<u>UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA</u>

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

VIII Ciclo - Classe di Specializzazione A049

PERCORSO DIDATTICO

I PRINCIPI DI CONSERVAZIONE E IL RUOLO DEGLI INVARIANTI IN FISICA

Caterina Tarantini

DESTINATARI:

Questo percorso didattico è rivolto ad una classe terza di un liceo scientifico sperimentale PNI dove le ore settimanali di fisica previste sono 3. Pertanto tratterò i principi di conservazione che rientrano nella programmazione del terzo anno: *energia meccanica, quantità di moto e momento angolare.*

"I PRINCIPI DI CONSERVAZIONE" NEI PROGRAMMI MINISTERIALI.

L'insegnamento della fisica nei **licei di ordinamento** si basa sui programmi ministeriali redatti nel 1952, che riprendono sostanzialmente i programmi della Riforma Gentile, risalente al 1923. Il liceo scientifico offre una base culturale generale per seguire un indirizzo universitario di tipo scientifico-tecnologico anche se non tralascia una preparazione umanistica. Esaminando il quadro orario del liceo scientifico di ordinamento si può osservare che il numero di ore delle materie umanistiche è superiore a quello delle materie dell'area scientifica, un esempio è dato dalle ore di fisica che sono troppo poche, a mio parere, per un liceo scientifico: inesistenti al biennio, due al terzo anno, tre al quarto e al quinto. La conseguenza di questo la possiamo riscontrare nei programmi di fisica che si presentano molto ridotti. L'argomento del percorso didattico è collocato al terzo anno *nel tema meccanica: "energia, sue forme e sua conservazione"* . Invece, si può osservare che la parte riguardante la quantità di moto e il momento angolare non è trattata.

Nell'attesa di una riforma della scuola secondaria superiore, molti licei hanno adottato progetti di sperimentazione, tra cui vi è il **Piano Nazionale per l'Informatica (PNI)**. I suoi programmi sono stati elaborati nel 1985, con lo scopo di introdurre l'informatica nelle scuole secondarie superiori. Nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, l'argomento "i principi di conservazione" è collocato al biennio *nel tema n. 2 – il movimento: " quantità di moto, energia meccanica e loro conservazione; urti elastici e anelatici".* La trattazione degli urti richiede esperienze di laboratorio che ne evidenziano la fenomenologia in due dimensioni. La conservazione della quantità di moto mostra agli allievi l'importanza e la necessità dei principi di conservazione nell'indagine fisica.

Nel triennio invece, dove le ore settimanali di fisica sono tre con valutazione scritta e orale, l' argomento "i principi di conservazione" è collocato *al tema n. 3: " principi di conservazione-processi reversibili e irreversibili*" nella prima parte troviamo: *sistema isolato, conservazione della quantità di moto e del momento angolare, conservazione dell'energia.*

I successivi programmi elaborati dalla **Commissione Brocca** negli anni 1991 e 1992,che non hanno modificato i programmi PNI di matematica e fisica, sono stati adottati dai vari istituti di istruzione secondaria come progetti di sperimentazione su proposta dello stesso Ministero della Pubblica Istruzione.

PREREQUISITI:

- Algebra vettoriale
- Principi della dinamica
- Le forze e il moto
- Le trasformazione di Galileo e il moto relativo

TEMPI DI SVOLGIMENTO

Per lo svolgimento del percorso didattico sono previste 36 ore di lezione che comprendono lezioni frontali, dialogate, verifiche orali esperienze di laboratorio e verifiche scritte.

OBIETTIVI GENERALI:

- acquisire una buona formalizzazione dei contenuti teorici e l'acquisizione di una metodologia generale di lavoro efficacemente applicabile anche in molti altri campi del sapere
- comprendere i procedimenti caratteristici dell'indagine scientifica, che si articolano in un continuo rapporto tra costruzione teorica e attività sperimentale
- acquisire un insieme organico di metodi e contenuti finalizzati ad una adeguata interpretazione della natura
- acquisire la capacità di reperire informazioni, di utilizzarle in modo autonomo e finalizzato e di comunicarle con un linguaggio scientifico
- acquisire la capacità di analizzare e schematizzare situazioni reali e di affrontare problemi concreti, anche al di fuori dello stretto ambito disciplinare
- acquisire l'abitudine all'approfondimento, alla riflessione individuale e all'organizzazione del lavoro personale capacità a cogliere ed apprezzare l'utilità del confronto di idee e dell'organizzazione del lavoro di gruppo

OBIETTIVI TRASVERSALI :

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze

- ✓ Concetto di simmetria e di invarianza in fisica
- ✓ Variazione e conservazione
- ✓ Il lavoro di una forza costante
- ✓ Il lavoro di una forza variabile
- ✓ La potenza
- ✓ Il concetto di energia
- ✓ L'energia cinetica
- ✓ Teorema dell'energia cinetica
- ✓ Forze conservative e forze dissipative
- ✓ L'energia potenziale gravitazionale
- ✓ L'energia potenziale elastica
- ✓ La conservazione dell'energia meccanica
- ✓ Conservazione dell'energia totale
- ✓ Quantità di moto e sistemi isolati
- ✓ Impulso e quantità di moto
- ✓ I principi della dinamica e la conservazione della quantità di moto
- ✓ Gli urti
- ✓ Il momento di inerzia
- ✓ Momento angolare
- ✓ Conservazione del momento angolare

Competenze

- ✓ Saper applicare le leggi di conservazione studiate alla risoluzione di problemi dinamici
- ✓ Saper comprendere il significato di simmetria e invarianza di una grandezza fisica
- ✓ Saper comprendere il significato di sistema isolato

Capacità

- ✓ saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi anche in contesti diversi

METODOLOGIE:

Gli argomenti verranno affrontati utilizzando contemporaneamente lezioni frontali e dialogiche in modo da favorire una partecipazione attiva degli alunni. L’utilizzo di esempi pratici sarà di ausilio e per introdurre concetti nuovi, e per chiarire o consolidare argomenti appena trattati. Il laboratorio di fisica sarà di ausilio per meglio chiarire alcuni concetti e fenomeni che a volte possono sembrare difficili e lontani dalla vita comune degli studenti; le relazioni prodotte a casa dagli alunni, relativamente al laboratorio svolto, saranno oggetto di valutazione da parte dell’insegnante. Si svolgeranno esercizi in classe di diverso tipo e di difficoltà crescente in modo che siano momento immediato di sostegno e anche di ripasso della teoria. Verranno assegnati degli esercizi a casa scelti con difficoltà crescente, in modo che gli studenti possano acquisire una maggiore familiarità con l’argomento.

CONTROLLO DELL’APPRENDIMENTO:

La valutazione formativa si esegue tramite semplici verifiche orali, esercitazioni in classe, correzione degli esercizi assegnati per casa e valutazione delle relazioni di laboratorio.
Le verifiche orali e gli esercizi alla lavagna permettono inoltre di valutare l’acquisizione di proprietà di linguaggio degli alunni, e il loro criterio di scelta di una strategia risolutiva. La verifica sommativa, nella quale vengono proposti esercizi simili a quelli esaminati in classe, ma non solo, permette di verificare il livello di assimilazione degli argomenti trattati e l’autonomia nella risoluzione degli esercizi.

GRIGLIA PER LA VALUTAZIONE:

La valutazione della verifica sommativa è determinata in base al punteggio attribuito ad ogni esercizio che ne fa parte. Le differenze di punteggio attribuite agli esercizi rispecchiano le relative differenze a livello di conoscenze, competenze e capacità richieste. Nell’attribuzione del punteggio si tiene conto dei seguenti indicatori, suggeriti dal Ministero Pubblica dell’Istruzione(anzitutto in riferimento alla prova scritta dell’esame di stato):

i. Conoscenze specifiche.

ii. Competenze nell’applicare le procedure ed i concetti acquisiti.

iii. Capacità logico e argomentative.

iv. Completezza della risoluzione.

v. Correttezza della risoluzione e dell’esposizione.

Nel caso di errore nello svolgimento degli esercizi si attribuisce solo parte del punteggio completo previsto per essi.

GRIGLIA DI VALUTAZIONE (AD USO DEL DOCENTE)

<table>
<tr><th>Punteggio grezzo (totale 40)</th><th>Voto in decimi (ottenuto con la proporzione)</th><th>Voto in decimi (una proposta)</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="5">0 - 1</td><td rowspan="13">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td rowspan="4">1 - 2</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="4">2 - 3</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="4">3 - 4</td><td rowspan="5">4</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">4 - 5</td></tr>
<tr><td>18</td><td rowspan="5">5</td></tr>
<tr><td>19</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">5 - 6</td></tr>
<tr><td>22</td></tr>
<tr><td>23</td><td>6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>24</td><td></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="4">6 - 7</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="4">7</td></tr>
<tr><td>29</td><td rowspan="4">7 - 8</td></tr>
<tr><td>30</td></tr>
<tr><td>31</td></tr>
<tr><td>32</td><td rowspan="4">8</td></tr>
<tr><td>33</td><td rowspan="4">8 - 9</td></tr>
<tr><td>34</td></tr>
<tr><td>35</td></tr>
<tr><td>36</td><td rowspan="4">9</td></tr>
<tr><td>37</td><td rowspan="4">9 - 10</td></tr>
<tr><td>38</td></tr>
<tr><td>39</td></tr>
<tr><td>40</td><td>10</td></tr>
</table>

STRUMENTI UTILIZZATI:

- ✓ Libro di testo
- ✓ Lavagna e gessi
- ✓ Calcolatrice scientifica
- ✓ Fotocopie
- ✓ Laboratorio di fisica
- ✓ Foglio elettronico

UNITÀ DIDATTICA 1: IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL’ENERGIA MECCANICA

CONTENUTI:

1. La simmetria in geometria e l’idea di invarianza in fisica.
2. Variazione e conservazione

3. Il lavoro di una forza costante
4. Il lavoro di una forza variabile
5. La potenza
6. Il concetto di energia
7. L'energia cinetica
8. Teorema dell'energia cinetica
9. Forze conservative e forze dissipative
10. L'energia potenziale gravitazionale
11. L'energia potenziale elastica
12. La conservazione dell'energia meccanica
13. Conservazione dell'energia totale

SVILUPPO DEI CONTENUTI:

1.1 VARIAZIONE E CONSERVAZIONE

Nei fenomeni studiati in meccanica vi sono molte grandezze che cambiano nel tempo. Su un tavolo da biliardo le biglie che si urtano e rimbalzano sulle sponde cambiano continuamente posizione e velocità. Anche le forze che agiscono sulle biglie hanno intensità e direzioni che variano istante per istante. Studiare un fenomeno significa saper prevedere come variano nel tempo le grandezze più significative. I principi della dinamica servono a fare queste previsioni. Occorre però avere un quadro dettagliato delle forze che in ogni istante agiscono sul sistema.

Qualche volta il problema è di facile soluzione. Nella caduta di un grave nel vuoto è facile prevedere la posizione è la velocità del corpo in caduta in quanto esso è sottoposto a una forza costante. In generale le cose non sono così semplici. Nell'esempio del biliardo, le forze con cui le biglie si urtano variano molto rapidamente e hanno un andamento che conosciamo soltanto in modo approssimativo. Anche il calcolo delle traiettorie risulta molto complesso soprattutto se vi sono molti oggetti in movimento. I principi della dinamica sono uno strumento molto potente per lo studio del moto, riusciamo ad applicarli ad un numero piuttosto ristretto di problemi.

Il quadro può cambiare completamente se si studia il fenomeno da un punto di vista diverso. Invece di determinare nel tempo delle grandezze che variano (spostamento, velocità, le forze), possiamo individuare, se esistono, le grandezze che rimangono costanti nel tempo. In altri termini, anziché sulle *leggi di variazione* ci soffermeremo sulle *leggi di conservazione*.

Una *legge di conservazione* afferma che durante lo svolgimento del fenomeno una grandezza rimane costante dall'inizio alla fine, mentre altre grandezze cambiano continuamente nel tempo. Si tratta di un punto di vista insolito, ma che consente di raccogliere rapidamente molte informazioni sul fenomeno.

In questo percorso didattico parleremo della *conservazione dell'energia,* della *conservazione della quantità di moto* e del *momento angolare.*

In fisica i *principi di conservazione* assumono un ruolo fondamentale nello studio dei fenomeni in quanto continuano ad essere validi anche in ambiti dove la meccanica di Newton e di Galileo non è più valida (ad esempio, fenomeni subatomici e nucleari).

1.2 IL LAVORO DI UNA FORZA COSTANTE

Comunemente diciamo che una persona che svolge una qualsiasi attività sia materiale che mentale compie lavoro.

In fisica il termine lavoro ha invece un significato ben preciso. Compie lavoro un giocatore di tennis quando colpisce la palla con la racchetta, un uomo che sposta un libro da uno scaffale più basso a uno più alto. Precisiamo che, sebbene in fisica si sia soliti dire che il giocatore compie lavoro, è sempre una forza che compie lavoro. Per esempio, un giocatore compie lavoro nel calciare il pallone perché applica ha questo una forza muscolare che fa spostare il pallone.

Una persona che stando ferma tiene una valigia, anche se fatica, non compie lavoro. Perché una forza che agisce su un corpo compia lavoro è necessario che il punto in cui essa è applicata subisca uno spostamento.

