Università degli Studi di Ferrara

Percorso Didattico di Matematica

Applicazioni del Calcolo Differenziale:

Studio di funzione reale di variabile reale e problemi di massimo e di minimo (anche per via elementare)

SSIS VIII Ciclo-Tirocinio

Dott. Mirco Andreotti

A.A. 2007/2008

Indice

0.1 Introduzione

Con questa unitá didattica viene proposto un percorso da svolgere nella scuola secondaria superiore per affrontare le applicazioni del calcolo differenziale per lo studio di funzione e per problemi di massimo e minimo.
Le modalitá di introduzione di tali applicazioni possono essere di diverso tipo. In questa nota preferiamo proporre agli studenti una introduzione intuitiva a livello grafico dei diversi comportamenti delle funzioni con conseguente ricerca degli strumenti che permettono l'identificazione e la classificazione di particolari comportamenti, quali per esempio massimi e minimi, per via analitica.
Schematicamente quindi il percorso che si vuole seguire é quello di partire da rappresentazioni grafiche di particolari funzioni per determinarne gli strumenti che permettono di indentificare i vari comportamenti. Formalizzare quindi a livello analitico questi strumenti, come ricerca di massimi e minimi, per poter affrontare un'analisi analitica di una funzione ed essere in grado di rappresentare graficamente i comportamenti particolari della funzione in esame.

0.2 Indicazioni generali

0.2.1 Destinatari

L'argomento trattato in questo percorso puó essere sviluppato nel quarto e/o quinto anno a seconda del tipo di liceo al quale ci si riferisce. Per una piú precisa disposizione temporale si vedano le indicazioni ministeriali riproposte al paragrafo 0.3. Ritengo comunque opportuno sottolineare il fatto che gli argomenti qui presentati per lo studio di funzione, in particolare massimi e minimi, possono anche essere introdutti in modo intuitivo e leggero in alcuni contesti del quarto anno, per poi poter essere trattati con rigore al quinto anno. Diciamo che si puó tentare di seguire l'approccio suggerito dall'UMI.

0.2.2 Prerequisiti

Al fine di poter affrontare con fluiditá il percorso qui sviluppato gli studenti dovrebbero avere buona conoscenza e dimestichezza dei seguenti argomenti:

1. concetto di intorno, intorno destro e intorno sinistro di un punto;
2. concetto di limite di funzione e continuitá;
3. funzioni elementari e loro rappresentazioni grafiche;
4. derivata di una funzione e suo significato geometrico;

5. derivate successive delle funzioni;
6. comportamenti asintotici di una funzione;
7. ricerca di eventuali asintoti orizzontale, verticale e obliquo;
8. studio del segno di una funzione.

0.2.3 Obiettivi generali

1. acquisire gli obiettivi specifici previsti per questo percorso didattico;
2. comprendere l'utilitá della matematica nelle diverse discipline, scientifiche e non;
3. comprendere l'utilitá nella vita di tutti i giorni di avere una preparazione matematica elastica;
4. riconoscere la matematica negli ambiti piú impensabili e non pensarla solo sui libri di scuola;

0.2.4 Obiettivi trasversali

1. sviluppare l'attitudine alla comunicazione e alla cooperazione con gli altri studenti e con il docente;
2. aumentare le proprie conoscenze e la propria preparazione nell'ambito della matematica;
3. abituare e approfondire all'osservazione e all'uso dell'intuito e del ragionamento per la schematizzazione di certe situazioni;
4. sviluppare e ampliare la capacitá di distinzione fra causa ed effetto, o meglio fra se e allora;

0.2.5 Obiettivi specifici

1. Conoscenze
   (a) Conoscere il significato (definizione) di massimo e minimo locali e assoluti;
   (b) conoscere il significato di flesso, concavitá e convessitá;
2. Competenze
   (a) saper interpretare una rappresentazione grafica di una funzione;

(b) saper riconoscere graficamente i massimi e i minimi assoluti e locali di una funzione;
(c) saper distinguere e utilizzare le informazioni sufficienti alla determinazione dei massimi e minimi;
(d) saper riconoscere graficamente concavitá, convessitá e flessi di una funzione;
(e) saper determinare analiticamente concavitá, convessitá e flessi di una funzione;
(f) saper affrontare uno studio di funzione mettendo insieme tutti i singoli studi precedentemente sviluppati con l'aggiunta di quelli trattati in questo percorso.

3. Capacitá
    (a) saper interpretare un qualsiasi grafico di una variabile in funzione di un'altra variabile;
    (b) saper applicare lo studio qui sviluppato in ambiti concreti come la fisica o altre discipline sperimentali.

0.2.6 Contenuti

1. Importanza del saper comprendere e studiare le funzioni
2. Introduzione al massimo e punto di massimo
3. Distinzione intuitiva per via grafica dei massimi (minimi) assoluti e relativi
4. Definizione di punto di massimo (minimo) assoluto e relativo
5. Tipologie di massimo (minimo)
    (a) Dipendenza del massimo (minimo) dal dominio + esercitazione con gli studenti
    (b) Classificazione degli estremi del dominio come massimo o minimo ed esempi
    (c) Studio della derivata prima in prossimita dei massimi e minimi locali con esercitazioni
    (d) Derivata prima in prossimita dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili
    (e) Derivata seconda in prossimita dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili

6. Flessi e concavitá
   (a) Introduzione a concavitá e convessitá di una funzione
   (b) Definizione di concavitá, convessitá e punto di flesso
   (c) Determinazione di concavitá, convessitá e dei punti di flesso
   (d) Formalizzazione dello studio della derivata seconda per la concavitá
   (e) Osservazione su massimi, minimi e concavitá ed esercitazioni
7. Osservazione su massimi e minimi per funzioni discontinue o non definite
   (a) Funzione definita in un intervallo aperto limitato
   (b) Funzione definita in un intervallo aperto illimitato
   (c) Funzione con un punto di discontinuita
8. Studio del grafico di una funzione
9. Svolgimento di problemi di massimo e minimo

0.2.7 Accertamento dei prerequisiti

L'accertamento dei prerequisiti sará in parte valutato dagli esiti delle precedenti verifiche e in parte verrá valutato in via informale, nel senso non di verifica o interrogazione ufficiale, colloquiando e riepilogando con gli studenti gli argomenti contenuti nei prerequisiti.

0.2.8 Tempi dell'intervento didattico

Riportiamo nella Tab.1 uno schema delle ore impiegate per lo sviluppo di ognuno degli argomenti che compongono questo percorso. Indichiamo inoltre i tempi che si intendono impiegare per le verifiche e per un eventuale laboratorio di matematica.

0.3 Indicazioni dei programmi ministeriali

In questa sezione forniamo alcune indicazioni e commenti riguardo le indicazioni dei programmi ministeriali in merito all'argomento studio di funzione e massimi e minimi. Vengono valutati programmi per i licei di ordinamento, PNI, Brocca, proposte dell'UMI e riforma Moratti.

Attivitá	Tempo (Ore)
Accertamento dei prerequisiti	2
Importanza del saper comprendere e studiare le funzioni	2
Introduzione al massimo e punto di massimo	1
Distinzione intuitiva per via grafica dei massimi (minimi) assoluti e relativi	2
Definizione di punto di massimo (minimo) assoluto e relativo	1
-Dipendenza del massimo (minimo) dal dominio + esercitazione con gli studenti	1
Classificazione degli estremi del dominio come massimo o minimo ed esempi	1
Studio della derivata prima in prossimita dei massimi e minimi locali con esercitazioni	3
Derivata prima in prossimita dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili	1
Derivata seconda in prossimita dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili	1
Flessi e concavitá	
-Introduzione a concavitá e convessitá di una funzione	1
-Definizione di concavitá, convessitá e punto di flesso	2
-Determinazione di concavitá, convessitá e dei punti di flesso	2
-Formalizzazione dello studio della derivata seconda per la concavitá	2
-Osservazione su massimi, minimi e concavitá ed esercitazioni	2
Osservazione su massimi e minimi per funzioni discontinue o non definite	
-Funzione definita in un intervallo aperto limitato	1
-Funzione definita in un intervallo aperto illimitato	0.5
-Funzione con un punto di discontinuita	0.5
Studio del grafico di una funzione	2
Svolgimento di problemi di massimo e minimo	2
Esercitazioni	2
Laboratorio di matematica	4
Verifica sommativa	2
Verifiche orali	6
Totale	44

Tabella 1: Tempi previsti per lo svolgimento del percorso didattico.

0.3.1 Licei di ordinamento: classico e scientifico

Indicazioni liceo classico. Il programma ministeriale di matematica per il liceo classico non prevede l'argomento studio di funzione, quindi nemmeno lo studio dei massimi e minimi.

Osservazioni. Guardando in dettaglio il programma di matematica per il liceo classico si nota che é molto difficile poter inserire nella programmazione l'argomento studio di funzione. É comunque vero che ad un livello qualitativo si possono sempre introdurre le funzioni come dipendenza fra due variabili, quindi sempre a livello qualitativo si potrebbero affrontare graficamente alcune valutazioni, come per esempio quelle riportate in questa unitá didattica nella parte introduttiva dello sviluppo dei contenuti. Diciamo che ci si puó dedicare a valutazioni di grafici di funzioni.

Indicazioni liceo scientifico. Per la V é previsto lo sviluppo dei massimi e minimi con il metodo delle derivate. L'orario prevede 3 ore alla settimana di matematica.

Osservazioni. Le limitate ore di matematica nell'arco della settimana sicuramente implicano dover impiegare un lungo periodo per affrontare l'argomento in questione. Andrebbe inoltre sottolineato il fatto che lo studio dei massimi e mnimi non é un argomento fine a sé stesso, ma rientra nell'ambito dello studio di funzione.

0.3.2 Piano Nazionale per l'Informatica

Indicazioni liceo scientifico PNI. Gli argomenti correlati allo studio di funzione, in particolare **limiti e continuitá**, **derivata e teoremi connessi** e **studio e rappresentazione grafica di una funzione** sono previsti per la IV classe, per un totale di 5 ore alla settimana.

Osservazioni. Cinque ore alla settimana permettono uno sviluppo continuo e coerente dell'argomento, inoltre si puó anche prevedere un discreta frazione di tempo per tali studi con i software didattici.

0.3.3 Commissione Brocca

Indicazioni per gli indirizzi classico, linguistico e socio-psico-pedagogico. É previsto l'argomento studio e rappresentazione grafica di una funzione razionale nella classe V.

