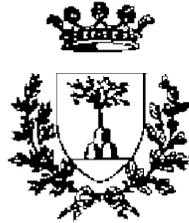


Università degli Studi di Ferrara



PERCORSO DIDATTICO DI FISICA  
DALLA NASCITA DELLA MECCANICA  
DEI QUANTI ALLA DUALITÀ  
ONDA-CORPUSCOLO

SSIS VIII Ciclo-Tirocinio

*Dott. Mirco Andreotti*

A.A. 2007/2008



# Indice

0.1	Introduzione . . . . .	1
0.2	Indicazioni generali . . . . .	2
0.2.1	Destinatari . . . . .	2
0.2.2	Prerequisiti . . . . .	2
0.2.3	Obiettivi generali . . . . .	2
0.2.4	Obiettivi trasversali . . . . .	3
0.2.5	Obiettivi specifici . . . . .	3
0.2.6	Contenuti . . . . .	4
0.2.7	Accertamento dei prerequisiti . . . . .	5
0.2.8	Tempi dell'intervento didattico . . . . .	5
0.3	Indicazioni dei programmi ministeriali . . . . .	5
0.3.1	Licei di ordinamento: classico e scientifico . . . . .	6
0.3.2	Piano Nazionale per l'Informatica . . . . .	6
0.3.3	Commissione Brocca . . . . .	6
0.4	Sviluppo dei contenuti . . . . .	7
0.4.1	Quantizzazione dell'energia . . . . .	7
0.4.2	Comportamento corpuscolare della luce . . . . .	13
0.4.3	Comportamento ondulatorio della materia . . . . .	19
0.4.4	Dualismo onda-corpuscolo . . . . .	21
0.4.5	La meccanica ondulatoria . . . . .	23
0.4.6	La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo . . . . .	24
0.4.7	Concetti base della meccanica quantistica . . . . .	27
0.4.8	Un interrogativo sulla realtà . . . . .	34
0.5	Verifica formativa . . . . .	34
0.6	Verifica sommativa . . . . .	35
0.6.1	Testo della verifica . . . . .	35
0.6.2	Griglia di valutazione . . . . .	36
0.7	Conclusioni . . . . .	37

<b>Elenco delle figure</b>	<b>41</b>
<b>Elenco delle tabelle</b>	<b>43</b>

## 0.1 Introduzione

L'introduzione della meccanica quantistica nella scuola secondaria superiore é sicuramente un'attività didattica di non facile sviluppo. In qualsiasi trattazione ci si voglia cimentare é inevitabile l'introduzione dei concetti fondamentali della meccanica quantistica, i quali sono ben lontani dal poter essere compresi intuitivamente con un modo di pensare logico. É risaputo che per poter comprendere e lavorare con la meccanica quantistica si debba assumere un modo di pensare quantomeccanico. É comunque normale che i concetti della meccanica quantistica non trovino spiegazioni logiche nella vita quotidiana ( o se vogliamo nella fisica classica ) in quanto con i nostri sensi non possiamo avvertire gli effetti quantomeccanici, senza comunque considerare il fatto che nel mondo macroscopico tali effetti sono talmente trascurabili da non poter essere rilevati.

I metodi tradizionali per l'introduzione della meccanica quantistica, anche a livello universitario, il piú delle volte ripercorrono gli eventi storici che dalla quantizzazione dell'energia hanno portato alla dualità onda-corpuscolo per terminare con la formulazione della meccanica quantistica come si studia oggi, si vedano per esempio i testi [3], [4], [9], [10]. Altri metodi di introduzione si basano su una terapia d'urto di trattazione della meccanica quantistica, basata sull'introduzione intuitiva di alcuni concetti e fenomeni quantomeccanici da esperimenti pensati per poi passare ad una costruzione matematica rigorosa, vedi per esempio [1].

Pensare ad una terapia d'urto per l'introduzione della meccanica quantistica nella scuola superiore potrebbe non essere la via migliore in quanto si corre il rischio di non aver nessun contatto con quello che effettivamente é stato il percorso dei fisici del XX secolo. Già si fatica a toccare con mano la meccanica quantistica, in questo modo si rischia di trasmettere dei concetti che non si sa bene dove disporre.

Anche un percorso prettamente storico comunque rischia di far perdere il cammino verso la comprensione della meccanica quantistica, in quanto nello sviluppo storico della meccanica quantistica si incontrano tanti vicoli ciechi, quindi si rischia per esempio di trasmettere un concetto che era nuovo per un certo tempo, ma che poi si é rivelato errato e si deve ritornare indietro. Oppure si può correre il rischio di soffermarsi su dettagli che potrebbero condurre fuori strada gli studenti. Ritengo per esempio rischioso il volersi soffermare sull'evoluzione dei diversi modelli atomici che si sono presentati nel corso dello sviluppo della meccanica quantistica. Un tale approfondimento richiede un certo tempo e un notevole sforzo per essere sviluppato correttamente, poi con il risultato finale che tutti i modelli studiati non sono effettivamente corrispondenti a quello che ne viene fuori della meccanica quantistica.

In questo percorso didattico cercheremo di seguire sí un percorso storico, in quanto riteniamo che in questo modo gli studenti possano condividere le loro perplessità con le stesse che hanno provato i fisici protagonisti di questa creazione, focalizzandoci però su quelle che riteniamo essere i fenomeni e le situazioni che poi hanno permesso di introdurre i concetti fondamentali della meccanica quantistica e di percorrere la giusta strada per la costruzione della meccanica quantistica moderna. I vari approfondimenti che si possono affrontare su questo argomento potranno poi essere oggetto di corsi di eccellenza o approfondimenti extra.

## **0.2 Indicazioni generali**

### **0.2.1 Destinatari**

Il percorso di meccanica quantistica qui proposto vuole essere indirizzato ad una classe quinta del liceo scientifico PNI, per il quale sono previste 3 ore settimanali di fisica ed é previsto dai programmi ministeriali affrontare tale argomento.

### **0.2.2 Prerequisiti**

Per come é stato pensato il percorso qui proposto, riteniamo che gli studenti debbano avere i seguenti prerequisiti:

1. idea intuitiva di elettrone e atomo dalla chimica;
2. basi di ottica geometrica;
3. concetti di interferenza e diffrazione della luce;
4. concetto di luce come onda elettromagnetica e spettro elettromagnetico;
5. concetto di polarizzazione della luce;
6. comportamento di cariche elettriche in campi elettrici;
7. basi di probabilità e statistica;
8. cenni di cinematica relativistica.

### **0.2.3 Obiettivi generali**

1. acquisire gli obiettivi specifici previsti per questo percorso didattico;
2. comprendere l'utilità della fisica nelle diverse discipline, scientifiche e non;
3. comprendere l'utilità nella vita di tutti i giorni di avere una preparazione fisica elastica;

4. riconoscere i fenomeni fisici negli ambiti di tutti i giorni e piú impensabili e non pensarli solo sui libri di scuola;

#### 0.2.4 Obiettivi trasversali

1. sviluppare l'attitudine alla comunicazione e alla cooperazione con gli altri studenti e con il docente;
2. aumentare le proprie conoscenze e la propria preparazione nell'ambito della fisica;
3. abituare e approfondire all'osservazione e all'uso dell'intuito e del ragionamento per la schematizzazione di certe situazioni;
4. sviluppare e ampliare la capacità di distinzione fra causa ed effetto, o meglio fra se e allora;

#### 0.2.5 Obiettivi specifici

##### 1. Conoscenze

- (a) sviluppo storico, non approfondito, della nascita della meccanica quantistica;
- (b) applicazioni nella vita quotidiana della meccanica quantistica;
- (c) i concetti fondamentali sui quali si costruisce l'argomento e come sono stati formulati;

##### 2. Competenze

- (a) essere in grado di interpretare un fenomeno quantistico con i concetti fondamentali della meccanica quantistica;
- (b) essere in grado di vedere come certe situazioni in meccanica quantistica non possono trovare analogie classiche;

##### 3. Capacità

- (a) essere in grado di comprendere e risolvere semplici esercizi di meccanica quantistica con le regole delle probabilità;
- (b) essere in grado di comprendere i problemi e le loro soluzioni in meccanica quantistica.

### 0.2.6 Contenuti

1. Quantizzazione dell'energia
  - (a) Quantizzazione dei livelli energetici dell'atomo
  - (b) L'esperimento di Frank-Hertz
  - (c) Spettro del corpo nero
  - (d) Effetto fotoelettrico e quanti di luce
2. Comportamento corpuscolare della luce
  - (a) Effetto Compton
  - (b) Fotoni in una radiografia
  - (c) Esperimenti con singoli fotoni
3. Comportamento ondulatorio della materia
  - (a) Interferenza e diffrazione di elettroni
  - (b) Esperimenti con singoli elettroni
4. Dualismo onda-corpuscolo
  - (a) Onde elettromagnetiche e fotoni
  - (b) Particelle e onde materiali
  - (c) Microscopico e macroscopico a confronto in termini ondulatori
5. La meccanica ondulatoria
6. La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo
  - (a) Orbitali dell'atomo di idrogeno
7. Concetti base della meccanica quantistica
  - (a) Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce
  - (b) Il principio di sovrapposizione degli stati
  - (c) Il principio di indeterminazione Heisenberg
  - (d) Il processo di misura in meccanica quantistica
8. Un interrogativo sulla realtà

### 0.2.7 Accertamento dei prerequisiti

L'accertamento dei prerequisiti sarà in parte valutato dagli esiti delle precedenti verifiche e in parte verrà valutato in via informale, nel senso non di verifica o interrogazione ufficiale, colloquiando e riepilogando con gli studenti gli argomenti contenuti nei prerequisiti. Si cercherà in particolare di richiamare e sottolineare quelli che sono gli aspetti necessari per affrontare l'argomento in questione.

### 0.2.8 Tempi dell'intervento didattico

Riportiamo nella Tab.1 uno schema delle ore impiegate per lo sviluppo di ognuno degli argomenti che compongono questo percorso.

Attività	Lezione (Ore)	Laboratorio (Ore)	Totale (Ore)
Quantizzazione dell'energia	2	1	3
Comportamento corpuscolare della luce	2	0	2
Comportamento ondulatorio della materia	1	0	1
Dualismo onda-corpuscolo	2	0	2
La meccanica ondulatoria	1	0	1
La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo	1	0	1
Concetti base della meccanica quantistica	3	2	5
Un interrogativo sulla realtà	1	0	1
Verifica sommativa	2	0	2
<b>Totale</b>	<b>15</b>	<b>3</b>	<b>18</b>

Tabella 1: Tempi previsti per lo svolgimento del percorso didattico.

## 0.3 Indicazioni dei programmi ministeriali

In questa sezione riportiamo in sintesi le indicazioni dei programmi ministeriali per i licei di ordinamento, PNI, Brocca e riforma Moratti.

### 0.3.1 Licei di ordinamento: classico e scientifico

**Indicazioni liceo classico.** Impensabile affrontare l'argomento nel classico.

**Indicazioni liceo scientifico.** Cenni sul comportamento ondulatorio, interferenza e diffrazione della luce nella classe IV. Per la classe V i programmi indicano cenni sulle onde elettromagnetiche e sulla costituzione della materia: molecole, atomi, nuclei ed elettroni.

### 0.3.2 Piano Nazionale per l'Informatica

**Indicazioni liceo scientifico PNI.** È previsto lo sviluppo dell'argomento struttura della materia, tema 5, nel triennio, per il quale sono previsti anche argomenti oltre quelli trattati in questo percorso. Oltre alle basi della meccanica quantistica si parla di stato solido, nucleo e radioattività, reazioni nucleari, tipi di interazione e particelle elementari. La prima parte di questo tema segue la tradizionale introduzione storica della meccanica quantistica.

### 0.3.3 Commissione Brocca

**Indicazioni per gli indirizzi classico.** Nel tema 3 si prevedono gli argomenti quanti, materia e radiazione in linea con gli argomenti trattati nel PNI.

**Indicazioni per gli indirizzi linguistico e socio-psico-pedagogico.** Il tema 3 prevede gli argomenti Interazione forte e debole, dall'atomo al nucleo, con la solita introduzione della struttura della materia seguita da approfondimenti sulle interazioni forti e deboli.

