storia dei numeri complessi.
- I numeri complessi.
- Forma algebrica dei numeri complessi.
- Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.
- Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.
- Forma esponenziale di un numero complesso.
- Risoluzione di equazioni algebriche nel campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra.
- Applicazioni dei numeri complessi attraverso l'utilizzo del software Derive.

7.4 SVILUPPO DEI CONTENUTI

7.4.1 Breve storia dei numeri complessi

I complessi nascono per la risoluzione di equazioni di terzo grado.

Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri, fu Rafael Bombelli (1526-1573), matematico bolognese (nato a Borgo Panigale).


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Frontespizio di L'Algebra di Bombelli.

Bombelli, nella sua opera L'Algebra, il cui titolo completo è L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica (composta verso il 1560, ma stampata in parte solo nel 1572) raccolse e completò i risultati ottenuti in campo algebrico della prima metà del Cinquecento da diversi matematici; si propose cioè di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso irriducibile, cioè quando, nella formula di Cardano, si presenta la radice quadrata di un numero negativo

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$$

Nel libro I dell'Algebra Bombelli prende in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama "quantità silvestri", e giunge ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo "complessi". Bombelli introdusse i termini più di meno e meno di meno, per indicare $+i$ e $-i$.
Bombelli, dunque, stabilì le leggi formali di calcolo dei nuovi numeri, successivamente chiamati immaginari da Cartesio per indicare delle soluzioni considerate fittizie e irreali, né vere né "surde" (negative). A Bombelli spetta quindi il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le regole di calcolo con essi oltre a quello di aver svolto la teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo e risolvendo tutti i casi che si possono presentare, mentre Cardano e Ferrari non avevano sviluppato una teoria completa.

Storicamente, quindi, prima è nato il termine "numeri immaginari" e poi, più di due secoli dopo, quello di "numeri reali". Nell'insegnamento, tuttavia, lo studio almeno intuitivo dei numeri reali precede quello dei numeri complessi.
Ci si chiede quindi: perché ampliare i numeri reali?
E' noto che l'insieme dei numeri reali **R**, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione possiede una serie di proprietà che lo rendono un campo, cioè un corpo commutativo; è inoltre dotato di una relazione d'ordine che è compatibile con tale struttura algebrica ed è continuo.
Tutte queste proprietà permettono di affrontare e risolvere in **R** una vastissima classe di problemi che occupa tutta la scuola superiore e oltre.
Eppure, nonostante questa grande ricchezza della struttura algebrica (oltre a quella d'ordine e topologica) l'insieme **R** può rivelarsi "insufficiente" in alcuni problemi particolari.
Ad esempio, l'equazione:

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzione in **R** perché, sviluppando il calcolo, otteniamo

$$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1}$$

e non esistono numeri reali che siano la radice quadrata di un numero negativo. Di fronte ad una tale situazione o ci si "arrende", stabilendo che l'equazione non è risolubile, oppure si amplia l'insieme numerico, introducendo nuovi tipi di numeri, diversi dai reali: i numeri complessi.

7.4.2 I numeri complessi

Osservazione didattica. La lezione è orientata prevalentemente alla comprensione della nozione di numero complesso.

LA DEFINIZIONE DI UN NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE
Si definisce **numero complesso** la coppia ordinata (a,b),dove a e b sono numeri reali.

L'insieme dei numeri complessi si indica con **C**; ed insiemisticamente esso si identifica con **R**x**R**.

LE QUATTRO OPERAZIONI

DEFINIZIONE
Si dice **addizione** in **C** la legge di composizione interna:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

che ad ogni coppia di numeri complessi (a,b), (c,d) assegnati fa corrispondere il numero complesso $(a+b,\ c+d)$, detto **somma** dei numeri complessi assegnati. Ovvero:

$$(a,b) + (c,d) = (a+b,\ c+d)$$

Inoltre questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa
- Esiste l'elemento neutro $(0,0)$ denominato numero complesso zero.
- Ogni $(a,b) \in$ **C** ammette, in **C**, l'inverso additivo $(-a,-b)$, detto opposto di (a,b).

Inoltre l'opposto di un numero complesso è unico.

Osservazione didattica. Non è necessario memorizzare queste regole, perché si possono facilmente dedurre dalle medesime proprietà dell'addizione in **R**.

DEFINIZIONE
Si dice **moltiplicazione** in **C** la legge di composizione interna:

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

che ad ogni coppia di numeri complessi (a,b), (c,d) assegnati fa corrispondere il numero complesso $(a+b,\ c+d)$, detto **somma** dei numeri complessi assegnati. Ovvero:

$$(a,b) + (c,d) = (a+b,\ c+d)$$

Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.
- E' distributiva rispetto all'addizione.
- Esiste l'elemento $(1,0)$ denominato numero complesso uno.
- Ogni $(a,b) \in$ **C**, con $(a,b) \neq (0,0)$, ammette, in **C**, l'elemento inverso moltiplicativo, $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, detto reciproco di (a,b):

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\cdot(a,b)=(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Inoltre il reciproco di un numero complesso è unico.

Grazie alla presenza dell'opposto di un numero complesso viene introdotta in **C** l'operazione di sottrazione ; analogo discorso per la divisione. La divisione in **C** viene introdotta grazie alla presenza del reciproco di un numero complesso non nullo.

DEFINIZIONE

Dati due numeri complessi (a,b) e (c,d), con $(c,d)\neq(0,0)$, si definisce **quoziente** di (a,b) e (c,d), e si indica con $\frac{(a,b)}{(c,d)}$, il prodotto di (a,b) per il reciproco di (c,d).

Dalla definizione e dalle proprietà riportate in precedenza **C** dotato delle due operazioni addizione e moltiplicazione è un campo, come lo è **R.** Viene quindi naturale chiedersi se **R** sia isomorfo a un sottocampo di **C**, nel quale le usuali operazioni tra numeri reali siano un caso particolare delle operazioni tra numeri complessi definita in questo paragrafo. La risposta è affermativa, come vedremo nel prossimo paragrafo.

7.4.3 Forma algebrica dei numeri complessi.

Si può definire una corrispondenza biunivoca tra **R** e **R** x $\{0\}$, che associa ad ogni numero reale a il numero complesso $(a,0)$. Si può inoltre verificare che questa applicazione è un isomorfismo di campi. In particolare ciò significa che essa "conserva le operazioni" e che le immagini di 0 e 1 (ossia gli elementi neutri dell'addizione e della moltiplicazione in **R**) sono rispettivamente i numeri complessi $(0,0)$ e $(1,0)$ (ossia gli elementi neutri dell'addizione e della moltiplicazione in **C**)**.**
D'ora in poi **identificheremo il numero complesso** $(a,0)$ con il numero reale a.