Indicazioni per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico. Sono previsti per la classe IV gli argomenti *zeri di una funzione. Limite e continuitá di una funzione in una variabile reale* e *derivata di una funzione. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange, De L'Hopital*. Viene poi specificato nei commenti quanto segue: *L'alunno* *sará abituato all'esame di grafici di funzioni algebriche e trascendenti ed alla deduzione di informazione dallo studio di un andamento grafico; appare anche importante fare acquisire una mobilitá di passaggio dal grafico di una funzione a quello della sua derivata e di una sua primitiva.*

Indicazioni per gli indirizzi chimico, elettrotecnica e automazione, elettronica e telecomunicazioni, informatico e telematico, meccanico, tessile, costruzioni, territorio, agroindustriale, e biologico. É previsto l'argomento *studio e rappresentazione grafica di una funzione* per la classe IV. Nei commenti agli argomenti viene riportato quanto riportato per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.

Indicazioni per gli indirizzi economico aziendale, linguistico aziendale. É previsto l'argomento *studio e rappresentazione grafica di una funzione* per la classe IV. Nei commenti agli argomenti viene riportato quanto riportato per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.

0.3.4 Proposta UMI

Indicazioni.L'UMI suggerisce di abituare gli studenti ad una analisi qualitativa degli andamenti, per esempio crescenza e decrescenza di una funzione, in diverse occasioni durante gli studi secondari. La proposta dell'UMI non fornisce precise indicazioni di come inserire questi argomenti, suggerisce piuttosto una introduzione graduale e richiami ricorsivi ogni qual volta si presenta l'occasione di poter fare una valutazione qualitativa degli andamenti ed in generali dei comportamenti particolari, e non, delle funzioni. Seguendo questo approccio, anzitutto si rendono gli studenti famigliari con i termini e i concetti che caratterizzano gli andamenti delle funzioni e in secondo luogo si abituano ad una naturale analisi e comprensione di grafici, funzioni, andamenti e tutto ció che ne é correlato.
Allo studio di funzioni si affianca in modo naturale lo studio dei massimi e minimi che non viene proposto come argomento a sé, ma vengono suggeriti diversi momenti nell'arco del quarto e quinto anno.
Oltre queste indicazioni vengono forniti un discreto numero di problemi direttamente collegati alla realtá per la trattazione degli argomenti citati.

Osservazioni. Il metodo proposto dall'UMI é, a mio avviso, molto interessante e comunque vengono fornite guide, esempi e proposte che possono risultare molto utili per l'attuazione di quanto indicato. La completezza di queste dettagliate indicazione contraddistingue in maniera netta la proposta UMI dalle altre

indicazioni ministeriali. Credo inoltre che siano comunque necessarie indicazioni come quelle fornite, in quanto il metodo proposto penso non sia sperimentato da molti e in particolare dagli attuali docenti i quali si sono formati con i programmi classici.
Quella dell'UMI rimane pur sempre una proposta, quindi contestabile in quanto non proviene dal ministero, comunque nessuno puó vietare al docente di insegnare seguendo i consigli dell'UMI e riadattandoli ai programmi ministeriali. Forse questo é facile da dirsi, non so quanto facile da realizzarsi.

0.3.5 Riforma Moratti

Indicazioni. Il programma prevede per il secondo biennio l'introduzione della derivata di una funzione e studio del segno della derivata e corrispondente andamento della funzione nell'ambito dell'introduzione all'analisi matematica. Il programma prevede poi la formalizzazione dello studio di funzione con le derivate successive e la ricerca dei punti estremanti per il quinto anno nell'ambito dell'analisi matematica.

Osservazioni. La trattazione dell'analisi delle funzioni strutturato in interventi in diversi anni del corso di studi secondari potrebbe essere una buona strada da seguire per poter abituare gli studenti un po' alla volta ai concetti base. Diciamo che se interpretiamo questi interventi come una introduzione in quarta seguita da un approfondimento in quinta riferendoci anche a quanto puó risultare influente dalla proposta UMI, allora si puó pensare ad un approccio piú naturale di studio. Diversamente pensando a qualche accenno dato in quarta, che poi in quinta viene dimenticato, allora l'introduzione puó servire a poco.

0.4 Sviluppo dei contenuti

0.4.1 Importanza del saper comprendere e studiare le funzioni

Sicuramente in tutte le discipline tecnico-scientifche, ma anche in molte altre discipline come quelle sociologiche, comportmentali e umanistiche in generale, si fa inevitabilmente uso di funzioni e delle loro rappresentazioni grafiche. É quindi necessario saper studiare una funzione nei sui dettagli e comprenderne il significato grafico e fisico.

Nella fisica ogni fenomemo viene studiato misurando un certo numero di grandezze fisiche che poi vengono messe in relazione fra di loro. Ecco quindi sorgere immediatamente la necessitá di utilizzare le funzioni per studiare la dipendenza di una grandezza da un'altra, quindi per poter modellizzare un certo fenomeno fisico. Si pensi per esempio allo studio del moto di un corpo per il quale é necessario sapere come la posizione cambia in funzione del tempo. Si pensi ad un altro esempio molto importante nell'ambito dei satelliti, ci si potrebbe porre la seguente domanda: quanta spinta dobbiamo fornire al satellite per poterlo mettere in orbita attorno alla terra? Per rispondere a questa domanda bisogna necessariamente studiare la dipendenza di certe grandezze da altre, quindi é necessario dover analizzare e studiare delle funzioni matematiche.

Gli esempi che necessitano lo studio di funzioni sono veramente tanti se non infiniti in ambito tecnico-scientifico. Allo studente potrebbe comunque sorgere spontanea l'osservazione che se non si é interessati ad un ambito tecnico-scientifico o ad un'altra disciplina che coinvolga lo studio di funzioni, allora conoscere questo argomento diventa opzionale se non del tutto inutile. A tali osservazioni si puó obiettare senza problemi facendo notare che anche nella vita di tutti i giorni puó essere molto comodo conoscere e saper interpretare le funzioni in forma analitica e grafica. Si pensi per esempio se dovete costruire un recinto rettangolare e avete a disposizione 100 m di rete. Chiaramente questo recinto vi serve il piú capiente possibile in termini di superficie, come potete determinare come devono essere i lati affinché il recinto copra la piú grande superficie possibile? Certamente di un recinto con un lato di 49 m e uno di 1 m non ce ne facciamo molto, ecco quindi che si rende necessario riuscire ad impostare il problema per determinare quale sia la superficie piú grande.

Un altro esempio potrebbe essere quello di dover interpretare i grafici che compaiono nella scheda tecnica di una nuova caldaia, comprendere queste indicazioni potrebbe permetterci di impostare la caldaia in modo da consumare di meno.
Anche nella vita di tutti i giorni gli esempi in cui saper studiare e interpretare una funzione ci puó essere di grande aiuto sono molti.
Mostriamo nel seguito alcuni grafici relativi a diversi argomenti e riportiamo brevi osservazioni riguardo l'utilitá della loro comprensione.

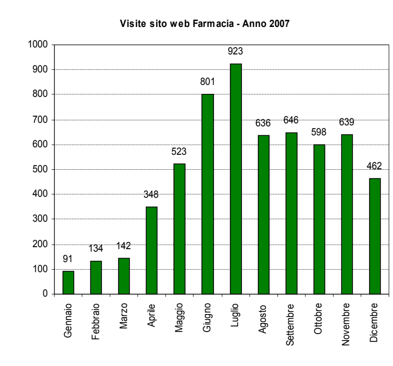


Figura 1: Esempio del numero di visite di un sito web di una farmacia in funzione del tempo.

Visite sito web in funzione del tempo

Nel grafico di Fig.1 vediamo un istogramma che viene interpretato come numero di visite, o accessi ad un sito web di una farmacia, in funzione del tempo. Un grafico di questo tipo puó essere interpretato coma un grafico di una funzione, in quanto si sta rappresentando una variabile (gli accessi) in funzione di un'altra variabile che é il tempo o se vogliamo i mesi dell'anno. Un grafico di questo tipo puó essere utile al farmacista per capire quanto il sito é interessante e anche al webmaster realizzatore del sito per capire se il sito é stato costruito in modo da essere analizzato chiaramente dai motori di ricerca.

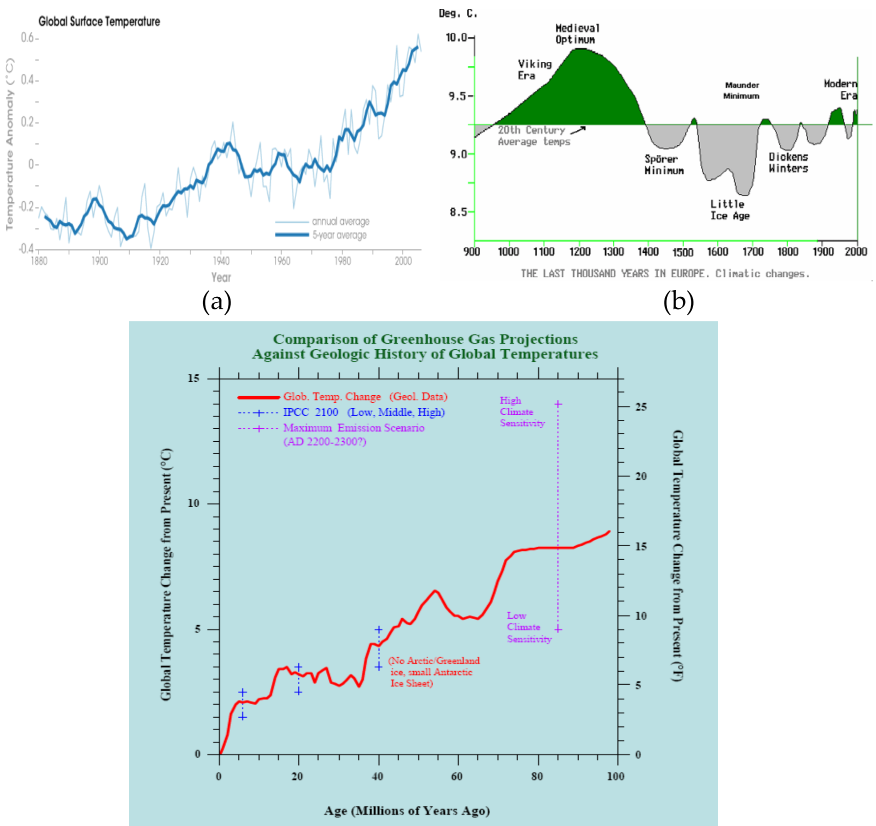
Temperatura globale della Terra

In questo esempio riportiamo alcuni grafici riferiti all'attuale problema del riscaldamento globale, almeno a quello che sembra essere un problema, ma qui non entriamo nel merito. Vogliamo piuttosto fare alcune osservazioni su come vanno interpretati i grafici qui riportati.