**Indicazioni per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.** Nel tema 5 si prevedono gli argomenti quanti, materia e radiazione con la tradizionale introduzione storica dei quanti fino all'interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Seguono poi argomenti facoltativi come principio di indeterminazione, nuclei, reazioni nucleari etc etc.

**Indicazioni per gli indirizzi chimico, elettrotecnica e automazione, elettronica e telecomunicazioni, informatico e telematico, meccanico, tessile, costruzioni, territorio, agroindustriale, e biologico.** Nel tema 3 si prevedono gli argomenti quanti, materia e radiazione con la solita introduzione, ma con una trattazione completa del percorso. Per ogni indirizzo specifico si approfondisco-

no o meno differenti argomenti come stato solido o altro.

**Indicazioni per gli indirizzi economico aziendale, linguistico aziendale.** Non é previsto l'argomento meccanica quantistica.

## 0.4 Sviluppo dei contenuti

Il percorso di introduzione della meccanica quantistica sviluppato nei contenuti che seguono parte anzitutto dai primi fenomeni che hanno reso necessario dover introdurre una discretizzazione (quantizzazione) dell'energia, grandezza che nella fisica classica é continua. Segue poi la trattazione di quei fenomeni che mostrano un comportamento corpuscolare della luce, comportamento che é bene evidenziare diverso dall'idea corpuscolare della luce che aveva Newton, infatti se ne possono verificare comportamenti piuttosto bizzarri se pensati in termini di fisica classica. Il percorso procede con la presentazione e l'interpretazione di quei fenomeni che invece mostrano un comportamento ondulatorio della materia. Mettendo quindi insieme il comportamento come onda e/o corpuscolo di luce e materia si puó trattare il dualismo onda-corpuscolo, per il quale riteniamo opportuno sottolineare l'idea sbagliata di interpretare l'onda come onda di materia, quando invece questa altro non é che una funzione che esprime una probabilitá di comportamento degli oggetti microscopici.

Al termine di questo percorso trattiamo quindi quelli che sono i concetti fondamentali della meccanica quantistica come il principio di sovrapposizione degli stati, la misura su un sistema quantomeccanico, principio di indeterminazione, cercando di eliminare le loro rappresentazioni sbagliate che possono nascere dal tentativo di spiegare tali fenomeni con analogie nel mondo macroscopico.

### 0.4.1 Quantizzazione dell'energia

#### Quantizzazione dei livelli energetici dell'atomo

Esperimenti sull'assorbimento ed emissione di luce da parte di atomi mostrano un comportamento discreto. Per essere piú precisi si vede dagli esperimenti che gli atomi possono assorbire o emettere solo luce di ben determinate lunghezze d'onda. Tali conclusioni si possono trarre osservando gli spettri di assorbimento e di emissione della luce da parte di gas di certi tipi di atomi. Inviando luce di lunghezze d'onda comprese in un certo intervallo e analizzando lo spettro della luce che attraversa il gas di atomi possiamo notare da Fig.1(b) che compaiono delle righe nere. Le aree colorate si riferiscono alla luce che non é stata assorbita dal gas, mentre le righe nere corrispondono alle lunghezze d'onda che mancano

nella luce uscente, quindi sono le lunghezze d'onda che sono state assorbite. Analogamente osservando invece lo spettro di emissione Fig.1(a) si possiamo vedere che compaiono solo certe righe colorate, mentre fra le righe non compare nulla. Questo significa che gli atomi emettono luce solo di ben determinate lunghezze d'onda. Notiamo inoltre che le righe nere dello spettro di assorbimento sono le corrispondenti delle righe di emissione.

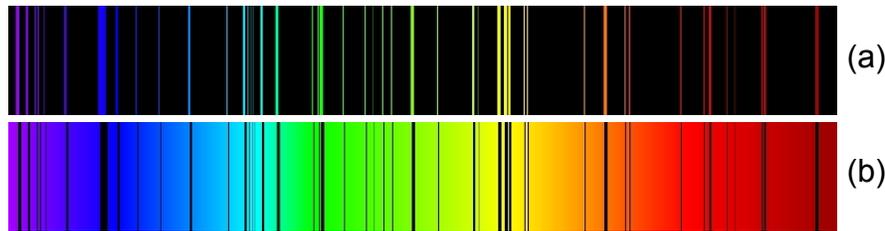


Figura 1: (a) Spettro di emissione del Hg, (b) spettro di assorbimento [13].

Queste osservazioni fanno pensare che gli atomi si possono presentare in stati energetici ben precisi e i salti di energia fra i diversi stati producono assorbimento o emissione di luce di una ben determinata lunghezza d'onda, corrispondente alla differenza di energia fra gli stati.

Ci si rende conto che cercare di spiegare l'atomo con i suoi livelli energetici discreti in termini di leggi classiche non é affatto facile, anzi sappiamo essere impossibile. Qualsiasi sistema classico che cerchiamo di immaginare caratterizzato da livelli energetici discreti conduce ad una costruzione che non trova spiegazione. Immaginare per esempio l'atomo come un mini sistema solare composto da un nucleo carico positivamente attorno al quale orbita l'elettrone conduce a diverse perplessità. Anzitutto ci possiamo cercare invano la risposta del perché solo alcune orbite sono permesse mentre altre no. Inoltre un sistema così pensato, in termini di elettromagnetismo classico, non ha ragione di esistere in quanto l'elettrone orbitante é costantemente sottoposto ad una accelerazione centripeta, ma una carica sottoposta ad accelerazione emette luce, il che ci porta a concludere che l'elettrone precipiterebbe in pochissimo tempo verso il nucleo. Quindi gli atomi come gli conosciamo noi non potrebbero esistere in stati stabili.

Vari modelli atomici sono stati pensati per descriverne il comportamento discreto. Qui non entreremo nei dettagli dei vari modelli, anche se possiamo sottolineare un aspetto importante dei modelli pensati, ossia il fatto che per spiegare questo comportamento gli scienziati abbiano assunto che per qualche ragione nel sistema atomico non debbano valere le leggi classiche.

Per renderci ulteriormente conto che l'atomo non può essere spiegato in termini classici possiamo considerare il fatto che in un gas per esempio gli atomi si presentano sempre nei loro livelli energetici ben definiti. Nel gas gli atomi si urtano, quindi sarebbe lecito pensare che si possa verificare uno scambio di energia con conseguente variazione dello stato energetico, variazione che può essere di qualsiasi entità, quindi anche diversa dalle variazioni di energia fra i diversi livelli atomici. Queste variazioni *continue* non si verificano e gli atomi continuano a presentarsi sempre e solo nei loro livelli energetici ben definiti.

### L'esperimento di Frank-Hertz

Potrebbe essere interessante a questo punto proporre agli studenti l'esperimento di Frank-Hertz, il quale dovrebbe chiarire la questione dei livelli energetici. Per la trattazione di questo esperimento risulta molto difficile una realizzazione pratica in laboratorio, inoltre ritengo che la fatica e i costi non valgano i risultati che si possono mostrare agli studenti, non perché i risultati non siano validi, al contrario lo sono, ma, come succede spesso negli esperimenti di meccanica quantistica, i risultati sono numeri e/o grafici che vanno interpretati secondo la teoria. Potremmo però far uso delle applet che si trovano su internet, come per esempio la [12], per la quale ne riportiamo un paio di immagini in Fig.2.

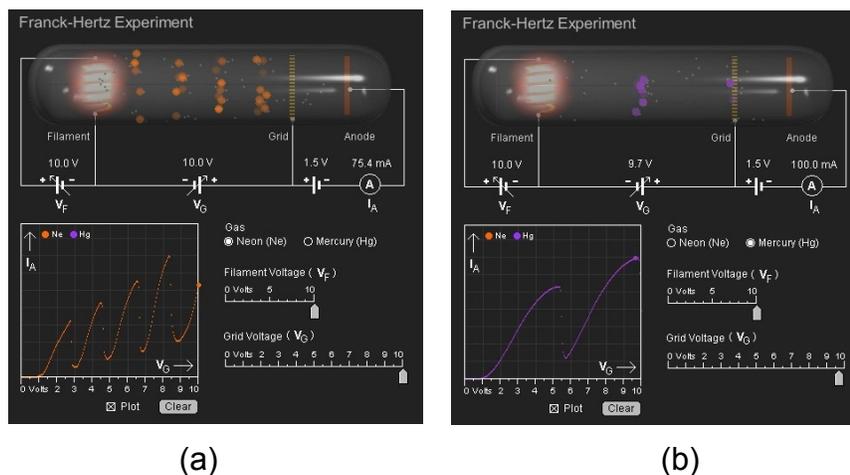


Figura 2: Simulazioni dell'esperimento di Frank-Hertz per il neon (a) e per il Mercurio (b).

### Spettro del corpo nero

Un altro esempio studiato in fisica in cui è necessario ipotizzare una quantizzazione dell'energia trasportata dalla luce è il corpo nero. Possiamo immaginare

il corpo nero come una scatola con pareti interne riflettente sulla quale troviamo un piccolo su una sola faccia, come schematizzato in sezione in Fig.3(a). Immaginiamo di inviare luce all'interno di questa per un certo tempo, tale luce rimarrá intrappolata all'interno, in quanto dal forellino ne uscirá una frazione trascurabile. Il sistema sará in equilibrio e si puó analizzare lo spettro delle onde elettromagnetiche all'interno della scatola pensando di esaminare lo spettro della luce uscente dal forellino. Studiando il sistema corpo nero con la fisica classica si ottiene uno spettro che ha un andamento dato dalla relazione  $\nu$ . Questo andamento é in accordo con le misure sperimentali solo per grandi valori delle lunghezze d'onda, mentre si discosta nettamente per valori piccoli e intermedi, come si puó facilmente notare dalla Fig.3(b).

Per poter determinare un andamento confrontabile con i risultati sperimentali

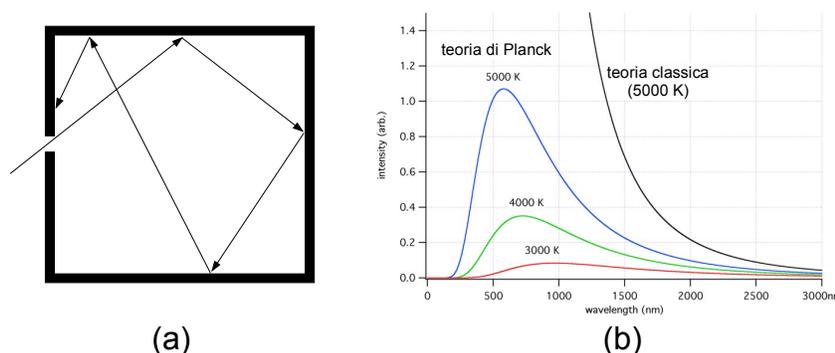


Figura 3: (a) Rappresentazione schematica del corpo nero; (b) confronto fra previsione classica e previsione quantizzata dello spettro di emissione da corpo nero.

Planck nel 1900 fece l'ipotesi che l'energia dovesse essere quantizzata in termini di quantità discrete  $h\nu$ . Da questa ipotesi si ottiene uno spettro teorico concorde con i risultati sperimentali.

Ci rendiamo conto che questa ipotesi ad hoc fa tornare i risultati sperimentali, ma anche che una tale discretizzazione dell'energia non trova sostegno nella fisica classica. Il concetto significativo della trattazione del corpo nero é comunque il fatto che per trovare accordo con i dati sperimentali si deve ipotizzare uno scambio quantizzato di energia, come ipotizzato da Planck.

#### Effetto fotoelettrico e quanti di luce

Una ulteriore ipotesi di discretizzazione dell'energia la troviamo nei lavori di Einstein del 1905 per la costruzione della teoria che descrive l'effetto fotoelettrico. Per effetto fotoelettrico si intende l'emissione di elettroni da un materiale a segui-

to dell'incidenza di luce. Sperimentalmente si verifica che l'energia cinetica degli elettroni emessi non dipende assolutamente dall'intensità della luce incidente, e questo in termini classici è un fatto insolito in quanto noi sappiamo benissimo che se ci illuminiamo una mano con una luce più intensa proviamo una sensazione di maggior calore, quindi maggiore energia. Allora come si spiega il fatto che aumentando l'intensità di luce incidente, quindi aumentando l'energia fornita, non aumenti anche l'energia cinetica degli elettroni emessi? All'aumentare dell'intensità di luce si nota solo un aumento del numero di elettroni emessi, ma non un aumento della loro energia cinetica.