Forza e spostamento hanno la stessa direzione

Nel caso di una forza costante applicata a un oggetto che si sposta nella stessa direzione e nello stesso verso della forza, si definisce ***lavoro della forza*** $\vec{F}$ ***il prodotto dell'intensità F della forza per il modulo dello spostamento,*** e scriviamo

$$W = F\ s$$

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del lavoro è il *joule* (J). **1 J è il lavoro compiuto da una forza di 1 N quando il punto di applicazione si sposta di 1 m (in direzione della forza).**

Le dimensioni fisiche del lavoro sono:

$$[W] = [F s] = [m l^2 t^{-2}] = [m] [l^2] [t^{-2}].$$

Quando un sasso cade a terra, la forza di gravità compie un lavoro, perché agisce sul sasso mentre cade.
Se, per esempio, il sasso ha una massa di 1 kg, la *forza di gravità* che lo attrae al suolo è:

$$P = m g = 1{,}0 \text{ kg x } 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \text{ N}.$$

Per una caduta di 3 m, la *forza di gravità* compie un lavoro

$$W = F s = 9{,}8 \text{ N x } 3{,}0 \text{ m} = 29 \text{ J}.$$

Lavoro motore e lavoro resistente

Lanciando una palla da baseball compiamo lavoro. Esso è uguale al prodotto della forza che applichiamo per lo spostamento che compie la palla mentre si trova a contatto con la nostra mano. Anche quando la fermiamo compiamo un lavoro, perché applichiamo una forza mentre la palla si sposta verso di noi. Nel primo caso la forza e lo spostamento hanno lo stesso verso e si dice che la

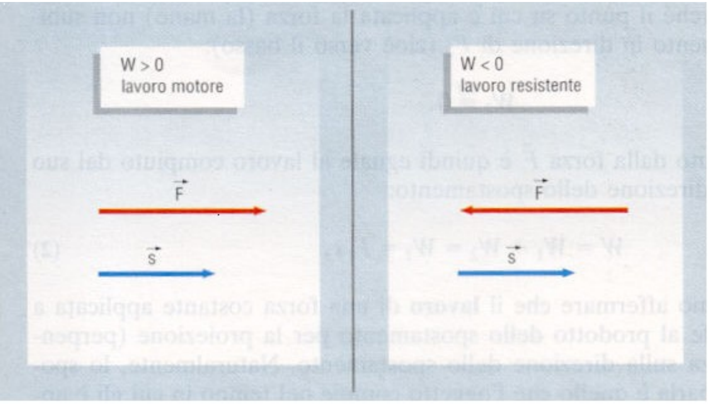


Fig.1
forza compie **un *lavoro motore***. Nel secondo caso la forza e lo spostamento hanno verso opposto e si dice che la forza compie un ***lavoro resistente***. Al lavoro motore si attribuisce il segno positivo, a quello resistente il segno negativo (fig.1)

La forza e lo spostamento hanno direzione diverse

Non sempre la forza e lo spostamento hanno la stessa direzione. Pensiamo ad cane che tira verso il basso il guinzaglio mentre corre in avanti. Il cane applica all'uomo una forza $\vec{F}$ inclinata di un certo angolo α rispetto allo spostamento. Possiamo scomporre la forza $\vec{F}$ in due componenti $\vec{F}_1$ parallela ed $\vec{F}_2$ perpendicolare alla direzione dello spostamento (fig.2). Il lavoro della forza $\vec{F}$ è uguale alla somma dei lavori delle due forze componenti. Essendo il lavoro della componente $\vec{F}_2$ nullo, in quanto il punto su cui è applicata la forza (la mano) non subisce spostamenti in direzione verticale, il lavoro della forza $\vec{F}$ è uguale al lavoro della sola componente $\vec{F}_1$

$$W = W_1 + W_2 = W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} = F\, s \cos\alpha$$

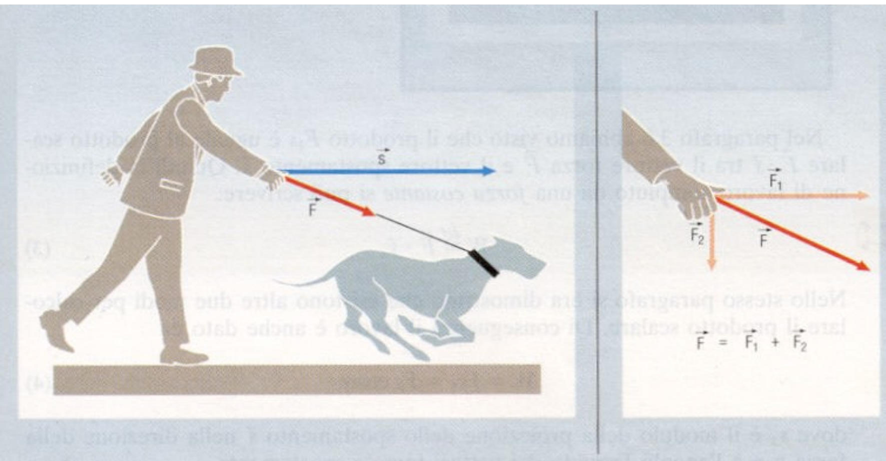


Fig.2

In generale possiamo affermare che il lavoro di una forza costante applicata a un corpo è uguale al prodotto dello spostamento per la proiezione della forza nella direzione dello spostamento.

Sulla base di questa definizione una persona che trasporta una valigia a velocità costante senza alzarla e né abbassarla non compie lavoro. Infatti l'unica forza che applica è una forza verticale che controbilancia il peso della valigia (fig.3), mentre lo spostamento è orizzontale. In direzione orizzontale non vi è alcuna forza, dato che la velocità è costante.

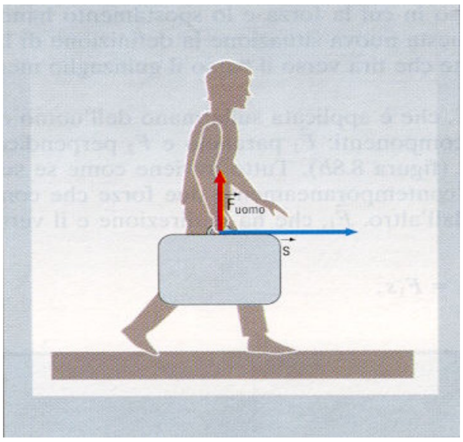


Fig.3

L’espressione (1) rappresenta il prodotto scalare dei vettori $\vec{F}$ ed $\vec{s}$.

$$\boldsymbol{W} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Fatica e lavoro

Se trasportiamo una cassa su per le scale, la fatica che sperimentiamo cresce sia all’aumentare del peso della cassa, sia all’aumentare della lunghezza della salita. In questo caso la grandezza fisica «lavoro», proporzionale sia alla forza che allo spostamento, descrive piuttosto bene anche la nostra sensazione di fatica.

Secondo la formula precedente , però , un uomo che porta una valigia lungo un percorso orizzontale compie un lavoro nullo, perché la forza e lo spostamento sono perpendicolari.

Naturalmente, per trasportare la valigia questa persona non fa una fatica nulla. In questo caso, quindi, la grandezza fisica «lavoro» non corrisponde alla nostra sensazione di fatica.

La contraddizione è soltanto apparente: i nostri muscoli striati non sono in grado di «bloccarsi» e rimanere immobili per sostenere la valigia; mentre la trasportiamo, essa ci piega verso il basso e noi continuiamo a rispondere, anche senza accorgercene, con microscopici ma continui movimenti verso l’alto dei muscoli del braccio.

In ognuno di questi spostamenti la forza che esercitiamo e lo spostamento sono paralleli, per cui il lavoro che compiamo è positivo. E’ la somma di questi lavori che noi avvertiamo come fatica.

1.3 IL LAVORO DI UNA FORZA VARIABILE

Esaminiamo ora il caso in cui la forza varia mentre il corpo si sta spostando. Questo succede, per esempio quando comprimiamo o tiriamo una molla. Se la comprimiamo a velocità costante, dobbiamo esercitare sulla molla una forza uguale e contraria a quella che tende a riportarla nella posizione di equilibrio (fig.4)

$$\vec{F} = k\overrightarrow{\Delta s}$$

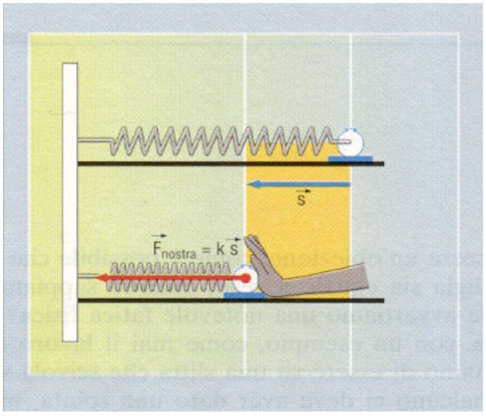


Fig.4

Il lavoro compiuto dalla forza di compressione della molla si può calcolare agevolmente affrontando il problema graficamente. Nel caso di forza costante (fig. 5) il lavoro può determinarsi calcolando l'area di un rettangolo che ha per base *s* e altezza *F* nel diagramma forza – spostamento.

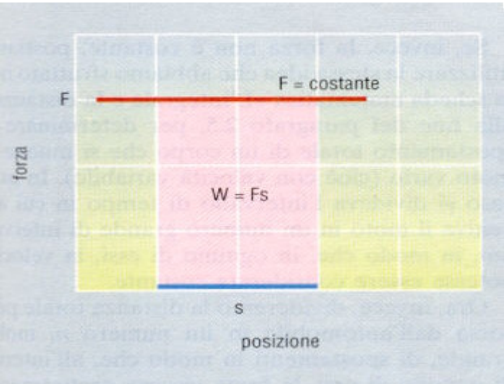


Fig.5

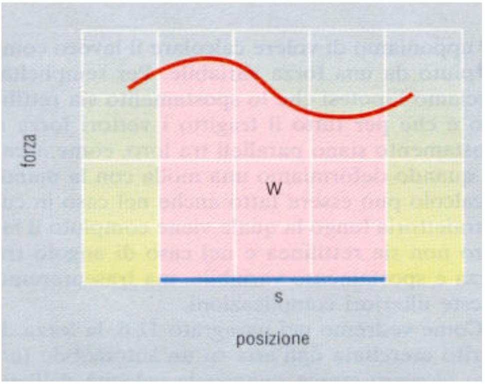


Fig.6

Anche quando la forza non è costante, il lavoro è uguale all'area della superficie delimitata dal grafico di *F* dall'asse degli spostamenti e da segmenti paralleli all'asse delle forze fig. (6).

Nel caso della molla $\vec{F}$ varia linearmente con *lo spostamento* per cui il lavoro è dato dall'area del triangolo avente base *s* e altezza *k s*.

$$W = ½\, k\, s^2$$

Questo lavoro preso con il segno negativo, è anche uguale a quello che compie la molla mentre la comprimiamo. Essa infatti compie un lavoro resistente, perché la forza di richiamo è diretta in senso contrario allo spostamento che compie la sua estremità libera (fig.7) e (fig.8).

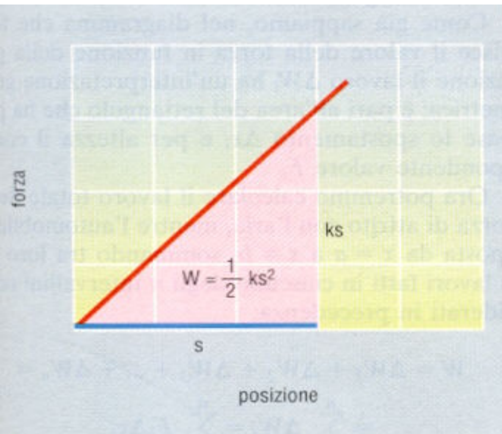


Fig.7

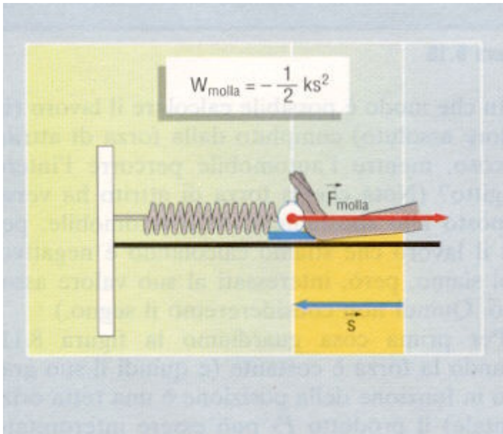


Fig.8

Il calcolo del lavoro di una forza variabile con una legge generica F(x) durante uno spostamento da un punto di ascissa x_1 ad un punto di ascissa x_2, può essere eseguito graficamente come indicato in fig. 9. Per semplicità supponiamo che la forza vari solo in modulo conservando direzione e verso dello spostamento (direzione dell'asse x).

Se dividiamo l'intervallo da x_1 a x_2 in n intervalli parziali Δx, possiamo se n è sufficientemente grande, ritenere la forza costante in ogni in intervallo e uguale al valore F(x), in cui *x* è l'estremo inferiore dell'intervallo considerato. Il lavoro compiuto per effetto dello spostamento elementare Δx, risulta:

$$\Delta W = F(x)\, \Delta x$$

Il lavoro complessivo durante lo spostamento complessivo è uguale alla somma dei lavori elementari in ogni intervallo Δx cioè alla somma delle aree dei singoli dei rettangoli.

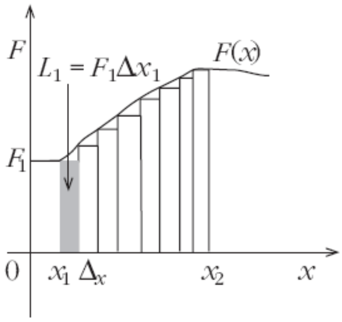


Fig.9

1.4 LA POTENZA

Spesso ha interesse conoscere il lavoro compiuto da un sistema fisico, ad esempio una macchina, nell'unità di tempo. **Si definisce potenza media P_m di un sistema fisico che compie un certo lavoro ΔW in un intervallo di tempo Δt il rapporto:**

$$P_m = \Delta W/\Delta t$$

La potenza esprime la rapidità con cui viene compiuto un determinato lavoro. Una persona che sale le scale velocemente sviluppa più potenza rispetto a una persona che sale le scale con andatura normale. Se Δt è piccolo si parla di potenza istantanea.

L'unità di misura di questa grandezza è il *watt* (W): **1 watt è la potenza sviluppata da una forza che compie il lavoro di 1 joule in 1 secondo:**

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J} /1 \text{ s}$$

Le dimensioni fisiche della potenza sono [P] = [$m\, l^2\, t^{-3}$].

La potenza delle automobili viene misurata in *cavalli vapore* (CV).

$$1 \text{ CV} = 735 \text{ W} = 0{,}735 \text{ kW}.$$

1.5 IL CONCETTO DI ENERGIA

Il progresso dell'uomo è stato reso possibile dalle risorse energetiche e il mantenimento delle attuali condizioni di vita è legato alla disponibilità di energia necessaria per il funzionamento delle industrie. L'energia si presenta in diverse forme che, come vedremo sono convertibili l'una nell'altra**. In fisica, diciamo che *un corpo possiede energia quando è in grado di compiere lavo*ro e la misura di questo lavoro è anche una misura dell'energia.** Per ora ci limitiamo all'introduzione dell'energia meccanica nelle sue due forme di *energia cinetica* e di *energia potenziale*.
Un corpo in movimento è in grado di compiere lavoro per effetto della velocità posseduta. Quando la velocità si annulla, il corpo perde la capacità di compiere lavoro.

Diciamo che **un corpo di massa *m* e velocità** $\vec{v}$ **possiede energia cinetica e la sua misura viene assunta per definizione uguale al lavoro che compie quando si arresta.** Possiamo intermini equivalenti assumere come **energia cinetica il lavoro che è necessario compiere dall'esterno per mettere in moto il corpo fino alla velocità** $\vec{v}$**.**
In modo analogo un corpo che si trova a una certa altezza è in grado di compiere lavoro a mezzo del suo peso durante la caduta. Diciamo che **il corpo a una certa altezza possiede energia potenziale e assumiamo come sua misura quella del lavoro compiuto dalla forza peso.** Quando il corpo raggiunge la superficie terrestre ha perduto la capacità di compiere lavoro e per convenzione diciamo che l'energia potenziale è nulla.
Per distinguerla da altre forme di energia potenziale, l'energia posseduta da un corpo all'altezza *h* dalla superficie terrestre si chiama ***energia potenziale gravitazionale***. Un altro esempio di energia potenziale è **l'energia elastica** di una molla deformata. Infatti una molla compressa, espandendosi, compie lavoro a mezzo della forza elastica, analogamente se la molla è dilatata, ritornando nella configurazione di equilibrio, compie lavoro. La misura del lavoro rappresenta l'energia elastica.
Si osservi che l'energia, sia cinetica che potenziale, essendo stata definita come lavoro, si esprime nel sistema SI con la stessa unità di misura (J).