NUMERI IMMAGINARI

DEFINIZIONE

Si definisce **unità immaginaria**, e si indica con i, il numero complesso $(0,1)$.

Sottolineiamo che i non è una variabile, non rappresenta un numero reale, né è un'incognita: è solo un simbolo.

Osserviamo che

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$$

Per quanto visto in precedenza, possiamo identificare $(-1,0)$ con -1, quindi abbiamo definito un numero il cui quadrato è uguale a -1.

$$i^2=-1$$

Nota didattica. E' questo il risultato che più incuriosisce gli allievi: si è definito un numero il cui quadrato è negativo, contro la loro quasi innata convinzione che non possano esistere (né in **R,** né in nessun altro insieme numerico) numeri il cui quadrato sia negativo.

DEFINIZIONE

Si dice numero complesso un binomio,

$$a+ib$$

dove a e b sono **numeri reali** e i è detta **unità immaginaria**.

Osservazione didattica. Il termine "complesso" sta proprio a significare che il numero viene scritto come un binomio, in cui rimangono "distinte" la parte reale e la parte immaginaria: se non è nulla una di queste due parti il numero non può essere scritto in forma ulteriormente ridotta.

I numeri reali a e b vengono rispettivamente chiamati **parte reale** e **coefficiente della parte immaginaria** del numero complesso considerato, il prodotto ib è detto **parte immaginaria**.
Quando la parte reale è nulla, il numero $0+ib=ib$ è chiamato **numero immaginario**.
L'espressione $a+ib$ **viene denominata forma algebrica del numero complesso e viene spesso indicato con una sola lettera** $z, w, ...$
E' utile definire a questo punto anche il numero complesso **coniugato** di un numero :

$$z = a + ib$$

come quel numero complesso che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta :

$$\bar{z} = a - ib.$$

Inoltre due numeri complessi si dicono **uguali** quando sono rispettivamente uguali le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie; in caso contrario si dicono **disuguali.** Infine due numeri complessi si dicono opposti quando hanno opposti sia le parti reali che i coefficienti delle parti immaginarie.

7.4.4 Operazioni con i numeri complessi

La **somma** di due numeri complessi è il numero complesso avente per parte reale la somma delle parti reali degli addendi e per coefficiente della parte immaginaria la somma dei coefficienti delle parti immaginarie.

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

In particolare

$$(a+ib)+(a-ib)=2a,$$

cioè la somma dei numeri complessi coniugati è un numero reale e la somma di due numeri complessi è zero.

Inoltre questa operazione ha le seguenti proprietà:

- Associativa e commutativa
- Esiste l'elemento neutro $(1+i0)$ che si può indicare con il simbolo 0.
- Ogni elemento $z=a+ib$ ammette in **C** un "simmetrico" rispetto all'addizione $(-z=-a-ib)$ che si chiama opposto di $z=a+ib$.

Il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso che si ottiene moltiplicando termine a termine i due fattori mediante la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

$$(a+ib)(c+id)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

In particolare

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

cioè il prodotto di due numeri complessi coniugati è un numero reale.
Osservazione didattica. Le regole di calcolo per i numeri complessi in forma algebrica sono esattamente le stesse regole usualmente impiegate nel calcolo con i numeri reali (per il citato isomorfismo), con l'avvertenza di porre $i^2=-1$.

Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa
- Esiste l'elemento neutro $(1+i0)$ che si può indicare con il simbolo 1.
- Ogni elemento $z=a+ib$ con a e b non contemporaneamente nulli ammette in **C** un simmetrico rispetto alla moltiplicazione che si chiama reciproco di $a+ib$ dato da:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}\cdot z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$(u+v)\cdot z=u\cdot z+v\cdot z$$

Con queste operazioni e proprietà l'insieme **C** si dice essere un campo.
Grazie alla presenza dell'opposto di un numero complesso viene introdotta in **C** l'operazione di sottrazione ; analogo discorso per la divisione. La divisione in **C** viene introdotta grazie alla presenza del reciproco di un numero complesso non nullo.

Il quoziente di due numeri complessi è il numero complesso che si ottiene moltiplicando il primo per il reciproco del secondo.

$$(a+ib):(c+id)=(a+ib)\frac{1}{(c+id)}$$

Si propongono agli studenti i seguenti esempi.
Esempio1. Esegui la seguente moltiplicazione fra numeri complessi $(1-3i)\cdot(2-i)$.

Risoluzione. $(1-3i)\cdot(2-i)=2-i-6i+3i^2=2-3-7i=-1-7i$

Esempio2. Calcola il seguente quoziente fra numeri complessi $\frac{2+i}{1-i}$.

Risoluzione. Moltiplichiamo il numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, ossia $1+i$:

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} =$$

Moltiplichiamo i due numeratori e, al denominatore, applichiamo il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$= \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} =$$

Sommiamo i termini simili e sostituiamo a i^2 il valore -1 (otteniamo $1-i^2 = 1-(-1) = 1+1$):

$$= \frac{2+3i-1}{1+1} = \frac{1+3i}{2} =$$

Separiamo la parte reale dalla parte immaginaria. Il quoziente cercato è:

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

POTENZA A ESPONENTE INTERO POSITIVO

La potenza di un numero complesso $z = a+ib$ a esponente intero positivo si definisce in modo analogo a quanto viene fatto nel campo reale:

$z^0 = (a+ib)^0 = 1$ e $z^1 = (a+ib)^1 = a+ib$

e, per $n \geq 2$,

$$z^n = (a+ib)^n = \underbrace{(a+ib)\cdot \ldots \cdot (a+ib)}_{n \quad fattori}$$

Osserviamo che per l'unità immaginaria i si ha:

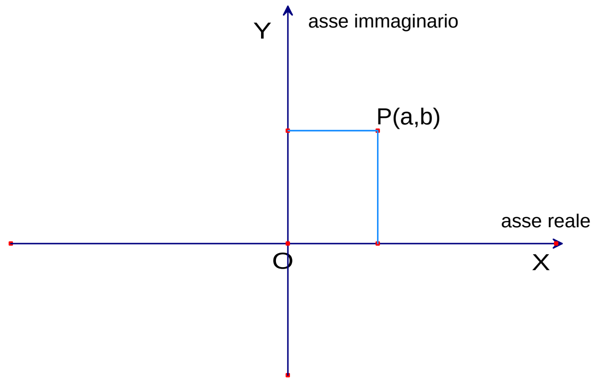
$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$

$i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots,$

Le potenze di i assumono ciclicamente i valori $1, \quad i, \quad -1, \quad -i$.

$$i^{4n} = i^0 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^1 = i$$
$$i^{4n+2} = i^2 = -1$$
$$i^{4n+3} = i^3 = -i$$

Esse si dispongono sui quattro vertici di un quadrato:



Il punto P è l'immagine nel piano di
Gauss del numero complesso z=a+ib

7.4.5 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

I numeri complessi possono essere rappresentati geometricamente o mediante punti di un piano o mediante vettori.