Un aumento dell'energia cinetica degli elettroni emessi si verifica solo a seguito di un aumento della frequenza della luce incidente. Inoltre si verifica che un aumento della frequenza non corrisponde ad un aumento del numero di elettroni.

Per spiegare questo fenomeno Einstein ipotizza che la luce sia composta da pacchetti (quanti) di energia dipendenti dalla frequenza della luce secondo la legge

$$E = h\nu$$

In questa visione ogni pacchetto di energia va ad incidere su un solo elettrone e maggiore è l'energia del pacchetto, quindi frequenza maggiore della luce, maggiore sarà l'energia cinetica dell'elettrone. A questo punto un aumento di intensità significa un aumento del numero di pacchetti di energia, quindi un aumento del numero di elettroni estratti.

Per frequenze al di sotto di un certo valore non si verifica l'effetto fotoelettrico, questo si spiega con il fatto che l'elettrone è legato al materiale, quindi per renderlo libero il pacchetto di luce deve avere una energia tale da vincere il legame con il materiale. In questi termini l'energia contenuta nel quanto di luce in parte serve per vincere l'energia di legame dell'elettrone, mentre il resto va in energia cinetica. Questo si riassume nella seguente espressione per l'energia cinetica dell'elettrone:

$$E = h\nu - W$$

dove  $W$  è l'energia di estrazione dell'elettrone che dipende dal materiale usato. La presenza del potenziale di estrazione è evidenziata dal fatto che l'emissione di elettroni si verifica solo al di sopra di una certa frequenza  $\nu > W/h$ .

L'effetto fotoelettrico viene studiato con un apparato rappresentato schematicamente in Fig.4(a) composto da due elettrodi ai quali viene applicata una ten-

sione positiva o negativa. Su uno dei due elettrodi viene fatta incidere la luce. Eseguendo la misura di corrente in funzione della tensione applicata agli elettrodi si vede dalla Fig.4(b) che per un certo valore negativo di tensione  $V_s$ , detto anche potenziale di arresto, la corrente si annulla, questo significa che il campo elettrico applicato frena completamente gli elettroni. La misura del potenziale di arresto per diverse frequenze della luce incidente, come riportato in Fig.4(c), indica che gli elettroni acquistano energie cinetiche differenti a seconda della frequenza. Potrebbe essere istruttivo presentare ai ragazzi l'applet riportata in Fig.5,

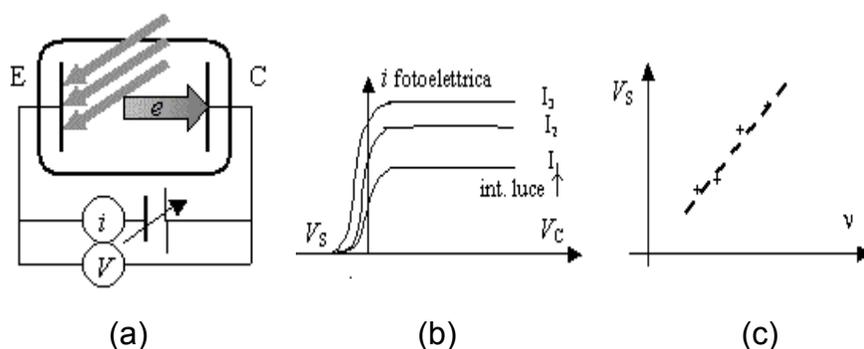


Figura 4: (a) schematizzazione dell'apparato sperimentale per lo studio dell'effetto fotoelettrico; (b) Corrente in funzione della tensione applicata per diverse intensità di luce e indicazione del potenziale di arresto  $V_s$ ; (c) potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce incidente

con la quale è possibile riprodurre l'esperimento fotoelettrico descritto sopra e in particolare si può capire la questione del potenziale di arresto, si possono tracciare grafici delle varie grandezze e si possono scegliere diversi tipi di materiale.

#### Osservazioni sulla quantizzazione dell'energia

Gli argomenti trattati nei precedenti paragrafi mostrano fenomeni che per essere spiegati devono poggiare sull'ipotesi di energia discreta, o meglio quantizzata. In particolare dai precedenti fenomeni si evince che gli scambi di energia tra luce e materia avvengono per quantità discrete, mentre nei fenomeni macroscopici siamo abituati a trattare con scambi di energia, e in generale con variabili fisiche, che possono variare con continuità. Da qui nasce il problema di formalizzare una teoria in grado di descrivere variabili fisiche quantizzate, cosa che la fisica classica o l'elettromagnetismo non sono in grado di fare. Gli elementi che abbiamo finora analizzato non sono ancora sufficienti per una comprensione del mondo microscopico, quindi procediamo con l'affrontare altri fenomeni che appariranno sorprendenti.

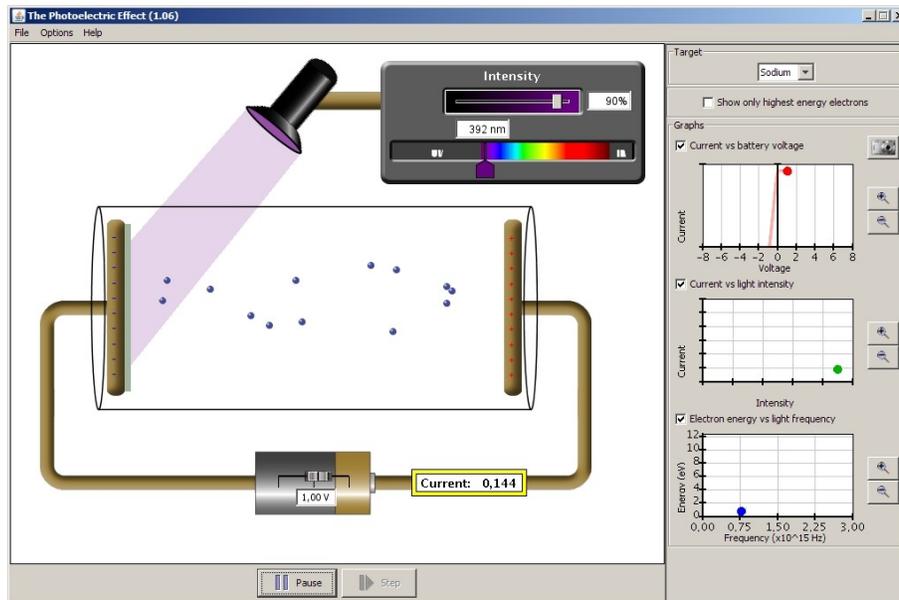


Figura 5: Applet effetto fotoelettrico, reperibile da [14]

#### 0.4.2 Comportamento corpuscolare della luce

Gia ponendo l'attenzione sul corpo nero e sull'effetto fotoelettrico si è manifestato un comportamento della luce che non può essere spiegato con la teoria ondulatoria dell'elettromagnetismo. Infatti immaginare un'onda elettromagnetica come composta da pacchetti discreti di energia ci risulta un po' difficile. Studiamo in questo paragrafo alcuni fenomeni che non solo mostrano la quantizzazione della luce, ma, per essere spiegati, richiedono che la luce sia composta da corpuscoli. Noteremo però che questa natura corpuscolare della luce è ben diversa dalla natura corpuscolare della luce che aveva Newton.

##### Effetto Compton

L'effetto Compton si verifica quando si investe un elettrone con raggi X (onda elettromagnetica di lunghezza d'onda compresa nell'intervallo  $10^{-12} - 10^{-9}$  m).

**Trattazione classica.** Cerchiamo di studiare qualitativamente cosa succede in questa situazione facendo uso dell'elettromagnetismo classico. Una onda elettromagnetica è individuata da un campo elettrico oscillante nello spazio e nel tempo in direzione ortogonale alla direzione di propagazione. Facendo incidere un'onda elettromagnetica su un elettrone libero, questo si metterà ad oscillare con la stessa frequenza dell'onda a seguito del campo elettrico oscillante. A seguito del moto oscillatorio l'elettrone emetterà un'onda elettromagnetica sferica della

stessa stessa frequenza dell'onda incidente. Eseguendo quindi una scansione su un determinato arco di circonferenza, per esempio alla destra dell'elettrone, con un rivelatore di frequenza di onde elettromagnetiche dovremmo determinare un andamento costante in funzione dell'angolo. In pratica l'elettrone emette in tutte le direzioni un'onda elettromagnetica della stessa frequenza dell'onda incidente.

**Risultati sperimentali.** Quello che risulta invece dagli esperimenti reali, realizzati per la prima volta da Arthur Compton nel 1923, è una dipendenza della lunghezza d'onda della luce emessa in funzione dell'angolo rispetto alla direzione di propagazione dei raggi X incidenti. Tale dipendenza risulta espressa dalla seguente relazione:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda incidente,  $\lambda'$  è la lunghezza d'onda dell'onda diffusa all'angolo  $\theta$ , mentre  $\lambda_c$  è una costante empirica che risulta essere pari a  $2.41 \cdot 10^{-10}$  cm.

Appare chiaro che i risultati ottenuti dagli esperimenti non si possono spiegare in termini di elettromagnetismo classico, in quanto non sono in accordo con le previsioni teoriche.

**Trattazione corpuscolare.** Seguendo le idee sviluppate nei precedenti paragrafi possiamo però ottenere una previsione concorde con i risultati sperimentali. Immaginiamo un'onda elettromagnetica come composta da pacchetti di energia  $E = h\nu = hc/\lambda$ . Facciamo ora una ulteriore ipotesi, immaginiamo che ognuno di questi pacchetti di energia possa essere identificato come un corpuscolo, che d'ora in poi chiameremo fotone, che si propaga nella direzione di propagazione dell'onda incidente. Possiamo a questo punto reinterpretare l'effetto Compton come l'urto elastico fra il fotone e l'elettrone bersaglio, considerando queste particelle come puntiformi. Non entriamo nei dettagli dei calcoli, in quanto per ottenere il risultato corretto dovremmo applicare la cinematica relativistica <sup>1</sup>, ma descriviamo come si affronta il problema. Questo urto viene trattato allo stesso modo in cui si trattano gli urti elastici in meccanica classica, facendo però uso della cinematica relativistica. Quindi si applica la conservazione dell'energia e dell'impulso prima e dopo l'urto e si sceglie un arbitrario angolo  $\theta$  di diffusione del fotone rispetto alla

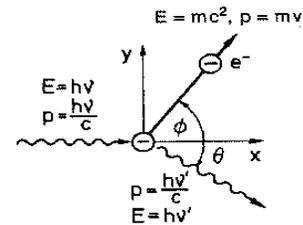


Figura 6: Effetto Compton.

<sup>1</sup>Lo studio con la cinematica relativistica può essere affrontato insieme agli studenti come una delle varie verifiche formative

direzione del fotone incidente, come rappresentato in Fig.6. Da questo semplice esercizio si ricava la relazione 1, in accordo con i risultati sperimentali.

Iniziamo a questo punto ad avere abbastanza elementi che mostrano un comportamento corpuscolare della luce. La situazione inizia però a farsi complicata, in quanto a volte ci troviamo di fronte a fenomeni spiegabili in termini di luce con carattere ondulatorio, mentre altre volte abbiamo a che fare con fenomeni che si spiegano solo se consideriamo il carattere corpuscolare della luce. Risulta quindi legittima e spontanea la domanda, ma la luce é allora un'onda o un corpuscolo? Possiamo chiarirci un poco le idee, chiaramente a scapito di altre perplessità, mostrando che anche nei casi in cui la luce si spiega con la sua natura ondulatoria, in realtà si vede anche la sua natura corpuscolare. Ciò che apparirà strano nei paragrafi successivi sarà proprio il comportamento corpuscolare della luce, ma un corpuscolo che non é quello che aveva in mente Newton e che ci fornisce l'ottica geometrica, ma un corpuscolo che si comporta in modo strano da un punto di vista intuitivo-classico.