Il grafico di Fig.2(a) riporta la variazione di temperatura mondiale dal 1880 ad oggi e risulta evidente che globalmente la temperatura in funzione del tempo é crescente.

Il grafico di Fig.2(b) riporta la temperatura della superficie terrestre a partire dal 900 circa fino ad oggi. Anche se nel grafico Fig.2(a) si riporta un variazione di temperatura, mentre in Fig.2(b) si riporta una temperatura si puó subito argomentare che aumentando il periodo temporale di osservazione non si puó certo concludere che l'andamento della temperatura in funzione del tempo sia crescente. Anzi da questo secondo grafico possiamo notare dei picchi di temperatura (cioé dei massimi locali, come vedremo nel seguito) decisamente superiori alla temperatura attuale.

Nel grafico di Fig.2(c) viene riportato la variazione di temperatura rispetto a quella attuale nel corso di milioni di anni passati. Notiamo che in questo grafico il tempo sulle ascisse é in ordine decrescente, cioé piú aumenta l'ascissa piú si va indietro nel tempo. Nei grafici di prima invece il tempo era in ordine crescente. Lo zero sulle ascisse di quest'ultimo grafico corrisponde al presente. Per poter concludere qualcosa da questo grafico dovremmo capire se nelle ordinate c'é la



(c)

Figura 2: Esempi tratti dal web dell'andamento globale della temperatura sulla Terra in funzione del tempo. (a) da [4], (b) da [5] e (c) da [3].

differenza $T_{attuale} - T$ oppure $T - T_{attuale}$. Dalla fonte di questo grafico non é chiaro, ma a livello didattico si capice che le due differenze portano ad due conclusioni ben diverse.

In generale da questi grafici sulle temperature globali, esempi dei quali se ne possono trovare a non finire sul web, possiamo concludere che prima di concludere che abbiamo irreversibilmente riscaldato il pianeta si dovrebbero fare studi molto approfonditi e dettagliati e soprattutto riferirci a fonti sicure.

Trasformazioni di un gas perfetto

Negli esempi precedenti avevamo a disposizione dei grafici che dovevano essere interpretati, quindi dei grafici dai quali si puó, piú o meno precisamente, ricava-

re un'espressione che lega l'andamento delle ordinate in funzione delle ascisse, quindi dal grafico si ottiene una funzione.
Differentemente possiamo incontrare problemi in cui data l'espressione analitica di una funzione ne dobbiamo tracciare l'andamento su un piano cartesiano. Si pensi per esempio alla termodinamica, dalla quale si ricava per via teorica che le trasformazioni isoterme e adiabatiche soddisfano rispettivamente le seguenti condizioni:

$$pV = cost \, ; pV^{\gamma} = cost$$

Tali condizioni possono essere utilizzate per costruire l'andamento della pressione in funzione del volume secondo le seguenti funzioni:

$$p(V) = \frac{cost}{V} \, ; p(V) = \frac{cost}{V^{\gamma}}$$

e quindi per rappresentare le corrispondenti trasformazioni nel piano pV largamente utilizzato per studiare le trasformazioni termodinamiche e tutto ció che ne é correlato, come la comprensione delle macchine termiche. Risulta infatti immediato da certe considerazioni basate sul piano pV il motivo del fatto che le macchine termiche, per essere realizzate praticamente debbano lavorare con cicli termodinamici. Per maggiori dettagli si veda [2].

0.4.2 Introduzione al concetto di massimo (minimo) e di punto di massimo (minimo)

La parola massimo indica intuitivamente un certo valore limite che non puó essere superato. Quindi se stiamo considerando una certa grandezza in un certo ambito, il suo valore massimo sará quel valore maggiore di ogni altro. La velocitá massima di un'automobile é il valore piú grande che si puó raggiungere per questa automobile.

Analogamente, quando ci riferiamo al massimo (minimo) di una funzione $f(x)$ si intende il piú grande (piccolo) valore che la funzione puó assumere nel codominio. Facendo riferimento all'esempio riportato in Fig.3 notiamo facilmente che il valore massimo (minimo) della funzione é quello indicato con f_{max} (f_{min}).

Per punto di massimo (minimo) della funzione si intende il valore della variabile indipendente in corrispondenza del quale la funzione assume il suo valore massimo (minimo).

Facendo sempre riferimento all'esempio di Fig.3 notiamo che il punto di massimo (minimo) é x_{max} (x_{min}).

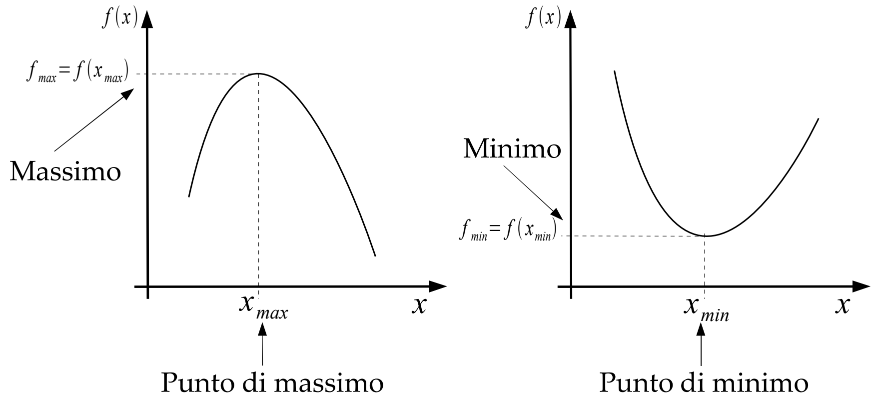


Figura 3: Esempio di massimo e minimo di una funzione.

É molto importante sottolineare questa distinzione ricordando che per punto di massimo (minimo) ci si riferisce a valori della variabile indipendente, mentre per massimo (minimo) a valori assunti dalla funzione.

0.4.3 Distinzione intuitiva per via grafica dei massimi (minimi) assoluti e relativi

Prima di procedere allo studio dettagliato dei massimi e minimi assoluti e relativi vogliamo subito proporre una distinzione per via grafica fra massimi (minimi) assoluti e relativi. In questo modo si possono usare gli aggettivi assoluto e relativo con maggiore libertá e senza lasciare lo studente in attesa di ulteriori approfondimenti.

Proponiamo quindi il grafico di in cui riportiamo una funzione ristretta ad un certo intervallo nella quale compaiono un massimo e un minimo assoluti e piú di un massimo e minimo relativi. Notiamo anzitutto che se ci limitiamo ad osservare la funzione in un intervallo piccolo per esempio attorno all'ascissa $x = x_1$, come evidenziato dal rettagolo grigio in Fig.4, possiamo dire che, limitatamente a questo intervallo, la funzione $f(x)$ in corrispondenza di $x = x_1$ assume un valore massimo, in quanto ogni altro valore assunto dalla funzione é inferiore a $f(x_1)$. Un discorso analogo puó essere fatto se osserviamo la funzione in un intervallo piccolo attorno al punto $x = x_4$, con la differenza che questa volta la funzione assume un valore minimo. Nel momento in cui ci limitiamo a valutare il comportamento della funzione in un intervallo ristretto significa che si sta eseguendo una analisi locale.

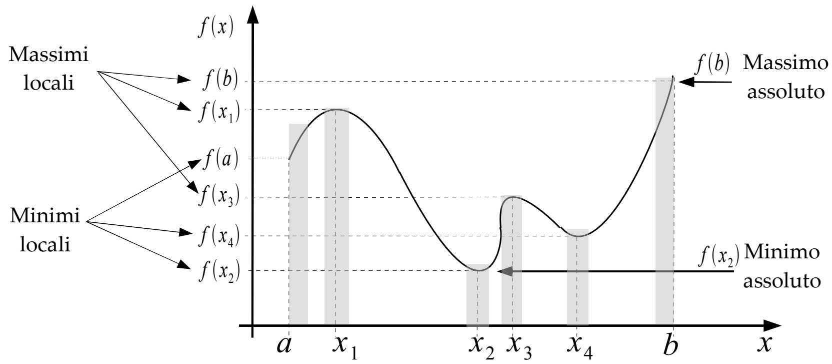


Figura 4: Esempio di una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$ la quale presenta un massimo e un minimo assuluti e piú massimi e minimi relativi in corrispondenza degli intervalli indicati dai rettangoli in grigio.

Osservando la funzione su tutto l'intervallo interessato possiamo, analogamente a quanto fatto per i punti di ascisse x_1 e x_4, classificare anche gli altri valori della funzione in corrispondenza delle ascisse evidenziate in figura. Possiamo quindi localmente classificare i valori della funzione $f(a)$, $f(x_2)$ e $f(x_4)$ come minimi locali, mentre i valori $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(b)$ come massimi locali.
Questi valori della funzione possono essere ordinati in modo crescente secondo la seguente relazione:

$$f(x_2) < f(x_4) < f(x_3) < f(a) < f(x_1) < f(x_b) \tag{1}$$

Da questo ordinamento notiamo che i valori $f(x_2)$ e $f(b)$ sono corrispondentemente il valore minimo e il valore massimo che la funzione assume in assoluto nell'intervallo di definizione $[a, b]$. Mentre prima abbiamo parlato di massimi e minimi locali, o anche relativi, ora possiamo identificare un massimo e un minimo assoluti in quanto sono effettivamente il piú grande e il piú piccolo valore valore assunto dalla funzione nell'intervallo di definizione.

Risulta quindi evidente come si possano distinguere due tipi di massimo e di minimo, quelli locali o relativi e quelli assoluti. Per comprendere appieno il concetto di massimo e minimo locale possiamo notare che pur essendo il valore $f(x_3)$ un massimo locale della funzione, questo risulta essere peró minore del valore $f(a)$, il quale é un minimo locale della funzione. Sembrerebbe essere di fronte ad un paradosso, ma dobbiamo sottolineare il fatto che stiamo parlando di comportamenti locali, quindi é giusto definire $f(x_3)$ come un massimo locale della funzione, in quanto si sta valutando il comportamento della funzione in un intervallo ristretto attorno all'ascissa x_3, come é evidenziato in Fig.4 dal rettangolo grigio, quindi si sta completamente ignorando ció che avviene al di fuori di questo intervallo. Un discorso analogo si puó fare per il minimo locale $f(a)$. É chiaro che l'intervallo che si considera per effettuare lo studio locale deve essere sufficientemente piccolo da non contenere altre ascisse significative per il comportamento della funzione, come é stato fatto in Fig.4 con i rettagoli grigio, infatti anziché considerare un intervallo, per correttezza si deve considerare un intorno dell'ascissa interessata. Non avrebbe infatti senso considerare un intervallo che contenga per esempio due minimi relativi. Approfondiremo il discorso dell'intorno nel prossimo paragrafo in occasione della definizione di massimo e minimo relativo.

