21 a) Determina $y = f(x)$ sapendo che $y'' = 2e^x \cos x$ e che ha come tangente nell'origine la bisettrice del I e III quadrante.
b) Verifica che la funzione $f(x)$ ammette massimo per $x = \frac{3}{4}\pi$.
c) Stabilisci se il punto $A(3; 0)$ appartiene al grafico di $f(x)$. [a) $y = e^x \operatorname{sen} x$; c) no]

22 a) Tra le primitive di $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ individua quella il cui grafico passa per $A(0; -\ln 2)$.
b) Rappresenta graficamente la funzione trovata.
c) Determina l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di ascissa 0.
[a) $y = -\ln(1 + e^{-x})$; c) $y = \frac{1}{2}x - \ln 2$]

23 a) Tra le primitive di $f(x) = \frac{1}{9 + 4x^2}$ individua la funzione $F(x)$ il cui grafico passa per il punto $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{24}\right)$.
b) Rappresenta graficamente la funzione $F(x)$ e da esso deduci quello di $y = e^{F(x)}$.
[a) $F(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}x$]

24 a) Studia la funzione $f(x) = 2\cos x + \cos^3 x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e rappresentala graficamente.
b) Determina i valori dei parametri reali a e b affinché $F(x) = (a + b)\operatorname{sen} x - 3a \operatorname{sen}^3 x$ sia una primitiva di $f(x)$.
c) Verifica che la derivata seconda di $F(x)$ si annulla per $x = \pi$.
[b) $a = \frac{1}{9}$, $b = \frac{26}{9}$]

25 a) Studia la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x) = e^x \cos x$ che passa per il punto di minimo di $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$.
b) Rappresenta graficamente $F(x)$.
c) Stabilisci se $F(x)$ è una funzione pari.
[a) $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$; c) no]

26 Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.
a) Determinare $f(x)$.
b) Studiare la funzione $y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$ e disegnare il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.
c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.
d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.
e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:
$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1},$$
calcolare una primitiva della funzione $\frac{f(x)}{x^2 - 1}$.
(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corso di ordinamento, sessione suppletiva*, 2002, *problema* 1)
[a) $f(x) = x^3$; b) max: $\left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, min: $\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, flesso: $(0; 0)$, a.v.: $x = \pm 1$, a.ob.: $y = x$;
c) $y = -\frac{11}{9}x + \frac{4}{9}$; d) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$, $\left(-\frac{4}{5}; \frac{64}{45}\right)$; e) $a = b = \frac{1}{2}$, $F(x) = \frac{1}{2}(x + \ln|x^2 - 1|)$]

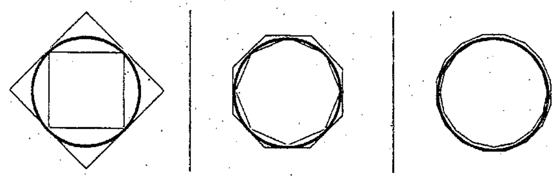
GLI INTEGRALI DEFINITI E LE LORO APPLICAZIONI

1 L'INTEGRALE DEFINITO E LE SUE PROPRIETÀ

L'introduzione del calcolo degli integrali definiti nasce dalla necessità di determinare le *aree* di figure piane aventi *contorno curvilineo*. Mentre per i poligoni il calcolo dell'area si riconduce a quella di un quadrato, per le figure il cui contorno è una curva qualsiasi il problema è più complesso.
L'esempio più semplice è il cerchio, la cui area è stata determinata da Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) mediante il *metodo di esaustione*. Se si considerano due successioni di poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti al cerchio, si può dimostrare che l'area del cerchio coincide con il limite comune delle due successioni costituite rispettivamente dalle aree dei poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio.

■ Ogni poligono è *equiscomponibile* in un quadrato.

■ Riprenderemo questo argomento in una delle esplorazioni.

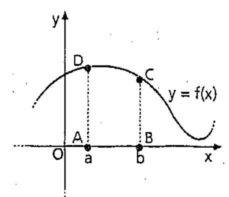


◀ **Figura 1.** Dal punto di vista intuitivo, i perimetri del poligono inscritto e del poligono circoscritto tendono a identificarsi con la circonferenza man mano che il numero dei loro lati aumenta.

Con un ragionamento analogo vedremo che è possibile determinare l'area di un particolare tipo di superficie a contorno curvilineo, che chiamiamo *trapezoide*. Questo procedimento ha portato al concetto più generale e astratto di *integrale definito* che si presta a determinare l'area di altri tipi di figure e a risolvere anche problemi di natura diversa.