#### **Fotoni in una radiografia**

Prima di analizzare un comportamento non classico dei corpuscoli di luce, o meglio fotoni, analizziamo come possiamo renderci conto dell'esistenza di questi corpuscoli da una tecnologia ampiamente usata in medicina da molti anni. Possiamo inoltre proporre agli studenti di eseguire direttamente in laboratorio di informatica quanto mostriamo nel seguito.

Consideriamo una radiografia. Le radiografie sono ottenute con raggi X, cioè onde elettromagnetiche molto energetiche (tipicamente di lunghezza d'onda dell'ordine di  $10^{-12} - 10^{-9}$  m). Queste onde elettromagnetiche investono il corpo umano e vengono assorbite dagli elementi con maggiore densità, infatti sono tipicamente utilizzate per visualizzare le ossa, infatti i raggi X vengono assorbiti dalle ossa, mentre i tessuti che circondano queste risultano trasparenti ai raggi X. La lastra fotografica posta dopo il corpo risulta quindi investita da quei raggi X che non sono stati assorbiti, quindi da quelli che sono passati attraverso i tessuti attorno alle ossa. Sulla lastra fotografica rimane quindi evidenziata una sorta di ombra delle ossa investite dai raggi X. Dopo questa esposizione la lastra subisce un particolare trattamento per lo sviluppo e quello che si ottiene é la lastra radiografica ben nota, (che é un'immagine negativa di quella impressionata sulla lastra fotografica (??)).

Guardando a occhio nudo una radiografia si possono ben identificare le ossa che stanno all'interno del nostro corpo. Più interessante per il nostro scopo é in-

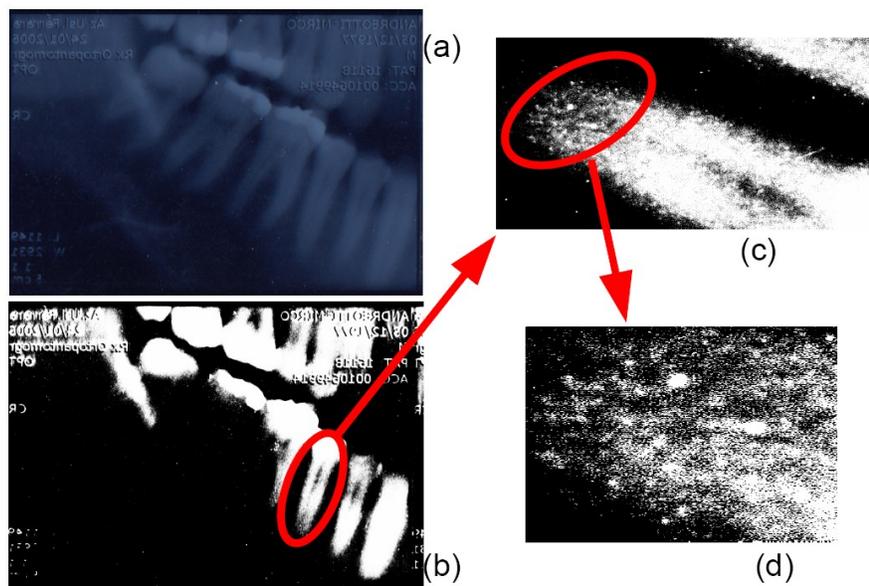


Figura 7: Radiografia.

vece una analisi ingrandita di quello che succede in prossimità delle linee che identificano l'osso. Facendo una scansione in bianco e nero della lastra, in modo da eliminare il più possibile l'effetto grigio, ma mantenere solo il bianco che indica zona colpita da radiazione e il nero che indica zona non colpita da radiazione possiamo scoprire un effetto molto curioso. Ingrandiamo abbastanza volte una zona limite dell'osso e vediamo molto chiaramente in Fig.7 che dove finisce l'osso non c'è una linea netta fra bianco e nero, ma al contrario risulta evidente un effetto nebbia. Osservando più attentamente possiamo notare che le immagini in realtà sono un insieme di punti bianchi mescolati. Questi punti bianchi non sono altro che i punti in cui i corpuscoli di luce X hanno colpito la lastra. Risulta quindi evidente che la lastra radiografica è stata impressionata dall'impatto di corpuscoli, che altro non sono che i corpuscoli di luce.

Questo effetto è una chiara evidenza della natura corpuscolare della luce. Da questi margini sgranati possiamo anche già iniziare a notare che il comportamento di questi corpuscoli è diverso dal comportamento dei raggi di luce in ottica geometrica, infatti in questa un'ombra di un corpo ha dei limiti ben definiti.

#### Esperimenti con singoli fotoni

Consideriamo tipici esperimenti di interferenza e diffrazione della luce che dovrebbero essere familiari. Senza entrare nei dettagli ricordiamo che negli esperi-

menti con le due fenditure o con un'unica fenditura con dimensione confrontabile con la lunghezza d'onda della luce si formano le figure di interferenza o diffrazione sullo schermo. Queste figure possono essere predette e calcolate tenendo conto dell'interferenza fra i singoli punti sulle fenditure considerati come sorgenti puntiformi (onde elementari di Huygens) di onde luminose.

Dalle precedenti considerazioni abbiamo visto che possiamo considerare la luce, anziché come un'onda, come una grandinata di corpuscoli, piú precisamente di fotoni. Immaginiamo ora di poter eseguire uno di questi esperimenti utilizzando però fotoni singoli, i quali una volta attraversano l'ostacolo (una o piú fenditure) e vanno ad impressionare uno schermo simile ad una pellicola fotografica. L'esperimento consiste quindi nell'inviare singolarmente tanti fotoni ed analizzare le figure che si formano sullo schermo. Sappiamo che se avessimo a che fare con luce monocromatica normale dovremmo visualizzare le figure di interferenza tipiche di questi esperimenti.

Prima di analizzare i risultati sperimentali ci chiediamo cosa ci aspettiamo di vedere da un simile esperimento eseguito con singoli fotoni. Se i fotoni fossero corpuscoli classici, come i corpuscoli che intendeva Newton, allora sullo schermo all'inizio avremmo solo alcuni punti, poi avremmo delle zone di luce identificate dai fotoni che hanno attraversato l'ostacolo e delle zone di ombra, come ci aspettiamo dall'ottica geometrica. I risultati sperimentali, di non facile reperibilità [16][17], dimostrano che i fotoni non sono corpuscoli che si comportano classicamente, infatti all'inizio vediamo sí solo alcuni punti, e questi sottolineano ancora una volta la natura corpuscolare della luce, mentre in seguito vedremo un maggiore addensamento di punti in quelle zone in cui compaiono proprio le zone luminose della figura di interferenza. Dopo molto tempo, ossia dopo che tanti fotoni hanno colpito lo schermo, quello che si ottiene é proprio la tipica figura di interferenza. Riportiamo in Fig.8 le immagini ottenute da uno degli esperimenti con fotoni singoli trattati in [17], dalle quali possiamo notare il formarsi delle figure di interferenza e l'aspetto corpuscolare dell'impatto di fotoni.

Il fatto che i singoli fotoni si vadano a depositare sullo schermo secondo la figura di diffrazione, farebbe pensare a fotoni che interferiscono fra di loro come le onde corrispondenti, però questi fotoni sono inviati singolarmente, quindi sono indipendenti gli uni dagli altri. Come si spiega allora che i fotoni attraversano le fenditure come se sapessero come si sono depositati sullo schermo quelli già passati e quelli che ancora devono passare? Inoltre un singolo fotone non crea nessuna figura di diffrazione, ma solo un punto sullo schermo. Risulta chiaro a questo punto che i fotoni sono sí qualche sorta di corpuscolo, ma assolutamente

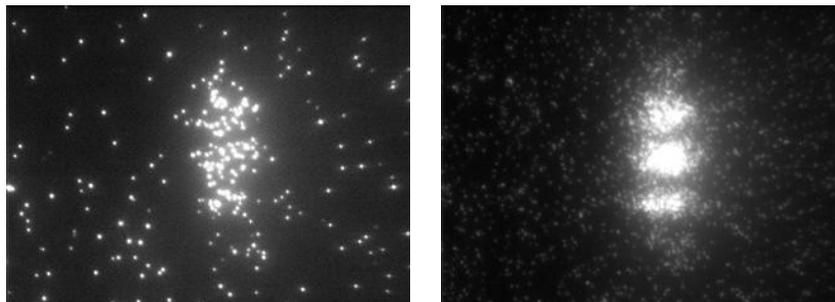


Figura 8: Immagini ottenute da un esperimento di interferenza con fotoni singoli [17]. Le due immagini sono ottenute con tempi di esposizione diversi.

non si comportano secondo le leggi classiche. Il loro comportamento non si può descrivere in modo logico con le leggi della fisica classica.

Notiamo però uno stretto legame fra la descrizione ondulatoria e la natura corpuscolare della luce, infatti i corpuscoli evidenziano un comportamento in accordo con la figura di diffrazione ottenuta in termini di interferenza delle onde della descrizione ondulatoria. Detto in altri termini i fotoni si vanno a disporre secondo la figura di diffrazione che è calcolata esclusivamente considerando la luce come un'onda elettromagnetica.

#### Osservazioni sulla natura della luce

Dalle precedenti considerazioni abbiamo visto come la luce si comporti in alcuni casi come un'onda e in altri casi come un corpuscolo. Abbiamo però evidenziato con l'esperimento della doppia fenditura che c'è un legame fra il comportamento corpuscolare e ondulatorio, ecco quindi che non è corretto dire che la luce si possa comportare come un'onda oppure come un corpuscolo a seconda dei casi, a questo punto possiamo piuttosto dire che possiamo studiare il comportamento della luce in termini ondulatori, oppure in termini di corpuscoli non classici.

La meccanica quantistica ci illuminerà riguardo questa corrispondenza onda-corpuscolo, possiamo però già fare alcune osservazioni preliminari. La figura di diffrazione ci dà informazioni riguardo le zone in cui incide più o meno luce. Interpretando questa visione in termini di fotoni possiamo dire che la figura di diffrazione contiene le informazioni riguardo dove è più o meno probabile che si verifichi l'impatto dei fotoni sulla lastra. La funzione matematica che descrive la figura di diffrazione può quindi essere interpretata come una funzione di probabilità di impatto dei fotoni. Vista in questi termini, la figura di diffrazione ottenuta dall'interferenza delle onde fornisce la probabilità di trovare sullo scher-

mo il fotone incidente. Trattando quindi con un singolo fotone possiamo solo dire con quale probabilità questo inciderà in un punto piuttosto che in un altro. L'utilizzo di tanti fotoni rende significativamente statistico l'esperimento e si ottiene una distribuzione dei punti di impatto che corrispondono proprio alla figura di diffrazione.

Vogliamo quindi evidenziare tre importanti fenomeni, i quali ci saranno utili anche nel seguito:

1. la luce può essere interpretata sia avente una natura ondulatoria sia una natura corpuscolare;
2. i corpuscoli che compongono la luce non seguono le leggi della fisica classica, ma devono essere trattati con una descrizione ondulatoria;
3. la descrizione ondulatoria deve essere vista come una descrizione in cui l'onda non è altro che una funzione che esprime una certa probabilità di trovare il corpuscolo con certi valori di variabili fisiche, quali per esempio posizione ed impulso.

Finora non sappiamo molto delle leggi cui obbediscono questi corpuscoli, infatti queste leggi sono proprio le leggi della meccanica quantistica.

### 0.4.3 Comportamento ondulatorio della materia

Affrontiamo ora un altro strabiliante comportamento del mondo microscopico. Con le argomentazioni che seguono vedremo come anche le particelle possono essere interpretate in termini di onde. Fu de Broglie che per primo nel 1925, analogamente alla dualità onda-corpuscolo della luce avanzò l'ipotesi che si potesse avere la stessa dualità anche per le particelle materiali, cioè per particelle come gli elettroni per esempio. Vediamo quindi quali furono in seguito le evidenze sperimentali di tale ipotesi.

#### Diffrazione e interferenza di elettroni

I primi esperimenti che permisero di evidenziare un comportamento ondulatorio degli elettroni furono compiuti da Davisson e Germer, negli anni attorno al 1927, con la riflessione degli elettroni da parte di metalli. Dall'analisi degli angoli di riflessione degli elettroni ci si rese conto che il comportamento trovato non poteva essere spiegato in termini di leggi classiche. La riflessione sembrava preferire certi angoli ad altri, in pratica era una riflessione selettiva. La distribuzione degli angoli poteva però essere interpretata in termini di interferenza di qualche tipo

di onde, in maniera del tutto analoga con la luce.