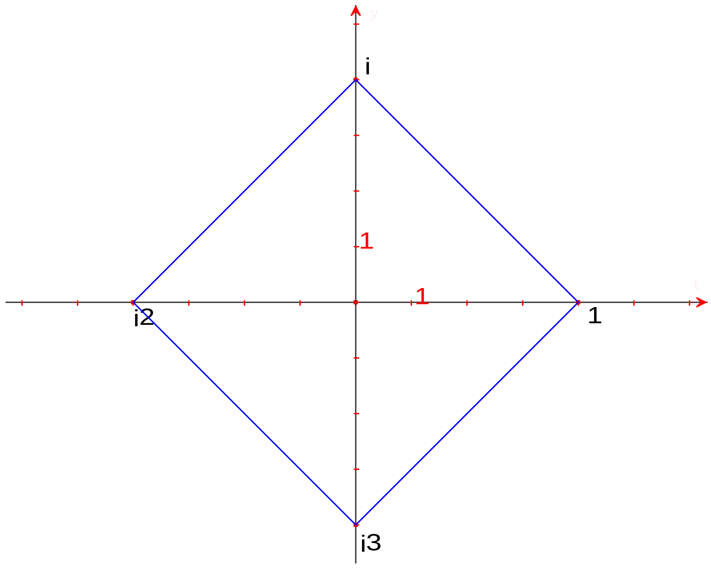
RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE I PUNTI DEL PIANO

Com'è noto esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e i punti di una retta. Per questo motivo la rappresentazione di **R** è ottimamente realizzata da una retta, detta retta reale: ad ogni punto della retta corrisponde uno ed un solo numero reale. L'insieme dei numeri complessi però non può essere rappresentato in tale modo: per rappresentare un numero complesso quindi si considera un sistema di assi cartesiani monometrico xOy, chiamato **piano complesso** (o **piano di Gauss**).

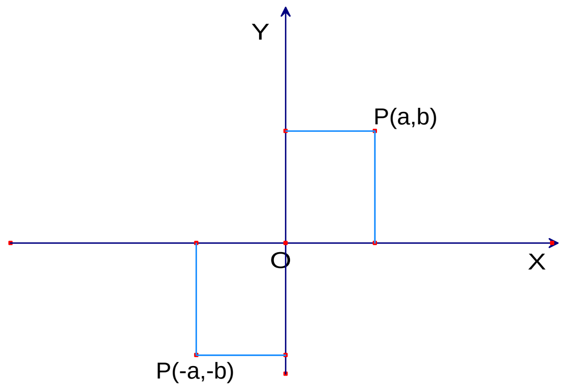
L'asse x viene chiamato **asse reale**, l'asse y **asse immaginario**. Ogni numero complesso $z = a + ib$ è identificato da una coppia ordinata di numeri reali (a,b), ossia da un punto P nel piano cartesiano. L'ascissa di P viene detta **parte reale** di z e l'ordinata di P **parte immaginaria** di z .

Quindi a z viene associato un punto P che ha per ascissa la parte reale di z e per ordinata la parte immaginaria di z . Pertanto **C = R** x **R** è in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano.

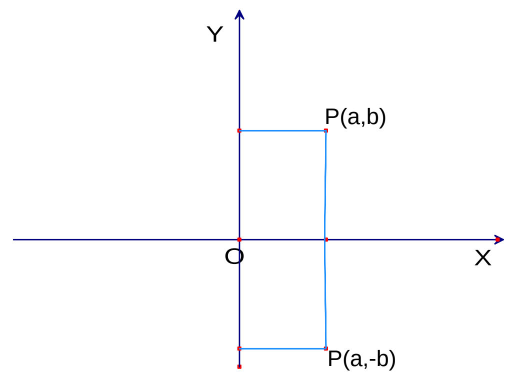
Un'altra differenza sostanziale tra **C** ed **R** è che mentre l'insieme dei numeri reali è totalmente ordinato rispetto alla relazione d'ordine $\leq$, **C** non lo è. In altre parole non ha senso chiedersi se un numero complesso è maggiore, minore o uguale di un altro.



A due numeri complessi tra loro opposti $a+ib$ e $-a-ib$ corrispondono immagini simmetriche rispetto all'origine O; a due numeri complessi coniugati $a+ib$ e $a-ib$ corrispondono immagini simmetriche rispetto all'asse reale.



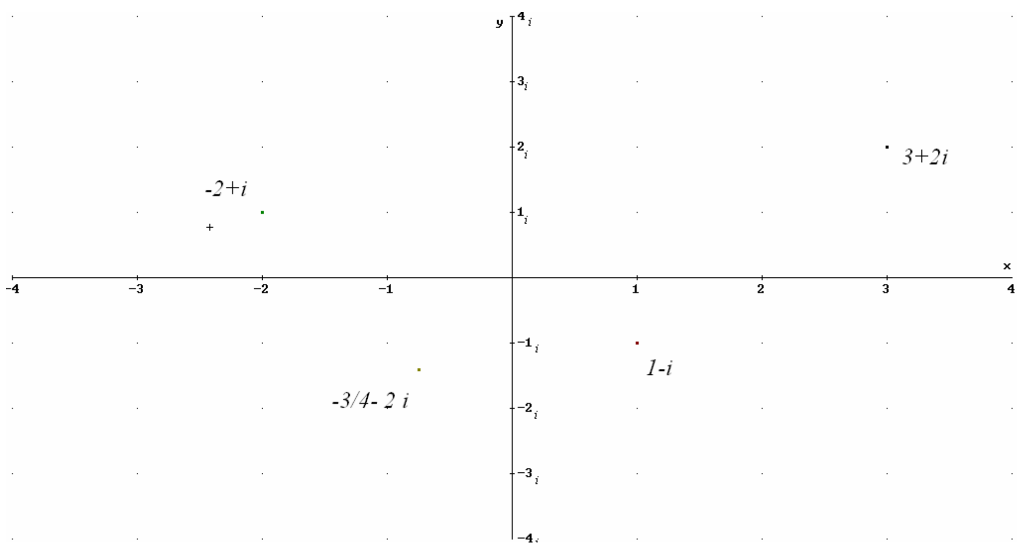
A due numeri opposti, nel piano di Gauss corrispondono due punti simmetrici rispetto all'origine O



A due numeri complessi coniugati corrispondono due punti simmetrici rispetto all'asse reale

Si propone agli studenti il seguente esempio.

<u>*Esempio*</u>. Rappresentare sul piano i numeri complessi $3+2i, \quad 1-i, \quad -2+i, \quad -\frac{3}{4}-\sqrt{2}i.$



DEFINIZIONE

Il numero reale

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

è detto **norma** del numero complesso $z = a + ib$.