IL TRAPEZOIDE

Data una funzione $y = f(x)$ e un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ nel quale la funzione è *continua* e *positiva* (o nulla), si chiama **trapezoide** la figura piana delimitata dall'asse x, dalle rette parallele all'asse y passanti per gli estremi dell'intervallo $[a; b]$ e dal grafico della funzione f su tale intervallo (figura a lato). Essenzialmente si tratta di un quadrilatero mistilineo di vertici $A(a; 0)$, $B(b; 0)$, $C(b; f(b))$, $D(a; f(a))$.



L'*area S di un trapezoide* non può essere calcolata in modo elementare, tuttavia possiamo approssimarla utilizzando il seguente procedimento:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$ (per esempio, nella figura 2 abbiamo considerato $n=6$);
- consideriamo i rettangoli aventi per base un segmento di suddivisione e per altezza il segmento associato al minimo m_i che la funzione assume in tale intervallo;
- indichiamo con s_n la somma delle aree di tutti questi rettangoli:

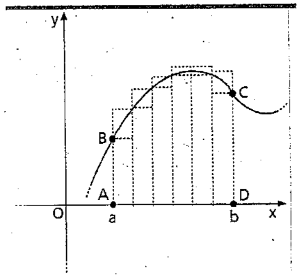
$$s_n = m_1 h + m_2 h + \ldots + m_n h.$$

L'area del trapezoide viene così approssimata per difetto da s_n.

In maniera analoga, possiamo approssimare per eccesso l'area del trapezoide, tramite la somma delle aree dei rettangoli, associati a una scomposizione dell'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali e aventi per altezza il segmento associato al massimo M_i della funzione nel corrispondente intervallo. Indichiamo questa somma con S_n:

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \ldots + M_n h.$$

Poiché la funzione è continua, il teorema di Weierstrass garantisce che negli intervalli considerati esistono il minimo e il massimo assoluto.



▶ **Figura 2.** L'area del trapezoide *ABCD* è compresa tra s_6 e S_6.

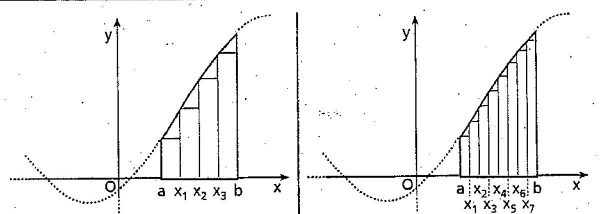
Otteniamo così due successioni di aree s_n e S_n tali che, per ogni n, l'area S del trapezoide risulta compresa fra l'area per difetto e quella per eccesso, ossia, possiamo scrivere:

$$s_n \leq S \leq S_n.$$

L'INTEGRALE DEFINITO DI UNA FUNZIONE POSITIVA O NULLA

L'approssimazione delle due aree s_n e S_n risulta migliore man mano che si scelgono più piccoli gli intervalli di suddivisione di $[a; b]$.

▶ **Figura 3.**



a. Per n = 4 l'intervallo è suddiviso in 4 parti. La somma delle aree dei 4 rettangoli approssima, per difetto, l'area del trapezoide.

b. Se n = 8 la somma delle aree degli 8 rettangoli approssima meglio della precedente, per difetto, l'area del trapezoide.

Enunciamo il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è continua e positiva (o nulla) nell'intervallo $[a; b]$, i limiti per $n \to +\infty$ delle successioni s_n e S_n esistono finiti e sono coincidenti, ossia:

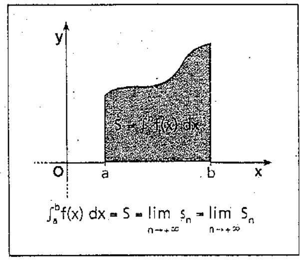
$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

DEFINIZIONE

Integrale definito ($f(x) \geq 0$)

Data una funzione $f(x)$ continua e positiva o nulla in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore comune del limite per $n \to +\infty$ delle due successioni s_n, per difetto, e S_n, per eccesso. Tale valore viene indicato con la scrittura:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$



Il simbolo $\int$ rappresenta una S allungata per ricordare che, nella rappresentazione grafica, a un integrale corrisponde una somma di aree (di rettangoli aventi altezza $f(x)$ e base dx.

Si legge «integrale da a a b di $f(x)$ in dx».

L'integrale definito, poiché $f(x) \geq 0$, fornisce la misura dell'area del trapezoide relativo a $f(x)$ e di estremi a e b. a e b vengono chiamati estremi di integrazione. a è detto **estremo inferiore**, b **estremo superiore**. La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda**.

L'integrale definito è un valore numerico ben definito che non dipende dalla variabile x, mentre l'integrale indefinito è invece un insieme di funzioni.

La x è una variabile apparente. L'integrale ha sempre lo stesso valore anche se al posto di x mettiamo un'altra variabile t o v, ecc., cioè: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \ldots$

LA DEFINIZIONE GENERALE DI INTEGRALE DEFINITO

Nella definizione data di integrale definito abbiamo supposto che la funzione $f(x)$ fosse positiva o nulla in $[a; b]$. Tuttavia la definizione più generale di integrale definito non richiede questa ipotesi in quanto non si collega all'area dei trapezoidi.