Successivi esperimenti in cui fasci di elettroni venivano lanciato contro sottili fogli metallici e analizzati oltre questi, compiuti da G. P. Thomson, Rupp e altri, mostrarono fenomeni di diffrazione del tutto analoghi ai fenomeni di diffrazioni che si ottengono con la luce.

Tali risultati sperimentali confermano la dualità onda-corpuscolo per le particelle materiali ipotizzata da de Broglie.

### Esperimenti con singoli elettroni

Sappiamo che gli elettroni sono particelle, però abbiamo visto dagli esperimenti di interferenza e diffrazione che in queste condizioni sembrano comportarsi come onde. Mostriamo ora i risultati dell'interferenza di singoli elettroni nell'attraversare una doppia fenditura, in stretta analogia con quanto visto per la luce. Consideriamo quindi di inviare verso una doppia fenditura degli elettroni singolarmente e analizziamo quello che visualizziamo sullo schermo in tempi diversi, come mostrato in Fig.9. Notiamo che nelle prime immagini, per le quali pochi elettroni sono stati inviati, possiamo distinguere abbastanza bene i punti di impatto dei singoli elettroni. Nelle ultime immagini invece continuiamo a vedere i punti dovuti all'impatto, ma siamo inoltre in grado di distinguere una figura di interferenza in cui alcune zone sono più popolate da impatti, mentre altre zone sono molto meno interessate.

Come visto per gli esperimenti con singoli fotoni, possiamo concludere da questi risultati che anche gli elettroni sono corpuscoli che si comportano secondo leggi che non sono quelle classiche, ma piuttosto

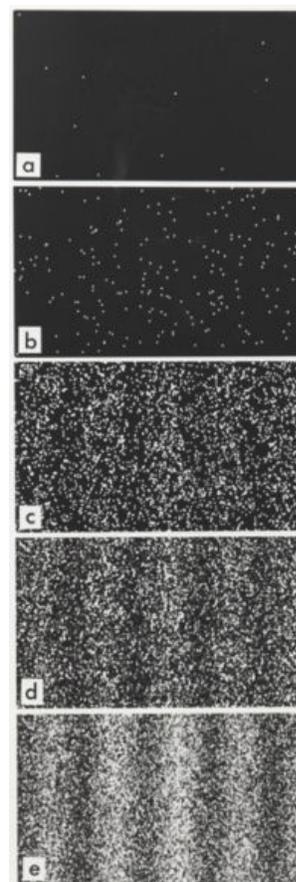


Figura 9: Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. In sequenza temporale la formazione della figura di interferenza.

dobbiamo utilizzare una descrizione ondulatoria, che anche in questo caso é in stretta relazione con la probabilità di trovare un elettrone intorno ad una certa posizione e con un certo impulso.

#### 0.4.4 Dualismo onda-corpuscolo

Seguendo le idee maturate dall'analisi dei precedenti comportamenti di luce e particelle materiali possiamo formalizzare la corrispondenza onda-corpuscolo in termini di grandezze cinematiche. L'idea fondamentale di questa corrispondenza é che ad ogni onda di lunghezza d'onda  $\lambda$  possiamo far corrispondere una particella di impulso  $p = h/\lambda$  e, dualmente, ad ogni particella con un certo impulso possiamo associare un'onda con una ben determinata lunghezza d'onda. Per comprendere meglio lo sviluppo di questa idea ripercorriamo brevemente e fissiamo le idee su quanto visto in precedenza.

##### Onde elettromagnetiche e fotoni

Per quanto riguarda il comportamento corpuscolare della luce possiamo associare ad un'onda elettromagnetica della forma  $u(x, t) = Ae^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct-x)}$  un fotone che si muove nella direzione di propagazione dell'onda con velocità pari a  $c$  con energia  $E = h\nu$ , dove  $\nu = c/\lambda$ . L'espressione dell'impulso del fotone non può essere determinata dalla relazione  $p = \sqrt{2mE}$ , in quanto avendo a che fare con fotoni che si muovono alla velocità della luce dobbiamo utilizzare le leggi della relatività ristretta, quindi per il fotone possiamo determinare l'impulso con la relazione  $p = E/c = h/\lambda$ .

La corrispondenza duale consiste nell'associare ad un fotone di impulso  $p$  un'onda elettromagnetica con lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ .

Possiamo quindi riepilogare il dualismo onda elettromagnetica-fotone con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \text{Onda em con } \lambda &\longmapsto \text{Fotone con } p = \frac{h}{\lambda} \\ \text{Fotone con } p &\longmapsto \text{Onda em con } \lambda = \frac{h}{p} \end{aligned}$$

##### Particelle e onde materiali

Analogamente a quanto visto per i fotoni si può pensare per le particelle materiali, come per esempio elettroni, protoni, neutroni etc etc. Quindi ad una particella

<sup>2</sup>Intuitivamente possiamo comprendere questa espressione notando che abbiamo diviso un'energia (la quale contiene una velocità al quadrato) per una velocità, quindi dimensionalmente torna con l'espressione di un impulso.

con impulso dato  $p$  possiamo associare un'onda materiale, secondo la teoria delle onde materiali di de Broglie (1924), di lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ . Conoscendo la massa della particella in considerazione possiamo scrivere, in approssimazione classica per basse velocità, quindi senza considerare il caso relativistico,  $p = mv$ , quindi la lunghezza d'onda sarà  $\lambda = h/(mv)$ . In modo duale ad un'onda materiale con lunghezza d'onda  $\lambda$  possiamo associare una particella di impulso  $p = h/\lambda$ .

Riepiloghiamo quindi il dualismo particella-onda materiale con le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} \text{Onda materiale con } \lambda &\longmapsto \text{Particella con } p = \frac{h}{\lambda} \\ \text{particella con } p &\longmapsto \text{Onda materiale con } \lambda = \frac{h}{p} \end{aligned}$$

#### Microscopico e macroscopico: effetti ondulatori a confronto

Come esercizio da svolgere insieme agli studenti può essere interessante confrontare gli effetti ondulatori fra sistemi microscopici e macroscopici. Quello che si vuole mettere in evidenza con questo esempio è il fatto che con sistemi macroscopici non possiamo renderci conto dell'interpretazione ondulatoria del mondo microscopico.

A tale proposito consideriamo un sistema microscopico quale potrebbe essere un elettrone accelerato da un campo elettrico, come per esempio avviene nel tubo catodico del televisore. Lasciamo per il momento indicata la differenza di potenziale elettrico  $V$  alla quale è sottoposto l'elettrone e calcoliamo la lunghezza d'onda dell'onda materiale corrispondente considerando l'elettrone che si muove dopo aver accelerato.

Per calcolare la lunghezza d'onda dobbiamo conoscere l'impulso dell'elettrone, essendo  $\lambda = \frac{h}{p}$ .

L'impulso si può determinare dall'energia cinetica dell'elettrone con la relazione

$$p = \sqrt{2mE}$$

mentre l'energia cinetica sarà l'energia acquisita dall'accelerazione imposta dalla differenza di potenziale, quindi  $E = eV$ . Sostituendo tutto possiamo quindi esprimere la lunghezza d'onda dell'elettrone con la seguente relazione:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \sqrt{V}}} = \frac{1.23 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sqrt{V}}$$

considerando per esempio un intervallo di  $V \approx 10^2 - 10^4 V$  otteniamo che l'intervallo corrispondente per la lunghezza d'onda é dell'ordine  $\lambda \approx 10^{-10} - 10^{-11} m$ , la quale risulta dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda dei raggi X.

Consideriamo ora un sistema macroscopico come potrebbe essere per esempio un proiettile sparato da un fucile. Un proiettile avrà una massa dell'ordine di  $m \approx 10^{-2} g$  e una velocità di circa  $v \approx 10^2 m/s$ . L'impulso lo possiamo calcolare, quindi possiamo esprimere la corrispondente lunghezza d'onda con la seguente relazione:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} Js}{10^{-2} \cdot 10^2 kg(m/s)} \approx 10^{-34} m.$$

Notiamo subito che la lunghezza d'onda del proiettile é circa 13-14 ordini di grandezza piú piccola della lunghezza d'onda dell'elettrone. É proprio questa enorme differenza che ci permette di dire che gli effetti ondulatori negli oggetti macroscopici sono trascurabili e soprattutto non possono essere percepiti dai noi.

I fenomeni di interferenza e diffrazione, abbiamo visto che si verificano quando le dimensioni degli ostacoli, come fenditura o reticolo, sono dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda in considerazione. Se tentassimo infatti di realizzare l'interferenza da un reticolo con dimensioni per esempio dell'ordine di  $10^{-10} m$  usando onde con lunghezza d'onda dell'ordine di  $10^{-30} m$ , la figura di interferenza avrebbe frange cosí fitte da non poter essere distinguibili, quindi il fenomeno apparirebbe essere descrivibile in termini classici. In realtà e' descrivibile in termini ondulatori, ma gli effetti sono trascurabili. Possiamo per esempio visualizzare ipoteticamente in Fig.10 il risultato che si avrebbe a seguito del passaggio attraverso tale fenditura. Le frange mostrate sono talmente fitte, come in Fig.10(a), che sullo schermo apparirebbero indistinguibili e si visualizzerebbe solo un andamento continuo come in Fig.10(b).

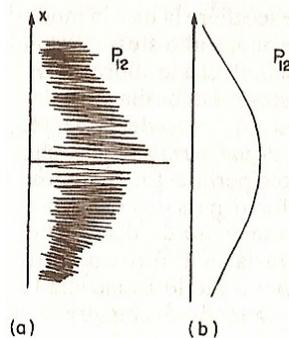


Figura 10: Fenomeno di interferenza di un'onda su una fenditura con larghezza molto piú grande della lunghezza d'onda. (a) schematizzazione delle frange di interferenza, (b) l'effettiva figura sullo schermo.

#### 0.4.5 La meccanica ondulatoria

A seguito delle idee che vogliono associare ad ogni particella un'onda, Schrödinger (1925) fornisce una trattazione matematica impeccabile dei fenomeni microscopi-

ci in termini ondulatori, da cui il nome meccanica ondulatoria, la quale permette la descrizione di tutti questi fenomeni in termini di onde. Le onde con cui abbiamo a che fare sono le soluzioni dell'equazione di Schrödinger che riportiamo qui per l'importanza che ha anche nella meccanica quantistica moderna:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) \nabla^2 \psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}) \psi(\vec{x}, t) \quad (2)$$

Non entriamo nei particolari di questa equazione, in quanto é piuttosto complessa, essendo un'equazione differenziale alle derivate parziali. Vogliamo solo puntualizzare che la funzione  $\psi(\vec{x}, t)$ , soluzione dell'equazione, chiamata funzione d'onda, é quella funzione che rappresenta l'onda materiale del sistema studiato. Nell'equazione compare anche un potenziale  $V$ , il quale potrebbe essere per esempio il potenziale elettrostatico nell'atomo di idrogeno.

Tutti i fisici convinti della natura ondulatoria della materia vedono nella funzione d'onda proprio l'onda materiale. Questa interpretazione non é propriamente corretta, in quanto si incontrano alcune difficoltà nell'accettare valide certe particolari soluzioni dell'equazione di Schrödinger, inoltre rimane ancora insoluta una questione che trattiamo nel paragrafo seguente.

#### 0.4.6 La contraddizione del dualismo onda-corpuscolo

Dai precedenti argomenti trattati emerge come la luce e piú in generale anche le particelle come elettroni sembrano mostrare a volte comportamenti corpuscolari, altre volte comportamenti ondulatori. Ci rendiamo conto che questa doppia natura del mondo microscopico non trova né una spiegazione logica né un quadro teorico ordinato per poter trattare tali fenomeni.

Risulta infatti inconcepibile capire come possa un corpuscolo a volte comportarsi come un'onda altre volte comportarsi come un corpuscolo. Inoltre nel momento in cui si studia un fenomeno come possiamo scegliere se trattarlo come un fenomeno ondulatorio o particellare a priori senza prima aver visto i risultati.