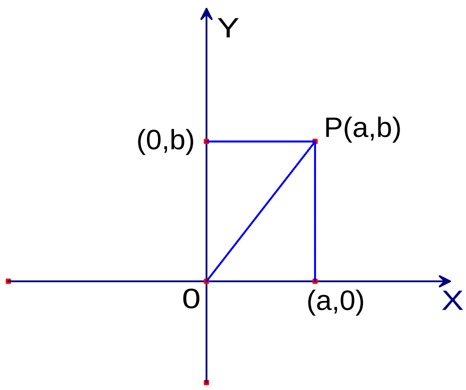
Si definisce **modulo** di un numero complesso il numero reale

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Osservazione didattica. Il prodotto di un numero complesso per il suo complesso coniugato è uguale alla sua norma. Risulta infatti:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Il modulo di z, rappresentato da un punto $P(a,b)$ nel piano complesso, geometricamente è la distanza di P dall'origine degli assi cartesiani, ossia la lunghezza del segmento PO (che ovviamente è una quantità reale non negativa).



Osservazioni:

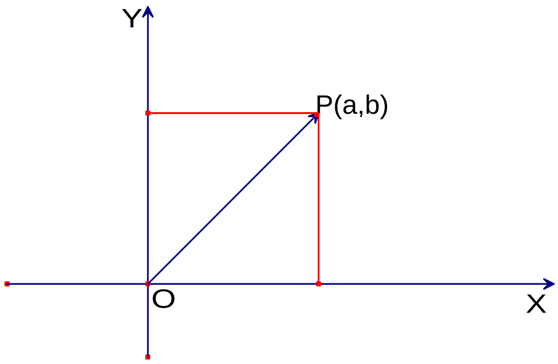
1. Il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli dei due numeri.

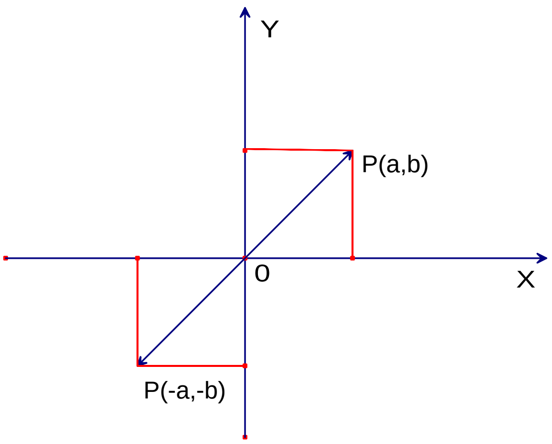
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

RAPPRESENTAZIONE MEDIANTE VETTORI

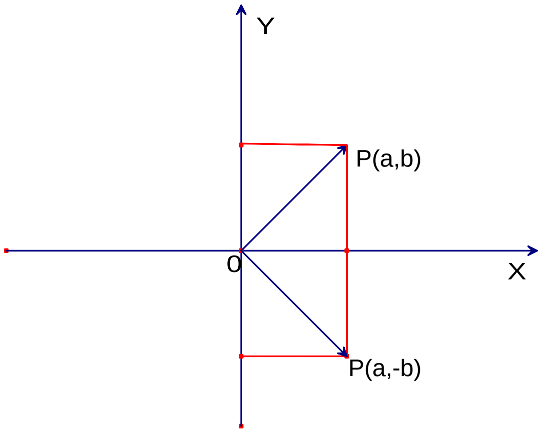
Un altro modo di rappresentare i numeri complessi, è quello vettoriale. Ci si restringe alla considerazione di vettori applicati nell'origine. Inoltre si fissa nel piano l'usuale verso antiorario come verso positivo delle rotazioni.

Fissiamo nel piano un sistema di assi cartesiani xOy. Al numero complesso $z = a + ib$ facciamo corrispondere il vettore $\overrightarrow{OP}$ essendo P il punto immagine di z; viceversa, al vettore $\overrightarrow{OP}$, con $P(a,b)$, facciamo corrispondere il numero complesso $z = a + ib$. **Il** vettore $\overrightarrow{OP}$ viene chiamato vettore rappresentativo del numero z. Esiste quindi **una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i vettori del piano**: ad ogni numero complesso è associato un vettore e ad ogni vettore è associato un numero complesso.





A due numeri complessi tra loro opposti $a+ib$ e $-a-ib$ corrispondono due vettori opposti



A due numeri complessi coniugati $a+ib$ e $a-ib$ corrispondono due vettori simmetrici rispetto all'asse reale

Consideriamo ora due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$. A tali numeri complessi sono associati rispettivamente i vettori rappresentativi $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, dove è $P(a,b)$ e $Q(c,d)$.

La **somma dei due vettori** si può eseguire con la regola del parallelogrammo.

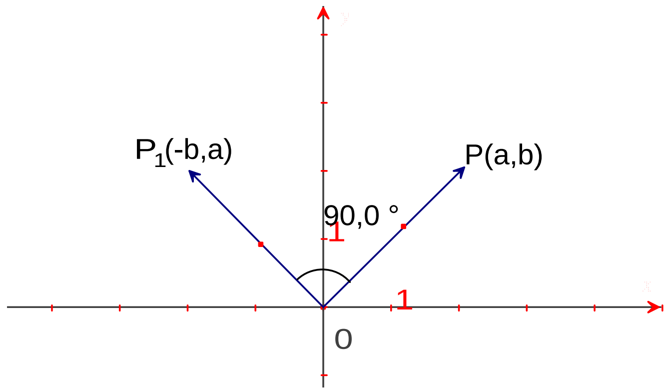
Si può anche dimostrare che a tale vettore corrisponde il numero complesso $z+w$, ossia che **la somma dei vettori associati a due numeri complessi è il vettore associato alla somma dei numeri complessi considerati.**

Anche la moltiplicazione tra numeri complessi si può interpretare geometricamente, pur se in modo meno immediato dell'addizione.

Effettuiamo ora la moltiplicazione di un numero complesso $z = a + ib$ per l'unità immaginaria i. Si ha:

$$(a + ib) \cdot i = ai + i^2 b = -b + ia$$

Al vettore $\overrightarrow{OP}$ dove è $P(a,b)$ corrisponde il vettore $\overrightarrow{OP_1}$ dove è $P_1(-b,a)$; esso ha lo stesso modulo di quello dato, ma è ruotato rispetto ad esso di $90°$. La moltiplicazione per i ha l'effetto di ruotare il vettore di $90°$ in vero antiorario.