Inoltre non è necessario considerare dei sottointervalli di $[a; b]$ tutti della stessa ampiezza e neppure prendere per $f(x)$ i valori minimi e massimi negli intervalli.

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua in $[a; b]$ e dividiamo l'intervallo in n intervalli chiusi mediante i punti $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, con:

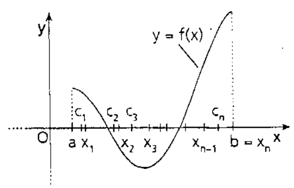
$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n.$$

x_0 coincide con a. x_n coincide con b.

Le ampiezze degli intervalli possono essere diverse fra loro e sono date da:

$$\Delta x_1 = x_1 - a,$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1,$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2;$$
$$\ldots$$
$$\Delta x_n = b - x_{n-1}.$$

MODULO W



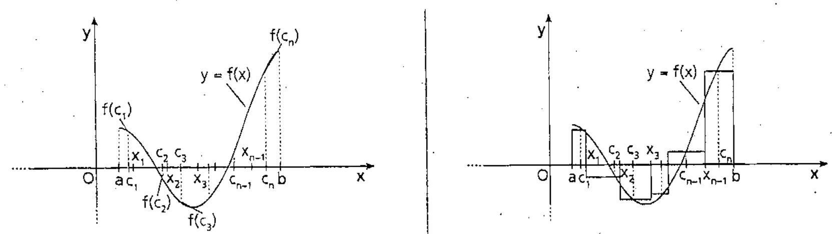
▶ **Figura 4.** Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti di ampiezza qualsiasi e scegliamo in ciascuna di esse un punto qualsiasi.

Per ognuno degli intervalli consideriamo poi un qualsiasi punto dell'intervallo (figura 4):

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n.$$

Consideriamo i relativi valori della funzione (figura 5*a*):

$$f(c_1), f(c_2), f(c_3), \ldots, f(c_n).$$



a. Consideriamo il valore della funzione per ognuno dei punti c_i scelti.

b. Per ciascun intervallo $[x_{i-1}; x_i]$ consideriamo il rettangolo di altezza $f(c_i)$.

▲ **Figura 5.**

Consideriamo poi la somma $\bar{S}$ data da:

$$\bar{S} = f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + f(c_3)\cdot\Delta x_3 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n.$$

La somma $\bar{S}$ dipende:

- dal numero di suddivisioni;
- dalle ampiezze Δx_n degli intervalli;
- dai punti c_n scelti all'interno dei diversi intervalli.

Fra le ampiezze degli intervalli indichiamo quella massima con Δx_{max}. Se $\Delta x_{max} \to 0$, anche tutte le altre ampiezze tendono a 0.

Si può dimostrare che se Δx_{max} tende a 0, tutte le somme $\bar{S}$, ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo e i punti all'interno dei diversi intervalli, tendono a uno stesso valore S.

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Integrale definito

Data una funzione $f(x)$, continua in $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore del limite per Δx_{max} che tende a 0 della somma $\bar{S}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_{max}\to 0} \bar{S}.$$

La precedente definizione è un caso particolare di questa. In questo caso il risultato può essere anche un numero negativo o nullo e quindi, in generale, l'integrale definito non corrisponde all'area compresa fra il grafico della funzione e l'asse x. Approfondiremo questo argomento nel paragrafo 3.

Per convenzione si pone:

DEFINIZIONE

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

e:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{se } a > b.$$

Se per una funzione esiste l'integrale definito in un intervallo $[a; b]$, si dice che la **funzione è integrabile in $[a; b]$**.

Enunciamo, senza dimostrarle, le seguenti proprietà.

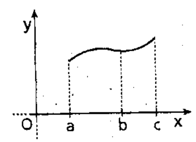
LE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

PROPRIETÀ

Additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione

In un intervallo in cui la funzione è integrabile, se $a < b < c$, allora l'integrale esteso da a a c è uguale alla somma dell'integrale esteso da a a b con l'integrale esteso da b a c:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$



$S = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

▲ **Figura 6.**

PROPRIETÀ

Integrale della somma di funzioni continue

L'integrale definito da a a b di una somma di funzioni continue è uguale alla somma degli integrali da a a b delle singole funzioni:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

Integrale del prodotto di una costante per una funzione continua

L'integrale definito da a a b del prodotto di una costante per una funzione continua è uguale al prodotto della costante per l'integrale da a a b della funzione:

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

Confronto tra gli integrali di due funzioni

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue e tali che $f(x) \le g(x)$ in ogni punto dell'intervallo $[a; b]$ allora l'integrale da a a b della $f(x)$ è minore o uguale dell'integrale della $g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