Un'altra considerazione da sottolineare é che un massimo o minimo assoluto é anche locale, mentre non é sempre vero il viceversa. Infatti un massimo (minimo) assoluto rimane un massimo (minimo) anche quando restringiamo l'intervallo di osservazione. Differentemente un massimo (minimo) locale non é detto che sia anche assoluto, in quanto nel momento in cui si passa dall'intervallo di osservazione a tutto il dominio possiamo trovare valori della funzione maggiori (minori) di quello identificato come massimo (minimo) locale.

0.4.4 Definizione di punto di massimo (minimo) assoluto e relativo

Dalle precedenti considerazioni possiamo formulare una definizione rigorosa di punto di massimo (minimo) assoluto di una funziona come segue:

Def. Punto di massimo assoluto: Si dice che $x_0 \in D_f$ é punto di massimo assoluto della funzione $f(x)$ se si verifica che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D_f$.

Def. Punto di minimo assoluto: Si dice che $x_0 \in D_f$ é punto di minimo assoluto della funzione $f(x)$ se si verifica che $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in D_f$.

Per quanto riguarda i punti di massimo (minimo) locali dobbiamo sottolineare il fatto che abbiamo considerato un intervallo piccolo contenente i punti interessati. Siccome un intervallo puó non essere abbastanza piccolo da contenere un solo massimo (minimo) locale é necessario, per correttezza, considerare un intorno. Un intervallo di x_0 potrebbe anche contenere due punti di massimo, mentre un intorno no. Quindi possiamo fornire la seguente definizione di punto di massimo (minimo) locale.

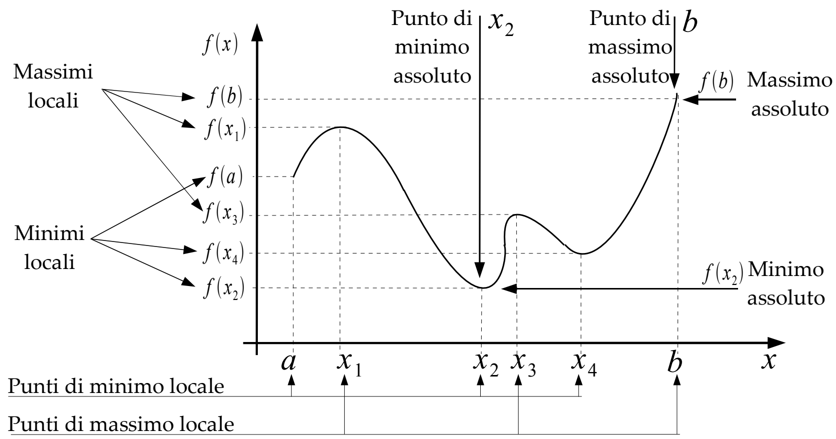


Figura 5: Esempio di una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$ la quale presenta un massimo e un minimo assuluti e piú massimi e minimi relativi.

Def. Punto di massimo locale: Si dice che $x_0 \in D_f$ é punto di massimo locale della funzione $f(x)$ se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I_{x_0} \cap D_f$.

Def. Punto di minimo locale: Si dice che $x_0 \in D_f$ é punto di massimo locale della funzione $f(x)$ se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in I_{x_0} \cap D_f$.

Riprendendo l'esempio mostrato nel precedente paragrafo possiamo quindi concludere, come si puó notare dalla Fig.5, che i valori $f(a)$, $f(x_2)$ e $f(x_4)$ sono minimi locali della funzione, quindi a, x_2 e x_4 sono punti di minimo locale, mentre i valori $f(x_1)$, $f(x_3)$ e $f(b)$ sono massimi locali, quindi x_1, x_3 e b sono punti di massimo locale. Si deve inoltre aggiungere che i valori $f(x_2)$ e $f(b)$ sono rispettivamente il minimo e il massimo assoluti della funzione, quindi x_2 e b sono rispettivamente il punto di minimo e il punto di massimo assoluti della funzione.

0.4.5 Tipologie di Massimo e minimo

Anziché formalizzare lo studio dei massimi e minimi per le sole funzioni derivabili per poi ampliare l'analisi a funzioni piú complesse come quelle con punti spigolosi o non continue ci proponiamo di presentare degli esempi grafici dai quali si possano dedurre le caratteristiche principali sulle quali ci si deve concentrare per la ricerca dei massimi e minimi. Proponiamo quindi di evidenziare come il massimo e il minimo siano correlati alle seguenti situazioni:

- dipendenza dal dominio considerato;
- classificazione degli estremi del dominio come massimo o minimo;

- indentificazione dal solo cambio di segno della derivata prima;
- identificazione dall'annullarsi della derivata prima nelle funzioni derivabili;
- indentificazione nei punti di discontinuitá;

Al termine della carrellata delle possibili situazioni in cui si identificano massimi e minimi si procederá ad un riepilogo delle condizioni che permettono l'identificazione di questi.

Dipendenza del massimo (minimo) dal dominio

Consideriamo come esempio la funzione rappresentata in Fig.6. Notiamo facilmente che se consideriamo come dominio l'intervallo $[a, b]$, la funzione presenta un massimo assoluto in corrispondenza del punto di massimo x_0.

Differentemente, se per ragioni dipendenti dal contesto in cui si sta studiando questa funzione ci troviamo nella condizione di dover considerare come dominio l'intervallo $[a', b]$, come indicato in Fig.6, risulta evidente che il nuovo intervallo risulta diverso dal precedente $[a, b]$, inoltre non contiene il precedente punto di massimo x_0. Ció significa che il punto x_0 non é piú punto di massimo della funzione, quindi la funzione non assumerá il suo valore massimo in corrispondenza di x_0. Risulta infatti evidente dal grafico che la funzione assume il suo valore massimo in corrispondenza dell'estremo inferiore a' del nuovo dominio, quindi il massimo della funzione é il valore $f(a')$, mentre il punto di massimo é a'.

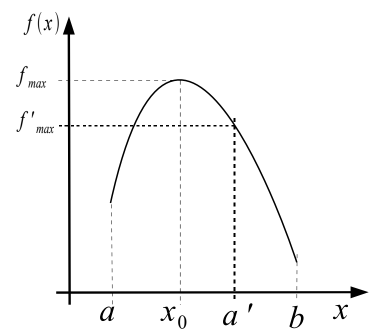


Figura 6: Esempio di dipendenza del massimo della funzione dal dominio considerato.

Dalle precedenti considerazioni risulta quindi evidente che i massimi o minimi di una funzione possono dipendere dal dominio considerato.

Per famigliarizzare di piú con questa dipendenza analizziamo altri casi particolari facendo sempre riferimento alla Fig.6 [1]:

1. $D_f = [a, b] \Rightarrow f(a)$: minimo locale; $f(b)$: minimo assoluto; $f(x_0)$ massimo assoluto;

[1]Gli studenti a questo punto vengono guidati a comprendere la situazione descritta a parole e a rappresentarla graficamente.

2. $D_f = [a', b]$, con $a < a' < x_0 \Rightarrow f(a') \neq f(a)$: minimo locale; $f(b)$: minimo assoluto; $f(x_0)$ massimo assoluto; $\Rrightarrow$ variazione del minimo locale;

3. $D_f = [a, b']$, con $x_0 < b' < b \Rightarrow f(a)$: minimo locale; $f(b') \neq f(b)$: minimo assoluto; $f(x_0)$ massimo assoluto; $\Rrightarrow$ variazione del minimo assoluto;

4. $D_f = [a, b']$, con $x_0 < b' < b \Rightarrow f(a)$: minimo <u>assoluto</u>; $f(b') \neq f(b)$: minimo locale; $f(x_0)$ massimo assoluto; $\Rrightarrow$ quello che prima era il minimo locale ora é diventato minimo assoluto, mentre quello che prima era minimo assoluto é cambiato diventando un minimo locale;

5. Tutti i casi in cui si sceglie un dominio tale che $x_0 \notin D_f$.

Possiamo dai precedenti studi evidenziare che la ricerca dei massimi e minimi deve interessare lo studio della funzione in corrispondenza degli estremi del dominio di definizione.

Classificazione degli estremi del dominio come massimo o minimo

Negli esempi del paragrafo precedente abbiamo visto come gli estremi dell'intervallo di definizione possano essere punti di massimo o minimo locale o assoluto. É utile vedere come si possano classificare gli estremi come punti di massimo o minimo.

Estremo inferiore (superiore). A partire dall'estremo inferiore (superiore) si possono considerare solo valori della variabile indipendente maggiori (minori) di questo, quindi per valutare se tale punto sia un punto di massimo o di minimo dobbiamo capire se la funzione nell'intorno destro (sinistro) dell'estremo é crescente oppure decrescente.

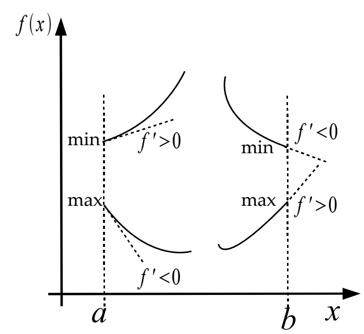


Figura 7: Quattro possibili casi di massimo e minimo negli estremi del dominio.

Se la funzione é crescente, quindi ha derivata prima destra (sinistra) positiva, allora l'estremo sará un punto di minimo (massimo) locale, mentre se é decrescente, quindi ha derivata prima destra (sinistra) negativa, allora sará un punto di massimo locale. Nella Fig.7 riportiamo i quattro possibili casi qui descritti.

Abbiamo indicato i punti come punti di massimo o minimo locali e non assoluti in quanto per poter distinguere questi due casi dobbiamo analizzare gli altri punti di massimo e minimo all'interno del dominio. Comunque un punto di massimo (minimo) assoluto é anche locale, quindi l'uso generale dell'aggettivo locale é sempre corretto.