1.6 ENERGIA CINETICA

Consideriamo un corpo di massa m e velocità $\vec{v}$ che viene arrestato e calcoliamo il lavoro compiuto dal corpo sull'oggetto frenante. Supponiamo di voler conficcare un chiodo in un blocco di legno battendolo con un martello al quale è impressa una velocità $\vec{v}$. Il martello, quando batte il chiodo, esercita una forza $\vec{F}$ che in seguito allo spostamento del chiodo compie un lavoro W che per definizione abbiamo assunto come energia cinetica del martello. Supponendo la forza $\vec{F}$ costante, il moto del martello è di tipo uniformemente ritardato. Essendo la velocità finale nulla, indicando con $\overrightarrow{\Delta s}$ lo spazio percorso dal martello e con $\vec{a}$ l'accelerazione si può scrivere considerando le grandezze in modulo:

$$v - at = 0$$

si assume l'istante di tempo iniziale pari a zero e quello finale pari a t; lo spazio iniziale pari a zero e quello finale pari a s.

da cui $t = s/a$.

Lo spazio percorso è:

$$s \quad = v\,t - ½\,a\,t^2$$

e, sostituendo il valore di t, si ha

$$s = v^2/a - ½\,a\,v^2/a^2 = v^2/2a$$

Il lavoro compiuto dalla forza F trasmessa dal martello al chiodo è:

$$W = F\,s = F\,v^2/2a$$

Tenendo conto che $\vec{F} = \mathrm{m}\vec{a}$, si ha:

$$W = 1/2\,m\,v^2$$

Chiamiamo

$$K = 1/2\,m\,v^2$$

energia cinetica del corpo.

Si tratta di una grandezza scalare, che si misura come joule come il lavoro. La ragione del nome "energia cinetica" è dovuto al fatto che il corpo di massa m, movendosi a velocità v, è in grado di compiere un lavoro proprio pari a $½\,m\,v^2$.

Viceversa è facile dimostrare che per portare dalla quiete a velocità v un corpo di massa m è necessario compiere un lavoro uguale all'energia cinetica finale assunta dal corpo.

Infatti:

$$W = F\,s = m\,a\,s$$

Essendo:

$$v = a\,t \qquad s = ½\,a\,t^2$$

si ha:

$$s = ½\,v^2/a \qquad W = ½\,m\,v^2.$$

1.7 TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Negli esempi trattati precedentemente si è visto che ogniqualvolta una forza agente su un corpo compie un lavoro si ha una variazione di velocità e quindi di energia cinetica.

Nell'esempio di fig.10 la palla di massa *m* ferma viene accelerata da una forza $\vec{F}$. La forza continua ad agire mentre la palla si sposta con moto rettilineo uniformemente accelerato per un tratto $\vec{s}$. Dopo che la forza ha smesso di agire, la palla si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$.

Il lavoro compiuto, come abbiamo visto precedentemente è uguale all'energia cinetica:

$$W = K = ½\,m\,v^2$$

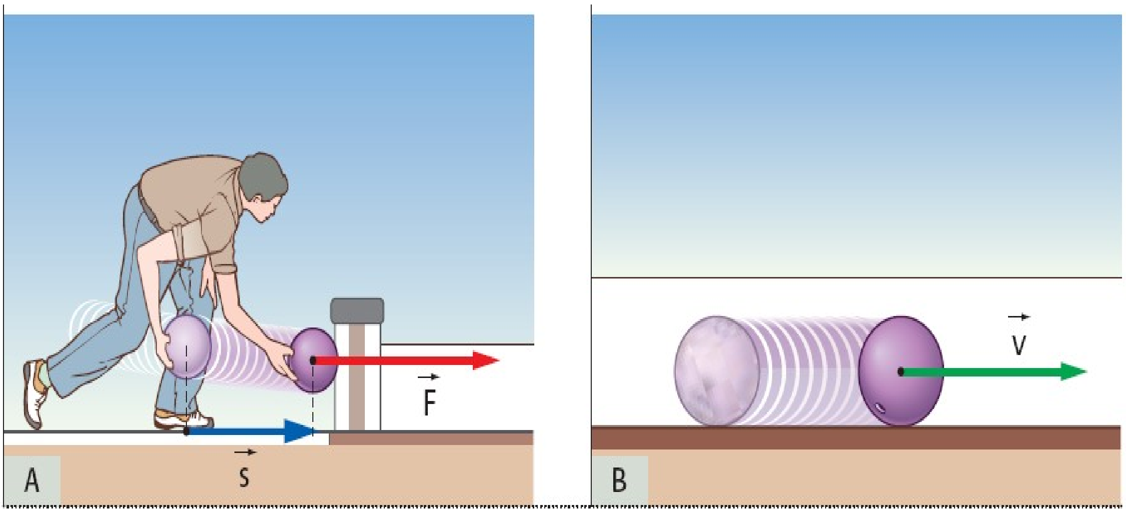


Fig.10

Nell'esempio di fig.11 una palla di massa m che si muove con velocità costante $\vec{v}$, in possesso di una energia cinetica $K = ½\,m\,v^2$ viene fermata con una forza $\vec{F}'$ di intensità costante. La forza continua ad agire mentre la palla si sposta con accelerazione negativa per un tratto $\vec{s}'$ .Il lavoro compiuto dalla forza frenante è quindi:

$$W' = - F' s' = - ½ m v^2$$

La palla, quindi, esercita una forza parallela allo spostamento s'e, di conseguenza compie un lavoro motore (positivo)

$$W = -W' = ½ m v^2$$

L'energia cinetica finale si annulla.

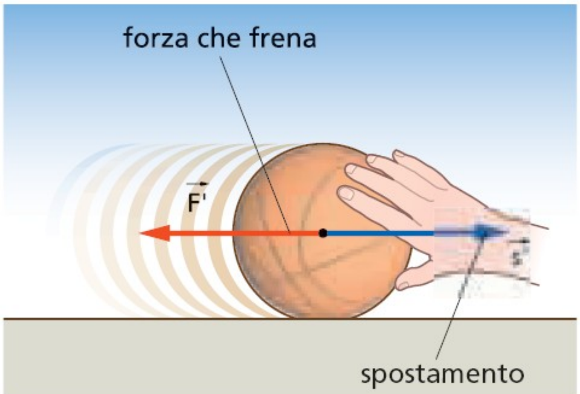


Fig.11

I risultati degli esperimenti possono essere generalizzati. Si può concludere che un lavoro implica sempre una variazione di energia cinetica che può essere negativa o positiva a seconda che il lavoro sia motore o resistente. Più precisamente una variazione può essere valutata dal lavoro totale in virtù del seguente *teorema dell'energia cinetica*:

Il lavoro compiuto dalla risultante delle forze applicate a un corpo lungo una traiettoria AB è uguale alla variazione dell'energia cinetica subita dal corpo nel passare da A a B.

Sia K_0 l'energia cinetica in un certo istante, che possiamo assumere come istante iniziale $t_0 = 0$, e K quella in un altro istante generico t, se W è il lavoro compiuto nell'intervallo $t - t_0$, il teorema dell'energia cinetica si esprime con la relazione:

$$W = K - K_0$$

Per la dimostrazione della relazione suddetta, per semplicità, ci riferiamo al caso di un punto materiale di massa m sottoposto a un insieme di forze la cui risultante $\vec{F}$ sia costante. Si supponga che la velocità $\vec{v_0}$ del punto materiale nell'istante $t = 0$ in cui viene applicata la forza $\vec{F}$ abbia la stessa direzione di $\vec{F}$. In queste condizioni il moto del punto materiale è uniformemente accelerato con accelerazione di modulo $a = F/m$. Indicando con s lo spostamento dall'istante $t = 0$ all'istante t in cui la velocità è diventata $\vec{v}$, il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ è:

$$W = F\,s = m\,a\,s$$

Sapendo, dallo studio del moto uniformemente accelerato, che $a\,s = (v^2 - v_0^2)/2$ segue:

$$W = ½\,m\,v^2 - ½\,m\,v_0^2$$

Risulta così dimostrato il teorema.
Se il lavoro è positivo, si ha un incremento di energia cinetica; a un lavoro negativo corrisponde una diminuzione di energia cinetica.

1.8 FORZE CONSERVATIVE E FORZE DISSIPATIVE

Una forza si dice *conservativa* se il lavoro che essa fa nello spostamento da un punto A fino a un punto B dipende soltanto dagli estremi A e B, ma non dal particolare percorso seguito durante lo spostamento.
Una forza che *non è* conservativa si dice *dissipativa*

Un esempio di forza conservativa: la forza peso.

Consideriamo una palla di massa m che si sposta da un punto di partenza A a un punto di arrivo B spostato di l a destra di A e di h sotto di esso, come è mostrato nella fig12.

Per descrivere i vettori forza-peso $\vec{F_P}$ e spostamento $\vec{s}$ introduciamo un sistema di

riferimento che ha l'asse x rivolto verso destra e l'asse y in alto. Allora:
il vettore forza peso ha la componente orizzontale, in modulo, nulla e quella verticale negativa:

$$F_{P,x} = 0; \quad F_{P,y} = - mg.$$

Il vettore spostamento ha la componente orizzontale, in modulo, positiva e quella verticale negativa:

$$s_x = l; \quad s_y = - h.$$

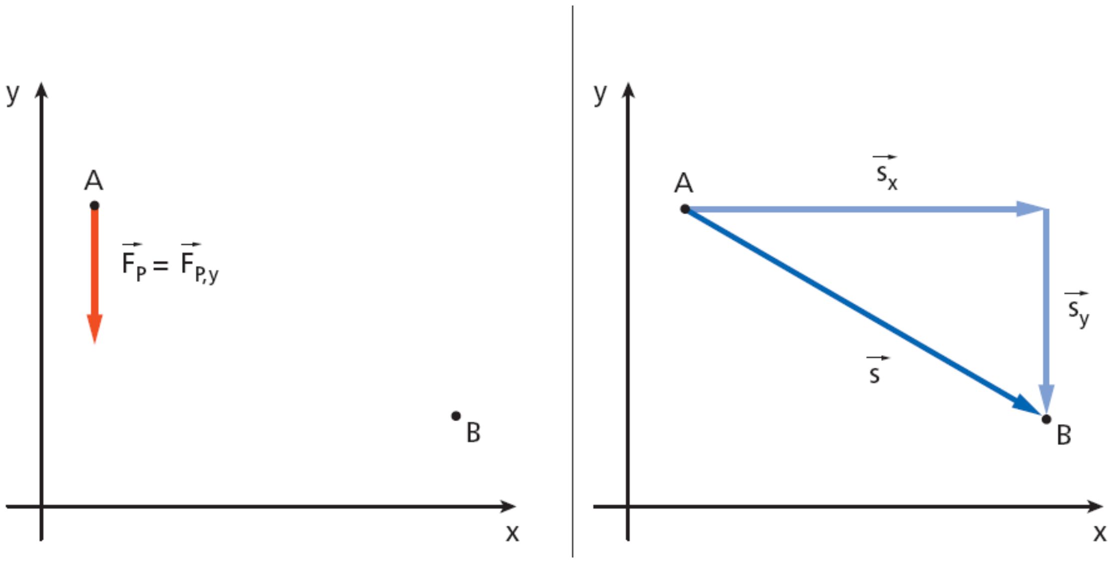


Fig.12

Calcoliamo ora il lavoro fatto dalla forza-peso mentre la palla si sposta da A a B in linea retta (fig.13). Questo lavoro si può calcolare come:

$W = F_P \quad s = F_{P,x} \ s_x + F_{P,x} \ s_y = 0 \times l + (- mg) \times (- h) = mgh.$

Il lavoro fatto è, quindi, $W = m\,g\,h$.

Ora spostiamo la palla da A a B lungo un percorso diverso: da A la portiamo in un punto C che si trova alla destra di A a una distanza l e sopra B; poi, da C la portiamo a B

percorrendo una distanza h.

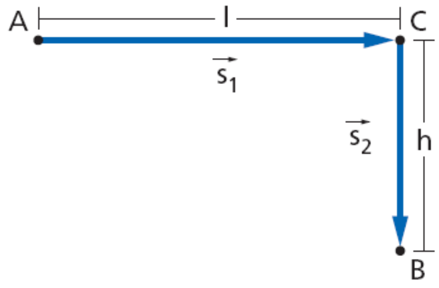


Fig.13

Questa volta il cammino fatto per andare da A a B è composto da due tratti rettilinei e così il lavoro W è la somma di due contributi:

$$W = W_1 + W_2.$$

Durante il tratto 1, da A a C, il vettore $\vec{F_P}$ è perpendicolare allo spostamento s, per cui il lavoro W_1 è nullo (fig.14):

$$W_1 = 0.$$

Nel tratto 2, da C a B, i vettori $\vec{F_P}$ e $\vec{s}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso, perciò il lavoro W_2 è positivo (Fig.15):

$$W_2 = F_{P,x}\ s_2 = mg \text{ x } h = mgh.$$

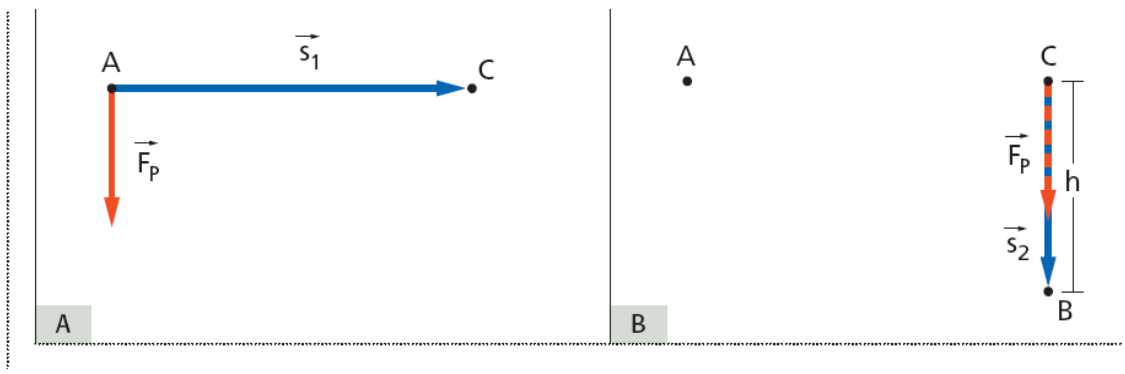


Fig.14 Fig.15

Anche in questo caso il lavoro totale risulta

$$W = W_1 + W_2 = 0 + mgh = mgh$$

e, quindi, è uguale a quello calcolato con la formula precedente. In realtà, facendo calcoli più complicati possiamo vedere che il lavoro compiuto dalla forza-peso mentre la palla si sposta tra A e B vale sempre mgh, qualunque sia la forma del cammino seguito (fig.16). Ciò significa che la forza-peso è *una forza conservativa.*

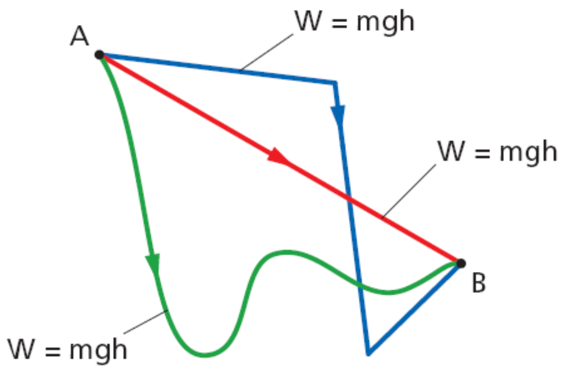


Fig.16

Un esempio di forza dissipativa: l'attrito radente

Consideriamo una persona che spinge una cassa sul pavimento, in linea retta, dal punto O al punto P. Se scegliamo un sistema di riferimento che ha l'origine nel punto O, il punto P ha coordinate (a, b) e, per il teorema di Pitagora (fig.17), la distanza tra O e P è

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

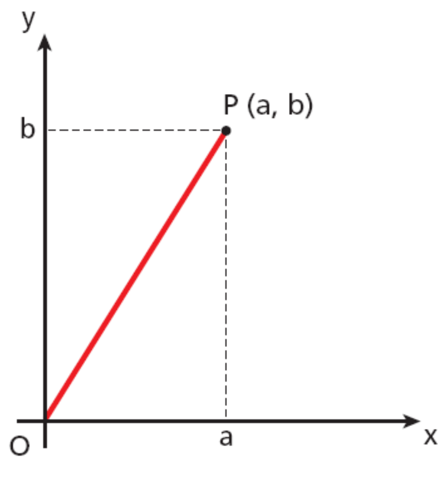


Fig.17

Mentre la cassa si muove, tra essa e il pavimento agisce la forza di attrito F_A che ha sempre la direzione dello spostamento $s_{O\to P}$ della cassa e verso opposto (Fig18).