PROPRIETÀ

Integrale del valore assoluto di una funzione

Se $f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, allora il valore assoluto dell'integrale da a a b della $f(x)$ è minore o uguale dell'integrale del valore assoluto della $f(x)$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

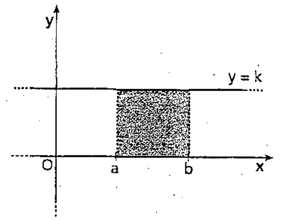
PROPRIETÀ

Integrale di una funzione costante

Se una funzione $f(x)$ è costante nell'intervallo $[a; b]$, cioè $f(x) = k$, allora l'integrale da a a b della $f(x)$ è uguale al prodotto di k per $(b - a)$:

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

▶ **Figura 7.** L'area del rettangolo è $k \cdot (b - a)$.



Interpretiamo graficamente questa proprietà quando k è positivo. L'integrale $\int_a^b k\,dx$ rappresenta l'area del rettangolo in figura che è appunto $k(b - a)$.

2 IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

IL TEOREMA DELLA MEDIA

Ci poniamo le seguenti domande.

1. C'è una relazione fra gli integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int f(x)\,dx$?

2. È possibile calcolare un integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$?

Le risposte sono entrambe affermative.

Rispondiamo alla prima domanda dicendo che esiste un teorema che mette in relazione integrale indefinito e integrale definito. Questo teorema prende il nome di *teorema fondamentale del calcolo integrale.* Per dimostrarlo è necessario introdurne un altro, il teorema della media.

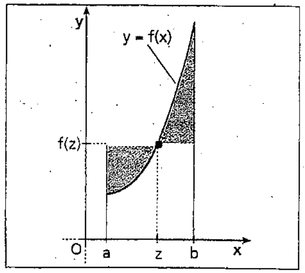
TEOREMA

Teorema della media

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, esiste almeno un punto $z \in [a; b]$ tale che:

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = (b-a) \cdot f(z)}$$

con $z \in [a; b]$.



Geometricamente, se la funzione è positiva in $[a; b]$, il teorema della media esprime l'equivalenza fra un trapezoide, la cui area misura $\int_a^b f(x)\,dx$, e un rettangolo, aventi uguale base $b - a$. L'altezza del rettangolo è data dal valore di f in un particolare punto z dell'intervallo $[a; b]$:

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

DIMOSTRAZIONE

Poiché la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b]$, allora per il teorema di Weierstrass la funzione assume in $[a; b]$ il suo valore massimo M e il suo valore minimo m. Quindi per ogni x appartenente ad $[a; b]$ deve valere la disuguaglianza:

$$m \le f(x) \le M.$$

Per le proprietà degli integrali, vale anche la disuguaglianza:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Applicando la proprietà dell'integrale di una funzione costante, possiamo scrivere:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Dividiamo tutti i membri della disuguaglianza per $(b - a)$:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M.$$

Per il teorema dei valori intermedi, la funzione deve assumere almeno una volta tutti i valori compresi fra il suo massimo e il suo minimo, quindi deve anche esistere un punto z appartenente ad $[a; b]$ tale che:

$$f(z) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Pertanto esiste almeno un punto z appartenente ad $[a; b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a).$$

Il valore $\boldsymbol{f(z) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}}$ si chiama anche **valore medio** della funzione $f(x)$ in $[a; b]$.

LA FUNZIONE INTEGRALE

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$. Consideriamo un punto qualsiasi x di $[a; b]$.

Definiamo **funzione integrale** di f in $[a; b]$ la funzione:

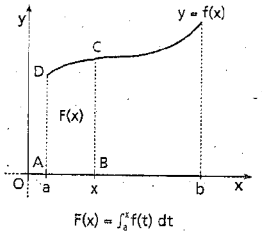
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

t si può sostituire con un'altra variabile, per esempio:

$F(x) = \int_a^x f(z)\,dz =$

$= \int_a^x f(u)\,du \ldots$

che associa a ogni $x \in [a; b]$ il numero reale $\int_a^x f(t)\,dt$, dove la variabile indipendente x coincide con l'estremo superiore di integrazione. Per non creare confusione fra variabili, la funzione integranda viene indicata con $f(t)$, dove t diventa la variabile di integrazione.



◄ **Figura 8.**

Osservazione. Se la funzione $f(t)$ è positiva in $[a; b]$, la funzione integrale $F(x)$ rappresenta l'area del trapezoide $ABCD$ (figura 8). Tale area dipende dal valore di x, variabile nell'intervallo $[a; b]$. Dalla definizione di $F(x)$ otteniamo le seguenti relazioni:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0, \quad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

TEOREMA

Teorema fondamentale del calcolo integrale

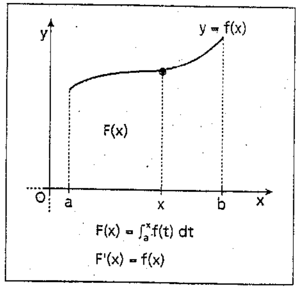
Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x).$$

Ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.