Quanto detto sopra puó essere riepilogato con la seguente proposizione:

Data una $f(x)$ definita in $D_f = [a, b]$, si dice che:

a é punto di massimo (minimo) locale se $\exists I^+(a)$ tale che $\forall x \in I^+(a) \cap D_f$, con $x \neq a$, risulta $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$).

b é punto di massimo (minimo) locale se $\exists I^-(b)$ tale che $\forall x \in I^-(b) \cap D_f$, con $x \neq b$, risulta $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

La dimostrazione di questa proposizione potrebbe essere un buon esercizio da svolgere insieme agli studenti.

Esempio in fisica di un dominio diverso dal campo di esistenza

Per dare un esempio di un fenomeno fisico in cui il dominio considerato é diverso dal campo di esistenza della funzione si pensi per esempio all'andamento della differenza di potenziale ai capi di un condensatore in funzione del tempo durante la fase di scarica. Questo andamento sappiamo essere una esponenziale negativa del tipo:

$$V(t) = V_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad t \geq 0 \tag{2}$$

Chiaramente questo fenomeno ha senso per $t \geq 0$, in quanto si considera $t = 0$ l'istante in cui inizia la scarica. Prima dell'inizio della scarica la tensione rimane costante, quindi non ha senso considerare la funzione esponenziale per tempi negativi. Ecco quindi che analizzando tale funzione il massimo risulta essere in corrispondenza di $t = 0$, mentre se considerassimo l'esponenziale su tutto $\Re$ notiamo che la funzione tende a $+\infty$ per t che tende a $-\infty$.

Studio della derivata prima in prossimitá dei massimi e minimi locali

Consideriamo le quattro funzioni continue rappresentate nei grafici di Fig.8.
Osservando il comportamento della derivata prima in prossimitá del massimo locale, piú precisamente in un intorno del punto di massimo, possiamo notare che per tutte e quattro le funzioni alla sinistra del punto di massimo la funzione ha derivata prima positiva, mentre alla destra ha derivata prima negativa. Risulta chiaro che in prossimitá di un massimo locale la funzione debba prima crescere e

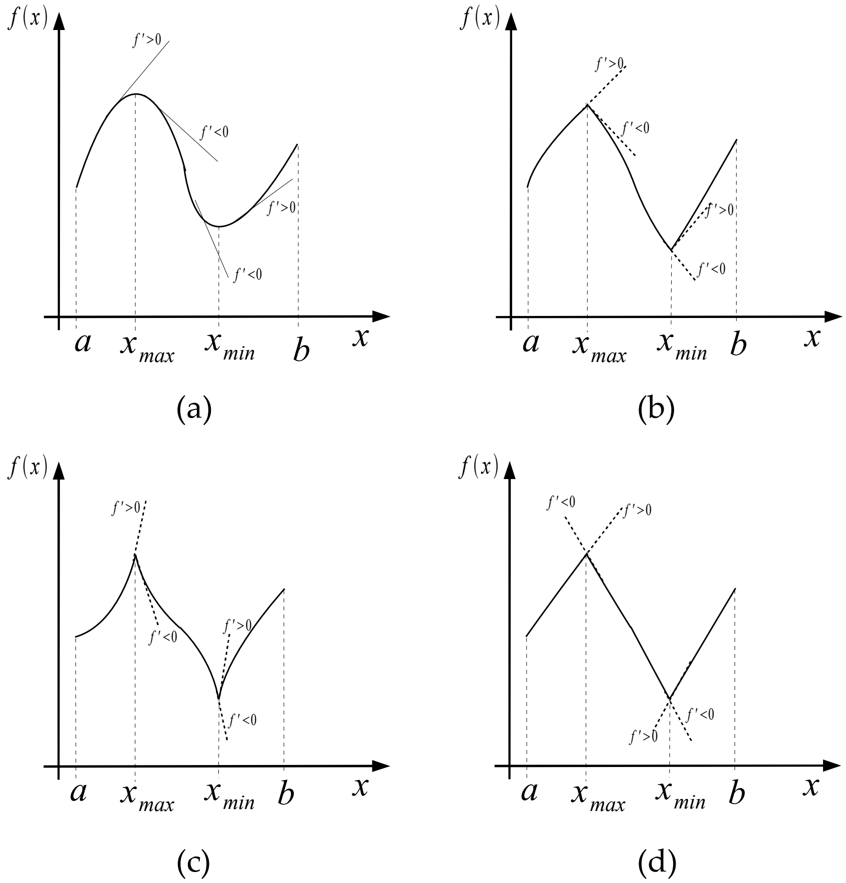


Figura 8: Quattro esempi di funzioni continue definite nell'intervallo $[a, b]$ con un massimo e un minimo locali. La funzione in (a) é derivabile su tutto il dominio, le funzioni in (b), (c) e (d) non sono derivabili nei punti di massimo e minimo locale.

raggiunto il massimo debba poi decrescere. Funzione crescente significa derivata prima positiva, mentre funzione decrescente significa derivata prima negativa, questo comportamento é inoltre assicurato dal seguente teorema:

Teorema 1 (Crescenza e decrescenza di una funzione) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$.*

- *Se $f'(x) > 0\ \forall x \in]a, b[\implies f(x)$ é crescente in $[a, b]$*
- *Se $f'(x) < 0\ \forall x \in]a, b[\implies f(x)$ é decrescente in $[a, b]$*

per la dimostrazione si veda [1] pag.254.

Dobbiamo far notare che non necessariamente in corrispondenza di un massimo locale la derivata si deve annullare, infatti questo si verifica solo per la funzione in (a), la quale é derivabile nei punti di massimo e di minimo, ma non per le altre tre. Possiamo quindi generalizzare il fatto dicendo che:

Sia $f(x)$ una funzione continua in $D_f = [a, b]$, l'ascissa x_{max} é punto di massimo locale se $\exists\ I(x_{max})$ tale che siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \forall x \in I(x_{max}) \cap D_f, x < x_{max} f^{'}(x) > 0 \\ \forall x \in I(x_{max}) \cap D_f, x > x_{max} f^{'}(x) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Analogamente a quanto detto per il massimo locale si puó dire per il minimo locale. Chiaramente per raggiungere il minimo la funzione dovrá prima decrescere, quindi aver derivata prima negativa, poi, oltre il minimo, dovrá crescere, quindi avere derivata prima positiva. Possiamo quindi generalizzare dicendo che:

Sia $f(x)$ una funzione continua in $D_f = [a, b]$, l'ascissa x_{min} é punto di minimo locale se $\exists\ I(x_{min})$ tale che siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \forall x \in I(x_{min}) \cap D_f, x < x_{min} f^{'}(x) < 0 \\ \forall x \in I(x_{min}) \cap D_f, x > x_{min} f^{'}(x) > 0 \end{cases} \quad (4)$$

É immediato ora comprendere che per ricercare i punti di massimo e minimo locali di una funzione basta individuare quei punti del dominio in cui si verifica un cambio di segno della derivata prima della funzione, quindi basta eseguire uno studio del segno della derivata prima ed estrarne le informazioni cercate. Sottolineiamo che non é necessario l'annullarsi della derivata prima in corrispondenza di tali punti, in quanto per le funzioni non derivabili in questi punti la derivata prima non si puó calcolare, ma si puó solo calcolare la derivata prima destra e sinistra.

Supponiamo che dallo studio del segno della derivata prima delle quattro funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $l(x)$ in prossimitá di un punto interessante x_0 risulti quanto indicato nella Fig.9. Analizziamo quanto riportato negli studi di Fig.9. Anzitutto notiamo che si sta considerando un punto del dominio x_0 che per qualche ragione risulta interessante, per esempio potrebbe essere un punto di non derivabilitá. La derivata prima di ognuna delle quattro funzioni in corrispondenza di tale punto non é indicata, in quanto per lo studio che vogliamo effettuare noi non ha importanza conoscerla. Esponiamo di seguito le implicazioni che ci fanno concludere

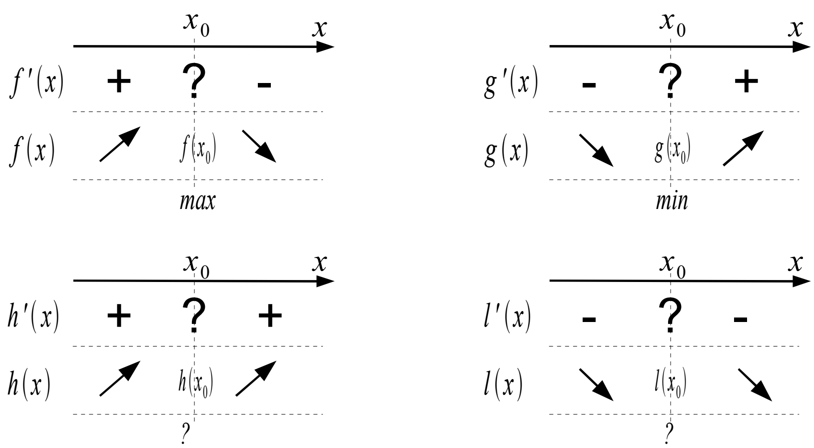


Figura 9: Quattro esempi di studio del segno della derivata prima nelle prossimitá di un punto interessante.

se x_0 é punto di massimo, di minimo o nulla:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ in } I^-(x_0) \Longrightarrow f(x) \text{ é crescente in } I^-(x_0) \\ \\ f'(x) < 0 \text{ in } I^+(x_0) \Longrightarrow f(x) \text{ é decrescente in } I^+(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \text{ ha un massimo in } x_0 \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) < 0 \text{ in } I^-(x_0) \Longrightarrow g(x) \text{ é decrescente in } I^-(x_0) \\ \\ g'(x) > 0 \text{ in } I^+(x_0) \Longrightarrow f(x) \text{ é crescente in } I^+(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g(x) \text{ ha un massimo in } x_0 \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} h'(x) > 0 \text{ in } I^-(x_0) \Longrightarrow h(x) \text{ é crescente in } I^-(x_0) \\ \\ h'(x) > 0 \text{ in } I^+(x_0) \Longrightarrow h(x) \text{ é crescente in } I^+(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} h(x) \text{ non ha né massimo} \\ \text{né un minimo in } x_0 \end{array} \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{l} l'(x) < 0 \text{ in } I^-(x_0) \Longrightarrow l(x) \text{ é decrescente in } I^-(x_0) \\ \\ l'(x) < 0 \text{ in } I^+(x_0) \Longrightarrow l(x) \text{ é decrescente in } I^+(x_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} l(x) \text{ non ha né massimo} \\ \text{né un minimo in } x_0 \end{array} \tag{8}$$

Esempi di funzione con un punto spigoloso

Si consideri per esempio la funzione:

$$f(x) = -|x| \quad x \in \Re \tag{9}$$

Come si puó facilmente notare dalla rappresentazione grafica della funzione il suo valore massimo é $f_{max} = 0$ in corrispondenza del punto di massimo $x_{max} = 0$. Notiamo anche la funzione in questo punto ha un punto spigoloso.