Per la formula (2), il lavoro di questa forza è:

$$W_{O\to P} = -F_A\overline{OP} = -F_A\sqrt{a^2+b^2} \tag{16}$$

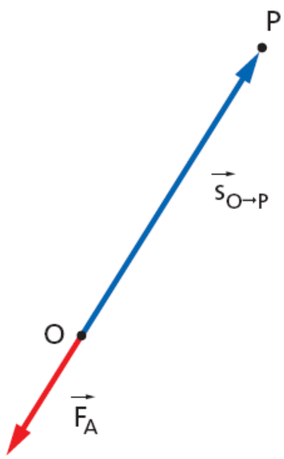


Fig.18

Ora la cassa viene spostata da O a P passando per il punto Q, che ha coordinate $(a, 0)$ (fig.19). Il lavoro $W_{O\to Q\to P}$ della forza di attrito durante questo spostamento è la somma di due contributi: $W_{O\to Q}$ durante lo spostamento $\overrightarrow{s_{O\to Q}}$ da O a Qe $W_{Q\to P}$ durante lo spostamento $\vec{s}_{o\to p}$ da Q a P:

$$W_{O\to Q\to P} \qquad W_{O\to Q} + W_{Q\to P}.$$

Per la stessa ragione di prima si ha

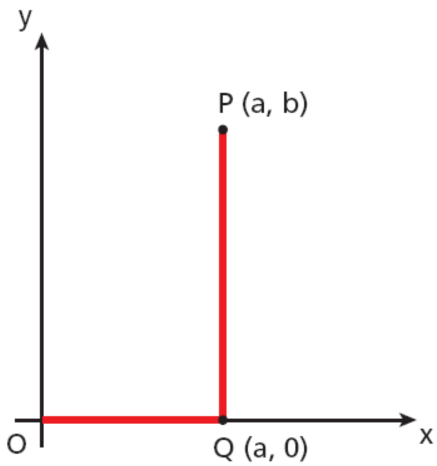


Fig.19

$$W_{O\rightarrow Q} = - F_A \; OQ = -F_A \; a \qquad \text{e} \qquad W_{Q\rightarrow P} = - F_A \; QP = -F_A \; b,$$

perciò risulta

$$W_{O\rightarrow Q\rightarrow P} = W_{O\rightarrow Q} = W_{Q\rightarrow P} = - F_A \; a - F_A \; b = - F_A \; (a + b).$$

Così, il lavoro compiuto dalla forza di attrito mentre la cassa è spostata da *O* a *P* in linea retta è diverso da quello compiuto dalla stessa forza lungo il percorso da *O* a *P* passando per *Q:* è quindi dimostrato che l'attrito radente non è una forza conservativa. Cioè :

la forza di attrito radente è dissipativa.

1.9 ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Consideriamo un corpo di massa m immerso nel *campo gravitazionale* terrestre. Se lo lasciamo cadere, la forza peso che agisce sul corpo compie un lavoro. Se lo lasciamo cadere da una altezza maggiore il lavoro compiuto è maggiore, se l'altezza è minore, il lavoro è minore. Questo lavoro equivale (trascurando gli attriti con l'aria) all'energia cinetica che il corpo possiede al momento dell'impatto con il terreno.

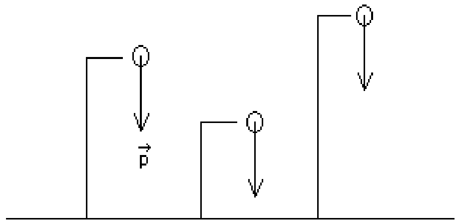


Fig.20

La capacità, l'attitudine, che ha il corpo nel compiere un lavoro per il fatto di trovarsi in una certa posizione all'interno di un campo di forze si chiama energia potenziale.
Possiamo allora affermare che l'energia potenziale di un corpo è l' energia di posizione che esso possiede in potenza e che può trasformarsi in lavoro.
Nell'esempio del campo gravitazionale, diremo che il corpo possiede una *energia potenziale gravitazionale.*
L'energia potenziale gravitazionale è l'energia che un corpo possiede per il semplice motivo di essere in una certa posizione all'interno di un campo gravitazionale.

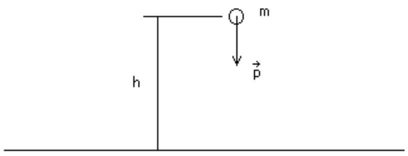


Fig.21

Nel caso illustrato dalla figura abbiamo un corpo di massa m ad un'altezza pari ad h da terra (o rispetto ad un qualsiasi altro piano di riferimento parallelo alla superficie terrestre). Il corpo, in quanto immerso nel campo gravitazionale terrestre, è soggetto alla forza peso . Se il corpo viene lasciato cadere, come abbiamo già visto, esso acquisterà, quando sarà in procinto di toccare terra, una *energia cinetica* pari al *lavoro* che la forza peso compie nel tragitto lungo h .
E' per questo motivo che diciamo che il corpo possiede una *energia potenziale gravitazionale,*

proprio perché il corpo (ovvero la forza-peso applicata su di esso) è in grado di compiere un lavoro grazie al fatto di essere posizionato ad una certa altezza da terra (o da qualsiasi piano di riferimento). Determiniamo ora il valore dell'energia potenziale gravitazionale. Per fare questo consideriamo il lavoro che si compie per portare il corpo dal suolo alla quota h rispetto a terra. Questo lavoro compiuto sarà esattamente uguale all'energia potenziale che il corpo avrà alla quota h .

Per fare questo applichiamo sul corpo a terra una forza rivolta verso l'alto lievemente maggiore del peso del corpo :

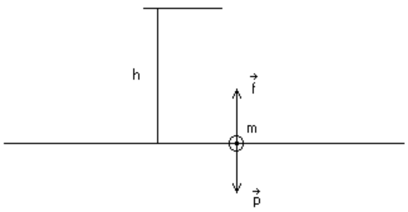


Fig.22

In questo modo, essendo la risultante fra le due forze diversa da zero e rivolta verso l'alto, il corpo comincerà a salire. Subito dopo che il corpo comincia la sua ascesa, rendiamo la forza $\vec{f}$ esattamente pari (in intensità) alla forza peso. Così, essendo nulla la risultante delle forze, il corpo salirà di moto rettilineo uniforme (con velocità costante, anche se piccola). Poco prima di arrivare alla quota h, diminuiamo l'intensità della forza $\vec{f}$ in modo da far sì che la risultante diventi lievemente rivolta verso il basso. In questo modo il corpo comincerà a decelerare finché, giunto alla quota h , esso sarà del tutto fermo.

Calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza $\vec{f}$. Considerando che le lievi differenze che essa ha avuto in intensità rispetto alla forza peso (all'inizio del percorso ed alla fine) si neutralizzano a vicenda, tale lavoro sarà :

$$W = P\,h$$

Essendo la forza peso, in modulo,(per il secondo principio della dinamica) pari a :

$$P = m\,g$$

(dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità) avremo :

$$W = m\,g\,h$$

Questa semplice formula ci dà il lavoro fatto per portare un corpo di massa m alla quota h in presenza del campo gravitazionale terrestre.

Questo lavoro sarà pari *all'energia potenziale gravitazionale* che il corpo ha alla quota h .

Scriveremo allora :

$$\boldsymbol{U = m\,g\,h}$$

dove con U si indica comunemente tale energia potenziale.

Questa energia potenziale è, ovviamente, uguale al lavoro fatto dalla forza peso quando il corpo cade dalla quota h e raggiunge il terreno.

Si noti infine che l'energia potenziale gravitazionale (così come ogni altro tipo di energia potenziale) non è una grandezza assoluta, bensì essa dipende dal *piano di riferimento* rispetto al quale si riferisce la quota h . Cambiando piano di riferimento, l'energia potenziale gravitazionale cambia.

Possiamo misurare h rispetto al suolo o da qualsiasi altro *livello di riferimento*, per esempio da un balcone, dal fondo di un pozzo. Il livello di zero può essere scelto in modo arbitrario.

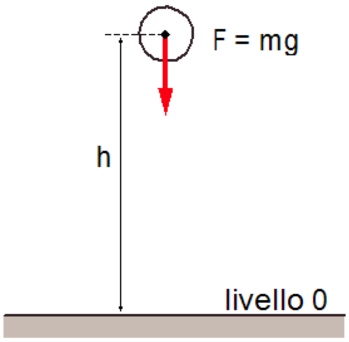


Fig.23

Se indichiamo con h_A *e* h_B le posizioni assunte dal corpo rispetto al livello 0, le relative energie potenziali sono date da: $U_A = m\,g\,h_A$ e $U_B = m\,g\,h_B$ rispettivamente.

Segue facilmente che il lavoro compiuto dalla forza peso quando il corpo si sposta da A a B è:

$$W = U_A - U_B$$

Oppure:

$$W = - \Delta U$$

Problema

Uno scalatore si trova a un'altezza di 50 m rispetto alla base della parete su cui arrampica. La massa dello scalatore (compresa l'attrezzatura) è di 80 kg.

Qual è l'energia potenziale dello scalatore, avendo scelto come livello di riferimento la base della parete?

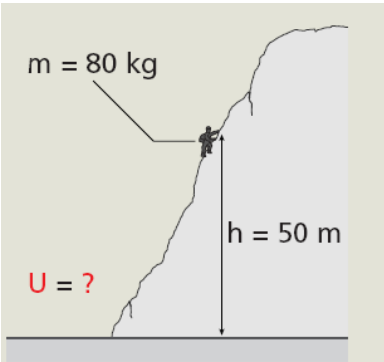


Fig.24

Soluzione

$U = m\, g\, h$ = 80 x 9,8 m/ s^2 x 50 m 0 3,9 x 10^4 kg m^2/s^2 = 3,9 x 10^4 J

1.10 ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

Una molla compressa o allungata è in grado di compiere lavoro quando viene lasciata andare. Per esempio, nel campanello della bicicletta il suono è causato dal ritorno di una molla che è stata allungata.

Quindi possiamo dire che anche una molla deformata possiede *un'energia potenziale elastica*, esattamente come un oggetto sollevato rispetto alla quota di riferimento possiede un'energia potenziale gravitazionale.

Scegliamo lo zero dell'energia potenziale della molla nella situazione in cui essa è a riposo. In questo modo possiamo definire l'energia potenziale della molla come abbiamo visto precedentemente:

l'energia potenziale elastica di una molla deformata è uguale al lavoro compiuto dalla

forza elastica quando la molla si riporta nella sua posizione di riposo (livello di zero).
L'energia potenziale elastica è sempre positiva, perché (sia per la molla compressa, sia per quella allungata) i vettori forza elastica (di richiamo) e spostamento della molla sono paralleli tra loro, per cui il lavoro è sempre positivo.

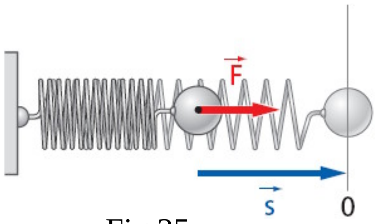


Fig.25

Il lavoro della forza elastica

L'espressione della forza elastica, per una molla che ha subito una deformazione *x*, come abbiamo visto, è:

$$F = k\ x$$

dove *k* è la costante elastica della molla. Così, mentre la deformazione *x* della molla passa dal valore iniziale *s* a quello finale (pari a zero), il valore della forza elastica cambia continuamente. Ciò significa che, mentre la molla ritorna alla posizione di riposo, la grandezza *F* non ha un valore costante (fig.26) e, quindi, il lavoro non può essere calcolato con la formula $W = F\ x$.

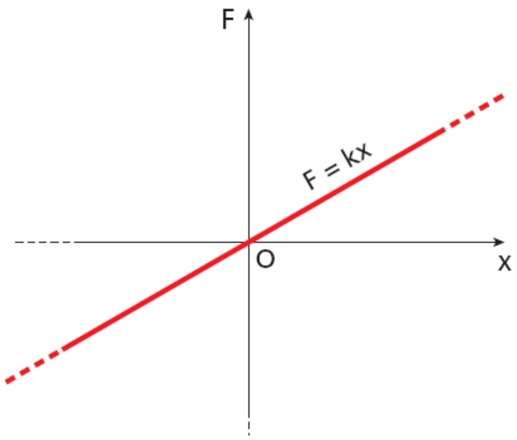


Fig.26

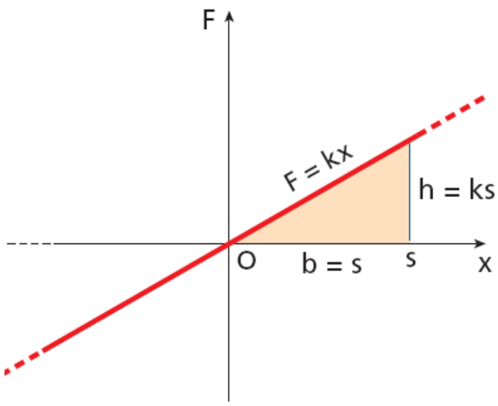


Fig.27

Per la forza elastica il lavoro è in questo caso l'area di un triangolo:

$$W = (b \times h) /2 = (s \times ks) /2 = ½\, k\, s^2$$

Così abbiamo calcolato il lavoro della forza elastica, che è anche uguale all'energia potenziale elastica U_e della molla deformata con uno spostamento *s*:

$$U_e = ½\, k\, s^2$$

1.11 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

1. Caso gravitazionale

Un corpo in movimento possiede energia cinetica, la cui variazione è uguale al lavoro compiuto dalle forze agenti. D'altra parte, se le forze agenti sono conservative, il corpo possiede anche energia potenziale, la cui variazione cambiata di segno è uguale al lavoro compiuto dalle forze. Durante il movimento in generale variano sia l'energia cinetica che l'energia potenziale. Vogliamo confrontare le due variazioni di energia.