Questo teorema è anche chiamato di **Torricelli-Barrow**. La sua importanza è dovuta al fatto che per calcolare l'area di un trapezoide delimitato da $f(x)$ si può ricorrere al calcolo di una primitiva di $f(x)$.

Ipotesi 1. $y = f(x)$ è continua in $[a; b]$;

2. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Tesi 1. Esiste $F'(x)$;

2. $F'(x) = f(x)$.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che esiste la derivata di $F(x)$ e la calcoliamo, applicando la definizione.

Incrementiamo la variabile x di un valore h e calcoliamo la differenza $F(x+h) - F(x)$ utilizzando l'espressione della funzione integrale:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt.$$

Applichiamo la proprietà di additività dell'integrale:

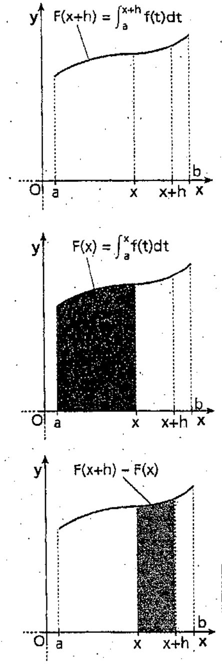
$$F(x+h) - F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Per il teorema della media, il valore dell'integrale è uguale al prodotto dell'ampiezza h dell'intervallo di integrazione per il valore $f(z)$, con z un particolare punto dell'intervallo $[x; x+h]$, nel caso in cui sia $h > 0$, oppure dell'intervallo $[x+h; x]$ se $h < 0$; pertanto possiamo scrivere:

$$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(z).$$

Dividiamo i due membri per h:

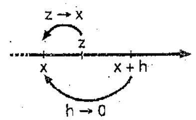
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(z).$$



Calcoliamo il limite per h che tende a zero in entrambi i membri.

Primo membro: si tratta del limite del rapporto incrementale di F, pertanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x).$$



Secondo membro: se $h > 0$, poiché z si trova fra x e $x+h$, se h tende a zero allora z tende a x e $\lim_{h \to 0} f(z) = \lim_{z \to x} f(z) = f(x)$, essendo f continua, per ipotesi. Il ragionamento è del tutto analogo nel caso in cui sia $h < 0$.

Pertanto:

$$F'(x) = f(x).$$

Per il teorema ora dimostrato, una funzione f continua in $[a; b]$ ammette come primitiva fondamentale la funzione integrale $F(x)$, con x variabile nell'intervallo $[a; b]$. Pertanto, l'integrale indefinito di f, inteso come la totalità delle sue primitive, si esprime come:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c,$$

dove c è una qualunque costante reale.

IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO

Ora rispondiamo alla seconda domanda che ci siamo posti introducendo il teorema della media: è possibile calcolare un integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$?

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo ottenere la formula del calcolo dell'integrale definito.
Sia $\varphi(x)$ è una primitiva qualsiasi di $f(x)$.
Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, sappiamo che $F(x)$ è una *particolare* primitiva della funzione f. Pertanto $\varphi(x)$ risulta della forma:

$$\varphi(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c,$$

dove c è una costante reale arbitraria.

- Calcoliamo $\varphi(a)$ (sostituiamo all'estremo di integrazione x il valore a):

$$\varphi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = 0 + c = c.$$

- Calcoliamo $\varphi(b)$ (sostituiamo all'estremo di integrazione x il valore b):

$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$. Poiché $\varphi(a) = c$, otteniamo:

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \varphi(a).$$

Portiamo nel primo membro $\varphi(a)$:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

e scriviamo l'uguaglianza da destra a sinistra:

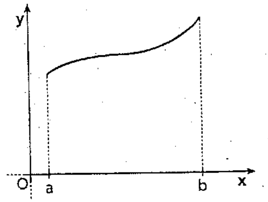
$$\int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Poiché non ci sono più ambiguità di variabili, possiamo riutilizzare la variabile x e scrivere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Si è soliti indicare la differenza $\varphi(b) - \varphi(a)$ con $[\varphi(x)]_a^b$.

◀ **Figura 9.**



$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$

Per definizione:
$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Questa formula è detta anche formula di **Leibniz-Newton**. Essa permette di ricondurre il calcolo di un integrale definito a quello di un integrale indefinito. Si supera in tal modo la difficoltà del calcolo del limite della successione s_n che, in generale, non è facile da determinare.

Osservazione. Poiché $\varphi(x)$ è una qualsiasi primitiva, cioè $\varphi(x) = F(x) + c$, si può sempre considerare $c = 0$.