Per prendere piú famigliaritá con lo studio del segno della derivata prima per la determinazione di massimi e minimi possiamo proporre agli studenti di svolgere alcuni esempi sotto la guida del docente. Si trovino per esempio i massimi e i minimi delle seguenti funzioni:

$$f(x) = |x - 3| \text{ definita nell'intervallo } [1, 7];$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} \text{ definita nell'intervallo } [0, 2];$$

Derivata prima in prossimitá dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili

Se consideriamo come caso particolare una funzione derivabile come quella rappresentata in Fig.10, notiamo che in corrispondenza dei punti di massimo e minimo locale oltre ad essere verificate le condizioni 3 e 4 si verifica anche che la derivata prima si annulla. Questo fatto é tradotto nel seguente teorema:

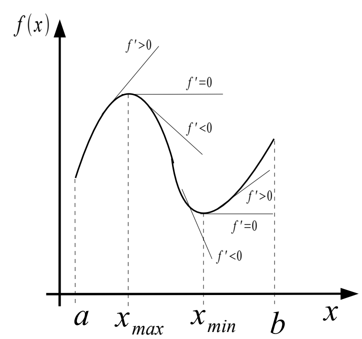


Figura 10: Esempio di una funzione derivabile definita nell'intervallo $[a, b]$ con un massimo e un minimo locale e comporamento della derivata prima in corrispondenza di essi.

Teorema 2 (di Fermat) *Nei punti di minimo o massimo locali di una funzione derivabile interni al dominio la derivata é nulla.*

Per la dimostrazione facciamo riferimento al libro di testo [1] pag.244.

É molto importante sottolineare il fatto che l'annullarsi della derivata non é sufficiente a garantire che il punto corrispondente sia un punto di massimo o minimo locale. Possono infatti verificarsi i due casi illustrati in Fig.11. La funzione di sinistra é crescente sia alla destra che alla sinistra del punto in cui si annulla la derivata e ció implica che tale punto non é né un punto di massimo né un punto di minimo. La funzione di destra é decrescente sia alla destra che alla sinistra del punto in cui si annulla la derivata e ció implica

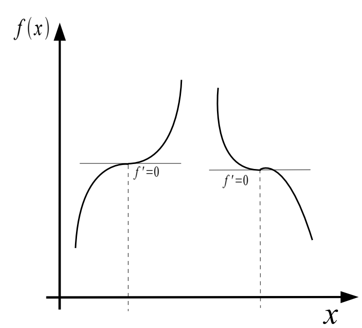


Figura 11: Esempio di flesso ascendente e discendente.

che tale punto non é né un punto di massimo né un punto di minimo. I punti considerati in questo esempio sono detto punti di flesso e verranno analizzati nel paragrafo 0.4.6.

Derivata seconda in prossimitá dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili

Se la funzione é derivabile due volte possiamo determinare univocamente se il punto in corrispondenza del quale si annulla la derivata prima é un punto di massimo o di minimo analizzando la derivata seconda in quel punto. Se la derivata seconda in quel punto é positiva, significa che la derivata prima é crescente, quindi siamo in corrispondenza di un minimo della funzione. Differentemente se la derivata seconda é negativa significa che la derivata prima é decrescente, quindi siamo in presenza di un massimo.
La precedente argomentazione é formalizzata dal seguente teorema:

Teorema 3 (della derivata seconda) *Se in $]a, b[$ la funzione $f(x)$ é derivabile almeno due volte, con derivata seconda continua, e se in $x_0 \in]a, b[$ risula:*

$$f'(x_0) = 0 \;\; e \;\; f''(x_0) > 0 \; (f''(x_0) < 0)$$

allora il punto x_0 é un punto di minimo (massimo) locale.

Per la dimostrazione del teorema facciamo riferimento al testo [1] pag.264.

0.4.6 Flessi e concavitá

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che in corrispondenza di un punto di massimo (minimo) locale di una funzione derivabile la derivata prima si annulla. Abbiamo inoltre visto che si possono presentare casi in cui la derivata prima si annulla, ma il punto del dominio corrispondente non é risultato essere né un massimo né un minimo locale e lo abbiamo identificato come un punto di flesso. Detto in questi termini non é comunque chiaro che cosa si intenda per flesso e punto di flesso, infatti per darne una definizione rigorosa dobbiamo prima introdurre il concetto di concavitá e convessitá di una funzione.

Introduzione a concavitá e convessitá di una funzione

Introduciamo il concetto di concavitá e convessitá facendo riferimento alla parabola. Per fornire agli studenti un'immagine facile da ricordare facciamo riferimento alla parabola come un vaso visto in sezione. Il vaso presenta una cavitá rivolta verso l'alto, da questa raffigurazione possiamo associare la parola concavitá che nel caso del vaso, e quindi della parabola che ne rappresenta la sezione, é rivolta verso l'alto. In questo caso concavitá rivolta verso l'alto si definisce convessitá. Differentemente se consideriamo il vaso capovolto, quindi la parabola rovesciata, allora la concavitá é rivolta verso il basso e rimane difinita con concavitá.

Concavitá: concavitá rivolta verso il basso, come per esempio la funzione rappresentata in Fig.12(a). Un esempio potrebbe essere la parabola $f(x) = -x^2$.

Convessitá: concavitá rivolta verso l'alto, come per esempio la funzione rappresentata in Fig.12(b). Un esempio potrebbe essere la parabola $f(x) = x^2$.

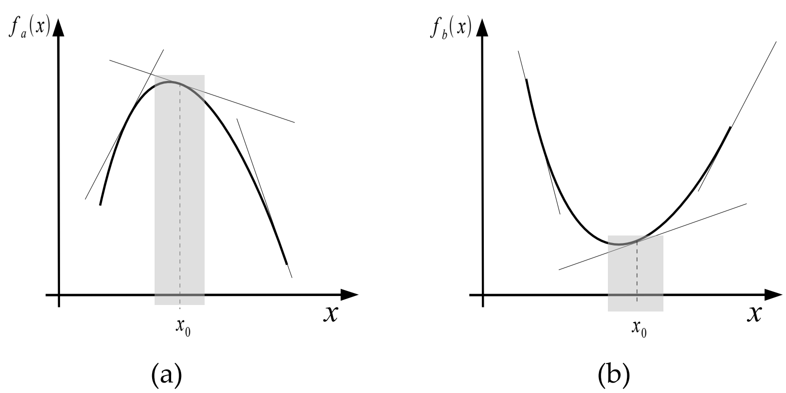


Figura 12: (a) esempio di funzione concava, (b) esempio di funzione convessa.

Definizione di concavitá, convessitá e punto di flesso

Ci rendiamo conto che le argomentazioni esposte nella precedente sezione ci possono fornire solo un'idea intuitiva del concetto di concavitá e convessitá, mentre per poter operare con questa classificazione a livello di studio di funzione dobbiamo formulare una definizione rigorosa.

Per costruire intuitivamente una definizione rigorosa prendiamo sempre in considerazione le due funzioni del paragrafo precedente, quindi $f_a(x)$ e $f_b(x)$. Tracciando graficamente diverse rette tangenti alle curve considerate, come indicato in Fig.12 possiamo evidenziare i seguenti comportamenti delle funzioni:

- $f_a(x)$ (concava): la curva che rappresenta la funzione rimane sempre al di sotto di una qualsiasi retta tangente considerata;

- $f_b(x)$ (convessa): la curva che rappresenta la funzione rimane sempre al di sopra di una qualsiasi retta tangente considerata;

Il caso considerato é un caso specifico, ma si intuisce che in generale per una funzione concava o convessa si verificano i comportamenti sopra elencati. Puó peró succedere che una funzione non sia concava o convessa su tutto il dominio, ma potrebbero verificarsi uno o piú cambi di convessitá. Il punto sulla curva in cui si verifica il cambio di concavitá é detto punto di flesso. Evidenziamo inoltre che per ogni punto del dominio si puó considerare la corridpondente retta tangente alla curva, quindi per correttezza dobbiamo fornire una definizione di concavitá e convessitá riferendoci ai punti del dominio. In altre parole la concavitá di una funzione puó variare da punto a punto del dominio, possiamo quindi formulare le seguenti definizioni per concavitá e convessitá:

Def. convessitá: si dice che la funzione $f(x)$ é convessa nel punto x_0 se esiste un intorno $I(x_0)$ di tale punto, in cui il grafico della funzione non é mai al di sotto della retta tangente alla curva in corrispondenza dell'ascissa considerata. Per maggiore chiarezza si veda la Fig.12(a).

Def. concavitá: si dice che la funzione $f(x)$ é concava nel punto x_0 se esiste un intorno $I(x_0)$ di tale punto, in cui il grafico della funzione non é mai al di sopra della retta tangente alla curva in corrispondenza dell'ascissa considerata. Per maggiore chiarezza si veda la Fig.12(b).
Come abbiamo accennato sopra i corrispondenza di quei punti in cui la funzione passa da concava a convessa o viceversa si parla di punti di flesso. Dall'esempio grafico di Fig.11 si puó intuire che la retta tangente alla curva nel punto di flesso risulta tagliare la curva, si nota inoltre che in un intorno sinistro la curva rimane al di sotto della tangente, mentre in un intorno destro rimane al di sopra o viceversa. A seguito di queste argomentazioni possiamo fornire la seguente definizione di punto di flesso:

Def. punto di flesso: si dice che la funzione $f(x)$ presenta un punto di flesso di coordinate $(x_0, f(x_0))$ se in tale punto la curva rappresentante la funzione attraversa la tangente, cioé si verifica che in un intorno sinistro la curva rimane al di sotto della tangente e in un intorno destro rimane al di sopra o viceversa.

Determinazione di concavitá, convessitá e dei punti di flesso

Cerchiamo in questo paragrafo di determinare intuitivamente da semplici esempi quali strumenti si devono usare per determinare l'orientazione della concavitá (cioé se é concava o convessa) e punti di flesso. Dopo questa trattazione formalizzeremo il tutto con un teorema.