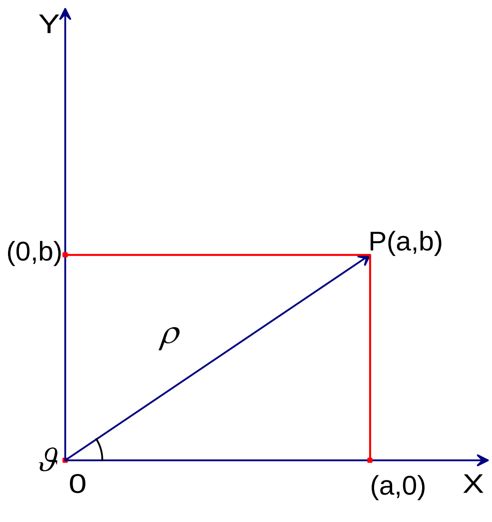
7.4.6 Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi

Sia $z = a + ib$ un numero complesso e $P(a,b)$ il punto corrispondente nel piano cartesiano $x0y$. La posizione del punto P può essere individuata anche mediante le sue coordinate polari (ρ, ϑ), riferite al polo e all'asse polare x, dove,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e se $P \neq O$ (vedi figura seguente), l'anomalia ϑ, definita a meno di multipli di 2π, è fornita dalle formule

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\vartheta = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Il numero $\rho \geq 0$, uguale alla distanza $\overline{OP}$, prende il nome di **modulo** di z e viene indicato con $|z|$, mentre l'anomalia ϑ prende il nome di **argomento** di z.

Poiché $a = \rho\cos\vartheta$, $b = \rho\ sen\vartheta$, il numero complesso z può essere scritto nel modo seguente:

$$z = x + iy = \rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

detta **rappresentazione trigonometrica** di z.

Si verifica immediatamente che due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$$

sono uguali se e solo se hanno stesso modulo e se le anomalie differiscono per multipli di 2π, cioè se

$$\rho_1 = \rho_2 \text{ e } \vartheta_1 = \vartheta_2 + 2k\pi$$

con k intero.

Si propone alla classe il seguente esempio.

Esempio. Rappresentare trigonometricamente il numero $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Risoluzione. Essendo $a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

si ha:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad sen\vartheta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

pertanto, posto

$$\vartheta = \frac{\pi}{3},$$

si ha:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}.$$

Successivamente il docente fa osservare che la forma trigonometrica presenta un notevole vantaggio quando sui numeri complessi si devono eseguire le operazioni di moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice n-esima.

PRODOTTO

Siano

$$z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + isen\vartheta_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + isen\vartheta_1),$$

due numeri complessi rappresentati in forma trigonometrica. Si ha:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)].$$

Si vede dunque che **il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è il numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti**.

QUOZIENTE

Siano

$$z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \qquad z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \qquad z_2 \neq 0$$

si ha:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\vartheta_1 + isen\vartheta_1)}{\rho_2(\cos\vartheta_2 + isen\vartheta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\vartheta_1 + isen\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 - isen\vartheta_2)}{(\cos\vartheta_2 + isen\vartheta_2)(\cos\vartheta_2 - isen\vartheta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + isen\vartheta_1\cos\vartheta_2 - i\cos\vartheta_1 sen\vartheta_2 - i^2 sen\vartheta_1 sen\vartheta_2}{\cos^2\vartheta_2 - i^2 sen^2\vartheta_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + isen\vartheta_1\cos\vartheta_2 - i(sen\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1 sen\vartheta_2)}{\cos^2\vartheta_2 + sen^2\vartheta_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot[\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + isen(\vartheta_1 - \vartheta_2)].$$

Perciò il **quoziente di due numeri complessi** z_1 **e** z_2**, se** $z \neq 0$**, è un numero complesso che ha come modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.**

POTENZA N- ESIMA DI UN NUMERO COMPLESSO

Possiamo ora, sfruttando la formula della moltiplicazione, dimostrare per induzione la formula per calcolare la potenza con esponente intero positivo di un numero complesso, detta formula di De Moivre.

Se $z = \rho(\cos\,\vartheta + isen\,\vartheta)$ un numero complesso. Si dimostra per induzione che la sua potenza ennesima è data da :

$$z^n = \rho^n(\cos\, n\vartheta + isen\,\vartheta)$$

relazione che prende il nome di **formula di Moivre**.
Procediamo per induzione:
a. la formula di De Moivre è vera per n=1:
$z = \rho(\cos\vartheta + isen\vartheta)$;

b. se la formula è vera per un valore n, cioè se è

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i sen n\vartheta),$$

ne discende che essa è vera per il valore $n+1$ successivo a n. Infatti:

$$z^{n+1} = z \cdot z^n = \rho(\cos\vartheta + i sen\vartheta) \cdot \rho^n(\cos n\vartheta + i sen n\vartheta) =$$

$$= \rho^{n+1}(\cos\vartheta\cos n\vartheta - sen\vartheta sen n\vartheta + i sen\vartheta\cos n\vartheta + i\cos\vartheta sen n\vartheta) =$$

$$= \rho^{n+1}[\cos\vartheta\cos n\vartheta - sen\vartheta sen n\vartheta + i(sen\vartheta\cos n\vartheta + \cos\vartheta sen n\vartheta)],$$

e, poiché

$$\cos\vartheta\cos n\vartheta - sen\vartheta sen n\vartheta = \cos(n+1)\vartheta$$

e

$$sen\vartheta\cos n\vartheta + \cos\vartheta sen n\vartheta = sen(n+1)\vartheta,$$

ne segue che

$$z^{n+1} = \rho^{n+1}[\cos(n+1)\vartheta + i sen(n+1)\vartheta].$$

Allora, dal momento che la formula è vera per $n=1$, sarà di conseguenza vera per $n=2$, ma allora sarà vera per $n=3$ e così via; si scopre quindi che è vera per tutti gli n interi positivi.

Si propone il seguente esempio.

<u>*Esempio*</u>. Calcolare $(1-i\sqrt{3})^3$.

Risoluzione. Essendo

$a = 1,\ b = -\sqrt{3},$ si ha:

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2, \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

pertanto, posto $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$ si ha

$$(1-i\sqrt{3})^3 = 2^3\left\{\cos\left[3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] + i\sin\left[3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\} = 8[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)] = -8.$$

<u>RADICI N- ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO</u>

Dato il numero complesso

$$z = \rho(\cos\vartheta + i sen\vartheta),$$

si dice radice ennesima di z ogni numero complesso w tale che risulti:

$$w^n = z.$$

Siano ρ_1 e ϑ_1 il modulo e l'anomalia, incogniti, di w, radice n-esima di z:

$$w = \rho_1(\cos\theta_1 + i sen\theta_1).$$

Deve risultare, per la formula di De Moivre

$$w^n = \rho_1^n[\cos n\vartheta_1 + i sen n\vartheta_1] = \rho(\cos\vartheta + i sen\vartheta)$$

da cui:

$$\rho_1^n = \rho, \quad \text{cioè} \quad \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$n\vartheta_1 = \vartheta + 2k\pi, \quad \text{cioè} \quad \theta_1 = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

con k intero**.**

Pertanto si ha:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{con } k=1,2,3,\ldots n\text{-}1$$

Si propone il seguente esempio.

