

Verifica di un limite con la definizione

Con la pratica si impara a calcolare i limiti, a volte si può non essere sicuri del risultato ottenuto, quindi si procede con la verifica di questo attraverso la definizione di limite.

Enunciamo per completezza la definizione di limite finito l di una funzione $f(x)$ per x che tende ad un valore finito x_0 . Nella definizione che segue indicheremo fra parentesi e in grassetto la simbologia usata in matematica per sintetizzare le diverse indicazioni, mentre indicheremo tra parentesi in corsivo ulteriori dettagli che sono già inclusi nelle proposizioni della definizione, ma che ci possono aiutare per una migliore comprensione.

Definizione di limite finito per x finito

Sia una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a,b]$, tranne al più un punto x_0 (il dominio D della funzione o il CE si può scrivere come $CE = [a,b] \setminus \{x_0\}$).

Si dice che la funzione ha limite l per x che tende a x_0 (**significa affermare che esiste il limite, esiste si indica con $\exists$**) e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

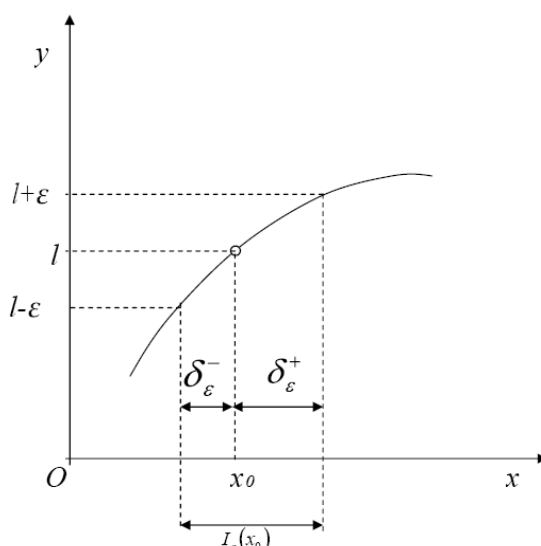
se comunque si scelga (siccome ε serve per costruire un intorno di l , tale numero può essere scelto piccolo a piacere; vedremo altri casi in cui si può scegliere grande a piacere) un numero reale $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$) si può sempre determinare in corrispondenza di esso (ad ogni ε corrisponde un intorno, significa anche dire che ad ogni ε esiste ($\exists$) un intorno) un intorno I di x_0 dipendente da ε ($I_\varepsilon(x_0)$, abbiamo aggiunto (x_0) per evidenziare che l'intorno deve essere di x_0) (**scelto ε si determina l'intorno**) tale che (tale che si indica con $:$) risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I_\varepsilon(x_0) \cap CE$$

(Le precedenti 2 condizioni, ossia la differenza di $f(x)$ da l molto piccola tradotta dalla dicitura $|f(x) - l| < \varepsilon$ e l'appartenenza di x all'intersezione $I_\varepsilon(x_0) \cap CE$ devono essere soddisfatte entrambe affinché esista il limite l della funzione per x che tende a x_0 .)

Definizione in simboli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{se } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\varepsilon(x_0) : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I_\varepsilon(x_0) \cap CE$$



Verifica di un limite

La verifica di un limite si deve eseguire quando si conosce l , ma ci si vuole assicurare che è il valore giusto del limite. Per verificare un limite si usa la definizione, in altre parole dobbiamo verificare che siano vere le due condizioni viste nella definizione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in I_\varepsilon(x_0) \cap CE$$

Nel momento in cui impostiamo la prima condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$ ammettiamo che questa sia vera.

Procedendo quindi da questa disequazione, isolando la variabile indipendente x , otteniamo una nuova disequazione che è equivalente a quella di partenza. Questa è $x \in I_\varepsilon(x_0)$, che sarà anche della forma $x_0 - \delta_\varepsilon^- < x < x_0 + \delta_\varepsilon^+$ dove $x_0 - \delta_\varepsilon^-$ e $x_0 + \delta_\varepsilon^+$ sono i due estremi dipendenti da ε che identificano l'intorno I_ε .