Anche conciliare l'idea che ad ogni corpuscolo possiamo associare un'onda risulta difficile, in quanto, per esempio, un'onda é un ente con una estensione spaziale infinita, mentre un corpuscolo dal punto di vista classico é un ente ben definito.

A conciliare la natura corpuscolare e il comportamento ondulatorio furono le idee di Born, il quale fornisce un'interpretazione coerente, oggi generalmente ac-

ceffata, che ora noi cerchiamo di costruire basandoci su quei segnali di avviso che sono stati dati nei paragrafi precedenti.

Anzitutto notiamo che in tutti i fenomeni che abbiamo visto descritti in termini ondulatori, se analizzati approfonditamente, appare sempre il carattere corpuscolare degli oggetti con cui abbiamo a che fare. Si ricordi per esempio la radiografia, gli esperimenti con i singoli fotoni e con i singoli elettroni. Ciò che si può arguire da queste esperienze è che nel momento in cui abbiamo a che fare con una singola particella che interagisce con qualcosa non possiamo determinare nessun legame con quella che potrebbe essere l'onda associata a tale particella. Infatti un elettrone che attraversa una fenditura lascerà sullo schermo un punto, ma non produrrà da solo nessuna figura di diffrazione. La figura di diffrazione abbiamo visto che inizia a formarsi solo quando sullo schermo avremo un grande numero di elettroni incidenti. Ecco quindi che il carattere ondulatorio inizia ad evidenziarsi quando stiamo trattando con esperimenti in cui vi sono un gran numero di particelle interagenti.

Il collegamento fra la particella e l'onda associata sta nel fatto di considerare questa onda come una pura funzione matematica che esprime la probabilità che la particella in esame abbia certe caratteristiche. Vediamo infatti che l'intensità della figura di diffrazione o interferenza è direttamente collegata al numero di particelle che hanno colpito quelle ben determinate zone. Ecco quindi che considerando il processo collettivo con tante particelle siamo in grado di determinare le probabilità che queste incidano in una zona piuttosto che in un'altra, semplicemente guardando al numero di particelle nelle zone interessate.

La visione moderna della meccanica quantistica è quindi quella di avere a che fare con qualche sorta di corpuscolo, chiamate particelle, che obbedisce appunto alle leggi della meccanica quantistica, con le quali si può operare in termini di probabilità associate al comportamento del corpuscolo.

Dobbiamo qui sottolineare che inevitabilmente stiamo usando dei termini classici per descrivere fenomeni che classici non sono. Il fatto di parlare di particelle o corpuscoli non deve quindi farci pensare alle particelle come a delle palline materiali nel senso classico. Le particelle sono infatti una qualche sorta di ente fisico che non obbedisce alle leggi classiche.

Alcuni sostengono la meccanica quantistica una teoria non deterministica per il fatto che si fonda sulla probabilità, in realtà dobbiamo tenere presente che la

meccanica quantistica fornisce delle previsioni e dei risultati in termini di probabilità che sono in perfetto accordo con i risultati sperimentali. Una descrizione quatommeccanica di un sistema fornisce cioè la probabilità che questo sistema si comporti in un modo piuttosto che in altro in modo ben preciso. Risulta chiaro che se si considera un esperimento con una singola particella si potrà verificare poco delle previsioni della meccanica quantistica, in quanto l'esperimento deve essere statisticamente significativo.

### Gli orbitali dell'atomo di idrogeno

Per comprendere meglio la funzione d'onda come funzione di probabilità, esaminiamo subito un esempio trattato dalla meccanica quantistica con l'equazione di Schrödinger, consideriamo l'atomo di idrogeno. Non affronteremo nessun tipo di calcolo, ma cerchiamo di seguire quello che si dovrebbe fare. L'atomo di idrogeno è costituito da un protone e un elettrone, impostiamo quindi nell'equazione di Schrödinger il potenziale di interazione fra queste due cariche elettriche. La funzione d'onda soluzione dell'equazione in questione è una funzione legata alla probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto *attorno* al protone. La funzione che propriamente esprime la probabilità di trovare l'elettrone in un certo punto è il realtà il modulo quadro  $|\psi|^2$  della funzione d'onda. Questa probabilità è funzione delle coordinate spaziali, quindi vista in tre dimensioni possiamo rappresentarla come una nuvola di punti. Nelle zone in cui i punti sono molto densi significa che abbiamo grande probabilità di trovare l'elettrone, mentre nelle zone in cui la densità di punti è piccola avremmo poca probabilità di trovare l'elettrone. Un altro modo potrebbe essere quello di associare alle zone con maggior densità un colore più luminoso di quello usato nelle zone con minore densità, come per esempio riportato in Fig.11.

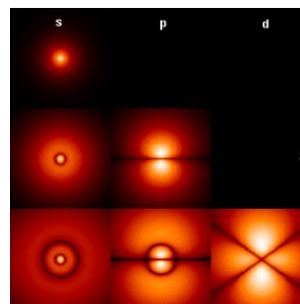


Figura 11: Rappresentazione in scala di colori degli orbitali dell'atomo di idrogeno.

Queste funzioni di probabilità di cui stiamo qui parlando sono gli orbitali atomici, vedi Fig.11, molto comunemente usati in chimica. Spesso per esempio l'orbitale  $1s$  viene rappresentato come una sfera, questo è un errore, in quanto la funzione d'onda che descrive tale orbitale ha simmetria sferica, ma non si annulla in modo brusco in corrispondenza di una certa superficie sferica, si annullerà all'aumentare della distanza dal protone. Tipicamente questi orbitali, come anche gli altri, sono rappresentati come solidi, per esempio una sfera, in quanto si considera solo quella regione di spazio in cui è possibile trovare l'elettrone con una

probabilità del 90%(?). Le regioni che interessano il rimanente 10% non vengono rappresentate.

#### 0.4.7 Concetti base della meccanica quantistica

Dopo aver affrontato il precedente percorso che ci ha introdotto alla meccanica quantistica, dovremmo aver preso un minimo di familiarità con le stranezze, dal punto di vista classico, del mondo microscopico. Possiamo quindi affrontare quelli che sono i concetti fondamentali della meccanica quantistica, concetti che sono ovviamente non riconducibili a situazioni classiche. Vogliamo quindi qui introdurre il principio di sovrapposizione degli stati, il principio di indeterminazione di Heisenberg e la procedura di misura nella meccanica quantistica. Questi tre concetti sono strettamente intrecciati fra di loro, infatti seguendo una ben precisa costruzione matematica si vede che il principio di indeterminazione segue dal principio di sovrapposizione degli stati e da questi si comprendono i risultati della procedura di misura. Per renderci conto delle stranezze con cui avremo a che fare citiamo, come fa Sakurai [1], le parole di Dirac [2] una misura fa sempre saltare il sistema in autostato della variabile dinamica che si misura. Alla fine di questo paragrafo ci appariranno più chiare queste parole.

Senza voler usare un formalismo matematico che potrebbe complicare la comprensione dei concetti, possiamo tentare di introdurre questi argomenti analizzando un esempio in particolare e cercare poi di generalizzare quanto si evince. Gli esempi che più si addicono a questa introduzione possono essere o gli esperimenti di Stern-Gerlach oppure gli esperimenti sulla polarizzazione della luce. Diciamo che esperimenti sulla polarizzazione della luce potrebbero essere più familiari agli studenti e potrebbero anche essere riprodotti in laboratorio senza necessità di strumenti particolarmente complessi e costosi, si veda per esempio [18]. L'esperimento di Stern-Gerlach porta gli studenti completamente in un mondo quantomeccanico, difficilmente è realizzabile in laboratorio, anche se si può far uso delle diverse e interessanti applet interattive che si trovano su internet. L'esperimento di Stern-Gerlach potrebbe essere argomento di un corso di eccellenza o qualcosa del genere.

Sarebbe interessante seguire la linea del testo [1] il quale introduce la meccanica quantistica proprio con l'esperimento di Stern-Gerlach. Il rischio di seguire tale approccio in un liceo è quello di aggiungere elementi di complicazione, in quanto si deve per esempio parlare di spin dell'elettrone, di rappresentazioni in spazi complessi etc etc. Inoltre una conferma sperimentale dal laboratorio risulta molto

difficoltosa. Differentemente con la luce si può fare, quindi affrontiamo l'analogo della polarizzazione della luce, interpretandola in termini quantomeccanici.

### Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce

Immaginiamo di preparare un esperimento con filtri Polaroid e di costruire quindi tre filtri che chiameremo  $F_x$ ,  $F_{x'}$  e  $F_y$ , i quali selezionano la polarizzazione della luce rispettivamente lungo l'asse  $x$ ,  $x'$  e  $y$ . Gli assi  $x$  e  $y$  sono ortogonali, mentre l'asse  $x'$  ha la stessa direzione della bisettrice del quadrante  $xy$  positivo come rappresentato in Fig.13, nella quale riportiamo anche l'asse  $y'$  ortogonale all'asse  $x'$ .

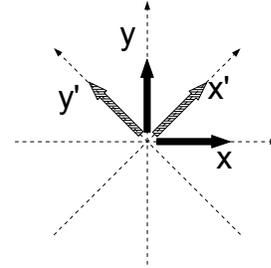


Figura 12: Direzione di polarizzazione della luce. La direzione di propagazione della luce è ortogonale al piano  $xy$ .

Eseguiamo ora due esperimenti con filtri sequenziali che per comodità chiamiamo E-x-y e E-x-x'-y.

**E-x-y.** Nel primo esperimento usiamo due filtri disposti come in Fig.??(a). Filtriamo inizialmente il fascio di luce non polarizzato con un  $F_x$ , successivamente il fascio in uscita da  $F_x$  viene filtrato con un  $F_y$ .

**E-x-x'-y.** Nel secondo esperimento usiamo tre filtri disposti come in Fig.??(b). Il fascio non polarizzato viene filtrato con un  $F_x$ , quindi in uscita da questo filtriamo con un  $F_{x'}$  e infine filtriamo con un  $F_y$ .

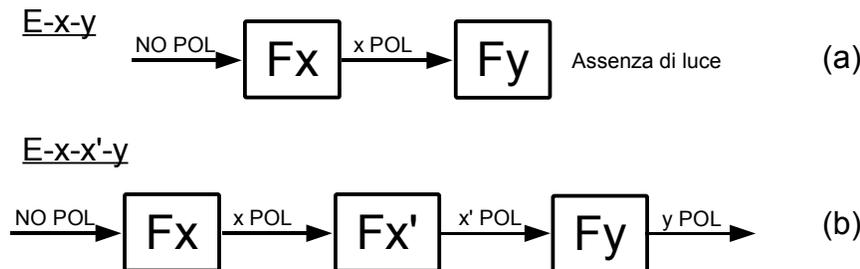


Figura 13: Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce. (a) Esperimento sequenziale E-x-y in cui in sequenza si applica un filtro  $x$  seguito da un filtro  $y$ . (b) Esperimento sequenziale E-x-x'-y in cui si susseguono i filtri  $x$ ,  $x'$  e  $y$ .

Analizzando i risultati dei due esperimenti proposti notiamo che nell'E-x-y in uscita dal secondo filtro non si ha luce, in effetti con il primo filtro selezioniamo la polarizzazione lungo  $y$ , che essendo ortogonale a  $x$  non ha componenti lungo  $x$ , quindi quando filtriamo con  $F_x$  selezioniamo una polarizzazione ortogonale a quella della luce entrante, quindi in uscita non ci sarà luce.

Da questa osservazione possiamo interpretare i due stati di polarizzazione  $x$  e  $y$  come due stati ortogonali, i quali si escludono a vicenda.

Dal secondo esperimento vediamo invece che in uscita dal terzo filtro c'è luce. Questo risultato potrebbe sembrare alquanto inspiegabile, infatti vediamo dove ci porta il seguente ragionamento classico: il primo filtro seleziona solo la polarizzazione lungo  $x$ , quindi applicando un  $F_{x'}$  selezioneremo una certa componente  $x'$  che è non nulla in quanto  $x'$  non è ortogonale a  $x$ . Cosa possiamo dire del fascio in uscita da  $x'$ ? L'intuito ci dice che avendo prima selezionato la componente  $x$ , il fascio sarà ridotto dal  $F_{x'}$ , ma manterrà sempre la sua componente  $x$ , quindi applicando il terzo  $F_y$  non dovrei vedere luce in uscita. Questo ragionamento risulta essere evidentemente sbagliato in quanto l'esperimento conferma che in uscita dal terzo filtro c'è luce.

I risultati qui ottenuti assumono una interpretazione corretta e coerente se consideriamo le coppie di stati di polarizzazione <sup>3</sup>  $|Px\rangle, |Py\rangle$  e  $|Px'\rangle, |Py'\rangle$  come stati ortogonali, i quali cioè si escludono a vicenda, e se consideriamo i singoli stati di una coppia come sovrapposizione degli stati dell'altra coppia. Per esempio possiamo considerare  $|Px\rangle$  come una sovrapposizione degli stati  $|Px'\rangle$  e  $|Py'\rangle$ , analogamente possiamo rappresentare  $|Px'\rangle$  come una sovrapposizione degli stati  $|Px\rangle$  e  $|Py\rangle$ . Matematicamente possiamo rappresentare questa sovrapposizione con la seguente notazione:

$$|Px'\rangle = c_x |Px\rangle + c_y |Py\rangle$$

$$|Px\rangle = c_{x'} |Px'\rangle + c_{y'} |Py'\rangle$$

dove i  $c$  sono coefficienti che indicano come si sovrappongono i due stati ortogonali. Più precisamente il loro quadrato indica la probabilità che ha di misurare la polarizzazione  $|Px\rangle$  o  $|Py\rangle$  eseguendo la misura corrispondente,  $P_x$  o  $P_y$ .

Analizziamo nel seguente paragrafo questo concetto di sovrapposizione degli stati.

<sup>3</sup>La notazione  $|\alpha\rangle$  usata si dice *ket*, all'interno del *ket* verranno indicati tutti i valori delle osservabili che caratterizzano lo stato del sistema in considerazione.

### Il principio di sovrapposizione degli stati

L'interpretazione dell'esperimento E-x-x'-y trova quindi una spiegazione se si considera il fascio uscente da  $Fx'$  come un sovrapposizione degli stati ortogonali  $|Px\rangle$  e  $|Py\rangle$ . Che il fascio uscente da  $Fx'$  debba in un qualche modo contenere lo stato  $|Py\rangle$  risulta evidente dall'esperimento, in quanto tale componente effettivamente viene selezionata.

É molto importante sottolineare il fatto che questa sovrapposizione degli stati non deve essere interpretata come una composizione mista del fascio in considerazione. É cioé sbagliato interpretare il fascio  $|Px'\rangle$  come composto in parte dallo stato  $|Px\rangle$  e in parte dallo stato  $|Py\rangle$ , anche perché questo contraddirebbe il fatto che prima abbiamo selezionato solo lo stato  $|Px\rangle$ , quindi come può ricomparire uno stato che prima era stato eliminato? In termini di fotoni é sbagliato pensare che il fascio sia composto per una certa percentuale da fotoni polarizzati in  $x$  e da un certa percentuale da fotoni polarizzati in  $y$ . L'interpretazione quantomeccanica corretta é che ogni fotone é in uno stato che é sovrapposizione degli stati di polarizzazione  $|Px\rangle$  e  $|Py\rangle$ . Vedremo nei successivi paragrafi cosa accade a questo stato di sovrapposizione quando il fascio attraversa un filtro.

In meccanica quantistica, quindi nei sistemi microscopici, un sistema in uno stato sovrapposizione di altri stati si dice essere contemporaneamente in tutti gli stati ortogonali. Solo la misura che si va ad effettuare farà cambiare questa sovrapposizione per dare una misura.

In generale tutti i sistemi in meccanica quantistica sono caratterizzati da un certo numero di stati ortogonali, detti **autostati** della variabile corrispondente, la quale sovrapposizione da origine ad altri stati nei quali il sistema si può trovare. Vediamo infatti dall'esempio che una sovrapposizione di  $|Px\rangle$  e  $|Py\rangle$  da origine allo stato  $|Px'\rangle$ .

**Principio di sovrapposizione degli stati.** In generale per un variabile  $A$  possiamo avere un certo numero di autostati  $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$  (potrebbero anche essere infiniti), tutti reciprocamente ortogonali, cioé che si escludono a vicenda. Una qualsiasi sovrapposizione di questi autostati

$$|\alpha\rangle = c_1 |a_1\rangle + \dots + c_n |a_n\rangle \quad (3)$$

é ancora un possibile stato del sistema e non é un autostato di  $A$ .

Tale sovrapposizione degli stati non ha nessuna analogia nella fisica classica, infatti risulta molto difficile, nonostante i tentativi fatti, di cercare di interpretare questo fenomeno con analogie classiche. Nel momento in cui pensa ad analogie classiche si finisce inevitabilmente per incontrare delle contraddizioni, contraddizioni che sono classiche, in quanto questo é un fenomeno puramente quantistico.

### Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Un altro aspetto molto importante che risulta evidente dall'esperimento E-x-x'-y é che non é possibile conoscere contemporaneamente se la luce é polarizzata nelle direzioni  $x - y$  e  $x' - y'$ . In generale si potrebbe pensare di avere a che fare con un fascio che possa essere polarizzato secondo le quattro possibili combinazioni  $|Px, Px'\rangle$ ,  $|Px, Py'\rangle$ ,  $|Py, Px'\rangle$  e  $|Py, Py'\rangle$ . Visto da un punto di vista piú pratico si potrebbe pensare che in uscita dal filtro  $Fx'$  il fascio abbia polarizzazione  $|Px\rangle$  e  $|Px'\rangle$  in quanto prima era stata selezionata la componente  $|Px\rangle$ , quindi non dovrebbe esserci nessuna componente  $|Py\rangle$ . Questa affermazione risulta falsa, in quanto quando andiamo ad applicare un filtro  $Fy$  notiamo in realtà che c'è di nuovo una componente  $|Py\rangle$ . Aggiungendo un ulteriore filtro  $Fy'$  in uscita dall'esperimento E-x-x'-y ritroveremo ancora una componente  $|Py'\rangle$ , che prima avevamo escluso applicando un filtro  $Fx'$ .

Tutte queste osservazioni ci portano a concludere che per questo sistema non possiamo conoscere simultaneamente la polarizzazione nelle direzioni  $x - y$  e  $x' - y'$ . In altre parole se il fascio ha polarizzazione  $|Px\rangle$  o  $|Py\rangle$ , per quanto riguarda le polarizzazioni  $|Px'\rangle$  e  $|Py'\rangle$  non possiamo dire nulla, in quanto abbiamo visto che  $|Px\rangle$  e  $|Py\rangle$  sono sovrapposizioni degli stati  $|Px'\rangle$  e  $|Py'\rangle$ . Questa impossibilità di conoscere simultaneamente le due diverse polarizzazioni si identifica come uno dei tanti casi del principio di indeterminazione di Heisenberg.

Se interpretiamo l'uso del filtro  $x - y$  come l'esecuzione della misura di polarizzazione in  $x$  o in  $y$ , che indichiamo con la variabile  $Pxy$ , e analogamente per  $x' - y'$  indichiamo la variabile  $Px'y'$ , possiamo riassumere l'indeterminazione precedente dicendo che non possiamo conoscere simultaneamente le polarizzazioni  $Pxy$  e  $Px'y'$ . Se eseguiamo la misura di  $Pxy$  perdiamo ogni informazione sulla polarizzazione  $Px'y'$  e viceversa. Vogliamo a questo punto notare che questa indeterminazione non é dovuta all'incapacità dello sperimentatore o all'ineadeguatezza degli strumenti, ma é proprio un comportamento peculiare dei sistemi quantomeccanici.

In generale il principio di indeterminazione in meccanica quantistica vale per tutte le osservabili (variabili dinamiche misurabili) che sono dette incompatibili, ossia quelle variabili che non possono essere conosciute contemporaneamente, la conoscenza di una implica la non conoscenza dell'altra. Le variabili non compatibili sono quelle osservabili che sono legate fra di loro da una particolare relazione quantomeccanica che qui non approfondiremo. Riportiamo però quello che è il primo principio di indeterminazione che, di solito, compare fin dall'inizio in ogni corso di meccanica quantistica.

**Indeterminazione posizione-impulso.** Il principio di indeterminazione di Heisenberg applicato alla posizione e all'impulso di una particella quantistica è formulato come segue:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

dove  $\Delta x$  e  $\Delta p_x$  sono rispettivamente l'incertezza sulla misura della posizione  $x$  e l'incertezza sulla misura della componente dell'impulso  $p_x$ . Risulta chiaro che se conosciamo con estrema precisione  $x$ , quindi  $\Delta x \approx 0$ , allora avremo una completa indeterminazione della componente dell'impulso  $p_x$ , cioè  $\Delta p_x \rightarrow \infty$ , e viceversa. Negli esperimenti reali si conoscono con le corrispondenti incertezze, che soddisfano alla 5, sia l'impulso che la posizione.

**Indeterminazione energia-tempo.** Nella letteratura compare spesso anche il principio di indeterminazione energia-tempo, il quale è però di natura diversa dal principio qui esposto, non è di fatto il principio di indeterminazione riferito alle variabili incompatibili. Riportiamo comunque per completezza tale principio:

$$\Delta E \Delta t \cong \hbar \quad (5)$$

### Il processo di misura in meccanica quantistica

Spendiamo ora due parole sui processi di misura in meccanica quantistica. Riferiamoci sempre all'esempio della polarizzazione della luce riprendiamo l'idea che l'applicazione di un filtro può essere vista come una misura della polarizzazione in un dato verso. Risulta infatti che in uscita l'intensità della luce sarà in proporzione alla componente che si sta misurando. Per chiarire, se misuriamo  $|Px\rangle$  di un fascio che ha polarizzazione  $|Px\rangle$  (perché magari già filtrato), allora l'intensità del fascio in uscita sarà il 100% di quella in entrata (ammettendo una efficienza dei filtri Polaroid del 100%). Se invece misuriamo  $|Px\rangle$  di un fascio con polarizzazione  $|Px'\rangle$ , allora il fascio in uscita avrà un'intensità pari al 50% di quella in entrata. Questo è dovuto al fatto che lo stato  $|Px'\rangle$  è una sovrapposizione

degli stati  $|Px\rangle$  e  $|Py\rangle$  con ugual peso.

Se interpretiamo la luce come composta da fotoni, ognuno dei quali é sovrapposizione dei due stati ortogonali, allora capiamo che nel momento in cui il fotone viene sottoposto alla misura della polarizzazione questo piomba in uno dei due stati ortogonali permessi, con una certa probabilitá. Che é proprio la situazione che si verifica con la selezione della polarizzazione della luce, infatti il fascio in uscita dal filtro ha una intensitá diversa del fascio in entrata.

Notiamo inoltre che nell'esperimento di polarizzazione della luce la misura  $Pxy$  fa perdere qualsiasi informazione riguardo la polarizzazione  $Px'y'$  e viceversa. Ossia notiamo che la misura dell'osservabile  $Pxy$  fa perdere l'informazione sulla corrispondente osservabile incompatibile  $Px'y'$ . Questa é una diretta conseguenza del principio di indeterminazione, il quale non ci permette di conoscere simultaneamente le misure di due osservabili incompatibili.

Riprendendo quanto detto a proposito del principio di sovrapposizione consideriamo una osservabile  $A$  che abbia autostati  $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$ . nel momento in cui si esegue una misura della osservabile  $A$  i possibili risultati saranno allora solo quei valori  $a_1, \dots, a_n$  degli autostati corrispondenti con ben precise probabilitá che dipendono dalla sovrapposizione. Consideriamo per esempio uno stato  $|\alpha\rangle$  sovrapposizione degli autostati di  $A$  come qui rappresentato:

$$|\alpha\rangle = c_1 |a_1\rangle + \dots + c_n |a_n\rangle$$

Se eseguiamo la misura della osservabile  $A$  sul sistema nello stato  $|\alpha\rangle$  possiamo ottenere i valori  $a_1, \dots, a_n$  rispettivamente con probabilitá  $c_1^2, \dots, c_n^2$ .