Si supponga che l'unica forza agente su un corpo di massa *m* sia la forza peso. Se *A* e *B* sono le posizioni assunte dal corpo durante il moto, indicando con K_A e K_B le energie cinetiche in *A* e *B* e con U_A e U_B le energie potenziali negli stessi punti, il lavoro della forza peso si può scrivere rispettivamente con le relazioni:

$$W = K_B - K_A$$

$$W = U_A - U_B$$

da cui segue:

$$K_B - K_A = U_A - U_B$$

$$K_B + U_B = K_A + U_A$$

Nel passaggio dalla posizione *A* alla posizione *B*, pur variando sia l'energia cinetica sia l'energia potenziale, la loro somma rimane costante.

Data l'arbitrarietà dei punti A e B, se K e U rappresentano rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale in una posizione generica, possiamo scrivere:

$$K + U = costante$$

oppure, esplicitando le energie:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = costante$$

Possiamo perciò concludere che un corpo sotto l'azione della sola forza peso, in condizione di attrito trascurabile, *la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale si mantiene costante durante il moto.*

Poiché l'energia cinetica e quella potenziale sono due forme di energia meccanica, possiamo affermare che durante il moto l'energia meccanica è costante.

Quesito: Un pendolo di massa $m = 200\ g$ e lunghezza $l = 140\ cm$ viene sollevato di $10\ cm$ dalla sua posizione di equilibrio. Si calcoli la massima velocità raggiunta dal pendolo nella sua oscillazione e l'energia meccanica del sistema.

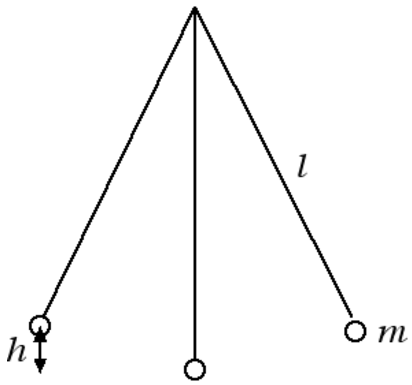


Fig.28

Risposta: Quando il pendolo viene spostato dalla sua posizione di equilibrio e viene portato ad un'altezza h acquista energia potenziale gravitazionale; in tale posizione la sua energia meccanica è interamente potenziale gravitazionale $U = m\ g\ h$, mentre la sua energia cinetica è nulla. Nella configurazione in cui il pendolo è disposto in verticale avremo invece che la sua energia potenziale gravitazionale è nulla e la sua energia meccanica coincide con l'energia cinetica $K = 1/2\ m\ v^2$. È chiaro che questa è la configurazione in cui è massima la velocità del pendolo. Dalla conservazione dell'energia meccanica otteniamo $1/2\ m\ v^2 = m\ g\ h$ da cui $v^2 = 2\ g\ h = 2 \cdot 9.8\ m / s^2 \cdot 0.1\ m = 1.96\ m^2 / s^2$. Estraendo la radice quadrata, otteniamo infine che la velocità massima raggiunta dal pendolo è $v = 1.4\ m / s$. Il dato relativo alla massa del pendolo $m = 200\ g = 0.2\ kg$ ci consente invece di calcolare l'energia meccanica del sistema. Siccome l'energia meccanica si conserva basterà

Calcolare l'energia meccanica nella configurazione iniziale: $U = m\ g\ h$ = 0,2 kg 9,8 N /kg 0,1 m = 0,196 J.

Quesito: Consideriamo una biglia di massa $m = 100\ g$ che parte dal punto A con una velocità pari a $m\ 2 / s$. Stabilire se, e in caso affermativo con quale velocità, la biglia arriva nei punti B e C.

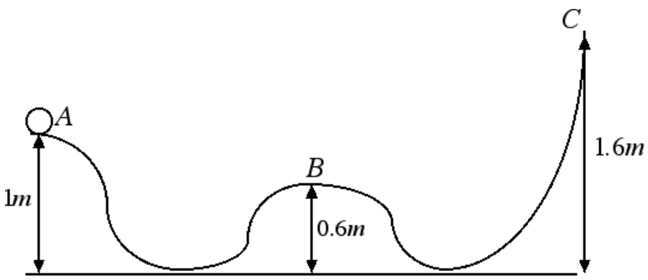


Fig.29

Risposta: All'istante iniziale la biglia di massa $m = 100\ g = 0.1\ kg$ possiede sia energia cinetica che potenziale gravitazionale. Pertanto la sua energia meccanica è data dalla somma delle due: $K + U = 1/2\ m\ v^2 + m\ g\ h = (1/2 \cdot 0.1 \cdot 2^2 + 0.1 \cdot 9.8 \cdot 1)\ J = 1.18\ J$. In B l'energia potenziale gravitazionale della biglia vale $U_B = 0.1\ kg \cdot 9.8\ N / kg \cdot 0.6\ m = 0.59\ J$. Se non c'è attrito l'energia meccanica iniziale, pari a 1.18 J, si conserva ed è sufficiente a far arrivare il corpo in B. Il corpo arriverà in B con un'energia cinetica data da $1.18\ J - 0.59\ J = 0.59\ J$ e quindi con una velocità che gli consente di procedere oltre. In C l'energia potenziale gravitazionale è uguale a $U_C = 0.1\ kg \cdot 9.8\ N / kg \cdot 1.6\ m = 1.57\ J$. In questo caso l'energia meccanica del corpo, $1.18\ J$, non è sufficiente a far raggiungere al corpo il punto C. L'altezza massima h che il corpo può raggiungere si ha quando l'energia meccanica è interamente potenziale gravitazionale ossia quando $m\ g\ h = 1.18\ J$ *da cui* $h = 1.18\ J / (m \cdot g) = 1{,}18 / (0.1\ \ 9.8)\ m = 1.2\ m$. Quando il corpo raggiunge tale altezza si ferma e torna indietro.

2. Caso elastico

Consideriamo un corpo di massa m soggetto a una forza elastica di richiamo (vedi fig.25): sappiamo che il moto che ne risulta, una volta spostato il corpo dalla posizione di equilibrio e poi lasciato libero di muoversi è un moto oscillatorio armonico.

La somma dell'energia elastica della molla e dell'energia cinetica del corpo, trascurando la massa

della molla rispetto a quella del corpo, rappresenta l'energia totale del sistema. Nel centro di oscillazione la velocità, e di conseguenza l'energia cinetica, è massima, mentre quella elastica è nulla. Agli estremi di oscillazione l'energia cinetica è nulla, quella elastica risulta massima. Nelle altre posizioni i due tipi di energie sono entrambe diverse da zero. Con ragionamento analogo a quello fatto per la forza peso si dimostra che l'energia totale è costante durante l'oscillazione.
Possiamo pertanto scrivere:

$$\frac{1}{2}\, m v^2 + \frac{1}{2}\, k s^2 = \text{costante}$$

Durante il moto oscillatorio si hanno conversioni di energia dalla forma elastica a cinetica e viceversa, ma la loro somma rimane costante. In particolare, se s_0 è l'ampiezza del moto, si ha:

$$\frac{1}{2}\, m v^2 + 1/2\, k x^2 = 1/2\, k s_0^2$$

Il corpo, soggetto all'azione della forza elastica, spostato dalla posizione iniziale di equilibrio in modo da allungare la molla di un tratto s_0 e lasciato libero, deve oscillare tra $-s_0$ e $+s_0$ in quanto l'energia iniziale è $\frac{1}{2}\, k s_0$.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE

In realtà , quasi sempre l'energia meccanica totale di un sistema *non si conserva*.

a) Un sasso che cade diminuisce la propria energia potenziale e aumenta l'energia cinetica. Ma quando si ferma sul terreno perde l'una e l'altra.

b) Un'automobile che viaggia in pianura ha un'energia cinetica. Frenando fino a fermarsi, però , la perde completamente.

In tutti questi casi, abbiamo l'impressione che una certa quantità di energia scompaia o «vada sprecata». Tuttavia, ciò non è vero. L'energia meccanica che manca si è trasformata in energia interna dei corpi, che di solito è percepita come aumento di temperatura.
Dove cade un grosso meteorite, si crea un cratere: le rocce sono spezzate, il terreno si è modificato e addirittura liquefatto per il forte calore che si è sviluppato durante l'urto.
Quando un'automobile frena, i dischi dei freni si riscaldano a causa dell'attrito. Anche l'aria intorno alla ruota diventa un po' più calda durante la frenata.

a) L'energia potenziale del meteorite si è trasformata prima in energica cinetica poi in rottura e deformazioni meccaniche e in energia interna del terreno dove è avvenuto l'impatto.

b) L'energia cinetica dell'automobile si è trasformata in energia interna dei freni e dell'aria vicina.

L'energia interna di un corpo è la somma delle energie dei suoi atomi e delle sue molecole. Quindi, l'energia cinetica del meteorite si è trasformata in energia delle sue molecole e di quelle del terreno su cui è avvenuto l'impatto. L'aumento di energia di agitazione molecolare è percepito come aumento di temperatura e ha l'effetto di liquefare il terreno.

Se nel bilancio teniamo conto non solo dell'energia meccanica, ma anche di tutte le altre forme di energia, possiamo affermare che:

in un sistema isolato l'energia totale (meccanica, elettrica, nucleare, interna, ...) si conserva.

Questa affermazione è nota come *principio di conservazione dell'energia totale*. Non siamo assolutamente sicuri che continuerà a valere anche dopo le scoperte che si faranno in futuro, però è una legge sperimentale generale che finora si è sempre rivelata esatta e la quasi totalità dei fisici sono convinti che non sarà smentita neppure da nuove conoscenze.

UNITÀ DIDATTICA 2:
LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO E DEL MOMENTO ANGOLARE.

CONTENUTI:

1. Quantità di moto e sistemi isolati
2. Conservazione della quantità di moto
3. Indipendenza del principio di conservazione della quantità di moto dal sistema inerziale.
4. Impulso di una forza.
5. Principi della dinamica e conservazione della quantità di moto.
6. Urti
   - Conservazione della quantità di moto negli urti e classificazione degli urti (urti elastici, urti anelastici)
7. Momento angolare.
8. Conservazione del momento angolare.
9. Simmetrie in geometria e invarianti in fisica

SVOLGIMENTO DEI CONTENUTI:

2.1 QUANTITÀ DI MOTO E SISTEMI ISOLATI

Esperimento 1:

Poniamo due carrelli su un tavolo ben levigato o due dischi di ghiaccio secco. I due carrelli sono legati l'uno all'altro per mezzo di un filo in modo che la molla interposta tra loro sia mantenuta in uno stato di compressione. I due carrelli hanno uguale massa m. Se si brucia il filo si trova che i carrelli acquistano velocità $\overrightarrow{v'_A}$ e $\overrightarrow{v'_B}$ opposte. Per misurare le velocità possiamo ricorrere al seguente artificio: sul tavolo supposto orizzontale si dispongono due arresti in modo che i carrelli li tocchino contemporaneamente. Ripetendo l'esperimento e spostando di volta in volta il punto di partenza dei carrelli . Se gli spazi percorsi dai carrelli dall'istante in cui si brucia il filo a quello in cui urtano contro gli arresti sono x_A e x_B detto Δt l'intervallo di tempo in cui avviene il transito si avrà $\overrightarrow{v'_A} = \frac{x_A}{\Delta t}$ e $\overrightarrow{v'_B} = \frac{x_B}{\Delta t}$

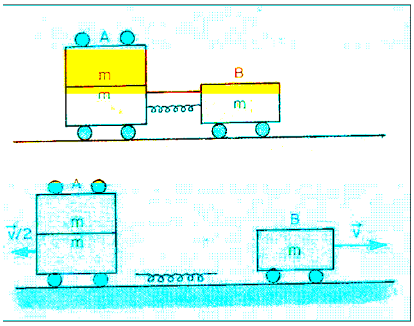


Fig.30

Si ripete l'esperimento con un sistema A formato da due carrelli uguali, cioè aventi la stessa massa, e da un carrello B. Nel disegno l'esplosione (cioè l'urto senza contatto) avviene rompendo una molla che collega i due carrelli. Si trova sperimentalmente che il sistema A acquista, dopo l'esplosione, una velocità v'_A pari alla metà della velocità v_B' assunta dal carrello B, inoltre v'_A e v_B' hanno versi opposti.

Esperimento 2

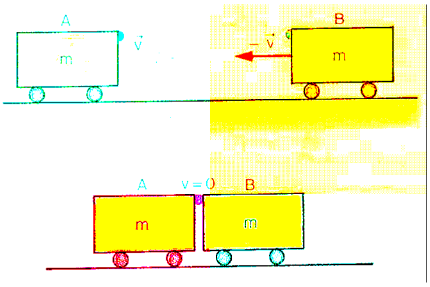


Fig.31

Eseguiamo ora un esperimento di implosione.

Ai carrelli A e B, sempre di massa m, lanciati con velocità opposte, si attacca della plastilina in modo che essi restino uniti dopo l'urto. Si trova sperimentalmente che dopo l'urto entrambi i carrelli si fermano. Se si ripete l'esperimento impiegando come sistema A due carrelli, uno sull'altro, si trova che dopo l'urto la velocità del sistema composto A+B è esattamente uguale a un terzo del comune valore delle velocità dei due carrelli prima dell'urto ed è diretta come la velocità $\vec{v}_A$ del sistema di massa maggiore prima dell'urto.

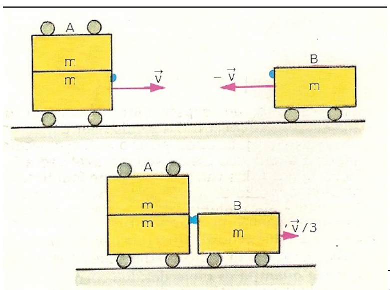


Fig.32

Esperimento 3

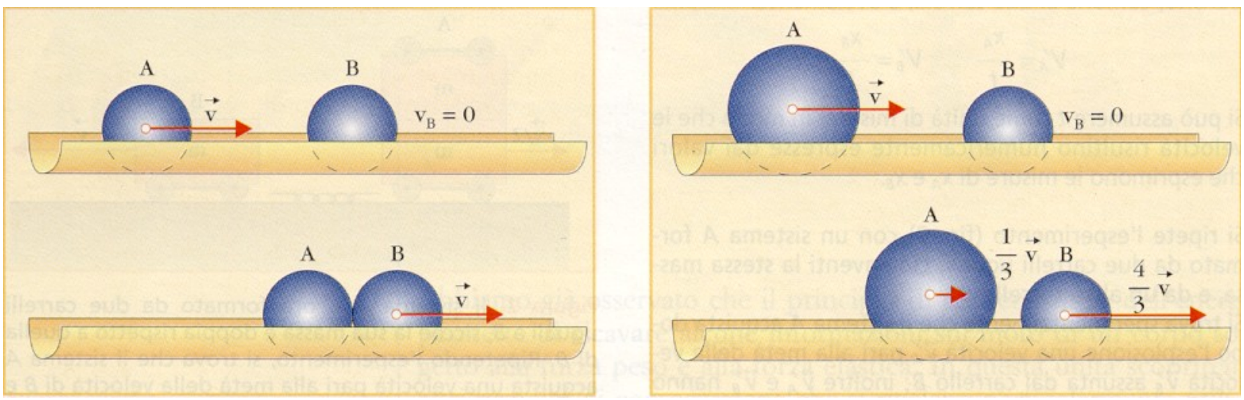


Fig.33

Consideriamo un urto tra due sferette metalliche, disposte su un binario in modo che la direzione di movimento sia sempre la stessa sia prima che dopo l'urto. Si trova che una sferetta A, che urta con velocità $\overrightarrow{v_A}$ una sferetta B di uguale massa e inizialmente ferma, si arresta dopo l'urto, mentre B acquista esattamente la velocità che aveva A prima dell'urto.