La nuova disequazione quindi esplicita una condizione su x , cioè otteniamo una condizione su x che deve essere vera, in quanto equivalente a quella di partenza che è vera. Chiaramente se otteniamo una condizione impossibile su x , quindi non vera, allora sarà non vera anche quella di partenza $|f(x) - l| < \varepsilon$.

A questo punto per verificare che il limite è corretto ci rimane solo da accertare che il punto x_0 sia effettivamente appartenente all'intorno I_ε determinato, in quanto se x_0 non appartiene a questo intorno allora non ha senso parlare di funzione che tende a l per x che tende a x_0 .

Per verificare un limite si deve quindi procedere eseguendo le seguenti azioni:

1. scegliere un ε che possiamo lasciare indicato in modo generale come ε
 2. impostare la condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$
 3. operare sulla condizione 2 in modo da isolare la x e determinare quindi la condizione $x_0 - \delta_\varepsilon^- < x < x_0 + \delta_\varepsilon^+$ o in modo equivalente $x \in I_\varepsilon$
 4. verificare che la condizione ottenuta in 3 sia corretta
 5. accertarsi che x_0 appartenga a I_ε , cioè che sia $x_0 \in I_\varepsilon$
 6. se è vera anche la 5 allora possiamo affermare che I_ε è un intorno di x_0 e quindi indicarlo con $I_\varepsilon(x_0)$
 7. concludere affermando che il limite calcolato esiste.
- ✓ Nel caso in cui si verifichi che la condizione ottenuta al punto 3 è falsa, allora è falsa anche la condizione di partenza e quindi ciò significa che la funzione o non può mai assumere il valore l , oppure non esiste il limite l per la funzione.

- ✓ Se invece determiniamo che x_0 non appartiene all'intorno I_ε significa che la funzione ha limite l , ma non per x che tende a x_0 .

Esempi di verifica di un limite

Per comprendere meglio quanto esposto sopra possiamo analizzare alcuni esempi in specifico.

Verifica di un limite corretto

Consideriamo il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1$

Appare chiaro subito che la funzione è definita per $x=1$ e banalmente possiamo affermare che il limite vale $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$.

Applicando la definizione possiamo verificare se questo risultato ottenuto è corretto oppure no.

Quindi cerchiamo l'intorno I_ε sull'asse x per il quale è vera la condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$. Isoliamo la x dalla precedente condizione:

$$|2x + 1 - 3| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < 2x + 1 - 3 < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < 2x - 2 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Possiamo affermare che la prima condizione è vera se $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Questo intervallo definisce l'intorno I_ε . A questo punto però non abbiamo ancora verificato che sia vero il limite, cioè non abbiamo ancora verificato che l'intorno I_ε sia un intorno di x_0 . Per verificare se lo è basta verificare se x_0 è compreso nell'intorno I_ε , cioè è vero che $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x_0 < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$? Possiamo tranquillamente affermare che lo è, quindi il limite calcolato è corretto.

Verifica di un limite non corretto

Consideriamo sempre il precedente limite e assumiamo che qualcuno ci dica che $\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 6$, oppure nel calcolarlo ci siamo sbagliati e abbiamo ottenuto 6, ma siamo convinti di aver operato in modo corretto.

Per assicurarci del nostro calcolo procediamo con la verifica come fatto in precedenza:

$$|2x + 1 - 6| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < 2x + 1 - 6 < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < 2x - 5 < \varepsilon \Rightarrow \frac{5 - \varepsilon}{2} < x < \frac{5 + \varepsilon}{2}$$

Determinato gli estremi dell'intorno I_ε che sono $\frac{5}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\frac{5}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, dobbiamo verificare se questo è un intorno di $x_0=1$. Si nota chiaramente che per ε piccolo a piacere 1 non è compreso in questo intorno, quindi è FALSO che $\frac{5}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < 1 < \frac{5}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

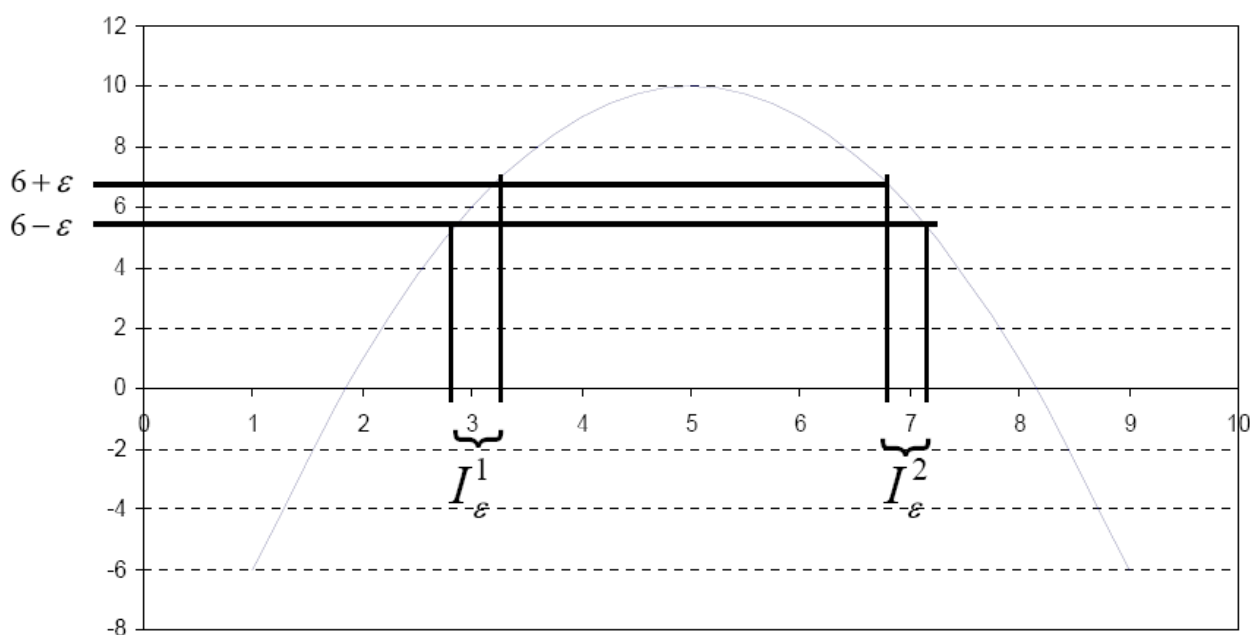
Questa osservazione ci informa del fatto che il limite non è corretto, come sapevamo in partenza.

Nel caso di funzioni più complesse può non essere banale accorgersi di un limite sbagliato senza verificare con la definizione.

Altro esempio

Consideriamo un altro esempio che potrebbe condurre ad ambiguità. Si consideri la funzione $f(x) = -(x-5)^2 + 10$, altro non è che un parabola rovesciata e traslata come indicato in figura. Calcoliamo ora il limite per x che tende a 3:

$$\lim_{x \rightarrow 3} -(x-5)^2 + 10 = 6$$



Eseguiamo la verifica graficamente. Consideriamo $f(x)=6$, scegliamo ε quindi individuiamo sulla curva i punti che corrispondono a $6+\varepsilon$ e a $6-\varepsilon$. Chiaramente a ciascuno dei due valori corrispondono 2 punti sulla curva, quindi globalmente determiniamo in corrispondenza di ε due intorni I_ε^1 e I_ε^2 . Nel nostro caso $x_0=3$ quindi è interno al primo intorno e non al secondo. Anche in questo caso abbiamo verificato la correttezza del limite ma dobbiamo porre attenzione ai due intorni che determiniamo.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.