Per i processi di misura in meccanica quantistica possiamo quindi evidenziare i seguenti due fatti principali:

**Selezione di un autostato.** In generale un sistema quantistico puó trovarsi in uno stato rappresentante una certa variabile dinamica, che é sempre sovrapposizione di stati ortogonali di base, i quali sono detti anche autostati dell'osservabile. Questo significa che ogni misura dell'osservabile in questione puó fornire come risultato solamente quei valori corrispondenti agli autostati e mai valori intermedi. Ecco quindi che se un sistema é in uno stato di sovrapposizione, la misura eseguita su questo fornirá sempre uno dei valori degli autostati corrispondenti con una certa probabilitá. ma allora l'atto della misura fa piombare il sistema del-

lo stato di sovrapposizione in un autostato che sarà il risultato della misura.

**Perdita di informazioni.** Altro fatto importante è che l'atto della misura di una certa osservabile fa perdere qualsiasi informazione riguardo le osservabili incompatibili con quella della misura. Questo è diretta conseguenza del principio di indeterminazione, in quanto è questo principio che vieta la contemporanea conoscenza dei valori di osservabili incompatibili. È quindi chiaro che se conosciamo il valore della osservabile  $A$ , nel momento in cui misuriamo  $B$ , incompatibile con  $A$ , dovremmo necessariamente perdere informazioni riguardo  $A$  essendo incompatibile con  $B$ .

#### 0.4.8 Un interrogativo sulla realtà

Dallo studio della meccanica quantistica sorge spontanea una domanda: ma la realtà di tutto ciò che ci circonda è una realtà classica o quantistica? Senza entrare in questioni filosofiche, si potrebbe pensare che la realtà sia quantistica, ma a noi appare classica perché non percepiamo gli effetti quantistici. Oppure la realtà è classica, ma dobbiamo interpretare il mondo microscopico con la meccanica quantistica perché non abbiamo le capacità di fornirne una descrizione classica, quindi dobbiamo fissare delle indeterminazioni di base ineliminabili. Io non mi sento di fornire una risposta a questa domanda, recentemente però due fisici di Vienna, Kofler e Brukner [11], hanno pubblicato un articolo in cui dimostrano da un punto di vista teorico che la realtà è quantistica e che effetti quantistici si possono avere anche per sistemi macroscopici. L'articolo in questione non è banale da comprendere. Stanno procedendo con ulteriori studi, quindi bisognerà attendere per futuri sviluppi.

### 0.5 Verifica formativa

Proporre la meccanica quantistica nella scuola secondaria superiore non è di certo un'impresa facile. Nel momento in cui si tratta di valutare gli studenti su questo argomento bisogna usare molta cautela per diverse ragioni. Anzitutto non possiamo richiedere agli studenti una padronanza matematica della meccanica quantistica per la risoluzione di problemi, sfido qualsiasi laureato in fisica di medio livello a risolvere un esercizio di meccanica quantistica nello stesso tempo in cui risolverebbe un esercizio di cinematica classica o relativistica.

Il percorso qui sviluppato è pensato per essere un cammino verso la meccanica quantistica, seguendo gli eventi storici selezionati in modo da non incontrare vicoli ciechi, come in realtà è stata la vera storia. Seguendo quindi passo passo

quello che si incontra si potrebbe pensare come verifica formativa per gli studenti delle lezioni dialogiche e delle applicazioni, come la comprensione dei risultati ottenuti dai laboratorio veri e virtuali (applet), in cui proporre agli studenti di risolvere le questioni in esame, guidandoli e sottolineando i concetti fondamentali incontrati.

Tali attività saranno svolte durante lo studio dei nuovi concetti e non solo alla fine dell'argomento.

## 0.6 Verifica sommativa

Anche la verifica sommativa non risulta di facile preparazione. Anzitutto si potrebbe pensare di consultare i problemi usciti negli esami di stato, quindi prendere spunto da questi per preparare gli studenti in questa direzione. Qui però ci proponiamo di formulare una verifica per constatare e valutare la comprensione degli argomenti. Sarà molto importante non cadere in incomprensioni come quelle del tipo: quale è la lunghezza d'onda dell'onda materiale associata ad una particella bla bla bla? Abbiamo studiato che l'onda in questione è una pura funzione matematica chiamate funzione d'onda, quindi bisognerà essere coerenti e non cadere in esercizi scorretti. Proponiamo quindi i seguenti quesiti.

### 0.6.1 Testo della verifica

Quesito 1. (5 punti)

Si consideri un fascio di particelle identiche di massa  $m = 10^{-8} g$  che si muovono ad una velocità  $v = 10^5 m/s$  verso una fenditura di larghezza  $d$ . Quanto deve essere l'ordine di grandezza della dimensione della fenditura affinché sullo schermo possano risultare evidenti effetti quantistici?

Quesito 2. (3 punti)

Si consideri l'apparato sperimentale per lo studio dell'effetto fotoelettrico. Ci si chiede quanti fotoni al secondo devono incidere sull'elettrodo affinché la corrente fra i due elettrodi dovuta agli elettroni sia  $I \approx 1 nA$ . Si supponga di essere nelle condizioni in cui l'effetto fotoelettrico si verifica. Si consideri per semplicità la carica dell'elettrone  $e = 10^{-19} C$ .

Quesito 3. (3 punti)

Si consideri l'effetto fotoelettrico sul sodio, il quale ha un potenziale di estrazione pari a  $W_{Na}$ . Si determini quale è il valore della lunghezza d'onda massima oltre

la quale non si verifica l'effetto fotoelettrico.

Quesito 4. (3 punti)

Per quale motivo un modello atomico in cui l'elettrone ruota attorno al protone non può esistere nella realtà classica? Rispondere sinteticamente in non più di cinque righe.

Quesito 5. (8 punti)

Si consideri un esperimento di polarizzazione sequenziale della luce composto da un primo filtro  $F_x$  e un secondo filtro  $F_{x'}$ . Supponiamo di avere un singolo fotone in uno stato

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|Px\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|Py\rangle$$

che va ad incidere sul primo filtro. Si determinino le probabilità:

1.  $P_1$  che il fotone esca dal primo filtro; (3 punti)
2.  $P_2$  che il fotone esca dal secondo filtro; (5 punti)

### 0.6.2 Griglia di valutazione

Riportiamo in Tab.2 I corrispondenti voti vengono distribuiti seguendo la griglia

Griglia punti		Griglia corrispondenza	
Quesito	Punti	Punti	Voto
Quesito 1	5	0-2	3
Quesito 2	3	3-5	4
Quesito 3	3	6-8	5
Quesito 4	(8)	9-11	6
-Domanda 1	3	12-14	7
-Domanda 2	5	15-17	8
Totale punti	22	18-20	9
		21-22	10

Tabella 2: Punteggio verifica sommativa.

di corrispondenza in Tab.2. Per l'attribuzione dei voti consideriamo come intervallo da 3 a 10, per poter dare 10 si richiede l'eccellenza, quindi lasciamo un piccolo margine di un solo punto, cioè con 21 o 22 punti si raggiunge voto 10. Per tutti gli altri voti corrisponde un intervallo di 3 punti.

## 0.7 Conclusioni

Per l'introduzione della meccanica dei quanti fino al dualismo onda-corpuscolo, abbiamo voluto proporre un percorso che potrebbe sembrare molto simile alla tradizionale introduzione storica della meccanica quantistica. Notiamo però che non abbiamo voluto seguire precisamente questo percorso in quanto riteniamo che lo studio dettagliato di alcuni argomenti, come per esempio i vari modelli atomici, trattati nel percorso tradizionale, possano portare gli studenti fuori dal percorso che si sta seguendo. In effetti la meccanica quantistica moderna è accettata a livello scientifico come una teoria in grado di descrivere i fenomeni microscopici, quindi in linea di principio potrebbe essere introdotta senza dover seguire alcun percorso storico, vedi [1]. È chiaro che da un liceo non devono uscire fisici, quindi è più che giusto affrontare il percorso storico, ma essendo questo segnato da molti vicoli ciechi, se si segue pari pari questa strada non si fa altro che insegnare una cosa e poi smentirla, rischiando di creare più confusione che altro. Quindi qui è stato seguito un percorso storico più lineare, nel quale si è comunque cercato di mettere in evidenza quelli che sono stati gli errori, più che legittimi, dei grandi fisici che hanno costruito la meccanica quantistica.

Abbiamo inoltre inserito una parte finale in cui, basandoci sugli insegnamenti del percorso storico, cerchiamo di introdurre i principi fondamentali della meccanica quantistica così come la conosciamo oggi.



# Bibliografia

- [1] J. J. Sakurai, 'Meccanica quantistica moderna', Zanichelli 1996.
- [2] P. A. M. Dirac, 'I principi della meccanica quantistica', Bollati Boringhieri 1958.
- [3] M. Born, 'Fisica atomica', Boringhieri 1976.
- [4] C. Rossetti, 'Istituzioni di fisica teorica: introduzione alla meccanica quantistica', Levrotto & Bella, Torino, 1990.
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifšits, 'Meccanica quantistica-Teoria non relativistica', Editori Riuniti, Edizioni Mir, 1999.
- [6] A. S. Davidov, 'Meccanica quantistica', Edizioni Mir, 1981.
- [7] E. Hecht, 'Optics', Addison-Wesley, Seconda edizione, 1987.
- [8] L. Lovitch, S. Rosati, 'Fisica generale', Volume 2, Casa Editrice Ambrosiana, 1997.
- [9] Edizione Italiana del Project Physics Course, 'Progetto fisica', Volume 3 del 1990 e Volume B 1992, Zanichelli.
- [10] A. Caforio, A. Ferilli, 'Le leggi della fisica', Volume 2, Le Monnier 2005.
- [11] Johannes Kofler, Caslav Brukner<sup>1</sup>, 'Classical world arising out of quantum physics under the restriction of coarse-grained measurements', Phys. Rev. Lett. 99, 180403 (2007).  
<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0609079>
- [12] Applet dell'esperimento di Frank-Hertz,  
<http://perg.phys.ksu.edu/vqm/software/online/vqm/html/FranckHertz.html>
- [13] Sito con applet per la visualizzazione degli spettri di tutti gli elementi,  
<http://jersey.uoregon.edu/vlab/elements/Elements.html>

- [14] Sito internet dell'Università del Colorado ricco di interessanti simulazioni di fisica. Le applet sono anche scaricabili,  
<http://phet.colorado.edu/new/index.php>
- [15] Siti internet con applet per la simulazione dell'effetto compton, il primo non é interattivo, ma simula random, nel secondo si possono impostare i parametri:  
[http://www.student.nada.kth.se/~f93-jhu/phys\\_sim/compton/Compton.htm](http://www.student.nada.kth.se/~f93-jhu/phys_sim/compton/Compton.htm)  
<http://ww2.unime.it/weblab/ita/compton/compton.htm>
- [16] Lloyd M. Davis, 'Interference between Resolvable Wavelengths with Single-Photon-Resolved Detection', Phys. Rev. Lett., Vol. 60, Num 13, pag.1258-1261, 28 Marzo 1988.
- [17] Sito internet che espone esperimenti di interferenza eseguiti con fotoni singoli.  
<http://www.optica.tn.tudelft.nl/education/photons.asp>
- [18] Sito documentazione dell'esperimento interattivo di ottica, presentato a 'Sperimentando 2002' dalla classe 2A, ITIS Euganeo di Este. Referente: prof. A.Vianello. 'Aspetti quantistici di un fascio di fotoni'  
[http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2002/S2002\\_do.htm](http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2002/S2002_do.htm)

# Elenco delle figure

1	Spettro del Hg. . . . .	8
2	Esperimento di Frank-hertz. . . . .	9
3	Corpo nero. . . . .	10
4	Effetto fotoelettrico, apparato e misure. . . . .	12
5	Applet effetto fotoelettrico. . . . .	13
6	Effetto Compton. . . . .	14
7	Radiografia. . . . .	16
8	Esperimento di interferenza con fotoni singoli. . . . .	18
9	Esperimento della doppia fenditura con elettroni singoli. . . . .	20
10	Fenomeno di interferenza trascurabile. . . . .	23
11	Orbitali dell'atomo H. . . . .	26
12	Direzioni di polarizzazione della luce. . . . .	28
13	Esperimenti sequenziali di polarizzazione della luce. . . . .	28



# Elenco delle tabelle

1	Tempi dell'intervento didattico. . . . .	5
2	Punteggio verifica. . . . .	36