Ripetendo l'esperimento, impiegando ora una sferetta A di massa doppia rispetto a quella di B, inizialmente sempre ferma, si trova che dopo l'urto entrambe le sferette si muovono nel verso di $\overrightarrow{v_A}$ e con velocità $\overrightarrow{v'_A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{v_A}$ e $\overrightarrow{v'_B} = \frac{4}{3}\overrightarrow{v_B}$

Tutti gli esperimenti considerati sono esempi di interazione tra corpi in cui si conserva la quantità di moto.

Cenni storici: Le interazioni secondo Cartesio e Leibniz

Secondo Cartesio, tutti i fenomeni si interpretano in base al movimento.

Come misura del movimento di un corpo di massa m e velocità v Cartesio considerò il prodotto mv, chiamato **quantità di moto.** Egli asserisce che: due corpi, che vengono a contatto urtandosi tra loro, modificano il proprio movimento, in modo che uno dei due cede all'altro una parte o tutta la propria quantità di moto. Nell'urto però, la somma delle quantità di moto dei corpi urtanti non viene alterata.

Alla conservazione della quantità di moto di Cartesio, Leibniz (1646-1716) contrappose la conservazione dell'energia o **forza viva o conatus** di cui però non diede mai una esatta definizione. Su suggerimento di Huygens, Leibniz considerò come misura della forza viva di un corpo di massa m e velocità v il prodotto tra la massa e il quadrato della velocità.

Verifichiamo se nell'esperimento 1 si conserva la quantità di moto di Cartesio:

prima dell'esplosione: Q=0

dopo l'esplosione: Q'=2mv

La quantità di moto secondo Cartesio non si conserva

Analogamente si trova che la quantità di moto non si conserva nemmeno nel secondo esperimento, mentre si conserva nel terzo.

Come si vede, la conservazione della quantità di moto, così come era intesa da Cartesio, non era un principio di carattere generale, come invece egli sosteneva.

Per verificare se negli esperimenti di interazione considerati si conserva la forza viva di Leibniz,calcoliamo le forze vive K e K' del sistema dei due corpi prima e dopo l'urto:

Esperimento 3:

caso a) prima dell'urto K= mv^2

Dopo l'urto K'=mv^2

Caso b) prima dell'urto T=2 mv^2

Dopo l'urto $K^{'} = 2m\left(\frac{1}{3}v\right)^2 + m\left(\frac{4}{3}v\right)^2 = 2mv^2$

Si ha perciò K=K'

La forza viva si conserva. Allo stesso modo si può verificare che la forza viva non si conserva nel primo e nel secondo esperimento.

Quindi anche la conservazione della forza viva di Leibniz non può essere considerata un principio di validità generale!

Pertanto se esiste una grandezza che si conserva nelle interazioni tra due corpi questa non è né la quantità di moto di Cartesio né la forza viva di Leibniz. Si accese un animata disputa tra i sostenitori di entrambi. Oggi sappiamo che entrambi erano in errore infatti:

DEFINIZIONE: Chiamiamo **quantità di moto** il prodotto

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La quantità di moto è un vettore avente per direzione e verso quelli di $\vec{v}$ e modulo uguale al prodotto della massa per il modulo della velocità. Le unità di misura nei sistemi SI e CGS sono rispettivamente $kg\frac{m}{s}$ e $g\frac{cm}{s}$.

La quantità di moto di un sistema formato da più particelle si definisce come la somma vettoriale delle quantità di moto delle singole particelle.

Interpretazione degli esperimenti

Indichiamo con $\vec{p}_A$, $\vec{p}_B$ e $\vec{p}_{A+B}$ le quantità di moto rispettivamente dei sistemi A, B e A+B prima dell'interazione, e con $\vec{p}^{\,'}_A$, $\vec{p}^{\,'}_B$, $\vec{p}^{\,'}_{A+B}$ le analoghe quantità di moto dopo l'interazione, nell'esperimento 3 abbiamo:

Caso a)

prima dell’urto: $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A = m\vec{v}$ $\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B = 0$ $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = m\vec{v}$

dopo l’urto: $\vec{p}'_A = m_A \vec{v}'_A = 0$ $\vec{p}'_B = m_B \vec{v}'_B = m\vec{v}$ $\vec{p}' = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B = m\vec{v}$

Caso b)

Prima dell’urto: $\vec{p}_A = m_A \vec{v}_A = 2m\vec{v}$ $\vec{p}_B = m_B \vec{v}_B = 0$ $\vec{p} = \vec{p}_A + \vec{p}_B = 2m\vec{v}$

Dopo l’urto: $\vec{p}'_A = m_A \vec{v}'_A = \frac{2}{3}m\vec{v}$ $\vec{p}'_B = m_B \vec{v}'_B = \frac{4}{3}m\vec{v}$ $\vec{p}' = \vec{p}'_A + \vec{p}'_B = 2m\vec{v}$

In entrambi i casi considerati $\vec{p} = \vec{p}'$, pur variando la quantità di moto delle singole sferette, nell’urto si conserva la quantità di moto totale del sistema composto dalle due sferette.

Sistema isolato

Un sistema di due o più corpi si dice isolato quando risulta trascurabile ogni interazione con corpi materiali che non fanno parte del sistema. Pertanto se ci riferiamo alle forze agenti su un corpo di un sistema, possiamo dividere queste due in due categorie: **forze interne,** dovute all’azione di un altro corpo dello stesso sistema, e **forze esterne**, dovute all’azione di corpi che non appartengono al sistema.

2.2 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

In un sistema isolato la quantità di moto totale rimane costante nel tempo, se misurata rispetto a un sistema inerziale.

Si deve tener presente che ciò che rimane costante è la quantità di moto totale del sistema, invece quella di un corpo qualsiasi del sistema è soggetta a variazione se nell’interno del sistema hanno luogo delle interazioni tra le singole parti del sistema stesso. Nei esperimenti precedenti la quantità di moto totale si mantiene costante in quanto i sistemi considerati sono isolati. Nell’esperimento 1 ciascun carrello prima di bruciare il filo, e soggetto a due forze esterne, il proprio peso mg e la reazione del piano di appoggio che si fanno equilibrio avendo supposto il piano di appoggio orizzontale, e due forze interne, la tensione del filo T e la forza elastica della molla le quali formano un altro sistema equilibrato. Nell’istante in cui si brucia il filo cessa l’azione della tensione T e i carrelli, sotto l’azione della forza elastica F acquistano una velocità crescente finchè dura l'interazione. Anche durante l'interazione il sistema è isolato in quanto le forze elastiche sono forze interne. Cessata l'interazione i carrelli si allontanano con la velocità raggiunta alla fine dell'interazione.

2.3 INDIPENDENZA DEL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DAL SISTEMA INERZIALE.

Negli esempi illustrati precedentemente le velocità dei corpi e quindi le loro quantità di moto erano riferite a sistemi inerziali, pertanto anche il principio di conservazione della quantità di moto misurata rispetto a un sistema inerziale. Dimostriamo l'indipendenza di tale principio dal sistema inerziale di riferimento. Consideriamo due corpi A e B di massa m_A e m_B in un generico processo di interazione. Se $\vec{v_A}$ e $\vec{v_B}$ sono le velocità in un sistema inerziale S a un istante t e $\vec{v'}_A$ e $\vec{v'}_B$ le nuove velocità acquisite dopo un intervallo di tempo Δt in conseguenza di un processo di interazione, il principio di conservazione della quantità di moto si scrive:

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v'}_A + m_B \vec{v'}_B$$

In un secondo sistema inerziale S' in moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$ rispetto a S le velocità dei corpi A e B sono:

$\vec{V}_A = \vec{v}_A - \vec{v}$

$\vec{V}_B = \vec{v}_B - \vec{v}$ all'istante t

$\vec{V'}_A = \vec{v'}_A - \vec{v}$

$\vec{V'}_B = \vec{v'}_B - \vec{v}$ all'istante $t + \Delta t$

per cui l'uguaglianza precedente diventa

$$m_A\left(\vec{V}_A + \vec{v}\right) + m_B\left(\vec{V}_B + \vec{v}\right) = m_A\left(\vec{V'}_A + \vec{v}\right) + m_B\left(\vec{V'}_B + \vec{v}\right)$$

semplificando si ottiene

$$m_A \vec{V}_A + m_B \vec{V}_B = m_A \vec{V'}_A + m_B \vec{V'}_B$$

che esprime la conservazione della quantità di moto misurata nel sistema S'. Concludendo possiamo dire che se la legge di conservazione della quantità di moto di un sistema isolato è valida in un sistema inerziale S è valida anche in qualsiasi altro sistema inerziale S' in moto rettilineo uniforme rispetto a S, coerentemente con il principio di relatività galileiana che afferma l'indipendenza delle leggi della meccanica dal particolare sistema inerziale.

2.4 IMPULSO DI UNA FORZA.

Ricordiamo la seconda legge di Newton

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

da cui $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}$ (2.2)

chiamiamo la quantità al primo membro **impulso** della forza $\vec{F}$ durante l'intervallo di tempo Δt. Se ci riferiamo ad un tempo t finito e ad una forza costante in modulo direzione e verso, **l'impulso è definito dalla relazione**:

$$\vec{I} = \vec{F}t \quad (2.3)$$

Le unità di misura sono: *N s* = *Kg m*/ *s* nel sistema S.I.

Nel sistema CGS:dina s =g cm/ *s*.

Le unità di misura di quantità di moto e impulso sono identiche, e questo significa che impulso e quantità di moto sono grandezze omogenee.

La seconda legge di Newton può essere riscritta nel modo seguente:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} \quad (2.4)$$

Pertanto ***l'impulso di una forza in un certo intervallo di tempo è uguale alla variazione della quantità di moto prodotta.***

Tale relazione viene anche indicata come **Teorema dell'impulso.**

Un esempio è un giocatore di calcio mentre calcia il pallone: l'impulso della forza trasmessa dal giocatore direttamente sul pallone è uguale alla quantità di moto acquistata dal pallone.

Possiamo osservare per la (2.3) un certo impulso può essere determinato da una piccola forza che agisce per un lungo tempo o da una forza intensa che agisce per un breve intervallo di tempo. Un esempio di forze intense di breve durata sono quelle che si sviluppano negli urti, tali forze sono dette **impulsive.** L'impulso di una forza costante espresso dalla (2.3)è numericamente uguale all'area delimitata dalla retta che rappresenta la forza, dall'asse dei tempi e dalle ordinate estreme. Analogamente nel caso di una forza costante in direzione e verso ma di intensità variabile l'impulso è espresso dall'area rappresentata dalla superficie di figura

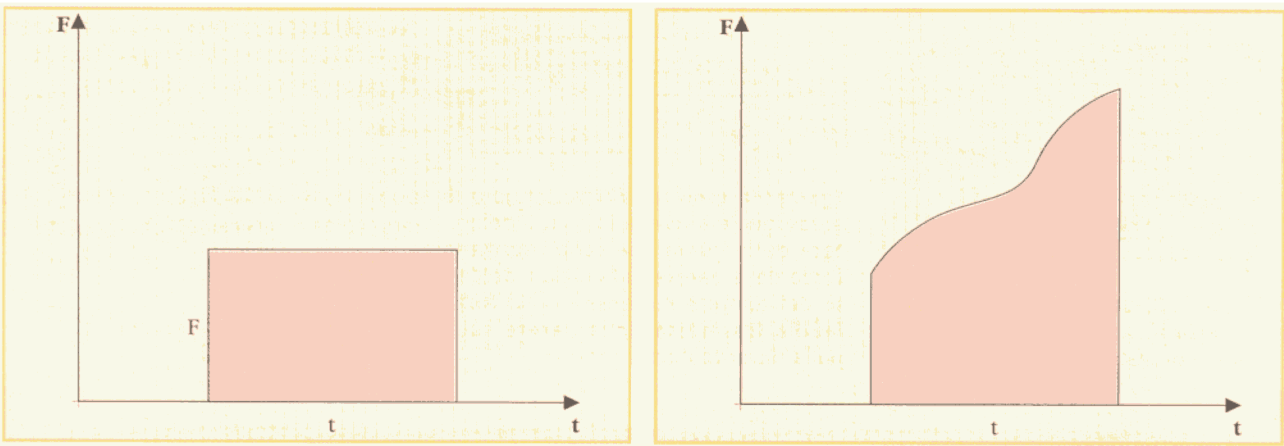


Fig.34

Se infine l'impulso varia anche in direzione può essere calcolato come somma vettoriale degli impulsi in tanti piccoli intervalli di tempo, in modo che in ciascuno di essi la forza possa ritenersi costante e quindi l'impulso possa essere calcolato con la (2.3).

OSSERVAZIONE: in generale la forza non è nota ma sono noti i valori della velocità iniziale e finale; con questi dati si può calcolare la variazione della quantità di moto e poi l'impulso della forza.

Esercizio:

Un'automobile avente una massa m=1000 Kg si muove su un rettilineo con la velocità v=108 Km/h. Supponendo che durante una frenata agisca una forza costante e sapendo che il tempo di arresto è t= 20 s, determina la forza frenante e lo spazio s percorso durante la frenata.

La quantità di moto dell'automobile all'inizio e al termine della frenata è rispettivamente $p_i = mv$ e $p_f = 0$; di conseguenza la variazione di quantità di moto è $-p_i$.

Poiché l'impulso della forza frenante è uguale alla variazione di quantità di moto si ha:

$$Ft = -p_i$$

da cui: $F = -\frac{p_i}{t} = -\frac{mv}{t}$

Trasformando la velocità in m/s e sostituendo nella precedente si ha

V=30 m/s e F=-1500 N.

Il segno meno indica che la forza è diretta in senso opposto al moto.

Per rispondere alla seconda domanda osserviamo che durante la frenata, poiché la forza è costante, il moto è uniformemente ritardato con decelerazione $a = \frac{F}{m} = 1{,}5\frac{m}{s^2}$.