Consideriamo come semplice esempio le solite due parabole viste prima, la parabola convessa $f(x) = x^2$ e quella concava $f(x) = -x^2$. Analizzando graficamente la tangente alla curva, situazione del tutto analoga a quella rappresentata in Fig.12, quindi la derivata prima della funzione possiamo facilmente vedere che per la parabola convessa da negativa ad un certo punto si annulla per poi divenire positiva e crescere indefinitamente, quindi la derivata prima é una funzione sempre crescente. Per quanto riguarda la parabola concava, la sua derivata prima da positiva ad un certo punto si annulla per poi decrescere indefinitamente a valori negativi, quindi la derivata prima é sempre decrescente. Tale descrizione potevamo anche semplicemente determinarlo calcolando la derivata prima delle parabole, che risultano essere rispettivamente $f'(x) = 2x$ e $f'(x) = -2x$.

Dalle precedenti argomentazioni si puó intuire che se restringiamo le osservazioni fatte ad un intorno di un certo punto del dominio in cui la funzione é convessa oppure concava possiamo concludere che in questo intorno la derivata prima é corrispondentemente crescente oppure descrescente.
Allora il fatto che la derivata prima della funzione in esame in corrispondenza di un punto del dominio sia crescente oppure decrescente implica che la funzione é convessa oppure concava.
Per determinare se la derivata prima é crescente oppure decrescente si deve valutare la derivata della derivata prima, quindi la derivata seconda della funzione. Se questa risulta positiva significa che la derivata prima é crescente quindi la funzione é convessa. Differentemente se la derivata seconda é negativa allora la derivata prima é decrescente, quindi la funzione é concava.

Per quanto riguarda i punti di flesso, siccome questi sono punti in cui avviene un cambio di concavitá, significa che la derivata seconda in corrispondenza di questi punti cambierá di segno, cioé si annulla. Per poter definitivamente concludere che dove si annulla la derivata seconda si ha un flesso bisogna peró anche verificare che la derivata terza (o le derivate dispari successive) sia diversa da zero. Il fatto che una derivata dispari successiva diversa da zero in quel punto assicura che la funzione ha un flesso, dovrebbe essere spiegato in termini di svuluppo in serie di Taylor. Chiaramente non é sempre possibile poter arrivare a sviluppare questo argomento, quindi si potrebbero fare alcune osservazioni prendendo come esempio funzioni semplici pari (per esempio $f(x) = x^2$), le quali non presentano punti di flesso, mentre presentano in generale punti di flesso, semplici funzioni dispari come $f(x) = x^3$. Bisogna essere molto cauti con una argomentazione di questo tipo, in modo da non rischiare di creare negli studenti concetti che presi in generali potrebbero essere non corretti.

Formalizzazione dello studio della derivata seconda per la concavitá

Formalizziamo quanto introdotto nel precedente paragrafo con il seguente teorema:

Teorema: Dall'esame della derivata seconda di una funzione si ricava che:

1. se $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x)$ é convessa in x_0
2. se $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x)$ é concava in x_0
3. se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0 \Longrightarrow$ la curva che rappresenta la $f(x)$ nel piano cartesiano ha nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$ un flesso.

Indicazioni dimostrazione: forniamo solo alcune indicazioni per la comprensione della dimostrazione, per la quale si fa riferimento al testo [1] pag. 275.
Per la dimostrazione di questo teorema si considera il punto x_0 del dominio, in corrispondenza del quale si trattano i casi di convessitá, concavitá e flesso, per semplicitá ci riferiamo solo al caso di convessitá, per le altre situazioni le argomentazioni sono simili. Siccome si vuole dimostrare la convessitá della funzione nel punto x_0, riferendoci alla definizione si deve considerare la retta tangente alla curva in corrispondenza di tale punto. Si ricava anzitutto l'equazione di tale retta $r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, quindi si definisce la funzione differenza $\varphi(x)$ come differenza fra la funzione $f(x)$ e la retta tangente $r(x)$, cioé $\varphi(x) = f(x) - r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. La dimostrazione prosegue mostrando che $\varphi''(x_0) = f''(x_0)$ e imponendo la prima ipotesi $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow \varphi''(x_0) > 0$. $\varphi''(x_0) > 0$ implica che la $\varphi'(x_0) = 0$, cioé x_0 é punto di minimo della differenza fra la funzione e la retta, quindi $\varphi(x) \geq \varphi(x_0) \Longrightarrow f(x) \geq r(x)$. Per la definizione di convessitá se ne conclude che la funzione é convessa.

Osservazione su massimi, minimi e concavitá

Ora che é stata definita la concavitá di una funzione dovrebbe risultare ancora piú chiaro il significato del Teorema 3. Questo teorema puó essere reinterpretato in termini di concavitá e convessitá dicendo che se in corrispondenza di un punto in cui la derivata prima della funzione si annulla, la funzione risulta concava (convessa), allora in corrispondenza di quel punto la funzione ha un massimo (minimo). La corrispondenza tra concavitá (convessitá) e massimo (minimo) risulta evidente anche a livello intuitivo nel momento in cui immaginiamo la situazione grafica.

0.4.7 Osservazione su massimi e minimi per funzioni discontinue o non definite

Fino ad ora abbiamo esaminato solo esempi di funzioni continue non necessariamente derivabili. In situazioni piú complesse si puó aver a che fare con funzioni che presentano uno o piú punti di discontinuitá o punti in corrispondenza dei quali la funzione non é proprio definita. In merito a questi casi forniremo solo alcune indicazioni in modo da permettere di acquisire le capacitá osservative necessarie per operare in tali situazioni. Consideriamo quindi quelli che possono essere gli esempi piú significativi.

Funzione definita in un intervallo aperto limitato

Finora abbiamo sempre considerato funzioni definiti in intervalli chiusi, quindi definite anche negli estremi. Prendiamo qui inconsiderazione un esempio di una funzione definita in un intervallo aperto, cioé non definita in almeno uno degli estremi.

Consideriamo quindi una $f(x)$ definita in $[a, b[$, il che significa che é definita nell'estremo a, ma non lo é nell'estremo b. Supponiamo ora che esistano un certo numero di punti del dominio, fra i quali puó essere compreso anche l'estramo a, in corrispondenza dei quali la funzione ha massimi e minimi locali. Fra tutti questi massimi e minimi locali identifichiamo quelli che potrebbero essere i candidati di massimo e minimo assoluti, quindi indichiamo con m il piú piccolo dei minimi locali e con M il piú grande dei massimi locali.

Per poter concludere con certezza se m e M sono effettivamente il minimo e il massimo assoluti dobbiamo studiare il comportamento della funzione in prossimitá dell'estremo b. Supponiamo quindi che la funzione abbia limite finito l_b per $x \to b^-$ (limite sinistro), quindi che sia:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = l_b$$

A questo punto non ci rimane che confrontare m e M con l_b e valutare quale fra i seguenti casi si presenta:

1. $m \leq l_b \Longrightarrow m$ é il minimo assoluto
2. $l_b \leq M \Longrightarrow M$ é il massimo assoluto
3. $l_b < m \Longrightarrow f(x)$ non ha minimo assoluto, rimane comunque M il massimo assoluto. Questo caso si verifica anche se il limite non é finito e risulta $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.
4. $M < l_b \Longrightarrow f(x)$ non ha massimo assoluto, rimane comunque m il minimo assoluto. Questo caso si verifica anche se il limite non é finito e risulta $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

I casi 1 e 2 possono verificarsi contemporaneamente se $m \leq l_b < M$ oppure se $m < l_b \leq M$. Non é corretto indicare questa situazione con $m \leq l_b \leq M$ in quanto ció non esclude la pssibilitá di avere $m = l_b = M$, condizione che non é possibile per come abbiamo definito m e M, altrimenti la funzione risulterebbe una costante su tutto il dominio.

Nel caso in cui la funzione non sia definita in entrambi gli estremi allora si dovranno valutare i diversi casi come fatto sopra. É chiaro, per esempio, che basta che per uno solo degli estremi sia verificato il punto 3 sopra per poter concludere che la $f(x)$ non ha minimo.

Funzione definita in un intervallo aperto illimitato

Consideriamo ora il caso in cui uno degli estremi sia illimitato, quindi consideriamo una $f(x)$ definita nell'intervallo $[a, +\infty[$. Consideriamo il minimo m e massimo M locali come in precedenza (con $m < M$) e analizziamo i possibili casi che possiamo incontrare confrontando m e M con il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

dove l puó essere anche $\pm\infty$.

1. $m \leq l \Longrightarrow m$ é il minimo assoluto
2. $l \leq M \Longrightarrow M$ é il massimo assoluto
3. $l < m \Longrightarrow f(x)$ non ha minimo assoluto.
4. $M < l \Longrightarrow f(x)$ non ha massimo assoluto.

Per i punti 1 e 2 valgono le stesse osservazioni fatte nel paragrafo precedente.

Funzione con un punto di discontinuitá

Immaginiamo una funzione con un punto di discontinuitá interno al dominio, quindi una $f(x)$ definita in $[a, b] \setminus x_0$. Al fine della ricerca di massimi e minimi il punto di discontinuitá puó essere considerato allo stesso modo in cui si sono considerati gli estremi del dominio nei paragrafi precedenti. Bisogna chiaramente fare attenzione se la funzione é definita nell'intorno destro o sinistro di x_0, se nell'intorno o negli intorni in cui non é definita ha limite e infine si deve considerare tutto il dominio globalmente per trarre le conclusioni in termini di comportamento della funzione. Per esempio se in x_0^- é definita, allora x_0^- si puó considerare analogamente ad un estremo compreso. Chiaramente in questo caso non sará definita in x_0^+ e questo dovrá essere trattato analogamente ad un estremo aperto del dominio.

0.4.8 Studio del grafico di una funzione

Dopo aver affrontato gli argomenti precedenti possiamo fornire una linea guida generale per lo studio di una funzione. Ovviamente l'elenco che viene qui indicato non é necessariamente detto che debba sempre essere seguito in questo ordine, dipenderá dal tipo di funzione. In generale possiamo comunque dire che se vogliamo rappresentare graficamente una funzione dalla sua espressione analitica possiamo procedere secondo quanto indicato in questa scaletta:

1. studio del campo di esistenza e degli eventuali punti singolari;
2. studio del segno della funzione;
3. comportamento della funzione agli estremi del dominio e negli eventuali punti singolari, quindi studio dei limiti in questi punti;
4. ricerca e studio degli eventuali asintoti verticali, orizzontali e obliqui;
5. studio della derivata prima:
   (a) studio del segno di $f' \Longrightarrow$ determinazione di crescenza e decrescenza di f;
   (b) individuazione degli eventuali punti di massimo e minimo locali;
   (c) individuazione degli eventuali punti a tangenza nulla per la caratterizzazione dei massimi e minimi o dei flessi orizzontali;
6. studio della derivata seconda:
   (a) studio del segno di $f'' \Longrightarrow$ determinazione di concavitá e convessitá di f e dei punti di flesso;

Per esercitare gli studenti nell'applicazione di questa scaletta per lo studio di una funzione e quindi per renderli il piú possibile autonomi si possono proporre svariati esercizi che coinvolgano diverse funzioni, come polinomi, funzioni razionali, irrazionali, goniometriche, esponenziali, logaritmiche, oscillanti... Si puó per esempio far riferimento agli studi di funzione svolti nel testo [1] pag.281-302.