Esempio. Calcolare le radici quarte di: $z = 2 + i2\sqrt{3}$.

Risoluzione. Poiché

$\rho = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ e $\vartheta = \frac{\pi}{3}$,

si ha:

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right),$$

da cui:

$$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + isen\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4} + isen\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right).$$

Le quattro radici di z si ottengono dalla relazione precedente ponendo successivamente k uguale a $0, 1, 2, 3$. Quindi si ottiene:

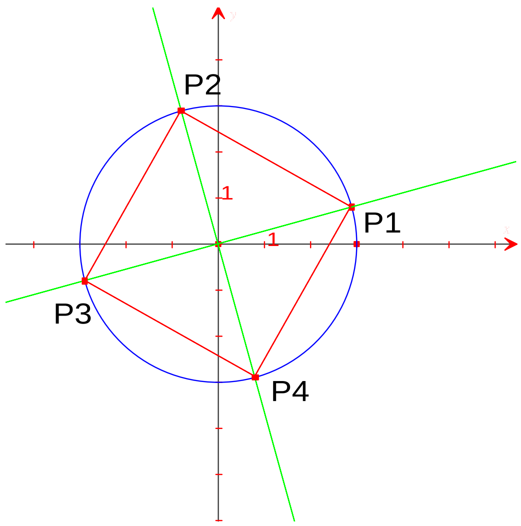
$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + isen\frac{\pi}{12}\right),$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} + isen\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + isen\frac{7}{12}\pi\right),$$

$$w_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4} + isen\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = w_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + isen\frac{13}{12}\pi\right),$$

$$w_4 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{4} + isen\, \frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{4} \right) = w_4 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{19}{12}\pi + isen\, \frac{19}{12}\pi \right)$$

Nella figura seguente sono riportati i punti P_1, P_2, P_3, P_4 immagini di w_1, w_2, w_3, w_4; tali punti sono i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di centro O e raggio uguale a $\sqrt{2}$.



RADICI N-ESIME DELL'UNITA'

Nel caso particolare in cui $z = 1$, e quindi $\rho = 1$ e $\vartheta = 0$, la formula precedente fornisce le radici n-esime dell'unità, secondo la formula:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + isen\, \frac{2k\pi}{n}),$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$.

I punti che rappresentano le radici n-esime dell'unità sono i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nelle circonferenza che ha per centro l'origine e raggio uguale a 1, con uno dei vertici nel punto $A(1, 0)$.

7.4.7 Forma esponenziale di un numero complesso

Detta e la costante di Nepero:

$$e = 2.71828\ldots,$$

si definisce per ogni numero complesso $z = x + iy$ l'esponenziale complesso e^{x+iy} come il numero complesso

$$w = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Se $y = 0$, cioè se il numero complesso z è un numero reale, poiché $cos0 = 1$ e $sen0 = 0$, si ottiene:

$$e^{x+i0} = e^x \cos 0 + ie^x \sin 0 = e^x.$$

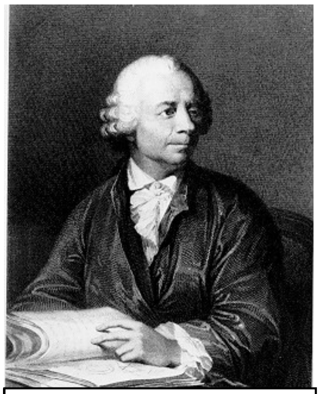
Calcoliamo il modulo di $w = e^{x+iy}$:

$$|w|^2 = (e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x}.$$

e quindi:

$$|w| = e^x.$$

UNA BELLA UGUAGLIANZA


Leonhard Euler (1707-1783)

A Eulero si devono le formule che permettono di scrivere i numeri complessi in forma esponenziale. A lui si deve anche l'introduzione dei tre simboli: e, i e π.
E' opportuno ricordare una delle più celebri equazioni della matematica, trovata anch'essa da Eulero, che stabilisce una relazione tra le cinque più importanti costanti della matematica (0, 1, π, e, i):

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

7.4.8 Risoluzione di equazioni algebriche nel campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra

In **R** esistono equazioni algebriche di secondo grado che non ammettono nessuna soluzione reale e un'equazione algebrica di grado n ha al più n radici (distinte o meno), mentre in **C** tutte le equazioni algebriche di grado n ammettono n radici.

Si consideri l'equazione generica di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

essa, moltiplicando ambo i membri per 4 a ed aggiungendo ad ambo i membri b^2, può scriversi nella forma equivalente:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Nell'u.d. 3, è stato dimostrato che, data l'equazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx + c = 0$, detto $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminante dell'equazione), si ha, se $\Delta \geq 0$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \qquad [7\text{-}1]$$

Nell'insieme dei numeri reali si poteva procedere solo se era $\Delta \geq 0$ e quindi, solo in questo caso, si poteva affermare che le radici dell'equazione esistevano. Ma ora, con l'introduzione dei numeri immaginari, anche nel caso $\Delta < 0$ l'operazione $\sqrt{\Delta}$ risulta possibile. Infatti, se è $\Delta < 0$ sarà $-\Delta > 0$ e, pertanto, si avrà

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-(-\Delta)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-\Delta} = \pm i\sqrt{\Delta}$$

dove, essendo qui $-\Delta > 0$, $\sqrt{-\Delta}$ è un numero reale.

I numeri espressi dalla [7-1] sono quindi, in tal caso due numeri complessi coniugati dati da $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e precisamente

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

In generale vale il seguente teorema:

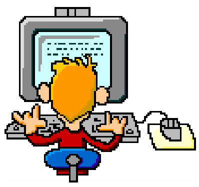
Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio di grado n in **C** ha n radici (ognuna contata con la propria molteplicità)

Equivalentemente si dice che **C** è un campo algebricamente chiuso.

7.4.9 Applicazioni dei numeri complessi attraverso l'utilizzo del software Derive

UTILIZZO DEL SOFTWARE DERIVE



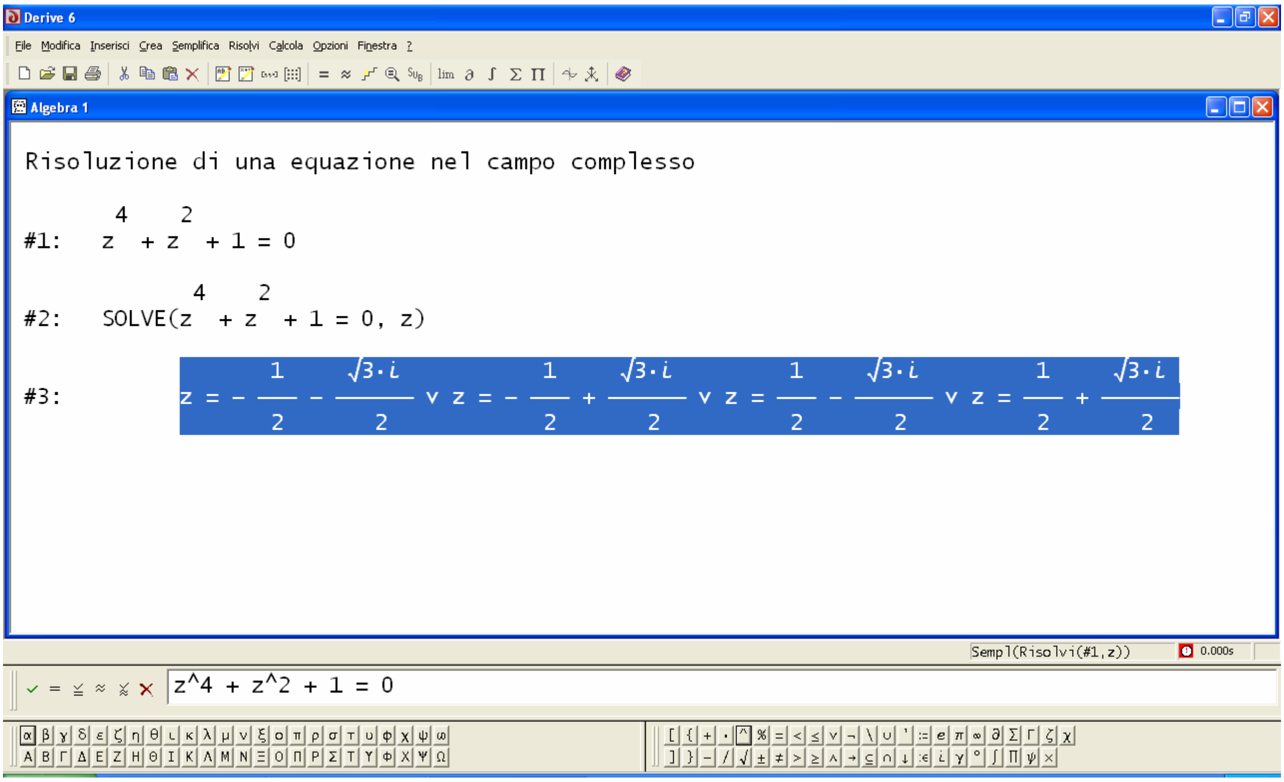
Nota didattica. Questo esercizio, come del resto anche gli altri esercizi affrontati in classe con gli alunni, potrebbero essere risolti anche in laboratorio attraverso l'uso del software Derive. Lo studente dopo aver impostato l'equazione e risolta "carta e penna", potrebbe verificare l'esattezza del risultato facendola risolvere al programma.

Esercizio 1. Risolviamo l'equazione nel campo complesso

$$z^4 + z^2 + 1 = 0$$

Risoluzione

- Utilizziamo il comando o il bottone ***Inserisci_Oggetto testo*** (icona 4) per dare un titolo al lavoro. Esso apre un riquadro nella zona algebrica (riquadro seguente) all'interno del quale scriviamo Risoluzione di una equazione nel campo complesso.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $z\char`^4 + z\char`^2 + 1 = 0$.
- Con ***INVIO*** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.



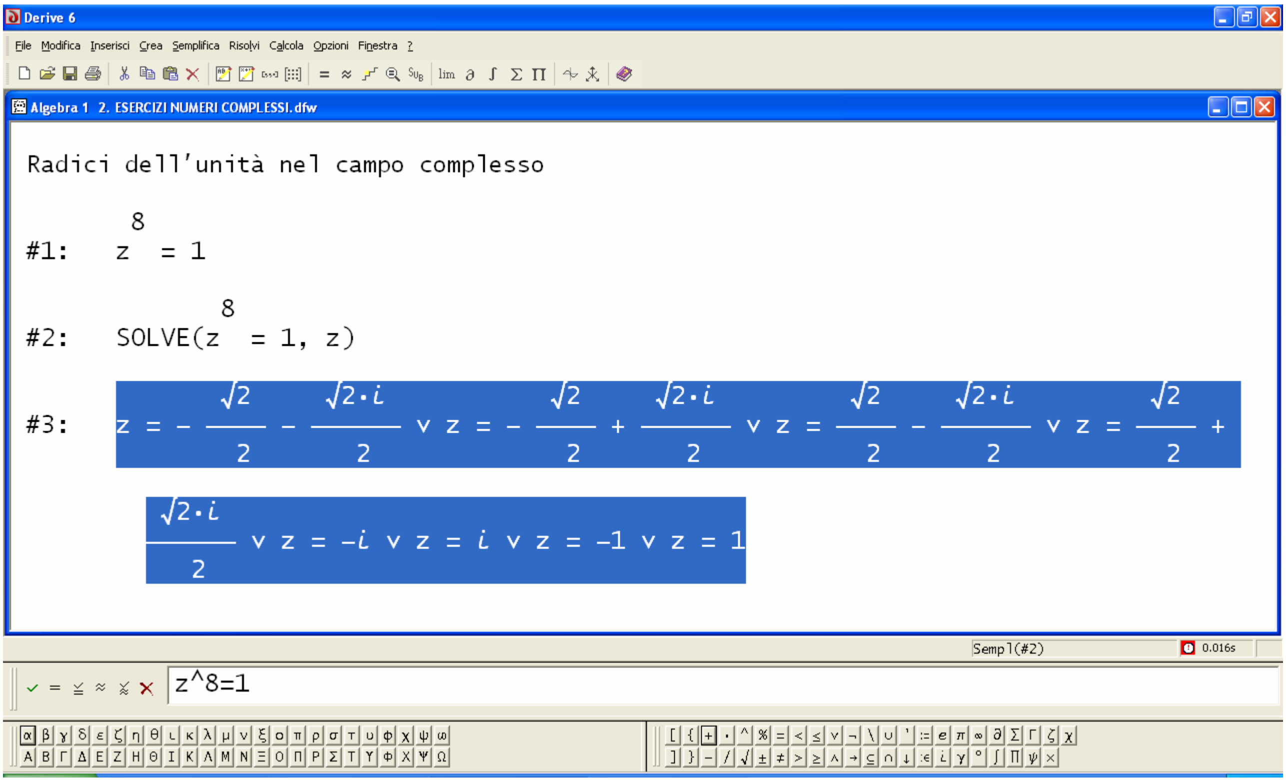
- Usiamo ***Risolvi_Espressione***, che apre una finestra di dialogo, nella quale *Derive* propone di risolvere l'equazione contenuta nella #1, di considerare la x come variabile e di usare il metodo algebrico.
- Se confermiamo le proposte di *Derive* con un clic su ***Risolvi***, vediamo comparire l'impostazione delle soluzioni nella #2 e le radici dell'equazione #3.

Esercizio 2. Determinare le radici n-esime dell'unità

$$z^8 = 1$$

Risoluzione

- Utilizziamo il comando o il bottone ***Inserisci_Oggetto testo*** (icona 4) per dare un titolo al lavoro. Esso apre un riquadro nella zona algebrica (riquadro seguente) all'interno del quale scriviamo Radici dell'unità nel campo complesso.
- Con ***Crea_Espressione*** attiviamo la riga di editazione delle espressioni, in essa scriviamo $z\verb|^|8 = 1$.
- Con ***INVIO*** la immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica.



7.4.10 Tempi dell'intervento didattico

Per svolgere questa unità didattica si prevedono i seguenti tempi:

Accertamento dei prerequisiti:	1h
Lezioni frontali e svolgimento degli esercizi:	15h
Attività di laboratorio:	1h
Verifica sommativa:	2h
Consegna e correzione verifica sommativa:	1h

Per un totale di 20 ore che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa quattro settimane di lavoro. La previsione è da intendersi elastica, perché occorre tener conto dell'andamento e dei processi di apprendimento della classe.
L'accertamento dei prerequisiti dell'unità didattica le disequazioni di secondo grado si intende effettuato con l'accertamento dei prerequisiti dell'unità didattica precedente e con la relativa verifica sommativa.

7.4.11 Verifica sommativa U.D. 5

1. Dati i numeri complessi z_1 e z_2, calcola $\bar{z}_1$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

$z_1 = 4 + 3i \qquad z_2 = -5 + 2i$

$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = i$

2. Risolvi la seguente equazione a coefficienti complessi:

$$z^2 + \frac{(1+i)^2 - 11i}{3} z - 2 = 0$$

3. Scrivi in forma esponenziale il seguente numero complesso:

$$\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

4. I vertici A, B e C di un triangolo sono rappresentati dai numeri complessi $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 4 + 2i$ e $z_3 = 1 + 6i$. Dimostrare che il triangolo ABC è isoscele e determinare il perimetro e l'area.

Griglia di valutazione per la verifica sommativa (compilata nelle sue parti)

	CONOSCENZA		COMPETENZA		CAPACITA'	
	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI	TOTALE	OTTENUTI
ESERCIZIO 1	3		3		3	
ESERCIZIO 2	4		4		4	
ESERCIZIO 3	3		3		3	
ESERCIZIO 4	4		4		4	
TOTALE	12		12		12	

BIBLIOGRAFIA

Testi scolastici di riferimento

M. Bergamini – A. Trifone, Matematica modulare 1, Zanichelli, 1998.

- M. Bergamini - A. Trifone, A. Zagnoli, Corso base di matematica 2, Zanichelli, 2002.

E' un testo che propone la materia in un modo meno formale del solito ed è accattivante per lo studente. Molto ricco di figure e note storiche.

- M. Bergamini - A. Trifone, G. Barozzi, Manuale blu di matematica modulo S + L, Zanichelli, 2005.

- M. Bergamini - A. Trifone, G. Barozzi, Manuale blu di matematica modulo O + Q, Zanichelli, 2005.

La novità, suddiviso in moduli e non più in "anni". La teoria è ben sviluppata, gli esercizi sono presentati in ordine di difficoltà, si trovano molti spunti per il laboratorio di matematica.

- P. Boieri, Laboratorio informatico per la Matematica, Loescher 2003.

- G. Cariani – M. Fico, Matematica con… 1 Algebra, Loescher, Torino, 2003.

- G. Cariani – M. Fico, Matematica con… 2 Algebra, Loescher, Torino, 2003.

Apprezzabile l'eserciziario in quanto è abbastanza completo e presenta esercizi interessanti e di ogni grado di difficoltà; la teoria sembra invece un po' troppo schematica.

- A. De Marco – R. Leso, Algebra con introduzione all'algebra moderna volume 1-2, Poseidonia, 1982.

- N. Dodero - P. Baroncini - R. Manfredi, Elementi di matematica 1-2, Ghisetti e Corvi editore, Milano 1995.

- N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, Itinerari di matematica., Ghisetti e Corvi, Milano 2000.

E' nel complesso chiaro, ricco di esercizi esemplificativi che si ritrovano fra un teorema e l'altro.

- W. Maraschini - M. Palma, Multi ForMat moduli per la formazione matematica nel biennio 5 Equazioni e sistemi di I grado, Paravia, Torino, 2000.

- W. Maraschini - M. Palma, Multi ForMat moduli per la formazione matematica nel biennio 6BIS Equazioni e funzioni di secondo grado, Paravia, Torino, 2000.

- W. Maraschini - M. Palma, ForMat, Ele 1 la formazione matematica per il triennio indirizzo elettrotecnico ed elettronico, Paravia, Torino, 1996.

Buono sia dal punto di vista della teoria che degli esercizi; è utile anche per la stesura del modulo didattico in quanto, all'inizio di ogni argomento espone brevemente gli argomenti e gli obiettivi proposti.

L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, Matematica uno- due, Etas libri, Milano 2004.

Testi specialistici di riferimento

- S. Baruk, Dizionario di Matematica Elementare, Zanichelli, Bologna, 1998.

- D'Amore B., Elementi di Didattica della Matematica, Pitagora, Bologna, 1999.

Ottimo testo, preciso e chiaro.

- Paola D., Un cittadino matematicamente accorto, Iter n°11, 25-29, 2001.

Sitogafia

Programmi di matematica di ordinamento per i licei

http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/scientifico.html

http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/classico.html

Programmi di matematica del PNI

http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/index.html

Programmi di matematica elaborati dalla Commissione Brocca

http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/programmi_brocca.htm

Curricolo di matematica proposto dall'UMI - Unione Matematica Italiana (2001- 2004)

http://umi.dm.unibo.it/italiano/Didattica/didattica.html

I numeri complessi : un percorso didattico tra algebra e geometria, Luigi Tomasi, L.S "Galilei" di Adria (RO), SSIS Università di Ferrara.

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/APPUNTI/TESTI/Dic03/APPUNTI.HTM

http://www.matematica.it/tomasi/

http://www.matematica.it/tomasi/lab-did/index.html

Ottimo sito. Se ne consiglia la consultazione sia a docenti che ad alunni.

http://www.itg-rondani.it/dida/Matem/ipermonica/retta_par/mappa/mappa.htm

Moltissime le applicazioni con Cabri e Derive: vengono fornite molte istruzioni, esercizi, costruzioni e disegni.

http://www.liceofoscarini.it/fisica94/miotti.phtml

Indicazioni chiare e puntuali sia per la parte matematica che per quella fisica.