2.5 PRINCIPI DELLA DINAMICA E CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO.

La conservazione della quantità di moto totale non è la quarta legge fondamentale della meccanica dopo i tre principi di Newton, ma può essere dedotta a partire dal secondo e terzo principio della dinamica.

Consideriamo due corpi di massa m_1 e m_2 che interagiscono tra loro passando da dalla velocità $(\vec{v_1})_{prima}$ $(\vec{v_2})_{prima}$ alle velocità $(\vec{v_1})_{dopo}$ $(\vec{v_2})_{dopo}$. Indichiamo $\vec{F}_{1\to 2}$ la forza, dovuta al corpo 1, che agisce sul corpo 2 durante la collisione, mentre $\vec{F}_{2\to 1}$ la forza che quest'ultimo esercita sul corpo 1.

Per il terzo principio della dinamica: $\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$

Moltiplicando i due membri di questa equazione per l'intervallo di tempo Δt in cui avviene l'urto, si ottiene $\vec{F}_{2\to 1}\Delta t = -\vec{F}_{1\to 2}\Delta t$

Ma, per il teorema dell'impulso possiamo scrivere

$\vec{F}_{2\to 1}\Delta t = \Delta\vec{p_1} = (\vec{p_1})_{dopo} - (\vec{p_1})_{prima}$ e $\vec{F}_{1\to 2}\Delta t = \Delta\vec{p_2} = (\vec{p_2})_{dopo} - (\vec{p_2})_{prima}$

sostituendo queste espressioni nell'equazione precedente otteniamo:

$(\vec{p_1})_{dopo} - (\vec{p_1})_{prima} = -[(\vec{p_2})_{dopo} - (\vec{p_2})_{prima}]$,

da cui si ricava $(\vec{p_1})_{dopo} + (\vec{p_2})_{dopo} = (\vec{p_1})_{prima} + (\vec{p_2})_{prima}$.

In conclusione si ha

$$(\overrightarrow{p_{tot}})_{dopo} = (\overrightarrow{p_{tot}})_{prima}$$

dove $\overrightarrow{p_{tot}}$ è la somma vettoriale delle singole quantità moto.

Possiamo concludere che la quantità di moto totale che si aveva prima dell'interazione, nel sistema formato dai due corpi che costituiscono un sistema isolato è uguale alla quantità di moto totale dopo l'interazione.

1. Gli Urti

In fisica l'espressione urto tra due corpi viene usata per indicare una qualsiasi interazione tra due o più corpi, senza che necessariamente ci sia un contatto come per i due carrelli . In tutti i tipi di urti,

durante l'interazione, si sviluppano forze impulsive molto intense, rispetto alle quali le forze esterne si possono trascurare.
Ne segue che ***in tutti gli urti la quantità di moto totale del sistema si conserva***.
Esempio :
Quando una racchetta urta una palla da tennis, la variazione di quantità di moto della palla è notevole e, poiché l'interazione è di breve durata, la racchetta comunica alla palla una forza molto intensa. Confrontata con questa la forza di gravità, che è esterna
al sistema, è trascurabile. La racchetta a sua volta subisce una variazione di quantità di moto opposta rispetto a quella della palla: la quantità di moto totale si conserva.
A differenza di quanto riteneva **Leibniz**, l'energia cinetica totale del sistema non sempre si conserva negli urti.
Questi vengono perciò classificati in:
Urti elastici: se l'energia cinetica del sistema si conserva.
Urti anelastici: se l'energia cinetica del sistema non si conserva.

- **Urti anelatici**

Se dopo l'urto i due corpi rimangono uniti, muovendosi poi con la stessa velocità, l'urto è detto **totalmente anelastico.**
Sono esempi di urti totalmente anelastici quello di due automobili che restano incastrate una nell'altra dopo l'urto, oppure quello di una pallottola sparata contro un sacco di sabbia, che la trattiene. Nell'urto totalmente anelastico la conoscenza delle masse m_1 e m_2 dei due corpi urtanti e delle loro velocità $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ prima dell'urto è sufficiente per determinare la velocità dei due corpi dopo l'urto. Questa velocità per il fatto che i due corpi formano un unico sistema di massa $m_1 + m_2$ e quindi di quantità di moto $(m_1 + m_2)\vec{v}$ è l'unica incognita.
Per la conservazione della quantità di moto si ha:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

da cui: $$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

OSSERVAZIONE: nel caso di urti tra corpi che si muovono sulla stessa retta, si possono usare i moduli delle velocità invece delle velocità vettoriali, attribuendo però un segno per distinguere il verso del moto.

Esercizio:

Un carrello di massa $m_A = 3Kg$ urta con una velocità $v_A = 4 \, m/s$ un altro carrello $m_B = 2Kg$ .I due carrelli dopo l'urto rimangono uniti. Calcoliamo la velocità del sistema dopo l'urto e la perdita di energia cinetica.

Si tratta di un urto totalmente anelastico, pertanto applicando il principio di conservazione della quantità di moto possiamo determinare la velocità del sistema dopo l'urto:

$$m_A v_A = (m_A + m_B)v$$

Da cui $$v = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B} = 2{,}4 \, m/s$$

- **Urti elastici**

Contrariamente a quanto avveniva nel caso precedente, ora la conservazione della quantità di moto non basta più per studiare un tipo di moto in cui i corpi mantengono la propria individualità dopo l'urto.

È necessario sfruttare il principio di conservazione dell'energia; infatti le analisi sperimentali dimostrano che in questo tipo di urto, oltre a conservarsi la quantità di moto, si conserva anche l'energia cinetica del sistema.

Indicando con m_1 e m_2 le masse dei due corpi, con v_1 e v_2 le loro velocità prima dell'urto, riferite ad un verso convenzionale e con V_1 e V_2 le loro velocità dopo l'urto si possono scrivere le seguenti uguaglianze:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v^2{}_1 + \frac{1}{2} m_2 v^2{}_2 = \frac{1}{2} m_1 V^2{}_1 + \frac{1}{2} m_2 V^2{}_2$$

da cui otteniamo

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_1 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

queste relazioni si applicano a tutti gli urti elastici in una dimensione e quindi anche agli urti tra particelle elementari.

- **Urti obliqui**

Lo studio dell'urto elastico non centrale è decisamente più complicato di quello appena svolto perché occorre tenere presente il cosiddetto parametro d'urto, cioè la distanza tra le direzioni di moto dei due corpi prima dell'urto.

Anche in questo caso, comunque, il fenomeno può essere studiato applicando i due principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica.

Se due corpi si urtano e le direzioni delle velocità non sono perpendicolari alle loro superfici, si ha un urto obliquo. Per motivi di semplicità ci limiteremo a considerare soltanto due casi particolari di urto obliquo.

- ***Urto elastico obliquo di due sferette di cui una ferma***

Prendiamo due sfere la prima di massa m_1 e velocità $\vec{v_1}$ che urta obliquamente una sfera di massa m_2 ferma. Le sferette dopo l'urto assumono velocità $\vec{v'_1}$ e $\vec{v'_2}$ formanti gli angoli ϑ e φ con la direzione di $\vec{v_1}$

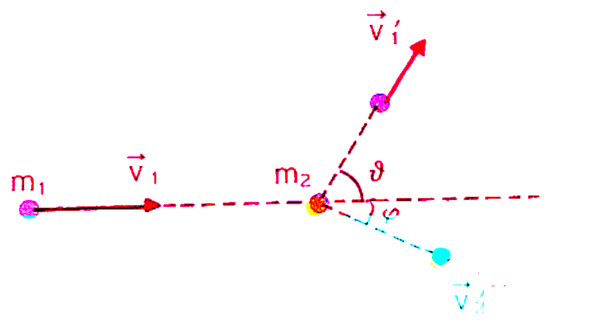


Fig.35

Per la conservazione della quantità di moto si ha: $m_1\vec{v_1} = m_1\vec{v'_1} + m_2\vec{v'_2}$ (2.4)

Da cui uguagliando le componenti di ambo i membri nella direzione di $\vec{v_1}$ e della perpendicolare a $\vec{v_1}$, si ottiene:
$$\begin{cases} m_1v_1 = m_1v'_1\cos\vartheta + m_2v'_2\cos\varphi \\ m_1v'_1 sen\vartheta = m_2v'_2 sen\varphi \end{cases} \quad (2.5)$$

Inoltre per la conservazione dell'energia cinetica si ha: $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$ (2.6)

Il sistema formato dalla (2.5) e (2.6) presenta quattro incognite, i due angoli di diffusione ϑ e φ e le velocità dopo l'urto v'_1 e v'_2. Poiché le equazioni sono soltanto tre, il sistema non è sufficiente per determinare le incognite, è necessario perciò avere altre informazioni come per esempio la conoscenza di uno dei due angoli di diffusione. Se per esempio le due sferette hanno massa uguale la (2.4) e la (2.5) diventano

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v'}_1 + \vec{v'}_2 \\ v^2_1 = v'^2_1 + v'^2_2 \end{cases}$$ si deduce che i vettori velocità hanno per moduli

le misure dei lati di un triangolo rettangolo di cateti v'_1 e v'_2 e ipotenusa v_1.

(vedi figura)

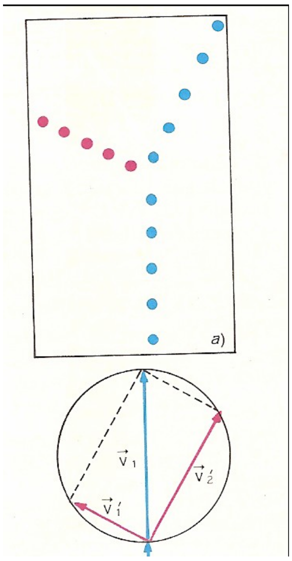


fig.36

Concludendo possiamo dire che **nell'urto elastico obliquo tra due corpi aventi la stessa massa di cui uno è inizialmente fermo, le direzioni di moto dei corpi dopo l'urto sono tra loro perpendicolari.**

- **Urto elastico obliquo contro una parete**

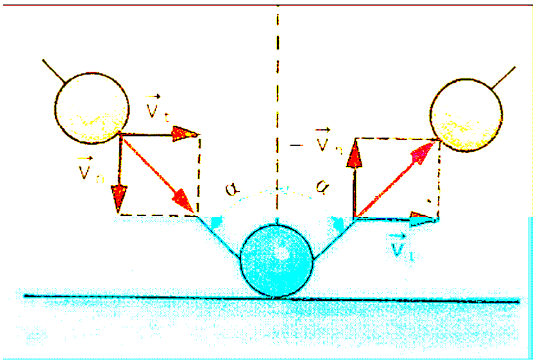


Fig.37

Se gli attriti sono trascurabili, nell'urto la componente $\overrightarrow{v_n}$ della velocità della sferetta urtante secondo la perpendicolare alla parete diventa $-\overrightarrow{v_n}$, cioè cambia verso, ma conserva la stessa direzione e lo stesso modulo, mentre la componente $\overrightarrow{v_t}$ della velocità secondo la tangente alla parete rimane immutata.Si definiscono angolo di incisione e angolo di riflessione gli angoli che le direzioni delle velocità della sferetta rispettivamente prima dell'urto e dopo l'urto formano con la direzione perpendicolare alla parete. Dalle proprietà della velocità della sferetta prima e dopo l'urto seguono due leggi dell'urto elastico obliquo contro una parete.
Prima legge: la velocità dopo l'urto si trova nel piano della velocità prima dell'urto e della perpendicolare alla parete.
Seconda legge: l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

2.6 MOMENTO ANGOLARE

Il momento angolare è una grandezza vettoriale che si può considerare l'analogo della quantità di moto nei moti rotatori.
Il momento angolare si definisce sempre rispetto a un punto, che solitamente si fa coincidere con l'origine *O* del sistema di riferimento inerziale da cui si sta osservando il moto. Se si considera un corpo di massa *m*, dotato di quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$, e individuato dal vettore posizione $\vec{r}$ rispetto all'origine *O* (fig.30), il suo momento angolare $\vec{L}$ rispetto a *O* si ottiene dal prodotto vettoriale di $\vec{r}$ con $\vec{p}$, ovvero:

$$\vec{L} = \vec{r} x \vec{p}$$

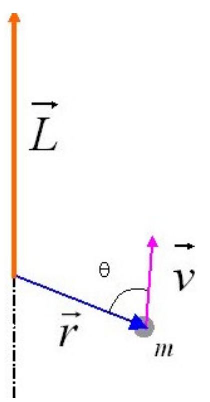


Fig.38

In pratica, **il momento angolare è un vettore che ha per modulo (l'intensità) il prodotto di r e p, e**
del seno trigonometrico dell'angolo (qui indicato con θ) fra essi compreso,

$$L = r\, p \sin \theta$$

e**, per direzione, quella perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{r}$ e $\vec{p}$; il verso viene individuato dalla cosiddetta "regola della mano destra"**: se si tiene la mano con le dita piegate a pugno nella direzione in cui $\vec{r}$ si sovrappone a $\vec{p}$ secondo l'angolo più piccolo da essi formato, il pollice punta nel verso di $\vec{L}$.

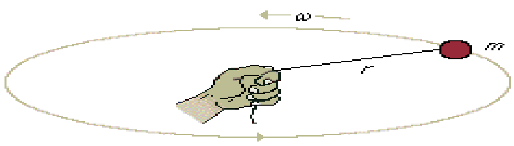
In particolare, il momento angolare di un corpo di massa *m* che ruota con velocità $\vec{v}$ sopra una circonferenza rispetto al centro della circonferenza è un vettore diretto perpendicolarmente al piano della circonferenza avente modulo :

$$L = m\, v\, r$$

Oppure, introducendo la velocità angolare ω (fig.31):

$$L = m\, r^2\, \omega$$

Il momento angolare di un sistema di corpi in moto rispetto ad un punto fisso è la somma vettoriale dei momenti angolari dei singoli corpi del sistema rispetto allo stesso punto .



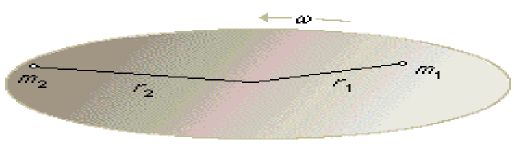


Fig.39 Fig.40

Nel caso di due corpi, rispettivamente di massa m_1 ed m_2, in rotazione con velocità angolare ω il momento angolate del sistema ha modulo (fig.32):

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega$$

In un sistema rotante intorno ad un asse il momento angolare rispetto all'asse è definito come somma vettoriale dei momenti angolari delle singole particelle che compongono il sistema rispetto al centro delle circonferenze descritte. Pertanto, se $m_1, m_2 \ldots m_n$ sono le masse delle singole particelle e ω è la velocità angolare del sistema, l'espressione precedente si può scrivere

$$L = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots + m_n r_n^2) \omega$$

cioè

$$L = I \omega$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rotante rispetto all'asse.
L'equazione dimensionale del momento angolare risulta:

$$[L] = [m l^2 t^{-1}]$$

Nel sistema SI l'unità di misura è: *joule* x *s*.