0.4.9 Svolgimento di problemi di massimo e minimo

Oltre ai precedenti esercizi é di fondamentale importanza guidare gli studenti nell'impostazione e risoluzione di problemi reali. Ossia da una certa situazione reale descritta lo studente deve essere in grado di impostare analiticamente il problema e quindi di risolverlo con i metodi studiati. A questo proposito proponiamo un semplice esempio che puó essere risolto con un metodo elementare oppure con lo studio di una opportuna funzione associata al problema. Riprendiamo quindi il problema enunciato nell'introduzione ai contenuti.

Si deve realizzare un recinto rettangolare avendo a disposizione 100 m di rete. Tale recinto deve essere il piú capiente possibile, in termini di superficie racchiusa. Quanto devono essere i lati di questo rettangolo?

Anzitutto procediamo ad impostare il problema. Chiamiamo a e b i due lati del rettangolo e sia P il primetro ed S la superficie, quindi possiamo impostare il seuente sistema:

$$\begin{cases} a+b=\frac{P}{2} \\ \\ a\cdot b=S \\ \\ a>0 \\ b>0 \end{cases}$$

A questo punto possiamo esprimere per esempio il lato b in funzione del lato a e del perimetro P, $b=\frac{P}{2}-a$, in modo da esprimere la superficie infunzione di un solo lato e del perimetro, ottenendo:

$$S=-a^2+a\frac{P}{2}$$

Essendo il perimetro una costante, l'espressione della superficie in funzione del lato a risulta essere una parabola concava. Una parabola concava presenta un massimo in corrispondenza dell'asse di simmetria della parabola [2] , quindi in corrispondenza di $a = \frac{P}{4}$, percui b risulta $b = \frac{P}{4}$, cioé $a = b$. In coclusione il recinto di area maggiore si ottiene quando i lati sono uguali.

Lo stesso risultato si puó ottenere se facciamo lo studio della funzione che esprime la superficie in funzione del lato a. Essendo una funzione derivabile possiamo cercare il punto di massimo fra i punti in corrispondenza dei quali si annulla la derivata prima calcolata rispetto ad a, quindi valutare il segno della derivata seconda, cioé:

$$S' = -2a + \frac{P}{2} = 0 \Longrightarrow a = \frac{P}{4}\ ;\ S''(\frac{P}{4}) = S''(a) = -2 < 0 \Longrightarrow a \text{ é un massimo.}$$

Questo esercizio era per fare un esempio, ma se ne possono chiaramente affrontare altri prendendo spunto dalle tante proposte dell'UMI per esempio.

0.5 Verifica formativa

L'esperienza di tirocinio attivo svolto nella scuola mi fa preferire l'idea di svolgere gli argomenti trattati in questo percorso passo passo con gli studenti, nel senso che ad ogni nuovo concetto e/o metodo vorrei far seguire una esercizio di applicazione da far svolgere agli e con gli studenti. Ritengo questo metodo un equivalente della verifica formativa. Per quanto riguarda gli esercizi e le immediate applicazioni da svolgere dopo ogni argomenti si puó far riferimento al libro di testo, sempre che questo contenga buone esercitazioni. Per quanto riguarda questo percorso didattico abbiamo fatto riferimento al testo [1], il quale é ricco di applicazioni svolte e non per ogni argomento trattato.

0.6 Verifica sommativa

Per la verifica sommativa, da svolgere in una lezione da 2 ore, propongo alcune domande riferite a particolari esempi che richiedono risposte inerenti alla teoria svolta. Per la valutazione delle capacitá acquisite invece si proporranno qualche funzione da studiare e un problema.

0.6.1 Testo della verifica

[2] Ricordiamo che una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha asse di simmetria $x = \frac{-b}{2a}$

Esercizio 1

Si consideri la funzione continua rappresentata in Fig.13 e si risponda alle seguenti domande:

1. Indicare graficamente con x_{max} il punto di massimo assoluto e con f_{max} il massimo assoluto della funzione.
2. É la funzione rappresentata derivabile in ogni punto del dominio? Giustificare la risposta.
3. In corrispondenza dei punti in cui la derivata prima si annulla (come indicato in figura) quale caratteristica cambia nella funzione? Giustificare la risposta.
4. Considerando gli estremi, quanti minimi presenta la funzione? Indicare graficamente con x_{min} il punto di minimo assoluto, se esiste, e con x_{min}^{loc} il punto o i punti di minimo locale, se esistono.

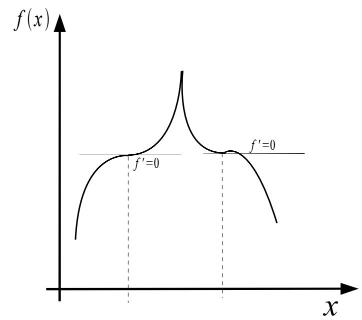


Figura 13: Funzione 1.

Esercizio 2

Si consideri la funzione rappresentata in Fig.14 e si risponda alle seguenti domande senza considerare gli estremi:

1. Indicare il numero di massimi e di minimi locali presenti nella funzione.
2. Indicare graficamente i punti di massimo e di minimo assoluto, se esistono.
3. Considerando solo l'intervallo fra il 950 e il 1200 si indichi approssimativamente se si si verifica un flesso.

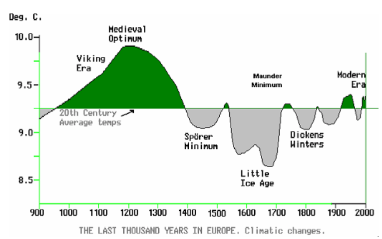


Figura 14: Funzione 2.

Esercizio 3

Si esegua lo studio della funzione $f(x) = xe^{-x}$ definita in $[0, +\infty[$

Esercizio 4

Si determinino le proporzioni fra le dimensioni di una lattina cilindrica, in modo che risulti minimo il consumo di metallo, a paritá di volume V di contenuto.

0.6.2 Griglia di valutazione

Riportiamo in Tab.2 I corrispondenti voti vengono distribuiti seguendo la griglia

Griglia punti

Esercizio	Punti
Esercizio 1	
-Domanda 1	1
-Domanda 2	2
-Domanda 3	2
-Domanda 4	3
Esercizio 2	
-Domanda 1	2
-Domanda 2	1
-Domanda 3	3
Esercizio 3	
-Comportamento agli estremi	2
-Ricerca dei max e min	2
-Concavitá, convessitá e punti di flesso	3
Esercizio 4	
-Impostazione del problema	5
-Risoluzione con ricerca del max o min	2
Totale punti	28

Griglia corrispondenza

Punti	Voto
0-2	3
3-6	4
7-10	5
11-14	6
15-18	7
19-22	8
23-26	9
27-28	10

Tabella 2: Punteggio verifica sommativa.

di corrispondenza in Tab.2. Per l'attribuzione dei voti consideriam come intervallo da 3 a 10, per poter dare 10 si richiede l'eccellenza, quindi lasciamo un piccolo margine di un solo punto, cioé con 27 o 28 punti si raggiunge voto 10. Per tutti gli altri voti corrisponde un intervallo di 4 punti.

0.7 Conclusioni

Il percorso didattico inerente lo studio di funzioni é ovviamente molto vasto e puó essere reso molto ricco e variegato delle piú svariate attivatá nel senso di applicazioni con software, approccio formalizzato ai teoremi, un approccio piú pratico applicato a problemi reali. Nel percorso didattico qui presentato ci siamo principalmente soffermati sullo studio dei massimi e minimi e concavitá, convessitá e punti di flesso. Abbiamo preferito concentrare lo sviluppo dell'argomento

massimi e minimi piuttosto che disperderci in tutti gli altri argomenti dello studio di funzione quali asintoti, zeri dela funzione... non perché si ritengano meno importanti, ma perché li riteniamo concettualmente meno complessi.
In sé il concetto di massimo e minimo non sono difficili, ma credo per come me lo ricordo dalle superiori, che spesso l'argomento venga proposto con metodi rigidi, legati fortemente ai teoremi e spesso limitati ai casi particolare, per esempio solo riferendosi alle funzioni derivabili. Qui abbiamo voluto prima introdurre sempre a livello qualitativo e intuitivo ogni concetto come massimi e minimi locali e assoluti, flessi... Per esempio spesso nei libri di testo si fa una forte distinzione fra flessi obliqui e flessi orizzontali, quindo in realtá un flesso é sempre un flesso, ossia un punto in corrispondenza del quale si verifica un cambio di concavitá. Abbiamo cercato quindi di evitare tutte quelle schematizzazioni che in realtá possono essere ragruppate in una piú semplice.
Dall'approccio qualitativo e intuitivo siamo poi passati ad enunciare i teoremi generali piú importanti, omettendone volutamente la dimostrazione in quanto si puó sempre far riferimento alle dimostrazioni che si trovano sui libri di testo.
In questa unitá didattica non abbiamo proposto esercizi svolti con i software didttici di matematica, in quanto verranno trattati in altra sede, ma sarebbe comunque opportuno l'utilizzo di questi software in particolare nelle parti introdutive di questa unitá didattica, dove l'intuito e la rappresentazione grafica sono alla base del nostro approccio.

Bibliografia

[1] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni, 'Il Manuale di Matematica - Secondo', Etas Libri 1992.

[2] Dott. Mirco Andreotti, 'Introduzione alle macchine termiche', Appunti per la classe 4K del Liceo Scientifico di Bondeno nell'ambito del tirocinio attivo 2007.
'http://df.unife.it/u/mandreot/SSIS/Tirocinio/MacchineTermiche.pdf'

[3] Sito web della Advancing Science, Serving Society,
'www.aaas.org/news/releases/2004/0615Crowley.pdf'

[4] Sito web NASA Earth Observatory,
'http://earthobservatory.nasa.gov/Study/GISSTemperature/giss_temperature2.html'

[5] Sito web Friends of Science,
'http://members.shaw.ca/sch25/FOS/Thousand%20year%20climate.gif'

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle