INDICE

TRIGONOMETRIA

In questa unità didattica viene presentata la trigonometria, quella parte della matematica che si occupa delle relazioni che intercorrono tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque.

1 . PREMESSE

1.1 Uno sguardo ai programmi

Programmi Brocca: in riferimento allo studio della trigonometria, i programmi Brocca per il liceo scientifico prevedono la dimostrazione dei teoremi dei seni e del coseno, la risoluzione dei triangoli al 3 anno, mentre lo studio delle funzioni circolari e delle relative formule di addizione e sue principali conseguenze è rimandato al 4^. Nei commenti si trova***:***

Lo studio della trigonometria, ridotto all'essenziale, è finalizzato alla risoluzione dei triangoli; esso risponde anche alle necessità proprie delle altre scienze.

Programmi ministeriali: lo studio delle funzioni goniometriche, curve dei seni e delle tangenti, formule per l'addizione la sottrazione, la duplicazione, la bisezione degli argomenti, semplici equazioni goniometriche, risoluzione dei triangoli rettilinei, sono previsti nella classe IV.

Riforma Moratti: questi programmi invece, vedono lo studio della trigonometria nel secondo biennio con: "***Seno, coseno e tangente di un angolo. Proprietà fondamentali. Funzioni seno, coseno e tangente.***"

La proposta dell'UMI: lo studio della trigonometria è previsto nel secondo biennio, quando gli studenti conoscono gli elementi fondamentali di geometria piana, in particolare le similitudini. Per quanto riguarda le conoscenze previste , esse sono così enunciate:

- **Seno, coseno, e tangente di un angolo**
- **Coordinate polari**
- **Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo**

Le abilità interessate sono:

- **Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli.**
- **Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari(Astronomia, Fisica, Topografia, Geografia della Terra).**

Piano Nazionale per l'informatica: lo studio della trigonometria è previsto nel tema 1:"***coseno e seno degli angoli convessi. Relazione tra lati ed angoli nei triangoli rettangoli"*** da svolgersi nella

classe terza. Lo studio delle funzioni goniometriche, invece, è previsto nel tema 3 :”***Funzioni circolari. Formule di addizione e principali conseguenze***”. da svolgersi sempre nella classe terza.
Da notare: funzioni circolari e formule varie relative sono nel tema 3.
L'argomento trigonometria è comunque un argomento trasversale. Al liceo classico sono previsti i teoremi del seno e del coseno, che vanno però visti come teoremi geometrici: la loro trattazione non è finalizzata alla risoluzione dei triangoli.

Osservazione

La collocazione degli argomenti legati alla trigonometria all'interno del programma mostra bene la connotazione di trasversalità. Infatti la definizione geometrica di seno e di coseno (riportata per il liceo classico, per il quale non è prevista nel biennio) e la risoluzione dei triangoli (anche solo rettangoli) sono argomenti inseriti nel tema Geometria, mentre lo studio delle funzioni circolari, insieme alle formule di addizione e alle loro principali conseguenze è collocato all'interno del tema Funzioni ed equazioni.
Questo aspetto si riflette anche nella sua collocazione nell'itinerario didattico, per il fatto che ci sono alcuni contenuti che nel tempo vengono ripresi e riformulati, o tra loro collegati per mezzo di concetti tipicamente goniometrici, è didatticamente molto significativo.

La risoluzione dei triangoli

A partire dai primi due criteri di uguaglianza dei triangoli, già noti agli studenti, ci si pone il problema di ottenere quegli elementi che non sono esplicitamente assegnati ma che sono certamente determinabili in modo unico.
Si arriva in tal modo alla dimostrazione dei teoremi del coseno e dei seni, che sono subito utilizzati in esercizi applicativi.

1.2 Cenni storici

COME NASCE L'INTERESSE PER LA TRIGONOMETRIA?

Goniometria e **trigonometria** sono due termini che derivano dal greco e significano rispettivamente *misura degli angoli* e *misura dei triangoli*. Le origini della goniometria e della trigonometria sono molto lontane, risalgono a qualche secolo prima di Cristo e sono inizialmente ispirate da esigenze legate alla risoluzione di vari problemi pratici di geodesia, navigazione, astronomia, problemi che in genere richiedono di risalire alla determinazione di angolazioni e distanze non direttamente misurabili. A partire dal XVI^ secolo la trigonometria si sviluppa e si afferma anche come disciplina autonoma, raggiungendo quel rigore teorico e quell'aspetto formale e simbolico caratteristici del linguaggio matematico. Nel frattempo sempre più numerose diventano le implicazioni dei concetti goniometrici con le applicazioni della matematica nel campo scientifico e tecnologico; ben pochi sono infatti i rami della fisica sia classica che moderna, che non contemplano per la loro trattazione il calcolo goniometrico e trigonometrico.

Rapido excursus storico sulle origini della trigonometria

Trigonometria: dal greco τριγονον triangolo e μετρον misura.

Questo vocabolo è usato per la prima volta nel 1595 (appare nel titolo di un'opera del matematico ed astronomo tedesco Bartolomeo Pitisco, vissuto dal 1561 al 1613). La trigonometria ha tuttavia un'origine molto più antica nella storia dell'uomo. Inizialmente ispirata ad esigenze legate a problemi di astronomia, si sviluppa per diversi secoli proprio come tecnica di calcolo di supporto alle ricerche nel campo di questa scienza. Nasce attorno ai secoli III^ e II^ a.C. (Aristarco di Samo, Ipparco di Nicea, Menelao di Alessandria) e si presenta all'inizio come metodo di risoluzione di triangoli sferici, cioè di triangoli giacenti su una superficie sferica, i cui lati sono, invece che segmenti di un piano, archi di cerchi massimi(casi importanti in cui intervengono questi triangoli si hanno quando i vertici sono punti della superficie terrestre o corpi celesti, come il sole, i pianeti e le stelle). Il merito di aver poi sviluppato la trigonometria come scienza autonoma va al matematico francese ***F. Viéte*** (1540 – 1603). Successivi apporti a questo tipo di sviluppo si devono a Nepero, Cavalieri, Bernoulli, Briggs, Eulero, e altri ancora. L' opera più antica che può veramente considerarsi come un trattato organico di trigonometria è l'***Almagesto*** dell'astronomo C. Tolomeo (100 – 178). Nell'anno 827 la Composizione è tradotta dagli arabi con il titolo Almagesto e successivamente in latino. Tale opera rappresenta per diversi secoli l'unica fonte per lo studio della trigonometria. La trigonometria di Tolomeo è però diversa dalla nostra, in essa ad esempio non compaiono le ordinarie funzioni goniometriche, ma un'unica funzione: la *corda di un arco*, (o di un angolo). Non è tuttavia difficile, passare dal concetto di corda di un arco di Tolomeo a quello di seno di un angolo. Le *tavole delle corde* dei greci diventano così le nostre tavole dei seni, e i teoremi dell'*Almagesto* i teoremi della trigonometria attuali.

1.3 **Destinatari**

Questa unità didattica è rivolta a studenti del 4° anno del Liceo Scientifico tradizionale. Le ore settimanali previste sono 3.

1.4 Problematiche didattico – metodologiche

Questa parte della trigonometria, che a mio parere è la più interessante, arriva in genere successivamente a quella, seppur necessaria, più nozionistica e spesso un po' "noiosa", riguardante le funzioni e le formule goniometriche. Questo argomento può essere quindi utilizzato per far vedere finalmente ai ragazzi che tutte quelle formule e quelle nozioni che hanno dovuto faticosamente imparare possono essere applicate per risolvere una serie di problemi molto pratici e vicini alla realtà. L'impostazione da privilegiare, secondo il mio parere, è quella più dinamica dell'analisi dei casi, favorendo anche il lavoro di gruppo.

2^ PRESENTAZIONE DEI CONTENUTI

2.1 Obiettivi generali

- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dell'unità didattica.
- Comprendere le finalità e acquisire i metodi per la risoluzione di problemi legati alla misura degli angoli.
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico specifico della matematica.

2.2 Obiettivi trasversali

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative.

2.3 Obiettivi specifici

Conoscenze

- Conoscere le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo utilizzando le funzioni seno, coseno, tangente.
- Conoscere il teorema della corda.
- Conoscere le relazioni tra i lati e gli angoli di triangoli qualunque.
- Conoscere il teorema dei seni
- Conoscere il teorema delle proiezioni.
- Conoscere il teorema del coseno.

Abilità

- Saper risolvere i triangoli rettangoli.
- Saper risolvere i triangoli qualunque
- Saper risolvere i problemi di trigonometria, usando i teoremi principali e utilizzando equazioni goniometriche.
- Saper risolvere i problemi in cui è necessario utilizzare le applicazioni della trigonometria alla geometria analitica e alla geometria euclidea.

2.4 Contenuti

- Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo in funzione delle funzioni seno, coseno, tangente.
- Risoluzione di un triangolo rettangolo.
- La cicloide
- Relazioni tra gli elementi di un triangolo qualunque
- Teorema della corda.
- Teorema dei seni.
- Teorema delle proiezioni.
- Teorema del coseno.
- Risoluzione di un triangolo qualunque.
- Risoluzione di problemi di trigonometria.
- Applicazioni della trigonometria alla geometria euclidea.

- Applicazioni alla fisica
- Applicazioni topografiche
- Problemi risolubili con metodi goniometrici

2.4 Prerequisiti

- Funzioni goniometriche;
- Relazioni tra le funzioni goniometriche;
- Formule goniometriche.
- Equazioni e disequazioni goniometriche.
- Principali teoremi di Geometria Euclidea
- Proprietà fondamentali delle figure geometriche.

2.5 Metodologie didattiche

Per un produttivo intervento didattico, questo è suddiviso in tre principali fasi, definiamo per ciascuna di esse i principali attori. Immaginiamo di aver suddiviso la classe in gruppi di lavoro (la scelta dei gruppi è pilotata con discrezione dall'insegnante al fine di creare gruppi abbastanza eterogenei):

1^ fase: in questa fase l'insegnante ha un ruolo molto delicato; egli deve riuscire a:

- evitare che i suoi interventi chiudano il problema;
- evitare che i suoi interventi sopprimano l'autonomia dell'alunno;
- incoraggiare la ricerca;
- non classificare un risultato in 'giusto' o 'sbagliato', ma far capire agli allievi che qualunque tentativo può farli progredire nella loro ricerca;
- non stabilire a priori che cosa si può fare e che cosa non si può fare;
- interagire con i vari gruppi senza che i suoi interventi orientino in modo determinante l'attività degli studenti.

2^ fase questa fase è collettiva, in essa sono presentate e discusse le decisioni e le soluzioni di ogni gruppo. Questa discussione di bilancio consiste nell'interazione del gruppo-classe orchestrata dall'insegnante.

3^ fase l'ultima fase viene svolta a casa singolarmente dagli studenti, che consegnano poi all'insegnante il lavoro svolto.

2.6 Materiali e strumenti utilizzati

Il software ***Cabri*** è usato come strumento adatto ad un passaggio intermedio relativo all'apprendimento dei concetti geometrici, cioè a quella fase di sperimentazione concettuale che sta fra la definizione e la dimostrazione dei teoremi. E' usato anche per impostare e risolvere graficamente i problemi.

Il software ***Derive*** è utilizzato per tracciare il grafico di funzioni goniometriche ed altre che si incontrano durante la risoluzione dei problemi.

Infine la ***Storia della Matematica*** come strumento metodologico per inquadrare da un punto di vista storico le nozioni e i concetti introdotti, con brevi accenni, affinché la matematica non sembri una scienza data una volta per tutte ma frutto di una evoluzione.

Per quanto riguarda i sussidi didattici, si utilizzeranno: la lavagna tradizionale (e quindi anche gessi e cimosa), il libro di testo, la calcolatrice scientifica.

2.7 Controllo dell'Apprendimento:

Si ritiene opportuno controllare l'apprendimento degli studenti attraverso due tipi di verifica:

<u>verifiche formative:</u> effettuate anche giorno per giorno attraverso il controllo dei quaderni, la risoluzione di esercizi in classe, per acquisire maggiori capacità di maneggiare i concetti appena spiegati e discussioni in classe per dar modo agli studenti di chiarire i loro dubbi;

<u>verifiche sommative</u> suddivise in:

- ✓ scritta che si effettuerà alla fine di ogni unità didattica e che permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti;
- ✓ orale per controllare il livello di apprendimento e di studio;

2.8 Valutazioni:

Le interrogazioni orali saranno tese ad individuare se l'alunno possiede una conoscenza approfondita e consapevole, valutando anche il modo di argomentare e l'organicità dell'espressione. Negli elaborati scritti invece verrà valutata soprattutto la capacità di applicare le conoscenze per risolvere quesiti di vario genere attraverso l'uso di tecniche, metodi e procedure specifiche, nonché di abilità logiche. Tali elaborati verranno valutati attraverso l'attribuzione ad ogni esercizio di un punteggio. La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia i livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze, abilità per svolgerli. Nell'attribuire il punteggio si terrà conto di:

- competenze e capacità logiche,
- correttezza e completezza nella risoluzione,
- conoscenze specifiche,
- chiarezza e ordine nel processo seguito.

2.9 Recupero:

Alla fine di ciascuna verifica, se saranno riscontrati casi di insufficienza, si organizzeranno attività di recupero finalizzato a colmare le lacune riscontrate. Tali attività potranno essere effettuate nei seguenti modi:

<u>lavoro a casa</u>: ripasso, esercizi, costruzioni di sintesi e schemi su contenuti e procedimenti;

<u>lavoro in classe</u>: si proporranno nuovi esercizi e schede guidate. Si potrà istituire inoltre uno sportello per gli allievi, in prossimità delle verifiche sommative.

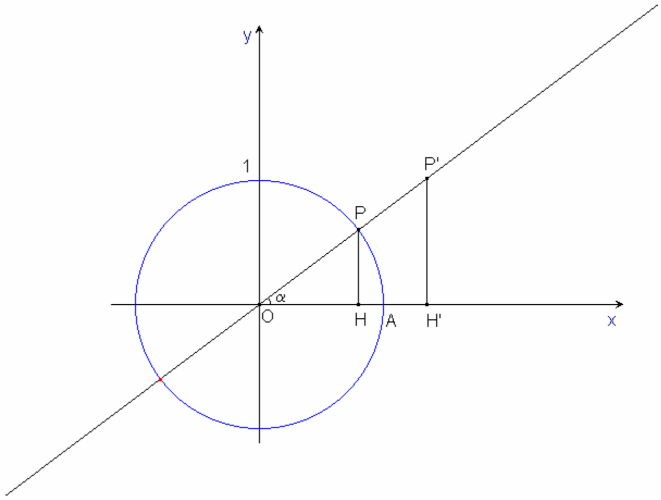
2.10 Tempi previsti

Accertamento dei prerequisiti	1 h
Teoremi relativi al triangolo rettangolo	1h
Risoluzione del triangolo rettangolo	1h
Cicloide	2 h
Teorema della corda, seni, proiezioni,coseno	1h
Risoluzione dei triangoli qualunque e applicazioni varie	9h
Verifica formativa	1h
Verifica sommativa	2h
Consegna e correzione verifica	1h
Totale	19h

2.11 Sviluppo dei contenuti

RELAZIONI TRA I LATI E GLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO IN FUNZIONE DELLE FUNZIONI SENO, COSENO, TANGENTE.

Si suppone che siano state definite le funzioni seno, coseno, e tangente utilizzando la circonferenza goniometrica, osservando che queste funzioni dipendono esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo α individuato da un punto P che si muove in verso antiorario sulla circonferenza, a partire dal punto (1,0). Le funzioni goniometriche sono state definite come le coordinate di **P**. Ci proponiamo ora di studiare le relazioni esistenti tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo utilizzando proprio le funzioni seno, coseno e tangente.



Consideriamo, sulla circonferenza goniometrica, il triangolo PHO individuato dall'origine O, da un punto P del primo quadrante, appartenente alla circonferenza e dalla sua proiezione H sull'asse delle ascisse.

Per le definizioni di seno e coseno possiamo scrivere:

$$sen\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} \text{ e } \cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}}$$

dal momento che il raggio OP ha lunghezza 1.

Se ora consideriamo sulla retta a cui appartiene il raggio OP, un punto P' e la sua proiezione H' sull'asse delle ascisse, otteniamo un triangolo OP'H' simile a OPH. Dalla similitudine di questi triangoli segue che:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'H'}}{\overline{OP'}} = sen\alpha \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OP'}} = \cos\alpha$$

NOTAZIONI: per comodità di notazione poniamo d'ora in poi OP' = a, P'H' = b, OH' = c

Quindi possiamo anche scrivere :

$$sen\alpha = \frac{b}{a}$$
$$\cos\alpha = \frac{c}{a}$$

In generale possiamo affermare che:

In un triangolo rettangolo il seno di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto ad esso opposto e l'ipotenusa; il coseno dello stesso angolo invece è uguale al rapporto tra il cateto ad esso adiacente e l'ipotenusa.

Essendo $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, abbiamo $tg\alpha = \dfrac{b}{c}$

Quindi :

In un triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente ad α .

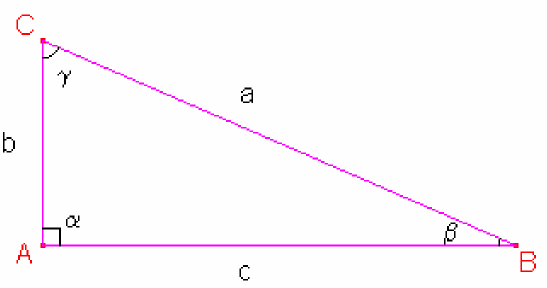
Essendo $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}$, abbiamo $ctg\alpha = \dfrac{c}{b}$.

Quindi:

In un triangolo rettangolo la cotangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto adiacente e quello opposto ad α.

RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Analizziamo ora le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo rettangolo (lati e angoli).
Indichiamo con A,B,C, i suoi vertici e con a,b,c, le misure dei lati rispettivamente opposti a tali vertici e con α, β, γ le ampiezze degli angoli di vertici rispettivamente A,B,C.



Tenendo presente quanto visto finora possiamo dire che:

$sen\gamma = c/a$, $\cos\gamma = b/a$, $tg\gamma = c/b$, $ctg\gamma = b/c$.

e anche:

$sen\beta = b/a$, $\cos\beta = c/a$, $tg\beta = b/c$, $ctg\beta = c/b$.

Da queste relazioni si ricavano ancora:

$c = a\ \text{sen}\gamma$, $b = a \cos\gamma$, $c = b\ \text{tg}\gamma$, $b = c\ \text{ctg}\gamma$

$b = a\ \text{sen}\beta$, $c = a \cos\beta$, $b = \text{ctg}\beta$, $c = b\ \text{ctg}\beta$.

Ora, tenendo presente il significato convenzionale attribuito ad *a, b, c,* e ad α, β, γ possiamo generalizzare le uguaglianze trovate ed interpretarle come teoremi relativi al triangolo rettangolo:

- *In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso.*
- *In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto stesso.*
- *In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo.*
- *In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella del prodotto dell'altro cateto per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo*

Naturalmente di questi teoremi valgono anche gli "inversi"; dal primo per esempio possiamo dedurre che:

- *In ogni triangolo rettangolo la misura dell'ipotenusa è uguale al rapporto tra la misura di un cateto e il seno dell'angolo opposto ad esso.*
- *In ogni triangolo rettangolo il seno di un angolo acuto è uguale al rapporto tra le misure del cateto opposto e dell'ipotenusa.*

Analogamente per tutti gli altri…

Ci occuperemo ora della risoluzione vera e propria di un triangolo rettangolo.

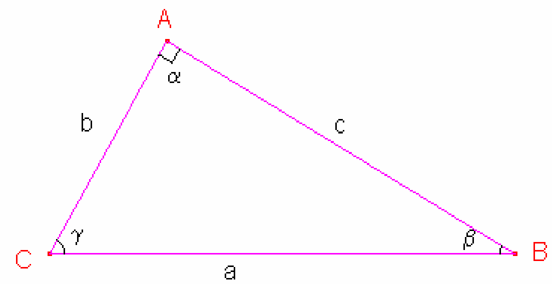
Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare tutti i suoi elementi essendo noti alcuni di essi; per fare ciò, alla luce di quanto appena visto, è sufficiente conoscere oltre all'angolo retto altri due elementi, che non siano entrambi angoli. Ricordiamo infatti che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \\ sen\beta = \dfrac{b}{a} \ldots oppure \ldots \cos\beta = \dfrac{c}{a} \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases}$$

Poiché questo è un sistema di quattro equazioni in sei incognite, è sufficiente conoscere due elementi per risolverlo. Di tali elementi almeno uno deve essere un lato poiché esistono infiniti triangoli con gli angoli uguali e le misure dei lati diverse.

Vediamo ora qualche esempio.

1.



Risolviamo il triangolo rettangolo ABC, note le misure dei cateti:

c = 5 cm

b = 3 cm

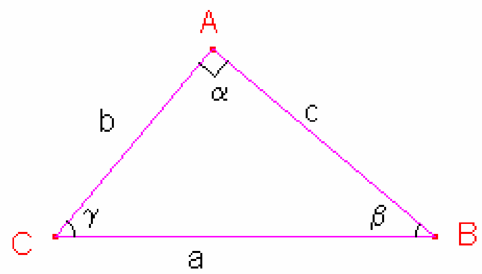
Poiché tgβ = b/c= 3/5 allora β= arctg 3/5≈31°.

Dall'uguaglianza $\gamma = 90° - \beta$ risulta $\gamma \approx 59°$.

Vale poi l'uguaglianza

$$sen\gamma = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{25}}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$ e quindi $$a = \frac{5}{5/\sqrt{34}} = \sqrt{34}$$

2.



Risolviamo il triangolo rettangolo ABC di cui si conoscono le misure di un cateto e di un angolo acuto.

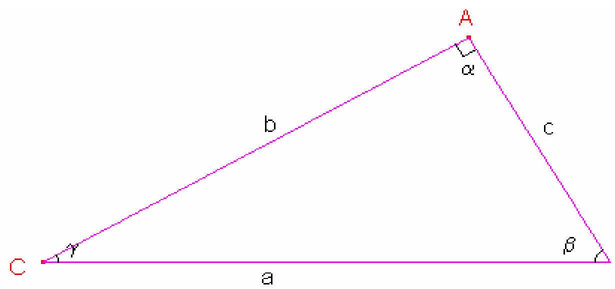
c = 4cm

γ = 50°

Abbiamo subito β = 40°; poiché c = a senγ, ricaviamo a = c/senγ ≈ 5.22cm

Infine $b = a\,sen\beta = a\,sen40° \cong 3.35cm$

3.



Risolviamo il triangolo rettangolo ABC conoscendo l'ipotenusa e un angolo acuto.

a = 10cm

β = 60°

Abbiamo subito γ = 30°.

Dalla relazione senβ = b/a otteniamo

$$b = a\ sen\beta = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

ricordando che tgγ = c/b, abbiamo $c = btg\gamma = 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 5$.

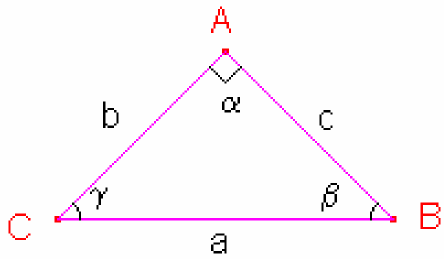
4.

Risolviamo il triangolo rettangolo ABC, conoscendo l'ipotenusa e un cateto.

a = 4cm

c = 2√2cm

dalla relazione sen γ = c/a troviamo



$$\gamma = arcsen\frac{c}{a} = arcsen\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°.$$

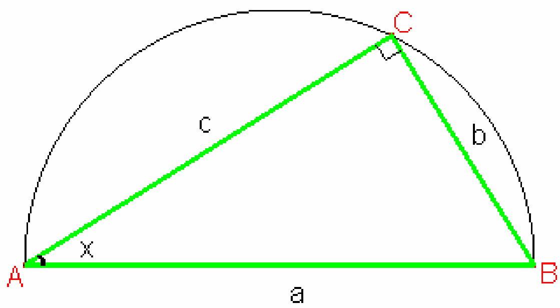
Da cui β = 45°.

A questo punto sembrerebbe superfluo calcolare l'altro cateto dato che è più che evidente che si tratta di un triangolo isoscele… tuttavia vogliamo comunque applicare le conoscenze di trigonometria appena acquisite e quindi calcoliamo b utilizzando la relazione senβ = b/a da cui b = a senβ = 2√2cm.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE E FISICHE. QUALCHE CONSIDERAZIONE SUL CALCOLO VETTORIALE.

La risoluzione del triangolo rettangolo trova numerose applicazioni sia nella geometria che nella fisica. Ne vediamo qualche esempio.

1. Nella semicirconferenza di diametro *AB* = *2r* è inscritto il triangolo ABC di perimetro r(2+√6). Risolvere il triangolo.



Indichiamo con *x* l'ampiezza dell'angolo di vertice A. e con a, b, c, rispettivamente i lati AB, BC, AC del triangolo. Per quanto visto prima possiamo scrivere le seguenti relazioni:

b = a senx = 2r senx, c = a cosx = 2r cosx.

Scriviamo allora l'equazione:

$$2r + 2rsenx + 2r\cos x = r\left(2+\sqrt{6}\right)$$

Dopo le opportune semplificazioni otteniamo:

$$2senx + 2\cos x = \sqrt{6}$$

Che è un’equazione lineare in seno e coseno del tipo

$$a\,senx + b\cos x = c\ .$$

Poniamo senx=Y , cosx=X, e risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2Y + 2X = \sqrt{6} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ (X+Y)^2 - 2XY = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \dfrac{3}{2} - 2XY = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ XY = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

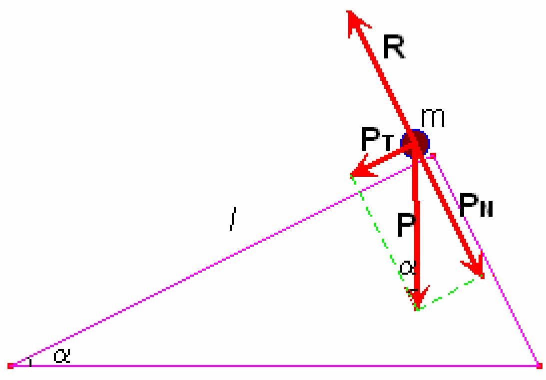
Il sistema è simmetrico per cui basta risolvere la seguente equazione:

$t^2 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}t + \dfrac{1}{4} = 0$ che dà come soluzioni: $t_{1,2} = \dfrac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

Dalla prima risulta $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ senx = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ che dà come soluzione x = 15°

Dalla seconda, invece, risulta: $\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ senx = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ che dà come soluzione x = 75°

2. In figura viene rappresentato un piano inclinato liscio, di lunghezza *l* e inclinazione α; sulla sua sommità è collocato un punto materiale di massa *m*. Si determini l’accelerazione con cui il corpo scivola lungo il piano, il lavoro compiuto dalla forza peso durante la caduta e la reazione vincolare del piano.



Nella figura è indicata la scomposizione della forza peso lungo le due direzioni tangente e normale al piano. Per le ormai note relazioni si ha.

$P_T = P\ sen\alpha$ e $P_N = P\cos\alpha$.

Il punto scivola lungo il piano sotto l’azione della componente P_T; la sua accelerazione è:

$$a = \frac{P_T}{m} = \frac{Psen\alpha}{m} = \frac{mgsen\alpha}{m} = gsen\alpha$$

Il lavoro compiuto dalla forza peso durante la caduta è:

$$L = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l} = Pl\cos(90° - \alpha) = Plsen\alpha = mglsen\alpha .$$

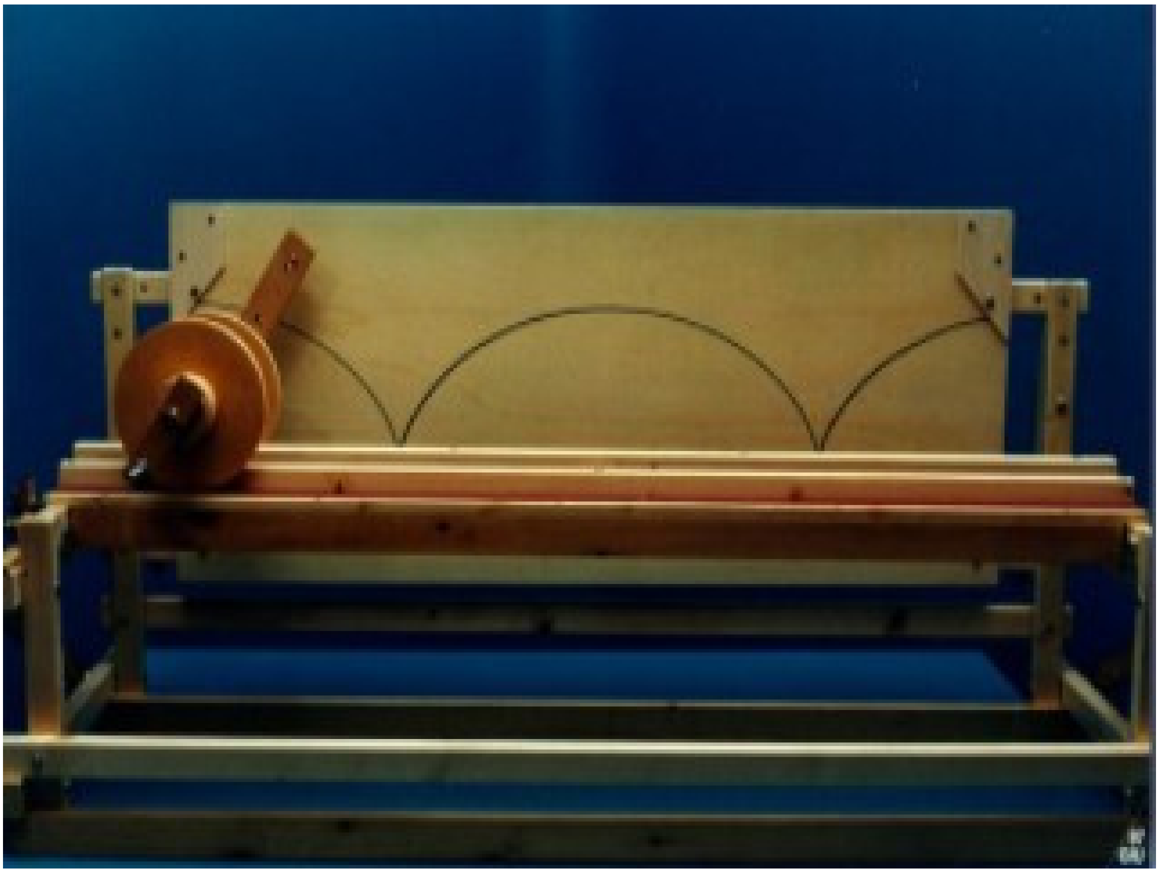
Si osservi che $l\,sen\alpha$ è uguale alla quota iniziale del corpo e che pertanto il lavoro compiuto durante la caduta lungo il piano è uguale a quello che verrebbe compiuto da un corpo in caduta libera, cioè lungo la direzione verticale.

La reazione vincolare del piano **R** ha la stessa direzione di $\mathbf{P_N}$, verso opposto e uguale intensità; quindi:

$$R = P_N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha .$$

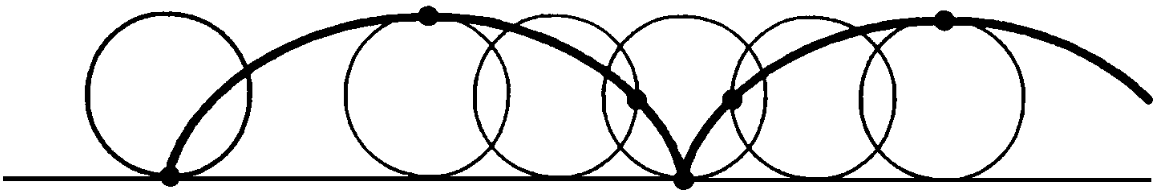
LA CICLOIDE

La figura seguente mostra una "macchina matematica" che permette di tracciare una cicloide.



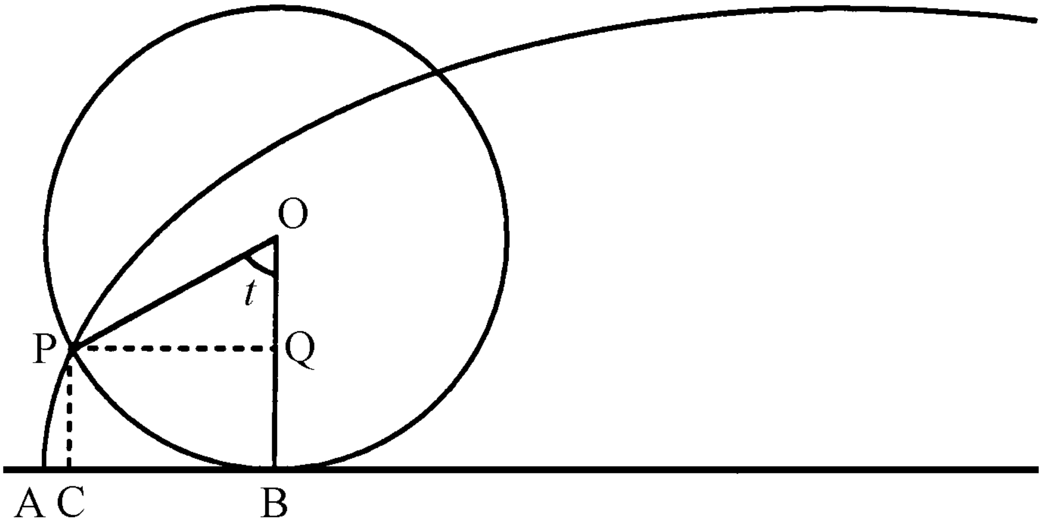
Quando un cerchio rotola senza strisciare sopra una retta fissa (base) ogni punto del suo piano descrive una linea che si dice cicloide: ordinaria se il punto generatore appartiene alla periferia del cerchio mobile; accorciata se è interno; allungata se è esterno. Il modello costruito consente di

tracciare ogni tipo di cicloide. Il suo "organo" fondamentale (cerchio mobile) è realizzato da due dischi uguali (di raggio r) accoppiati mediante un asse cilindrico prolungato all'esterno (verso il piano che deve sostenere la curva tracciata). La retta base è una rotaia inserita fra i due dischi.
All'asse cilindrico è saldata una sbarra rigida nella quale sono praticati tre fori (a distanza dal centro di rotazione dei dischi minore, uguale o maggiore di r) nei quali può essere inserito un tracciatore P.



Uno dei primi a prendere in considerazione questa curva fu Galileo, che nel 1640 scriveva: "Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi d'un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrare qualche passione, e parvemi in principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che lo descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta".
In effetti, l'area dello spazio delimitato dalla cicloide, contrariamente a quanto pensava Galileo, che probabilmente aveva fatto degli esperimenti pesando dei modelli, è proprio il triplo di quella del cerchio generatore, come dovevano dimostrare quasi contemporaneamente E. Torricelli, G. Roberval e B. Pascal. Ben presto, oltre all'area, vennero trovati il centro di gravità. e i volumi dei solidi ottenuti facendola ruotare attorno alla base e all'asse, come anche un metodo per determinare le tangenti, una ricerca che vide impegnati i maggiori matematici del tempo, tra i quali R. Descartes (Cartesio).
Tutte queste ricerche testimoniano dell'interesse per una curva, forse la prima, totalmente moderna, che non si trova cioè nelle opere dei geometri classici
Si può trovare un'equazione parametrica della cicloide nel modo che segue. Consideriamo il cerchio generatore, che per comodità supporremo di raggio 1, ad un punto del suo percorso. Se indichiamo con P il punto sulla curva, di coordinate (x, y), e con t la misura (in radianti) dell'angolo PÔB, uguale alla lunghezza dell'arco PB, risulta AB = PB, BC = PQ e PC = BQ. Si ha allora:
x = AC = AB - BC = t - PQ = t -.sen t
y = PC = QB = OB - OQ = 1 – cos t

Quando il cerchio fa un giro intero, la lunghezza t varia tra 0 e 2π ; il punto di coordinate (t-sen t, 1-cos t) descrive la cicloide.



Osservazione: a questo punto gli studenti verranno portati in aula di informatica per vedere la costruzione della cicloide con il software *Cabri géomètre (Vedi allegato).*

Proprietà meccaniche della cicloide ordinaria

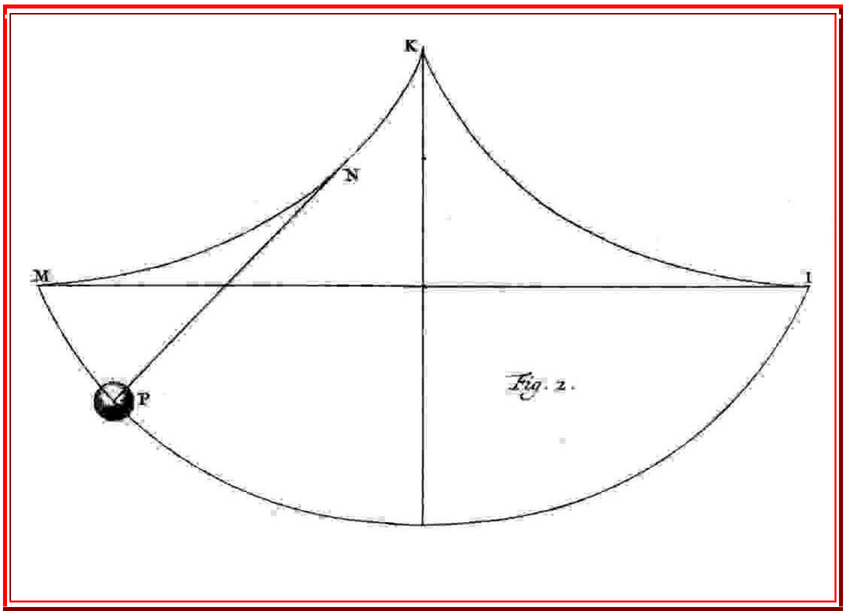
- **Tautocrona**

L' interesse verso la cicloide era destinato ad aumentare notevolmente con la scoperta che essa costituiva la soluzione di due problemi a prima vista senza relazioni tra loro: l'isocronismo delle oscillazioni e la curva di discesa più rapida.
Il primo era un problema in gran parte tecnologico. La misura del tempo era infatti di grande importanza agli inizi dell'epoca moderna, dato che da essa dipendeva, in particolare, la determinazione della longitudine, essenziale per la navigazione oceanica.
Verso la metà del Seicento, l'idea di costruire un orologio sfruttando le oscillazioni di un pendolo cominciava a diventare tecnicamente realizzabile.
Ora nel pendolo usuale, in cui il peso descrive un arco di cerchio, il periodo, cioè il tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa, dipende dalla ampiezza di questa, ed è, maggiore per le grandi oscillazioni, va diminuendo via via che l'ampiezza diminuisce, e resta quasi costante per piccole oscillazioni. In altre parole, il pendolo circolare è isocrono solo approssimativamente, tanto più quanto più le oscillazioni sono piccole.
Ci si può allora chiedere: esiste una curva sulla quale tutte le oscillazioni, grandi e piccole, si svolgano nello stesso tempo? La risposta è affermativa: lo scienziato olandese Christian Huygens

dimostrò che la curva isocrona è la cicloide, e di conseguenza che per ottenere delle oscillazioni strettamente isocrone occorre far muovere il pendolo lungo questa curva.

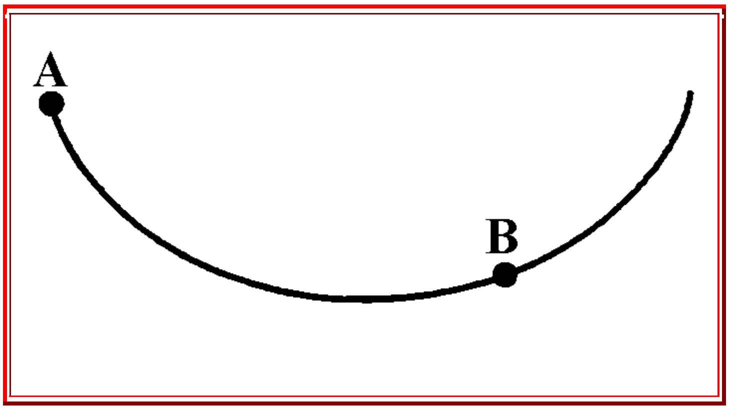
Ma come far muovere un pendolo lungo una cicloide? Si potrebbe costruire un profilo a forma di cicloide, lungo cui far rotolare il peso del pendolo, ma anche a non voler considerare la difficoltà di garantire un movimento regolare, l'attrito del peso lungo il profilo basterebbe a fermare il movimento dopo pochissime oscillazioni. Se invece attacchiamo il peso a un estremo di una cordicella, che appendiamo per l'altro estremo, il pendolo descriverà un cerchio, che non e' isocrono.

Il problema si risolve costruendo due guide, che si mettono dalle due parti del punto di sospensione; in questo modo il filo del pendolo non sarà libero di muoversi, ma dovrà seguire in parte la guida: si tratta allora di costruire un profilo tale che l'estremità del pendolo descriva una cicloide. Dal punto di vista della geometria, occorrerà costruire una curva (il profilo) tale che la sua evolvente sia una cicloide. Huygens dimostra che ciò avviene se il profilo è ancora una cicloide: costruendo quindi due guide a forma di cicloide si otterrà, un pendolo perfettamente isocrono.



Brachistocrona

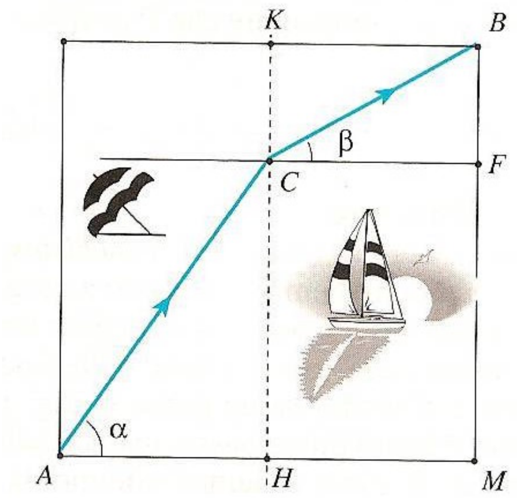
L'altro problema di cui la cicloide fornisce la soluzione è la determinazione della cosiddetta brachistocrona, ovvero la curva che rende minimo il tempo di caduta da uno dei due estremi all'altro.



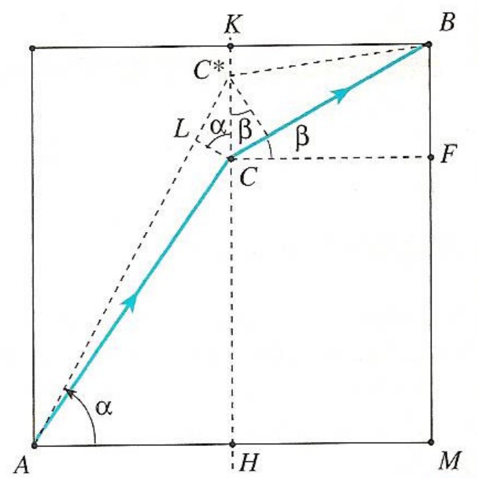
Più precisamente, supponiamo di fissare due punti A e B, il primo posto più in alto del secondo, ma non sulla verticale, e lasciamo cadere da A un grave che giunga a B scivolando su una curva che unisce i due punti. Poniamoci ora il seguente problema: tra tutte le curve che uniscono A e B, qual è quella che rende minimo il tempo di caduta? Non è, come potrebbe sembrare a prima vista, la retta che unisce i due punti; infatti, per diminuire il tempo di caduta conviene iniziare quasi verticalmente, in modo da acquistare subito velocità, anche a scapito della maggior lunghezza del cammino.

La seguente figura mostra come realizzare un'esperienza che mostra che tra due biglie di acciaio lasciate cadere contemporaneamente dallo stesso punto, una lungo una pista rettilinea e l'altra lungo una cicloidale, quest'ultima è quella che raggiunge per prima il punto in basso.

La rifrazione, un problema di brachistocrona



Consideriamo un semplice esempio di problema di ottimizzazione: un bagnino addetto alla sorveglianza di un tratto di spiaggia vede in lontananza un bagnante in pericolo e corre a salvarlo. Per raggiungerlo può fare percorsi diversi, sempre composti da un tratto di corsa sulla spiaggia e da un tratto a nuoto. Probabilmente le velocità sulla spiaggia e nell'acqua saranno diverse e quindi, a seconda dei percorsi scelti saranno diversi i tempi impiegati per raggiungere il bagnante in pericolo. Il problema consiste nel determinare il percorso di tempo minimo, percorso che viene detto appunto Brachistocrona tra i due punti estremi: la posizione del bagnino e quella del bagnante.



Supponiamo che le posizioni A del bagnino, B del bagnante siano situate come in figura, dove la linea tratteggiata indica la battigia, con $\overline{AH} = \overline{HM} = 1 \quad e \quad \overline{BM} = 2$. Scelto l'angolo α il percorso del bagnino è determinato e comporta il tempo $T = t_1 + t_2$ dove t_1 è il tempo corrispondente al tratto di corsa sulla spiaggia che avviene alla velocità v_1, quindi:

$$t_1 = \frac{\overline{AC}}{v_1} = \frac{1}{v_1 \cos\alpha}$$

e t_2 il tempo del tratto a nuoto, compiuto a velocità v_2, per cui

$$t_2 = \frac{\overline{CB}}{v_2} = \frac{1}{v_2 \cos\beta}$$

L'angolo β è determinato da α, poiché

$\overline{HC} + \overline{FB} = 2 \quad e\ quindi \quad tg\alpha + tg\beta = 2$.

Supponendo ora che la velocità sulla spiaggia sia maggiore di quella in acqua probabilmente la traiettoria migliore è quella rappresentata in figura. Supponiamo quindi di aver determinato la traiettoria migliore, allora i tempi relativi a scelte di C un po' più in alto o in basso devono essere maggiori. Sia ad esempio C* un punto leggermente più in alto, allora dovremo considerare la lunghezza:

$\overline{AC*} = \overline{AC} + \overline{CC*}sen\alpha$ (considerando $H\hat{A}C \cong \alpha$) quindi avremo:

$$t_1* = t_1 + \frac{\overline{CC*}sen\alpha}{v_1}.$$

Analogamente $\overline{BC*} = \overline{BC} - \overline{CC*}sen\beta$ e quindi il tempo t_2 diventerà :

$$t_2{*} = t_2 - \frac{\overline{CC}{*}sen\beta}{v_2}$$

Se C era la posizione ottimale allora quella nuova in C* non deve essere più vantaggiosa perciò le due variazioni di tempo devono elidersi cioè:

$$\frac{\overline{CC}{*}sen\alpha}{v_1} = \frac{\overline{CC}{*}sen\beta}{v_2}.$$

La traiettoria ottimale taglia quindi in C la battigia secondo due angoli tali che:

$$\frac{sen\alpha}{sen\beta} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \textit{legge di Snell}$$

Tale formula esprime la **legge della rifrazione dei raggi luminosi attraverso due mezzi diversi**. Il problema del bagnino ha messo in luce il significato cinematica di tale formula: essa esprime una proprietà della brachistocrona tra due punti, una linea retta se nei mezzi omogenei, una spezzata se si passa da un mezzo ad un altro. Anche i raggi di luce passando da una mezzo ad un altro rinfrangono, cioè deviano, percorrendo la brachistocrona tra la sorgente e il punto d'arrivo secondo il principio di Fermat: la luce percorre cammini di tempo minimo, e quindi spazi maggiori nella parte di piano in cui la velocità è maggiore.

RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Una conseguenza delle relazioni esistenti tra gli elementi di un triangolo rettangolo è il teorema della corda.

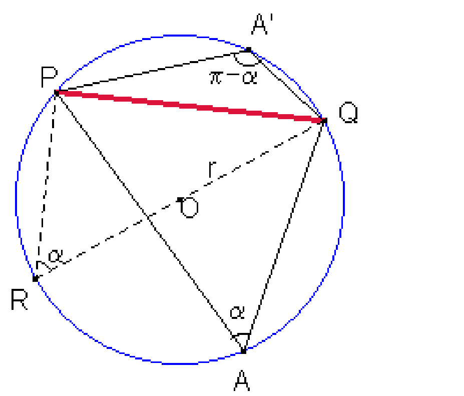
Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto tra la misura del diametro ed il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi alla corda.

Dimostrazione

In figura è rappresentata una circonferenza di raggio *r* e centro Oed è tracciata una sua corda PQ.

I punti A e A' appartengono rispettivamente all'arco PQ maggiore e all'arco PQ minore. Gli angoli in A e A' sono supplementari, di conseguenza avranno lo stesso seno.Tracciamo il diametro della circonferenza avente un estremo in Q e indichiamo con R il suo secondo estremo. Si osserva che gli angoli in R e in A sono uguali(angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco). Ora osserviamo il triangolo RPQ, esso è inscritto in una



semicirconferenza quindi è rettangolo il P, pertanto il suo cateto PQ soddisferà la relazione:

$\overline{PQ} = \overline{QR} sen\alpha = 2r sen\alpha$

Per quanto detto prima (l'angolo in A e quello in A' hanno lo stesso seno in quanto sono supplementari) vale anche la relazione seguente:

$\overline{PQ} = 2r sen(\pi - \alpha)$.

c.v.d.

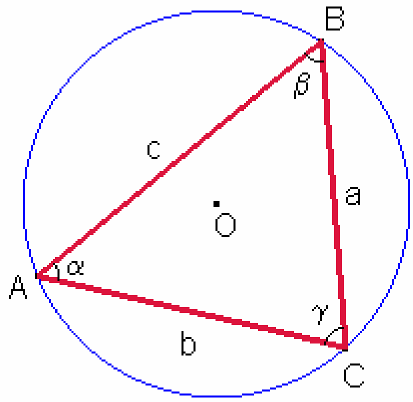
Teorema dei seni

In un triangolo qualunque il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante.

Dimostrazione

Indichiamo con A, B, C i vertici di un triangolo, con α, β, γ i tre angoli corrispondenti e con a, b, c, i lati opposti rispettivamente ai vertici A; B; C. dobbiamo dimostrare che vale la relazione seguente:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}.$$



Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo e applichiamo ad ogni lato il teorema della corda, otteniamo:

$a = 2rsen\alpha, \qquad b = 2rsen\beta, \qquad c = 2rsen\gamma$

E quindi

$\frac{a}{sen\alpha} = 2r, \qquad \frac{b}{sen\beta} = 2r, \qquad \frac{c}{sen\gamma} = 2r$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}.$$

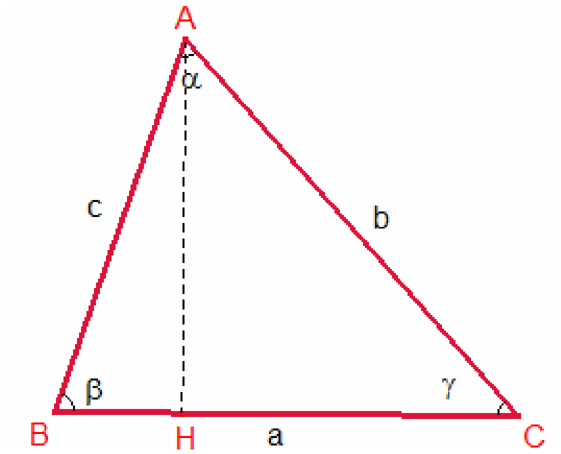
Teorema delle proiezioni

In un qualunque triangolo la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti di quelle degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ciascuno di questi forma con il lato in questione.

Dimostrazione.

Dobbiamo dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

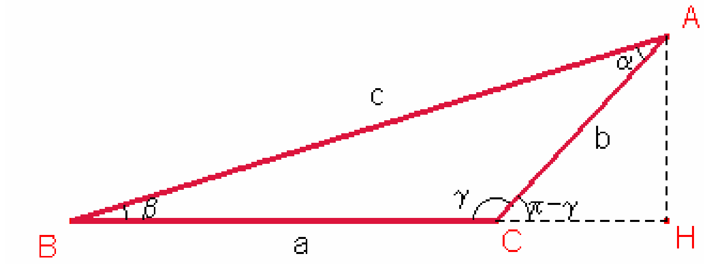
$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$



Consideriamo prima il caso in cui il triangolo sia acutangolo; in questo caso l'altezza AH cade internamente al lato BC, si ha quindi:

$a = \overline{BH} + \overline{HC} = c\cos\beta + b\cos\gamma.$

Consideriamo ora il caso in cui il triangolo sia ottusangolo in C, in tal caso l'altezza cade sul prolungamento del lato BC, in questo caso si ha quindi:



$a = \overline{BH} - \overline{CH} = c\cos\beta - b\cos(\pi-\gamma) = c\cos\beta + b\cos\gamma.$

Per il lato a vale quindi in ogni caso il teorema delle proiezioni; analogamente si dimostra anche per gli altri lati.

Osservazione: *nel caso in cui il triangolo sia rettangolo in Cla tesi segue immediatamente dalle relazioni valide per i triangoli rettangoli.*

Come immediata conseguenza del teorema delle proiezioni, si ha il seguente :

Teorema del coseno (o di Carnot)

In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Dimostrazione:

Dobbiamo dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Dimostreremo che tale relazione vale per il lato a.

Applicando il teorema delle proiezioni al triangolo ABC, otteniamo le seguenti uguaglianze:

$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$
$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

Moltiplicando la prima uguaglianza per *a*, la seconda per (-*b*), e la terza per (-*c*), otteniamo:

$a^2 = ab\cos\gamma + ac\cos\beta$
$-b^2 = -ab\cos\gamma - bc\cos\alpha$
$-c^2 = -ac\cos\beta - bc\cos\alpha$

Addizionando membro a membro le tre identità, otteniamo:

$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos\alpha$ *cioè* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

In modo analogo si dimostrano le altre due relazioni.

Osservazione: *nel caso in cui il triangolo sia rettangolo il teorema del coseno si riduce a quello di Pitagora.*

Osservazione Importante*:* *possiamo utilizzare il teorema di Carnot per trovare una condizione che ci permetta di stabilire se un triangolo, date le misure dei suoi lati, è acutangolo, ottusangolo o rettangolo.*

Consideriamo un triangolo di cui conosciamo le misure dei lati, siano esse : *a, b, c*. Supponiamo ad esempio che *c* sia il lato maggiore. Dal teorema di Carnot sappiamo che :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ da cui possiamo ricavare $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$, ora:

- Se $c^2 > a^2 + b^2$ allora $\cos\gamma < 0$ *perciò* $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ cioè il triangolo è ottusangolo.
- Se $c^2 < a^2 + b^2$ allora $\cos\gamma > 0$ *perciò* $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ cioè il triangolo è acutangolo.

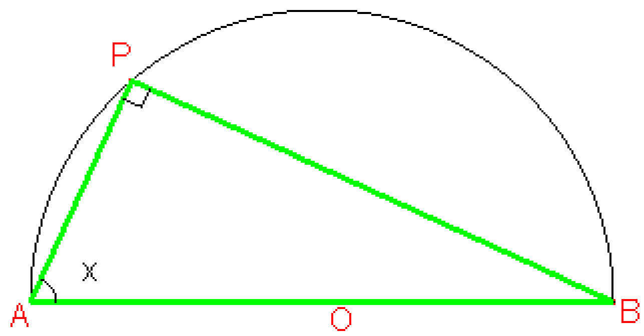
➢ Se $c^2 = a^2 + b^2$ allora $\cos\gamma = 0$ *perciò* $\gamma = \frac{\pi}{2}$ cioè il triangolo è rettangolo.

Dopo aver preso in considerazione i principali teoremi della trigonometria, utilizziamo le conoscenze acquisite per risolvere alcuni problemi.

1. Su una semicirconferenza di centro O e diametro AB = 2r , scegliamo un punto P tale che sia verificata la seguente relazione:

$$3\overline{PA}^2 + 2\overline{PB}^2 = 9\overline{AO}^2 \qquad (1)$$

Per prima cosa scegliamo l'incognita e studiamo qual è il suo dominio di variazione. Poiché la posizione di P dipende dall'ampiezza dell'angolo PAB, sia x la misura di quest'angolo. Il triangolo PAB è rettangolo quindi 0° ≤ x ≤ 90°. Ricordando le relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo,possiamo dire:



$\overline{PA} = 2r\cos x$ *e* $\overline{PB} = 2r\,sen x$

Sostituendo queste espressioni nella (1) otteniamo:

$3(2r\cos x)^2 + 2(2r\,sen x)^2 = 9r^2$

Risolviamo:

$12r^2\cos^2 x + 8r^2 sen^2 x = 9r^2 \rightarrow \quad 12\cos^2 x + 8(1-\cos^2 x) = 9 \rightarrow \quad 12\cos^2 x + 8 - 8\cos^2 x = 9$

$4\cos^2 x = 1 \rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad o \quad \cos x = -\frac{1}{2}$ ric

ordando che deve essere 0° ≤ x ≤ 90° , concludiamo che l'unica soluzione del problema è x = 60°.

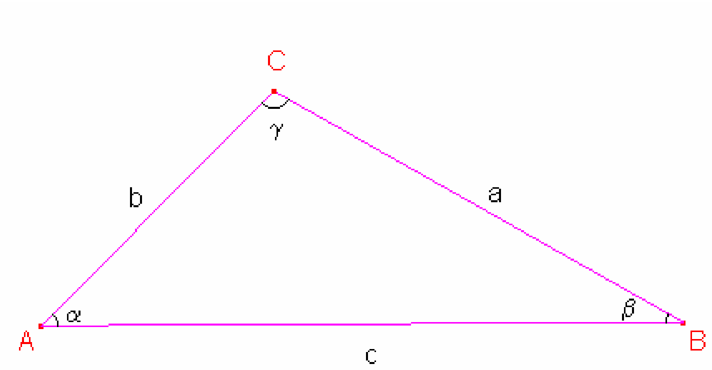
2. In un triangolo è a = 10√2 cm, β = 30° , γ = 105° .Risolvere il triangolo.

Determiniamo l'angolo α:

α = 180° - (30° + 105°) = 45°.

Ora applicando il teorema dei seni determiniamo *b* e *c*:

$$b = \frac{a}{sen\alpha} sen\beta = \frac{10\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} cm = 10\,cm,$$

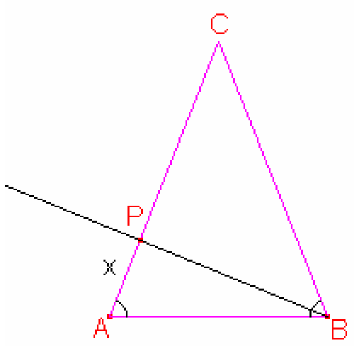


$$c = \frac{a}{sen\alpha} sen\gamma = \frac{10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} cm = 5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) cm \cong 19{,}32\,cm.$$

3. Consideriamo il triangolo isoscele ABC di base AB = 40 a e cos β = 4/5. determinare un puntoP sul lato AC tale che sia verificata la relazione seguente:

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 965a^2. \qquad (1)$$

Utilizzando le relazioni tra lati ed angoli dei triangoli rettangoli calcoliamo AC:



$$\frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AC}\cos P\hat{A}B \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2\cos P\hat{A}B} \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{40\,a}{2\cdot\frac{4}{5}} = 25\,a$$

A questo punto scegliamo l'incognita e studiamo il suo dominio di variazione. Dato che la posizione di P dipende dalla lunghezza del segmento AP, poniamo x = AP; poiché AC = 25a , abbiamo $0 \le x \le 25a$.

Applichiamo ora il teorema di Carnot al triangolo PAB, otteniamo:

$$\overline{PB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AP}\cos P\hat{A}B = 1600a^2 + x^2 - 2\cdot 40a\cdot x\cdot\frac{4}{5} = 1600a^2 + x^2 - 64ax$$

Sostituendo nella (1) otteniamo

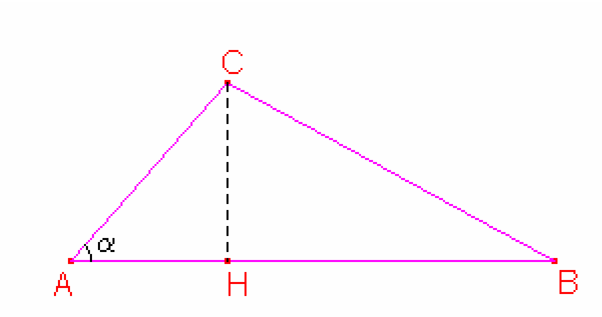
$$(25a - x)^2 + 1600a^2 + x^2 - 64ax = 965a^2 \quad \text{da cui}$$
$$2x^2 - 114ax - 1260a^2 = 0$$

che risolta rispetto ad x dà come soluzioni : $x_1 = 15a$, $x_2 = 42a$ di cui solo la prima è accettabile, in quanto è all'interno del dominio di variazione.

APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA

Illustriamo alcune applicazioni della trigonometria: in particolare vediamo come si possono calcolare le aree di triangoli e di quadrilateri , la misura dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta ad un triangolo.

Area di un triangolo di cui sono note le misure di due lati e dell'angolo tra essi compreso.



Consideriamo un triangolo qualunque con $\alpha < 90°$.

Sappiamo che la misura dell'area di un triangolo è data dalla formula:

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} \qquad (1)$$

Consideriamo allora il triangolo rettangolo ACH;per le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo rettangolo,possiamo dire: $\overline{CH} = \overline{CA}\, sen\, C\hat{A}B$

Che sostituita nella (1) dà:

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA}\, sen\, C\hat{A}B}{2}$$

Il risultato ottenuto è valido per qualunque altro lato del triangolo e qualunque sia l'ampiezza dell'angolo α. Possiamo quindi generalizzare i risultati ottenuti:

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di una coppia di lati per il seno dell'angolo tra essi compreso.

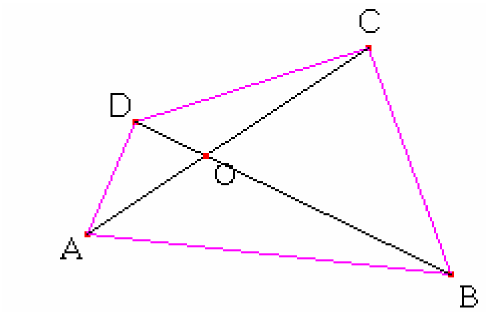
Area di un parallelogramma di cui sono note le misure dei lati e dell'angolo compreso tra essi.

Dato che l'area di un parallelogramma ABCD è il doppio di quella del triangolo ABD;dal risultato precedente risulta che:

L'area di un parallelogramma è data dal prodotto delle misure di due lati

consecutivi per il seno di uno qualunque dei suoi angoli.

Area di un quadrilatero convesso di cui sono note le misure delle diagonali e di un angolo tra esse compreso.



Sia S la superficie del quadrilatero ABCD, e indichiamo con O il punto d'intersezione delle due diagonali. Consideriamo i quattro triangoli DOA, AOB, BOC, COD in cui le diagonali suddividono il quadrilatero. Da quanto visto in precedenza sappiamo che l'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso, quindi:

$$Area\,(DOA) = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}\,sen D\hat{O}A}{2}$$

$$Area\,(AOB) = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,sen A\hat{O}B}{2}$$

$$Area\,(BOC) = \frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}\,sen B\hat{O}C}{2}$$

$$Area\,(COD) = \frac{\overline{OC}\cdot\overline{OD}\,sen C\hat{O}D}{2}$$

Osserviamo che:

- $D\hat{O}A = B\hat{O}C \quad e \quad C\hat{O}D = A\hat{O}B$ in quanto coppie di angoli opposti al vertice;
- $sen\, D\hat{O}A = sen\, C\hat{O}D$ in quanto tali angoli sono supplementari.

Ora, poiché l'area S è deta dalla somma delle aree dei suddetti quattro triangoli, possiamo dire che:

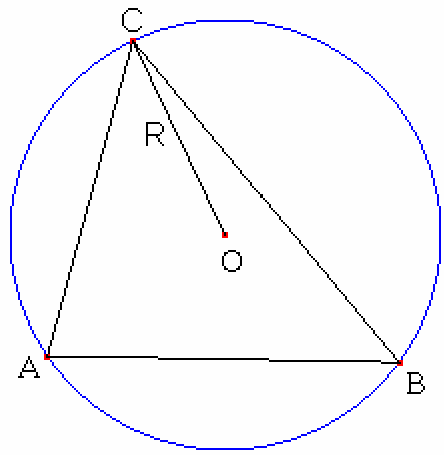
$$S = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}\,sen D\hat{O}A}{2} + \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,sen A\hat{O}B}{2} + \frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}\,sen B\hat{O}C}{2} + \frac{\overline{OC}\cdot\overline{OD}\,sen C\hat{O}D}{2} =$$

$$\frac{sen\,C\hat{O}D}{2}\left(\overline{OA}\cdot\overline{OD}+\overline{OA}\cdot\overline{OB}+\overline{OB}\cdot\overline{OC}+\overline{OC}\cdot\overline{OD}\right)=$$
$$=\frac{sen\,C\hat{O}D}{2}\left[\overline{OA}\left(\overline{OD}+\overline{OB}\right)+\overline{OC}\left(\overline{OD}+\overline{OB}\right)\right]=$$
$$=\frac{sen\,C\hat{O}D}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right)\left(\overline{OD}+\overline{OB}\right)=$$
$$=\frac{sen\,C\hat{O}D}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DB}$$

Generalizzando i risultati così ottenuti, possiamo dire che:

L'area di un quadrilatero convesso è data dal semiprodotto delle misure delle sue diagonali per il seno di un angolo tra esse compreso.

Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo in funzione delle misure dei lati e dell'area



Consideriamo il triangolo ABC inscritto nella circonferenza di raggio R; i suoi lati sono corde di tale circonferenza. Allora per il teorema della corda possiamo dire che:

$$R=\frac{\overline{AC}}{2\,senA\hat{B}C}$$

Moltiplichiamo e dividiamo R per $\overline{AB}\cdot\overline{BC}$,

otteniamo: $R=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\;senA\hat{B}C}$

Indichiamo con S la superficie del triangolo ABC, sapendo che:

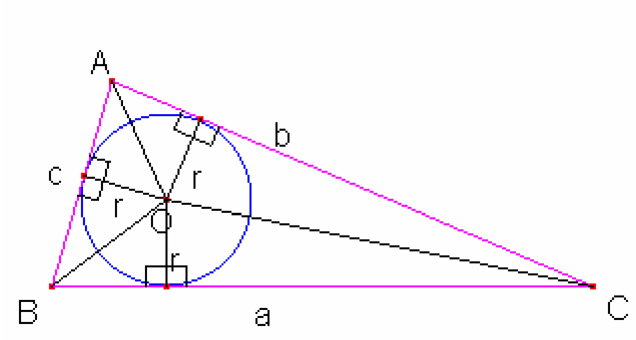
$$S=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\;senA\hat{B}C}{2}$$

Possiamo dire che $R=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{4S}$.

Generalizzando i dati così ottenuti possiamo dire che:

La misura del raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo è uguale al rapporto tra il prodotto della misura dei suoi tre lati e il quadruplo dell'area del triangolo.

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo in funzione dell'area del triangolo e della misura dei lati



Consideriamo il triangolo ABC circoscritto alla circonferenza di raggio r e centro O. Indichiamo con a, b, c, le misure dei lati del triangolo. L'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree dei triangoli AOB, BOC, AOC:

$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{a+b+c}{2}r = p \cdot r$$

Dove p indica il semiperimetro del triangolo.

Allora possiamo dire che: $r = \frac{S}{p}$

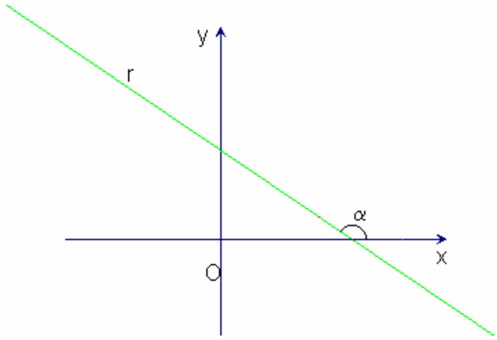
Generalizzando i risultati così ottenuti possiamo dire che:

La misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è uguale al rapporto tra l'area e la misura del semiperimetro del triangolo.

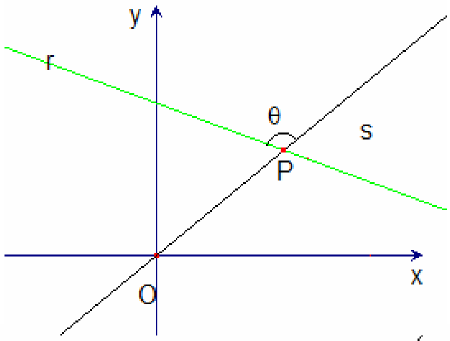
UNA APPLICAZIONE DELLA TRIGONOMETRIA ALLA GEOMETRIA ANALITICA

Angolo formato da due rette

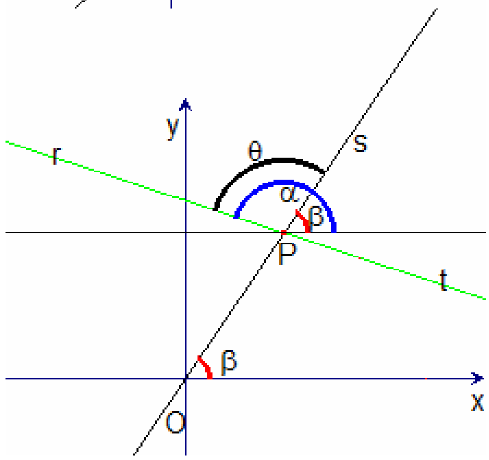
Consideriamo il piano cartesiano xOy ed una generica retta r di equazione y = mx + q. il coefficiente angolare m rappresenta il valore della tangente goniometrica dell'angolo α che la retta r forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, ossia m = tg α



Consideriamo ora due rette incidenti r ed s, e cerchiamo la relazione che intercorre tra i loro coefficienti angolari ad uno degli angoli da esse formati. Sia y = mx + q l'equazione della retta *r* e y = m'x + q' l'equazione della retta *s*. Le due rette incidenti formano quattro angoli a due a due congruenti perché opposti al vertice. Supponiamo che le due rette non siano perpendicolari, vogliamo calcolare il valore della tangente degli angoli acuti θ formati da *s* e *r*.



Conduciamo per P la parallela *t* all'asse delle ascisse.
L'angolo che essa forma con *r* è congruente all'angolo α che la retta *r* forma con l'asse delle ascisse, abbiamo quindi che ***tg α = m***. L'angolo che t forma con r è congruente all'angolo β che la retta *s* forma con l'asse delle ascisse, abbiamo quindi che ***tg β = m'***.
L'angolo θ è dato quindi dalla differenza tra α e β.



Se r ed s non sono perpendicolari possiamo affermare che:

$$|tg\theta| = |tg(\alpha-\beta)| = \left|\frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha \cdot tg\beta}\right| = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

Osservazioni

1. Questa formula non si può applicare nel caso in cui le due rette siano perpendicolari,perché in tal caso, il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1 ed il denominatore 1 + mm' diventerebbe uguale a 0 rendendo priva di significato l'espressione al secondo membro.

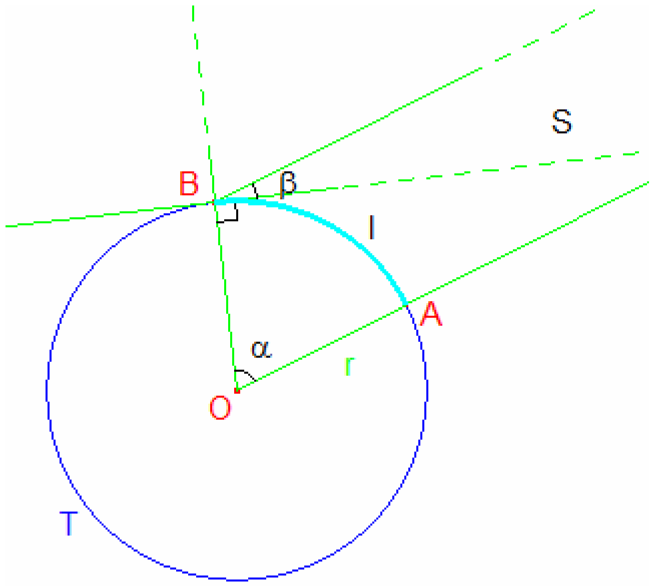
2. Quando invece le rette sono parallele θ = 0 quindi m = m’ e tg θ = 0.
3. Se la retta r è parallela all’asse delle ascisse, θ = β.
4. Se la retta r è parallela all’asse delle ordinate, θ = π/2 - β.

APPLICAZIONI ALLA FISICA

Calcolo del raggio terrestre

Proviamo ora, come Eratostene, a calcolare la misura del raggio terrestre.

Prendiamo due punti A e B su uno stesso meridiano e, alla stessa ora, misuriamo l’angolo che i due raggi formano con la superficie terrestre in entrambi i punti considerati. Per comodità scegliamo il momento in cui il sole è allo Zenit, cioè perpendicolare, in uno dei due punti, per esempio in A. I raggi che congiungono A e B con il Sole (S) si possono ritenere paralleli, vista l’enorme distanza di questo dalla Terra, quindi possiamo scrivere:



$$\alpha + (90° + \beta) = 180°$$

perché gli angoli coniugati interni tra due rette parallele sono supplementari. A questo punto possiamo ricavare l’angolo α:

$$\alpha = 90° - \beta$$

Sia l la misura dell’arco di circonferenza $\widehat{AB}$, possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$2\pi r : l = 360° : \alpha$$

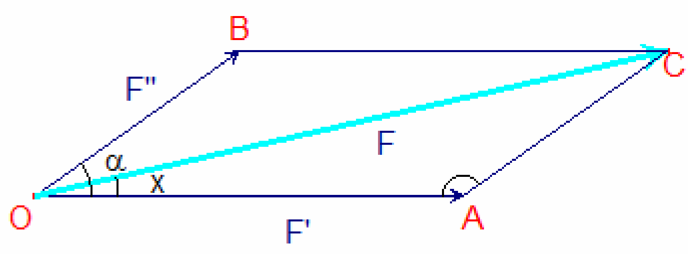
Da cui ricaviamo:

$$r = l\frac{360°}{2\pi\alpha}$$

Dove r rappresenta il raggio terrestre, che si può così calcolare dopo aver misurato β e l.

La risultante di due forze

Occupiamoci ora di determinare l'intensità, la direzione e il verso della risultante di due forze applicate ad uno stesso punto . Le due forze **F'** e **F''** sono applicate ad uno stesso punto O e formano un angolo α. Applicando la regola del parallelogramma disegniamo la forza risultante **F**.



- Applichiamo il ***teorema del coseno*** al triangolo OAC per calcolare l'intensità della forza **F**:

$$F = \sqrt{F'^2 + F''^2 - 2F' \cdot F'' \cdot \cos(180° - \alpha)} = \sqrt{F'^2 + F''^2 + 2F' \cdot F'' \cdot \cos\alpha} \ .$$

- Ora, per calcolare la direzione di **F**, chiamiamo *x* l'angolo che essa forma con **F** e applichiamo il ***teorema dei seni*** al triangolo OAC:

$$\frac{F''}{senx} = \frac{F}{sen(180° - \alpha)}$$ da cui:

$$senx = \frac{F''}{F} sen\alpha$$ da cui possiamo calcolare il valore dell'angolo *x*, note le misure di F'', F, α.

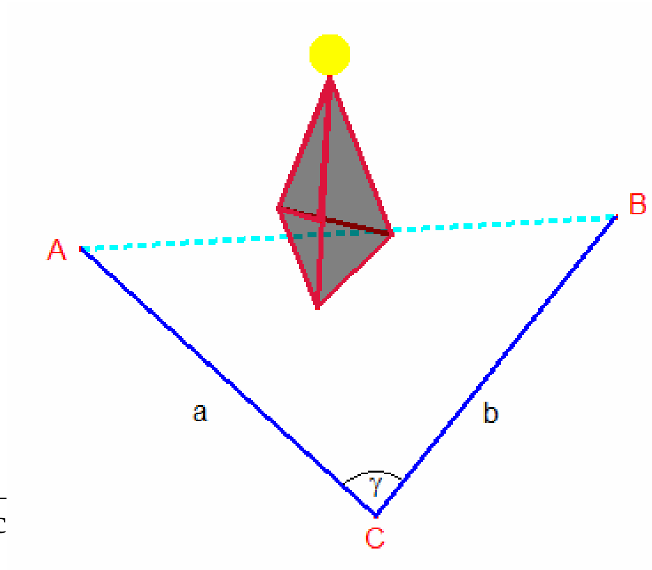
- Il verso di **F** è quello che va da O verso C.

APPLICAZIONI TOPOGRAFICHE

In topografia, astronomia, ecc., spesso si devono calcolare distanze tra punti non accessibili, o non tutti accessibili, in cui cioè, non è possibile usare il metodo della misura diretta. Per risolvere tali problemi si ricorre alla misura diretta della distanza tra due o più punti accessibili e a quella di opportuni angoli. Si considerano in definitiva altri triangoli in modo tale da poter calcolare, mediante relazioni trigonometriche, gli altri elementi di essi che si vogliono conoscere;questo metodo prende il nome di **triangolazione**. Cercheremo di illustrare questo metodo tramite degli esempi.

Distanza tra due punti accessibili, ma separati da un ostacolo.

Per calcolare la distanza $\overline{AB}$, non misurabile direttamente a causa della presenza di un ostacolo, fissiamo un punto C da cui risultino visibili i punti A e B e tale che si possano determinare le distanze: $\overline{CA} = a$, $\overline{CB} = b$ e la misura dell'angolo γ tra essi compreso. Ora applicando il teorema di Carnot al triangolo $A\hat{C}B$, otteniamo:



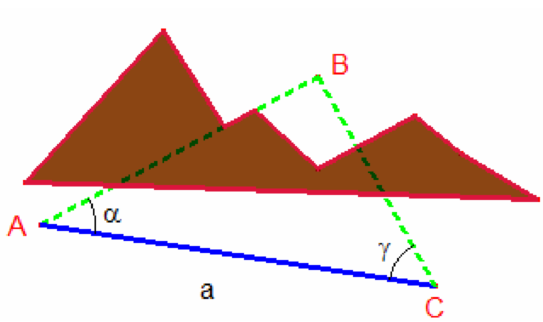
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cos\gamma} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,\mathrm{c}}$$

Distanza tra un punto accessibile e uno non accessibile

Ci proponiamo ora di calcolare la distanza $\overline{AB}$, supponendo A accessibile e B inaccessibile. Fissiamo un punto C accessibile, da cui siano visibili i due punti A e B. Basterà misurare la distanza:

$$\overline{AC} = a$$

e le ampiezze degli angoli:

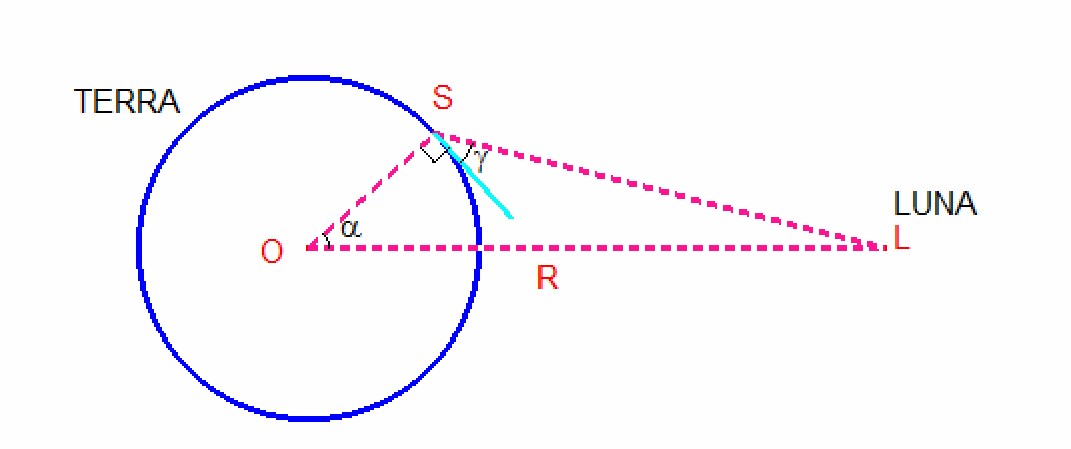


$B\hat{A}C = \alpha \quad e \quad B\hat{C}A = \gamma$.

A questo punto applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC ottenendo:

$$\frac{\overline{AB}}{sen\gamma} = \frac{\overline{AC}}{sen[\pi - (\alpha + \gamma)]} \qquad da\,cui \qquad \overline{AB} = \frac{asen\gamma}{sen(\alpha + \gamma)}.$$

A titolo d’esempio vediamo come si può calcolare la distanza **Terra- Luna.**



Presi due punti R ed S posti sullo stesso meridiano, calcoliamo per prima cosa l’ampiezza in radianti dell’angolo $S\hat{O}R = \alpha$. Abbiamo:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{RS}}{r}$$

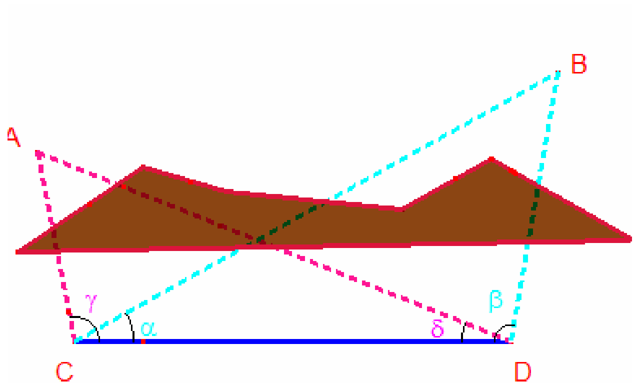
Dove $\overset{\frown}{RS}$ indica la lunghezza dell’arco di meridiano congiungente i due punti ed r il raggio terrestre. Inoltre, quando la Luna si trova allo Zenit per R misuriamo l’angolo di visuale γ che la congiungente SL forma con il piano orizzontale. Applicando ora il ***teorema dei seni*** al triangolo OSL abbiamo:

$$\frac{\overline{OL}}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)} = \frac{\overline{OS}}{sen\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\right]} \quad da\,cui\,otteniamo \quad \overline{OL} = \frac{r\cos\gamma}{sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\gamma\right)} = \frac{r\cos\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)}$$

Distanza tra due punti entrambi non accessibili.

Ci proponiamo ora di calcolare la distanza AB dove né A, né B sono accessibili. Fissati due punti C e D entrambi accessibili, da cui siano visibili i punti A e B, misuriamo la distanza: $\overline{CD} = d$

E le ampiezze degli angoli adiacenti al lato CD nei due triangoli ACD e BCD. Applicando il ***teorema dei seni*** al triangolo ACD abbiamo:



$$\frac{\overline{AC}}{sen\delta} = \frac{\overline{CD}}{sen[\pi - (\gamma + \delta)]}$$

Da cui $\overline{AC} = \dfrac{dsen\delta}{sen(\gamma + \delta)}$. Considerato poi il triangolo BCD applicando nuovamente il ***teorema dei seni*** abbiamo:

$$\frac{\overline{BC}}{sen\beta} = \frac{\overline{CD}}{sen[\pi - (\alpha + \beta)]}$$ da cui:

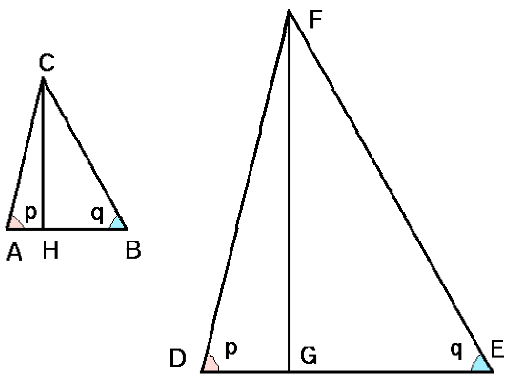
$$\overline{BC} = \frac{d\,sen\beta}{sen(\alpha + \beta)}.$$

Ora, del triangolo ABC, sono note le lunghezze dei lati AC e BC e l'ampiezza dell'angolo $\gamma - \alpha$; quindi la distanza AB può essere calcolata applicando il ***teorema di Carnot***:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC}\cos(\gamma - \alpha)}.$$

Metodo della parallasse

Le stelle sono corpi celesti simili al Sole, ma posti a distanze molto maggiori che proprio per questo sono molto difficili da misurare. Ci sono però alcuni metodi indiretti per calcolare la distanza di una stella a partire da altri dati. Uno di questi prende il nome di **metodo della parallasse.** La parallasse è lo spostamento apparente di un oggetto rispetto allo sfondo, quando viene osservato da due punti diversi.

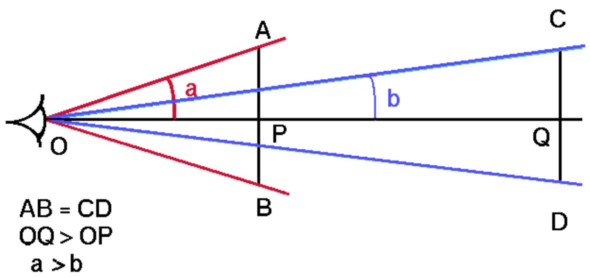


Supponiamo di conoscere tutti i dati riguardanti il triangolo ABC: lunghezza dei lati, altezza CH e misura degli angoli p e q. Si può allora utilizzare questo triangolo per misurare la grandezza FG. Infatti i due triangoli nella figura sono ***simili***: hanno gli stessi angoli p e q.

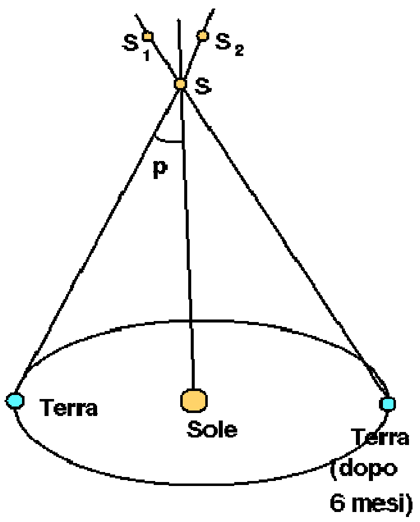
Due triangoli simili hanno una caratteristica importante: il rapporto tra le lunghezze di due lati qualsiasi è lo stesso in un triangolo e nell'altro. Se conosciamo la misura della base del secondo triangolo, cioè DE, possiamo conoscere anche FG. Infatti, per la proprietà dei triangoli simili, sarà

$$\frac{FG}{DE} = \frac{CH}{AB}$$

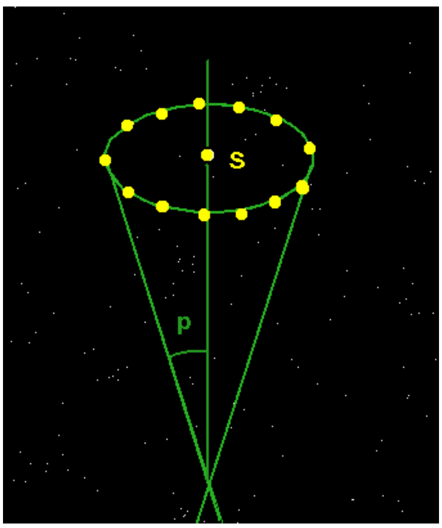
Questa proprietà viene usata dagli astronomi per misurare la distanza di una stella. Provando a guardare prima con un occhio e poi con l'altro degli oggetti posti a distanze diverse, ci si accorge che la parallasse è sempre più piccola man mano che la distanza cresce.



Le stelle sono molto lontane, perciò misurandone la posizione da un occhio e dall'altro non vedrebbe alcuna differenza

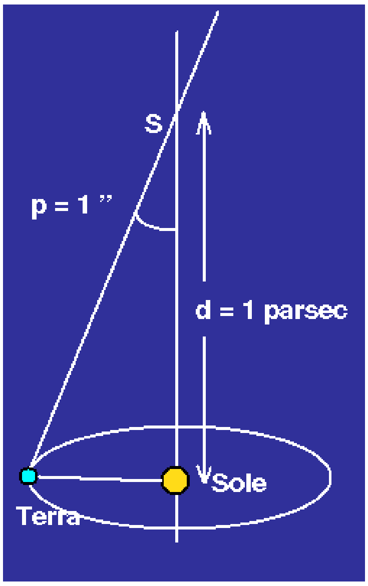


Per poter vedere una piccola differenza nella posizione di una stella rispetto alle stelle vicine, bisogna osservarla da due punti molto distanti tra loro. L'unico modo per misurare la parallasse stellare è osservare la stella da due estremi opposti dell'orbita della Terra. Per fare questo bisogna compiere le osservazioni a distanza di sei mesi l'una dall'altra. La distanza tra questi due punti è circa 300 milioni di chilometri: appena sufficienti per misurare la distanza delle stelle più vicine a noi...S_1 ed S_2 sono le due posizioni apparenti della stella S a distanza di sei mesi. L'angolo p nella figura qui sopra è la **parallasse** della stella.



Durante l'anno, la stella S sembra percorrere un'ellisse nel cielo. Essa viene chiamata ***ellisse di parallasse***. In realtà è la Terra che descrive tale ellisse, orbitando intorno al Sole. Nel corso dell'anno, una stella vicina sembra percorrere un ellisse nel cielo, rispetto alle stelle che stanno sullo sfondo. Esse sono così lontane che le vediamo sempre nella stessa posizione in cielo.

Gli astronomi usano spesso come unità di misura delle distanze il ***parsec***. "Parsec" è l'abbreviazione di "parallasse secondo" ed è la distanza dalla quale si vede il raggio dell'orbita terrestre esattamente sotto un angolo di 1 secondo d'arco. 1 parsec equivale a 3,26 anni luce. Il parsec, calcolato in modo trigonometrico, geometricamente è il cateto lungo del triangolo rettangolo che ha



come base la distanza Terra - Sole, e come angolo al vertice un secondo (1") di grado sessagesimale.

Il metodo della parallasse si può usare solo per stelle molto vicine, proprio perché oltre una certa distanza la parallasse diventa così piccola da non poter più essere misurata. Le parallassi delle stelle sono tutte inferiori ad 1 secondo d'arco. Per esempio, la parallasse di Proxima Centauri, la stella più vicina al nostro Sole, è pari a 0,81**.**

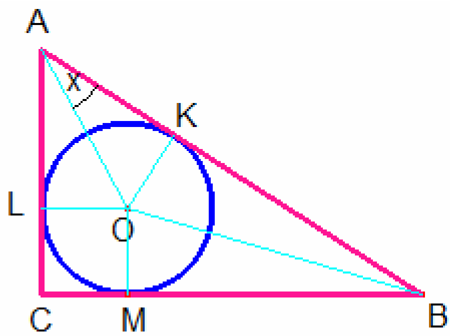
PROBLEMI RISOLUBILI CON METODI GONIOMETRICI.

Conviene, a volte, nella risoluzione di problemi geometrici, scegliere come incognita l’ampiezza di un angolo. Le relazioni tra l’incognita e i dati che individuiamo dall’analisi del problema si traducono, allora, in equazioni o disequazioni goniometriche. Le relazioni che si utilizzano sono quelle che si ricavano dai teoremi della geometria euclidea: questi costituiscono delle relazioni tra gli elementi di una figura, che possono essere espresse algebricamente mediante equazioni e disequazioni.

Vediamo alcuni esempi, con e senza l’utilizzo di parametri.

Problema 1

Il centro della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo ABC, retto in C, dista $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$ rispettivamente dai vertici A e B. Determinare le lunghezze dei lati del triangolo.



Svolgimento

Poiché il centro della circonferenza inscritta è il punto d’incontro delle tre bisettrici, il segmento OA appartiene alla bisettrice dell’angolo BAC; analogamente il segmento OB appartiene alla bisettrice dell’angolo ABC.

Relazioni tra dati e incognite:

$OA = \sqrt{5}, \quad OB = \sqrt{10}$ poniamo $x = O\hat{A}K$ allora avremo che $O\hat{B}K = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{\pi}{4} - x$

Nel triangolo AOK avremo: $OK = \sqrt{5}senx$

Nel triangolo BOK avremo: $OK = \sqrt{10}sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. Ricaviamo ora il raggio della circonferenza uguagliando le due espressioni, quindi:

$\sqrt{5}senx = \sqrt{10}sen\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. Abbiamo una limitazione, infatti deve essere $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Non ha senso considerare i casi limite x=0 e x = π/4 dato che non si avrebbe più un triangolo. Risolviamo ora l'equazione utilizzando la formula di sottrazione del seno:

$\sqrt{5}senx = \sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}senx\right)$ da cui $\sqrt{5}senx = \sqrt{5}(\cos x - senx)$ e $senx = \cos x - senx$.

Ora, poiché $x \neq \frac{\pi}{2}$ possiamo dividere entrambi i membri per cos$x$, ottenendo : $tgx = \frac{1}{2}$. A questo punto, sapendo che: $sen^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$ ricaviamo il valore di sen$x$

$$senx = \frac{tgx}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$ Quindi $OK = \sqrt{5}senx = 1$.

Calcoliamo ora i lati del triangolo:

$$AC = AL + LC = \frac{OL}{tgx} + 1 = 3$$

$$BC = OM + MB = 1 + \sqrt{10 - 1} = 4$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$$

N.B. Le misure dei lati del triangolo sono una terna pitagorica.

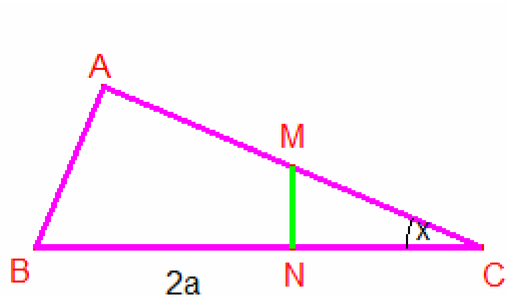
Problema 2

Un triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa BC lunga 2a. Indichiamo con M il punto medio del cateto AC e con N la proiezione ortogonale di M su BC. Determinare l'angolo $A\hat{C}B$ in modo che risulti **NC + 2MC = *ka***, dove k indica un numero reale positivo. In quale particolare caso questa somma vale ***2a***?

Svolgimento

Osservazione: tra i dati del problema vi sono due parametri *a* e *k*. Il primo è un *parametro costante*, mentre il secondo è un *parametro variabile.*

Indichiamo con *x* l'angolo ACB. Dai teoremi sui triangoli rettangoli, applicati prima al triangolo ABC retto in A, poi il triangolo NCM, retto in N, ricaviamo:



$AC = 2a\cos x \quad quindi \quad MC = a\cos x$

$NC = (a\cos x)\cos x = a\cos^2 x$

L'equazione che esprime la relazione data dal problema è la seguente:

$a\cos^2 x + 2a\cos x = ka \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x + 2\cos x = k$.

Limitazioni:

intuitivamente l'ampiezza dell'angolo x può variare tra 0 e π/2:

- Se fosse x = π/2: allora non si avrebbe più il triangolo ABC, il cateto AC misurerebbe 0 e la relazione data si ridurrebbe a 0 = *ka*, impossibile poiché entrambi i parametri sono numeri reali positivi.
- Se fosse x = 0, ugualmente non si avrebbe il triangolo ABC (ridotto al segmento BC con B ≡ A). In questo caso però la relazione data diventa: *a + 2a = ka* che è verificata per *k = 3.* Va perciò inclusa tra le soluzioni possibili come soluzione limite.

Le limitazioni sono quindi: $0 \le x < \pi/2$. Il problema quindi si riduce alla soluzione di:

$$\begin{cases} \cos^2 x + 2\cos x = k \\ 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Per discutere questa equazione introduciamo una nuova variabile: X = cos*x*. In questo caso se x = 0 allora cos*x* = 1 mentre se x = $\pi/2$ allora cosx = 0,pertanto abbiamo questa nuova formalizzazione:

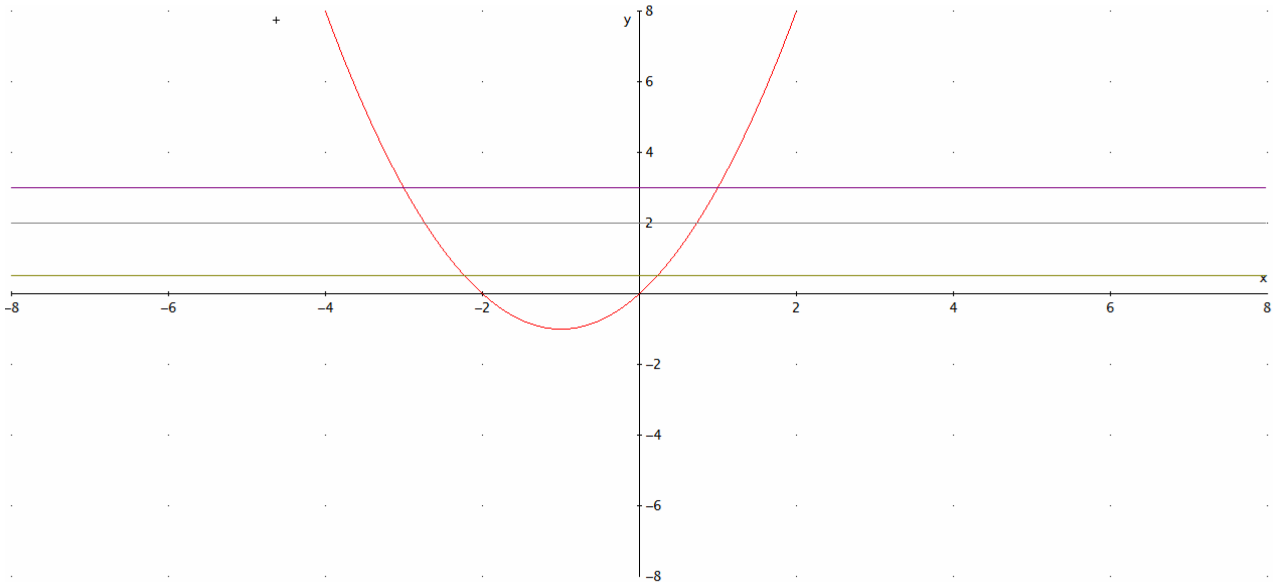
$$\begin{cases} X^2 + 2X = k \\ 0 < X \le 1 \end{cases}$$

e, ad ogni valore di *x* compreso tra 0 e $\pi/2$, corrisponde un valore di cos*x* compreso tra 0 e 1.

Il discriminante dell'equazione è positivo se k ≥ -1, ma piochè *k* è un numero reale positivo, si hanno sempre soluzioni algebricamente accettabili. Dobbiamo però stabilire se queste soddisfano le condizioni poste dal problema: per fare ciò faremo una discussione grafica. Consideriamo l'equazione $X^2 + 2X = k$ come equazione risolvente del sistema:

$$\begin{cases} Y = X^2 + 2X & parabola \\ Y = k & fascio\ di\ rette\ parallele\ all'\ asse\ x \end{cases}$$

Rappresentiamo le due curve nel piano cartesiano e consideriamo l'arco di parabola individuato dalle condizioni del problema:



Se $0 < k \le 3$ il problema ha sempre una soluzione. In particolare se k = 3 si ha la soluzione limite. L'equazione ha infatti due soluzioni: $X_1 = -3$ e $X_2 = 1$ di cui solo la seconda è accettabile: X = 1 allora cos*x* = 1 e quindi *x* = 0. In questo caso il triangolo ABC si riduce al segmento BC.

Ricerca della soluzione particolare:

il problema chiede in quale caso la somma NC + 2MC = 2a. poiché tale somma è *ka*, deve essere *k* = 2, cioè: $X^2 + 2X - 2 = 0$.

Le soluzioni sono:

$$X_1 = -1 - \sqrt{3} \quad (da\ scartare)$$
$$X_2 = -1 + \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cos x = -1 + \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \arccos\left(-1 + \sqrt{3}\right) \cong 43°.$$

Problema 3

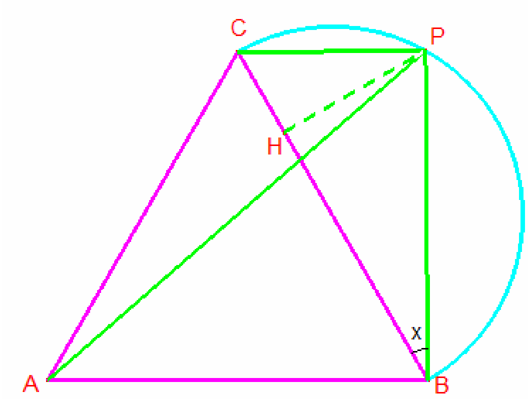
Sia ABC un triangolo equilatero di lato 2l. sulla semicirconferenza di diametro BC esterna al triangolo, determinare un punto P in modo che risulti massima la somma:

$$\overline{AP}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{PH}$$

Essendo PH la distanza di P dalla retta BC.

Svolgimento

Tracciamo per prima cosa i segmenti PB e PC, il triangolo CPB è rettangolo in P.



Scegliamo come incognita l'angolo $x = P\hat{B}A$ (con $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$) e ricaviamo subito le espressioni di CP e PB.

$\overline{CP} = 2lsenx$

$\overline{PB} = 2l\cos x$

Ricaviamo l'espressione di PH:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{CP} \cdot \overline{PB}}{\overline{CB}} = \frac{2lsenx \cdot 2l\cos x}{2l} = 2lsenx\cos x$$

Ora ricaviamo l'espressione del segmento AP.

Sapendo che: $C\hat{B}A = \frac{\pi}{3}$, determinare la lunghezza di AP equivale a determinare la distanza tra due punti accessibili separati da un ostacolo quindi è sufficiente applicare il teorema di Carnot.

Abbiamo

$$\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{PB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{PB}\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4l^2 + 4l^2\cos^2 x - 2(2l)(2l)\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) =$$

$$= 4l^2 + 4l^2 - 8l^2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Ora, utilizzando le formule di addizione per il coseno, quelle di duplicazione per il seno e con opportune semplificazioni arriviamo all'espressione:

$\overline{AP^2} = 4l^2 + 2\sqrt{3}l^2 sen2x$.

A questo punto la relazione del problema diventa:

$$\overline{AP}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{PH} = 4l^2 + 2\sqrt{3}l^2 sen2x + 2l^2 sen2x = 2l^2\left(\sqrt{3} + 1\right)sen2x + 4l^2$$

Limitazioni: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, nei due casi limite x = 0 e x = π/2 non esiste il triangolo CPB.

Affinché l'espressione data sia massima deve essere sen 2x=1 quindi $2x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

Allegati

VERIFICA FORMATIVA

1. Risolvere il triangolo rettangolo avente un cateto che misura 18 e l'angolo ad esso opposto di ampiezza $\pi/3$.
2. Di un triangolo isoscele si conoscono la base che ha lunghezza 20 cm e il perimetro che misura 66 cm. Calcolare le ampiezze degli angoli.
3. Determinare gli elementi incogniti del triangolo ABC sapendo che AB = 10, $\alpha = \pi/6$ e $\cos\beta = 3/5$.
4. In un triangolo acutangolo ABC il lato AB misura $2a$ e gli angoli ad esso adiacenti $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ *e* $\hat{A} = \alpha$. Calcolare le distanze dell'incentro *I* dai tre vertici e il raggio della circonferenza inscritta.
5. Sia ABC un triangolo con i lati AC e CB di lunghezza rispettivamente *a* e *2a*. Sia inoltre AB il lato di un triangolo ABD rettangolo in B tale che BD = ½ AB; indicato con *x* l'angolo ACB, determinare:
   a) perimetro e area del quadrangolo ACBD
   b) il valore di *x* che rende massima l'area.

VERIFICA SOMMATIVA

1. Determinare le misure dei lati e le ampiezze degli angolo di un triangolo rettangolo sapendo che un cateto è ¼ dell' altro e che la loro somma è 30 cm. (4)
2. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O e raggio *r* si traccino le due tangenti alla circonferenza stessa e siano A e B i punti di contatto. Sapendo che $\cos A\hat{P}B = \frac{4}{5}$, determinare le lunghezze dei segmenti di tangenza PA e PB e la distanza di P dal centro O (6)
3. Calcolare l'altezza di un campanile, sapendo che da un bar distante 80m si vede la cima del campanile secondo un angolo di 42°. (5)
4. Nel triangolo ABC si sa che: (8)

$$\cos \hat{A} = \cos \alpha = \frac{4}{5}; \quad \hat{B} = 2\alpha; \quad \overline{AB} = 10$$

Determinare:

a) gli elementi incogniti del triangolo (4)

b) le misure delle tre altezze (2)

c)l'area del triangolo e il raggio della circonferenza ad esso circoscritta. (2)

5. In una circonferenza di centro O e raggio *r* la corda AB è il lato del quadrato inscritto. Da B si conduce una semiretta tangente alla circonferenza e che giace, rispetto alla retta per AB,nel semipiano contenente O. Determinare su questa semiretta un punto P tale che, indicato con M l'ulteriore punto in cui il segmento AP interseca la circonferenza, si abbia la relazione:

$$\frac{BM + 2\sqrt{2}MP}{PB} = k$$ con *k* numero reale. (8)

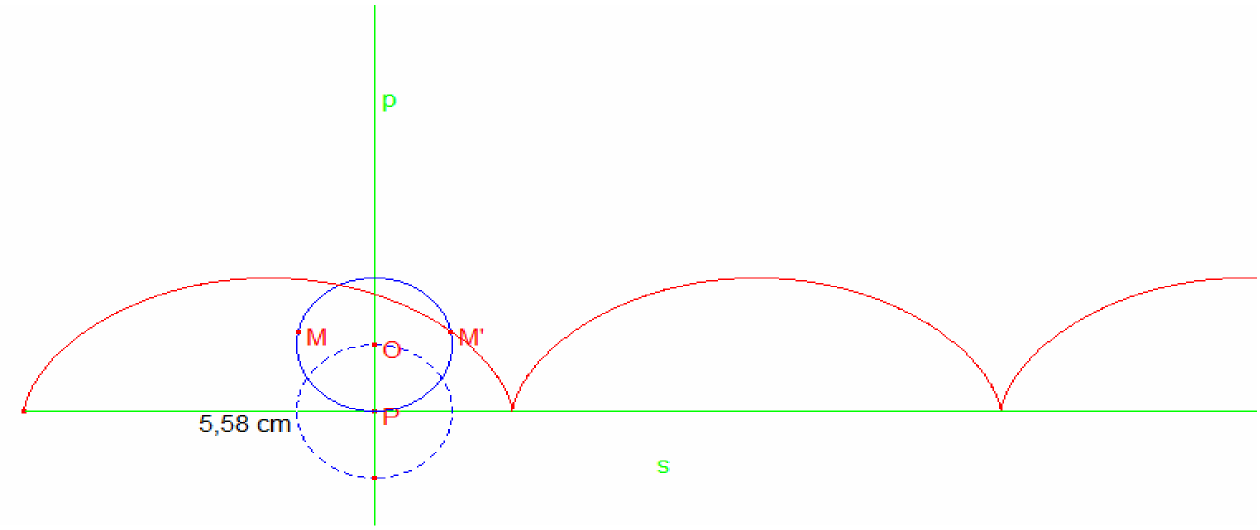
GRIGLIA DI VALUTAZIONE

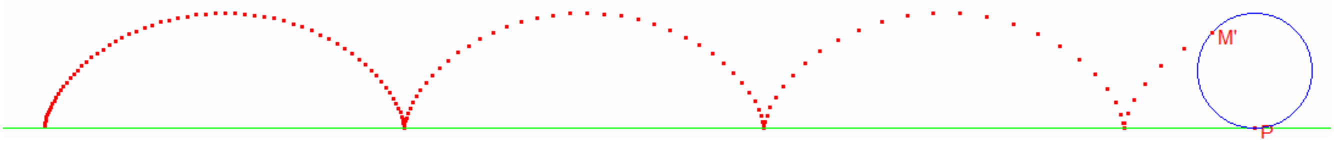
<table>
<tr><th>Punteggio Grezzo
(Totale 31)</th><th>Voto in Decimi
(ottenuto con la proporzione)</th><th>Voto in decimi
(una proposta)</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="4">0-1</td><td rowspan="10">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">2-3</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">3-4</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="3">4-5</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">5-6</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">7</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="2">7-8</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>24</td><td></td><td rowspan="3">8</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="3">8-9</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="4">9-10</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
</table>

COSTRUZIONE DELLA CICLOIDE CON CABRI GEOMETRE

1. Semiretta *s.*
2. Segmento *AB* che definisce il raggio della circonferenza di base.
3. Punto *P* su *s* e trasporto di *AB* su *P* con lo strumento compasso.
4. Retta perpendicolare ad *s* in *P*.
5. Punto *O* di intersezione con la circonferenza.
6. Misura della distanza di *P* dall'origine.
7. Circonferenza di centro *O* passante per *P*.
8. Trasporto di misura sulla circonferenza a partire da *P*, si ottiene il punto *M*.
9. Simmetrico *M'* di *M* rispetto alla retta perpendicolare passante per P.
10. Luogo geometrico di *M'* al variare di P su *s.*
11. Con gli strumenti traccia e animazione si può vedere la costruzione della cicloide.





3. Conclusioni e riflessioni finali

Come si può notare nella tabella riguardante i tempi previsti per l'intervento didattico e per quanto detto in apertura nella premessa, ritengo che "perdere" qualche ora in più dedicandola alla risoluzione di esercizi e problemi, anche con discussioni in classe, sia proficuo oltre che dal punto di vista dell'apprendimento dei contenuti di per sé, soprattutto per far avvicinare i ragazzi a questa materia, troppo spesso presentata in modo rigoroso, astratto e ,in qualche caso, un po' sterile. Questa parte si presta come poche altre all'analisi e alla risoluzione di problemi vicini alla realtà, anche la storia mostra come essa sia stata oggetto di studio proprio per la necessità di risolvere problemi pratici legati anche alla sopravvivenza (pensiamo all'importanza del calcolo della latitudine e della longitudine nella navigazione). Penso inoltre che lasciare a volte qualche spazio dedicato alla discussione di gruppo relativamente al modo migliore di risolvere questo tipo di problemi permetta innanzitutto di mostrare come molto spesso lo stesso problema possa essere impostato in modi diversi, alcuni più vantaggiosi di altri, ma soprattutto renda meno imbarazzante per alcuni studenti chiedere ulteriori spiegazioni riguardo eventuali concetti non del tutto capiti. E per ultimo: "cosa c'è di più avvilente per un insegnante di una classe che non partecipa alla lezione?"

Bibliografia

L. Lamberti – L. Mereu – A. Nanni, *Corso di matematica 1b*, ed Etas

Eserciziario ricco e ben strutturato, la parte teorica è forse un po' concisa.

M. Bergamini- A. Trifone- G. Barozzi, *Manuale blu di matematica*, Zanichelli

Teoria ben sviluppata, ricca di esempi; gli esercizi sono in ordine di difficoltà e sono presenti numerosi spunti per le attività di laboratorio.

L. Tonolini – F. Tonolini, *Metodi analitici*, Minerva Italica

Nonostante l'età resta uno dei testi più chiari e completi sotto ogni punto di vista

PMA (progetto matematica Archimede), *I matemoduli*, Archimede edizioni

Trattazione teorica caratterizzata da notevole chiarezza espositiva senza rinunciare al necessario rigore, l'eserciziario ricco e suddiviso in livelli di difficoltà, con domande aperte e schede di autovalutazione per ogni capitolo. Interessante alla fine del testo la sezione per il recupero con sintesi, esercizi svolti ed esercizi proposti.

Maraschini – Palma, *ForMat*, Paravia Torino.

Presenta una parte di esercizi molto ben strutturata.