2.7 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Abbiamo visto precedentemente che una forza produce una variazione della quantità di moto del corpo alla quale è applicata. Analogamente il momento di una forza determina una variazione di momento angolare.
Detto $\overrightarrow{M}$ il momento risultante di un sistema di forze applicate a un corpo ed $\vec{L}$ il momento angolare risultante, si ha:

$$\overrightarrow{M} \Delta t = \Delta \vec{L}$$

dove $\Delta \vec{L}$ è la variazione del momento angolare durante l'intervallo Δt.
In particolare, se il sistema è isolato, o più generale se il momento $\overrightarrow{M}$ delle forze applicate è nullo,

risulta $\Delta \vec{L} = 0$, cioè $\vec{L}$ = *costante*.

Si può così enunciare il principio di conservazione del momento angolare:

In un sistema isolato, o in generale in un sistema soggetto a forze di momento nullo, il momento angolare è costante.

Il principio di conservazione del momento angolare è di fondamentale importanza. Tramite esso si possono comprendere importanti fenomeni naturali anche a livello cosmico.

Esempi :

- 1 - **il pattinatore**

tutti noi sappiamo che se un pattinatore allarga le braccia, la sua velocità angolare di rotazione diminuisce, mentre se le chiude, la velocità aumenta. Ciò dipende dal fatto che il momento d'inerzia di un corpo dipende dalla sua massa e da come essa è distribuita (in modo che se la massa è più distante dall'asse di rotazione il momento d'inerzia aumenta) per cui, quando il pattinatore allarga le braccia, il suo momento d'inerzia aumenta, mentre quando le chiude diminuisce. Essendo il momento angolare uguale al prodotto del momento d'inerzia per la velocità angolare e dovendo esso, poiché il momento risultante delle forze applicate (forza di gravità e reazioni vincolari) è nullo, conservarsi, quando il pattinatore allarga le braccia il suo momento d'inerzia aumenta e quindi, perché il momento angolare non vari, occorre che la velocità angolare diminuisca. Viceversa, quando egli stringe le braccia, il suo momento d'inerzia diminuisce così che la velocità angolare deve aumentare perché il momento angolare rimanga ancora costante.

- 2 - **il tuffatore**

allo stesso modo del pattinatore, il tuffatore, rannicchiandosi, diminuisce il proprio momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per il baricentro, quindi aumenta la propria velocità angolare e di conseguenza ruota più velocemente. Anche in questo caso il momento risultante delle forze esterne (forza di gravità) è nullo.

- 3 - **la ruota di bicicletta**

perché andando in bicicletta, a velocità piccole è più difficile stare in equilibrio ? A velocità piccole, il momento angolare delle ruote è piccolo (esso è proporzionale alla velocità angolare) per cui piccole sollecitazioni esterne fanno sì che l'equilibrio si rompa.
A grandi velocità, invece, il momento angolare è grande per cui dette sollecitazioni non riescono a disturbare l'equilibrio. Questo si dimostra facilmente tenendo in mano un asse su cui ruota una stessa ruota di bicicletta. Se la velocità della ruota è grande si fa molta fatica a modificare l'orientazione dell'asse.

- 4 - **la rotazione terrestre**

la terra, come ogni pianeta e satellite, ruota attorno ad un asse (anche le galassie ruotano lentissimamente attorno ad un proprio asse !). Questa rotazione è uniforme e costante proprio a causa del principio di conservazione del momento angolare. E' proprio grazie a questo principio che il giorno dura (per fortuna) sempre 24 ore (circa). In effetti questa rotazione non è perfettamente costante (in natura non esiste la perfezione !). Essa è disturbata da vari fattori (la asimmetria della distribuzione della massa, il "disturbo" apportato dalla luna (maree), ecc.). Questi disturbi sono deboli perché la terra non è soggetta ad alcun momento di forza considerevole dato che la retta d'azione della forza gravitazionale esercitata dal sole e dalla luna passa per il centro della terra.

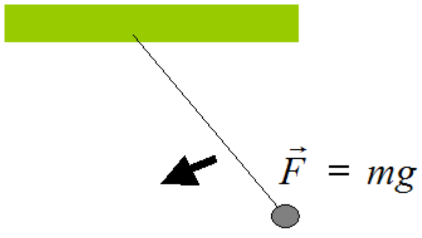
2.8 LA SIMMETRIA IN GEOMETRIA E L'IDEA DI INVARIANZA IN FISICA.

La parola simmetria descrive originariamente l'idea che esistono cose che non mutano quando vengono osservate sotto punti diversi e la prima forma di simmetria, non a caso, è quella bilaterale tipica della struttura degli animali superiori che trova innumerevoli applicazioni in campo grafico ed artistico ed è caratterizzata da quella che chiamiamo immagine speculare.
Da questa prima idea molto tempo è passato, durante il quale la geometria ha studiato diverse forme di simmetria (assiale, centrale, per traslazione per rotazione) e questo processo è stato caratterizzato dall'emergere di una geometria algebrica nella quale le trasformazioni sono particolari relazioni tra le coordinate che descrivono il sistema.
Si realizza una simmetria quando applicando tali relazioni si determina l'invarianza delle equazioni che descrivono l'oggetto dato.
L'invarianza che interessa alla fisica ha più attinenza con le problematiche delle leggi fisiche piuttosto che con quella degli oggetti: **ciò che conta è l'invarianza delle leggi fondamentali che**

descrivono i fenomeni. Anzi il concetto di fondamentalità di una legge tende a legarsi strettamente al suo grado di invarianza. Il fatto che le leggi della fisica non dipendono dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento nel quale vengono descritte esprime una proprietà fondamentale dello spazio vuoto chiamata *omogeneità dello spazio*. Se cambiamo a piacere l'origine del sistema di riferimento le leggi non cambiano e lo stesso avviene se cambiamo la direzione del sistema di riferimento (*isotropia dello spazio*). Le leggi non cambiano anche se eseguiamo una traslazione qualsiasi sull'asse dei tempi e per questo parliamo di *omogeneità del tempo*. Queste simmetrie differiscono da simmetrie quali quella di un triangolo equilatero (che è invariante solo per rotazione di 120°) perché sono caratterizzate da *continuità*. A tal proposito dobbiamo tener presente il teorema di Noether(matematica ebrea di origine tedesca)secondo il quale **per ogni simmetria di tipo continuo esiste una corrispondente legge di conservazione e viceversa. In particolare dimostrò che le tre leggi di conservazione della meccanica erano in corrispondenza con i tre principi di simmetria dello spazio tempo appena citati**. Si è trovato che la conservazione della quantità di moto deriva dalla uniformità dello spazio (**traslazione spaziale**). Infatti le relazioni di dipendenza fra grandezze che interessano un dato fenomeno, un'esperienza riguardante il fenomeno non deve concettualmente mutare ovunque ci poniamo nello spazio. Si è trovato inoltre che la legge di conservazione del momento angolare deriva dall'isotropia dello spazio (**rotazioni)** e che la conservazione dell'energia meccanica discende dall'uniformità del tempo (**traslazione temporale**), nel senso che una qualsiasi legge fisica, dedotta dal principio, deve essere indipendente dall'istante in cui viene stabilità e verificata, cosicché essa deve fornire sempre lo stesso risultato sia al momento presente, sia in un istante precedente o seguente.

Il fatto che le leggi di conservazione si possono derivare da tali concetti del tutto generali è la conferma migliore del significato universale di tali leggi. Pertanto se l'energia non si conservasse le leggi dell'universo dipenderebbero dall'istante in cui vengono collocate e fino ad ora non abbiamo evidenze sperimentali di questo fatto.

Facciamo alcuni esempi:



1. In assenza di attrito il pendolo semplice continuerà ad oscillare con ampiezza costante. La sua energia cinetica si trasformerà continuamente in energia potenziale e viceversa in modo che

$$K + U = E_{tot}$$

nel corso del tempo osservatori che misurano in istanti diversi portano la stessa descrizione del moto. La dinamica pertanto, *è invariante per traslazioni temporali(T,θ).* **La forza di attrito rompe la simmetria temporale, infatti le osservazioni in tempi diversi** $t_0 \, et \, _0 + \Delta t$ **, mostrano ampiezze, periodi ed angoli diversi quindi in questo caso l'energia non si conserva.**

2.Un corpo di massa m in uno spazio Euclideo vuoto non subisce l'azione di forze. Quindi tutti i punti dello spazio sono equivalenti, cioè tutti gli osservatori traslati leggono la stessa fisica (simmetria). Quindi nello spazio vuoto si ha assenza di interazione. Dalla legge di Newton si ha:

$$m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \cos t$$

simmetria per traslazione $\leftrightarrow$ l'impulso si conserva

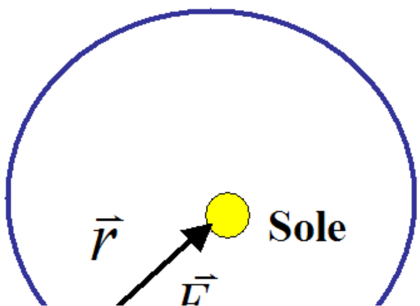
rottura di simmetria: se il corpo cade in un campo di forze gravitazionali, l'invarianza traslazionale è rotta lungo la linea di caduta. $F = k/r^2$ diventa $F = k/(r+h)^2$ per un osservatore traslato, che vede una forza diversa, non si conserva l'impulso. Solo per l'osservatore che cade insieme al corpo si ripristina la simmetria e in quel caso si conserva l'impulso.

La caduta libera è ben simulata sulla terra nelle montagne russe, infatti quando il trenino precipita si ha la brutta sensazione che lo stomaco si alzi. Ciò è dovuto al fatto che lo stomaco e gli altrwi organi interni nella nostra vita abituale,sulla superficie della terra tendono a cadere e i nostri muscoli sono abituati a sostenerli. In caduta libera gli organi non pesano più, i muscoli continuano a spingere e quindi si alzano veramente, con le conseguenti spiacevoli sensazioni.

3. La legge di gravitazione universale ha un evidente simmetria sferica $F = k/r^2$ Tutti i punti alla distanza r subiscono la stessa attrazione, quindi siamo in presenza di una nuova simmetria, la *simmetria di rotazione*.Il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dato che $\vec{p} = \vec{F}\Delta t$

$\Delta\vec{L}/\Delta t = \Delta(\vec{r} \times \vec{p})/\Delta t = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ dato che $\vec{r}$ è parallela $\vec{F}$ quindi il momento angolare è costante.

Simmetria di rotazione $\leftrightarrow$ conservazione del momento angolare.



Ma perché sono importanti gli invarianti in fisica?

Le leggi di conservazione sono importanti per la generalità che le caratterizza. Infatti esse si applicano indipendentemente dai dettagli dei processi fisici cui partecipa il sistema e dalle caratteristiche dei corpi che partecipano alla trasformazione. Esse sono applicabili tanto ai pianeti e alle stelle, quanto agli atomi e alle molecole e alle particelle elementari di cui sono costituiti i nuclei atomici; le si può applicare all'analisi dei processi più diversi: fisici, chimici termici, elettrici …

Se si analizza la storia della fisica si scopre che le leggi di conservazione sono sopravvissute al superamento delle diverse teorie. Per esempio in teoria della relatività i concetti classici di tempo, simultaneità di due eventi, di lunghezza e di massa dei corpi cambiano il loro significato originario; si introducono nuovi enunciati per la legge di composizione delle velocità e per la II legge della dinamica; cambia l'espressione dell'energia cinetica.

Ma le leggi di conservazione della quantità di moto, dell'energia e del momento angolare continuano a valere anche in teoria della relatività.

Nel microcosmo si incontrano molti fenomeni che differiscono notevolmente dai loro corrispondenti su scala macroscopica. Per esempio, in base al principio di indeterminazione, è impossibile risolvere il problema fondamentale della dinamica e determinare univocamente la traiettoria di un elettrone in un atomo e, su scala microscopica, si deve adottare un approccio ai fenomeni di tipo diverso.

Cambia il tipo di determinismo che ci è concesso dalla natura e tuttavia valgono ancora le leggi di conservazione.

È proprio la *universalità delle leggi di conservazione* a renderle così importanti.

Per concludere, vediamo in dettaglio quali sono le simmetrie e le relative leggi di conservazione in fisica:

1. **Traslazioni temporali** $\longrightarrow$ **conservazione dell'energia meccanica**
1 Traslazioni spaziali $\longrightarrow$ **conservazione della quantità di moto**

2 Rotazioni $\longrightarrow$ **conservazione del momento angolare**

3 Trasformazioni di Galileo $\longrightarrow$ **conservazione equazioni del moto**

4 Trasformazioni di Lorenz $\longrightarrow$ **conservazioni equazioni di Maxwell**

5 simmetria di Gauge locale $\longrightarrow$ **conservazione della carica elettrica**

VERIFICA SOMMATIVA:

1. (6 punti)L'energia potenziale gravitazionale di un grave, lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v, subisce un incremento massimo ΔU . Qual è l'incremento massimo dell'energia potenziale gravitazionale, se il grave viene lanciato con velocità di modulo v, ma inclinata di 30 ° rispetto all'orizzontale? (Si trascuri la resistenza dell'aria).

a) ΔU

b) $4\Delta U$

c) $\Delta U/4$

d) $\Delta U/2$

2. (6 punti) Un corpo di massa 10 Kg, viene sollevato verticalmente per un tratto di 10 m. Calcolare l'intensità della forza richiesta e il lavoro compiuto, supponendo che la resistenza dell'aria sia trascurabile.

3. (8 punti)Una pallottola di massa 10 g , sparata contro un blocco di massa 990 g, poggiato su una superficie orizzontale priva di attrito e fissata ad una molla di massa trascurabile e costante elastica 100 N/m , viene incorporata dal blocco. Se in seguito all'urto la molla subisce una compressione massima di 10 cm, calcolare l'energia potenziale massima della molla e la velocità del blocco subito dopo l'urto.

4. (8 punti)Due corpi A e B hanno uguale quantità di moto. Se A ha velocità doppia di B, detta K_A l'energia cinetica di a, quanto vale l'energia cinetica di B?

a) K_A b) $K_A/2$ c) $2K_A$ d)$K_A/4$

5. (8 punti)Una particella ne urta un'altra in quiete avente la stessa massa. Calcolare la velocità della particella incidente se dopo l'urto la due particelle viaggiano entrambe con velocità v= 1,5 10^4m/s nella stessa direzione e nello stesso verso della particella incidente.

6. (4 punti) Il momento angolare di un sistema si conserva se:

a. le forze agenti sul sistema sono conservative

b. il sistema ruota per effetto di una coppia di momento costante

c. il momento delle forze agenti sul sistema è nullo

d. il sistema è isolato e in nessun altro caso

Bibliografia:

1) Ugo Amaldi: "La fisica" per i licei scientifici" casa editrice Zanichelli vol.1
2) Antonio Caforio – Aldo Ferilli "Nuova Phisica" casa editrice Le Monnier vol.1
3) "Appunti di storia della fisica" a cura del prof. Dal Piazza

Siti

www.arrigoamadori.com/lezioni/TutorialFisica/TutorialFisica.htm
www.zanichelli.it/lafisicadiamaldi/pdf/
www.ilsalottoesoso.it/fisica/ce0201tesimmetria.pdf