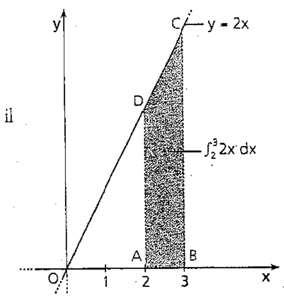
ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale $\int_2^3 2x\,dx$:

$$\int_2^3 2x\,dx = [x^2]_2^3.$$

Sostituiamo a x prima il valore 3 e poi il valore 2, ottenendo:

$$[x^2]_2^3 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5.$$



◀ **Figura 10.**
Tracciamo la retta di equazione $y = 2x$.
L'integrale $\int_2^3 2x\,dx$ rappresenta l'area del trapezio rettangolo $ABCD$, che possiamo calcolare anche per via geometrica:

$$S = \frac{(\overline{AD} + \overline{BC}) \cdot \overline{AB}}{2}.$$

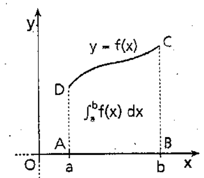
Poiché $\overline{AD} = 4$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AB} = 1$, abbiamo:

$$S = \frac{(4+6) \cdot 1}{2} = 5.$$

3 IL CALCOLO DELLE AREE

LE AREE DI FIGURE PIANE

Abbiamo visto che, assegnata una funzione $f(x)$ positiva o nulla, l'area del trapezoide $ABCD$ definito nell'intervallo $[a; b]$ è data dall'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$.



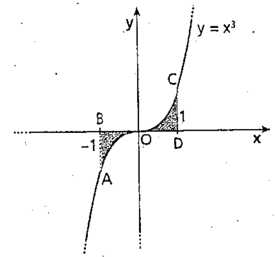
Estendiamo il calcolo delle aree alle seguenti superfici in cui:

- la funzione è almeno in parte negativa;
- due funzioni delimitano una superficie chiusa.

LA FUNZIONE È ALMENO IN PARTE NEGATIVA

Consideriamo la funzione $y = x^3$ e la superficie $ABCD$ compresa fra il grafico della funzione e l'asse x nell'intervallo $[-1; 1]$.

◀ **Figura 11.**



La funzione $y = x^3$ è dispari e ha grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi cartesiani. Le aree delle regioni ABO e ODC sono, di conseguenza, uguali.

Calcoliamo l'integrale definito esteso da -1 a 1:

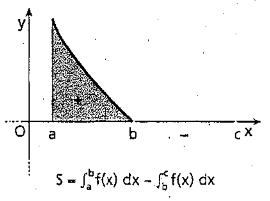
$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Questo integrale non fornisce la misura dell'area S della superficie in figura che non è nulla. Risulta necessario scomporre la superficie nelle superfici ABO, in cui la funzione è negativa, e OCD in cui la funzione è positiva e, in corrispondenza, va scomposto anche l'integrale. Nell'intervallo in cui la funzione è negativa, l'area s della superficie compresa tra il grafico della funzione e l'asse x è quindi data da $-\int_a^b f(x)\,dx$:

Area $(ABO) = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx$.
Area $(OCD) = \int_{0}^{1} x^3\,dx$.

$$S = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

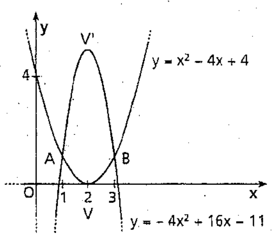
In generale, per calcolare l'area S formata da porzioni di figure che stanno in parte sopra l'asse x e in parte sotto, occorre scomporre le aree e calcolare gli integrali negli intervalli dove la funzione ha segno costante (positivo o negativo), tenendo presente che l'integrale di una funzione negativa va preceduto dal segno meno.



▶ Figura 12.

DUE FUNZIONI DELIMITANO UNA SUPERFICIE CHIUSA

Consideriamo la superficie rappresentata nel seguente grafico.

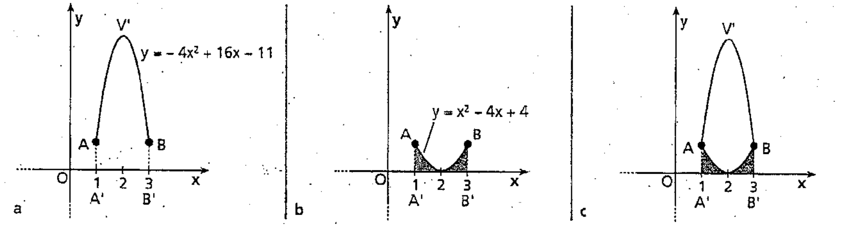


◀ **Figura 13.** La parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 4$ ha il vertice in $V(2; 0)$ e la parabola $y = -4x^2 + 16x - 11$ ha il vertice in $V'(2; 5)$. L'area considerata è estesa agli estremi 1 e 3 dell'asse x.

Essa è racchiusa dalle due parabole di equazione: $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = -4x^2 + 16x - 11$.

Le due parabole si intersecano nei punti $A(1; 1)$ e $B(3; 1)$.

L'area S cercata è data dalla differenza fra l'area del trapezoide $A'AV'BB'$ (figura 14a) e l'area del trapezoide $AA'B'B$ (figura 14b), definiti entrambi nell'intervallo $[1; 3]$.



▲ **Figura 14.**

$S = A(A'AV'BB') - A(AA'B'B)$.

$$S = \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11)\,dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 4)\,dx.$$

Poiché gli estremi di integrazione sono gli stessi, possiamo applicare una proprietà degli integrali, scrivendone uno solo, cioè:

$$S = \int_1^3 (-4x^2 + 16x - 11 - x^2 + 4x - 4)\,dx,$$

dunque:

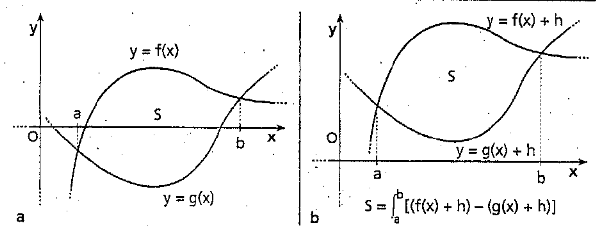
$$S = \int_1^3 (-5x^2 + 20x - 15)\,dx = \left[\frac{-5x^3}{3} + \frac{20x^2}{2} - 15x\right]_1^3 =$$

$$= \left[\frac{-5\cdot 3^3}{3} + \frac{20\cdot 3^2}{2} - 15\cdot 3 - \left(\frac{-5}{3} + 10 - 15\right)\right] =$$

$$= -\cancel{45} + \cancel{90} - \cancel{45} + \frac{5}{3} + 5 = \frac{20}{3}.$$

Pertanto la misura dell'area racchiusa dalle due curve è $S = \frac{20}{3}$.

Se la superficie non si trova tutta al di sopra dell'asse x si può effettuare una traslazione in modo che essa sia tutta al di sopra dell'asse x.



◀ **Figura 15.** L'area S della superficie delimitata dalle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ non cambia se trasliamo entrambe le funzioni di h. Prendiamo $h > 0$ in modo che i grafici di entrambe le funzioni traslate siano sopra all'asse x.

Allora:

$$S = \int_a^b [(f(x) + h) - (g(x) + h)]\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

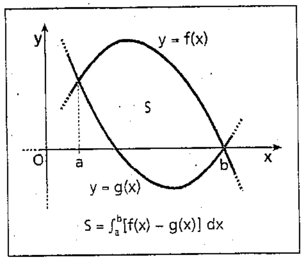
Quindi in generale vale la seguente regola.

REGOLA

Area della superficie delimitata da due funzioni

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite nello stesso intervallo $[a; b]$, con $f(x) > g(x)$, per ogni x in $[a; b]$, i cui grafici racchiudano una superficie; allora l'area S della superficie è data da:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

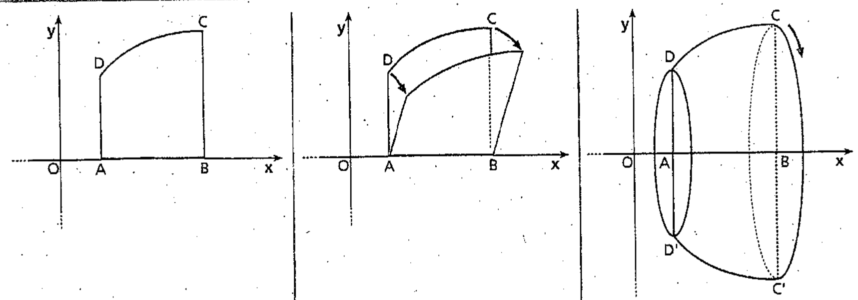


4 IL CALCOLO DEI VOLUMI DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

I VOLUMI DI SOLIDI DI ROTAZIONE

Si noti che ogni sezione del solido con un piano perpendicolare all'asse x è una circonferenza.

Consideriamo la funzione $y = f(x)$, continua nell'intervallo $[a; b]$ e non negativa, e il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$. Se facciamo ruotare il trapezoide attorno all'asse x di un giro completo (ossia di 360°), otteniamo un solido di rotazione.



a. È dato il trapezoide $ABCD$.

b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse x (il lato AB rimane fisso).

c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di 360° del trapezoide attorno all'asse x.

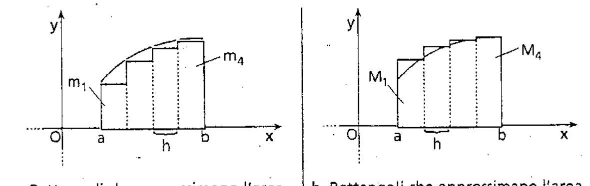
▲ **Figura 16.**

Calcoliamo il volume di tale solido.

Riprendiamo il trapezoide e dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali.

Ognuna di queste parti ha lunghezza $h = \dfrac{b-a}{n}$. Disegniamo sul trapezoide i rettangoli che approssimano la sua area per difetto e i rettangoli che approssimano la sua area per eccesso.

Nella rotazione completa intorno all'asse delle x ogni rettangolo descrive un cilindro circolare di altezza h e raggio di base m_n o M_n.

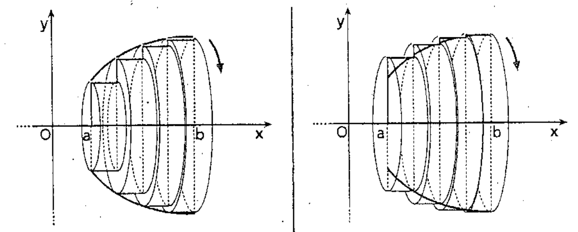


a. Rettangoli che approssimano l'area del trapezoide per difetto.

b. Rettangoli che approssimano l'area del trapezoide per eccesso.

◀ **Figura 17.**

Ricordiamo che ogni rettangolo per difetto ha per base h e per altezza il valore minimo m_n che la funzione assume nell'intervallo; ogni rettangolo per eccesso ha per base h e per altezza il massimo M_n che la funzione assume in tale intervallo.



a. Ogni cilindro per difetto ha per base un cerchio di raggio m_n e per altezza h.

b. Ogni cilindro per eccesso ha per base un cerchio di raggio M_n e per altezza h.

◀ **Figura 18.**

La somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio m_n approssima per difetto il volume del solido di rotazione iniziale e la somma dei volumi degli n cilindri con base il cerchio di raggio M_n approssima per eccesso il volume dello stesso solido.

Poiché la formula del volume del cilindro circolare di raggio r e altezza h è $\pi r^2 h$, il volume v_n dei cilindri approssimanti il solido per difetto e il volume V_n dei cilindri approssimanti per eccesso sono:

$$v_n = \pi m_1^2 h + \pi m_2^2 h + \pi m_3^2 h + \ldots + \pi m_n^2 h;$$

$$V_n = \pi M_1^2 h + \pi M_2^2 h + \pi M_3^2 h + \ldots + \pi M_n^2 h.$$

Si può dimostrare che quando $n \to +\infty$ le due successioni tendono allo stesso limite e tale limite è uguale al prodotto di π per l'integrale definito da a a b del quadrato di $f(x)$, ossia:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

DEFINIZIONE

Volume di un solido di rotazione

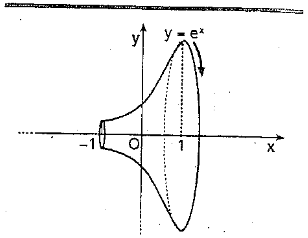
Dato il trapezoide $ABCD$ esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico della funzione $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, si chiama volume del solido che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo il numero espresso dal seguente integrale:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Negli esempi 2 e 3 vediamo come con la formula del volume di un solido di rotazione si possono riottenere le regole per il calcolo dei volumi dei solidi rotondi studiati in geometria. Prova a ricavare il volume del cilindro.

ESEMPIO

1. Calcoliamo il volume V del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $y = e^x$, per x nell'intervallo $[-1; 1]$.



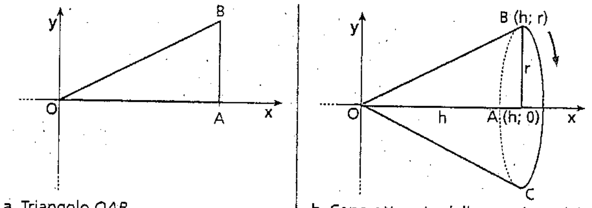
▶ **Figura 19.** Il solido ottenuto dalla rotazione completa della funzione $y = e^x$, con $-1 \leq x \leq 1$.

$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^x)^2\, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx = \pi \cdot \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right).$$

2. Volume del cono

Consideriamo il cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB attorno ad OA. Se r è il raggio della base e h è l'altezza del cono, allora i punti A e B hanno coordinate $A(h; 0)$ e $B(h; r)$.

▶ **Figura 20.**



a. Triangolo OAB.

b. Cono ottenuto dalla rotazione del triangolo OAB attorno ad OA. La base ha raggio r e l'altezza è h.

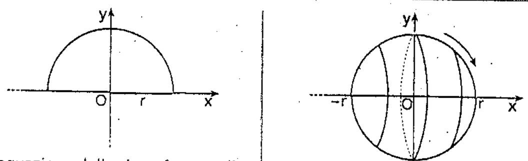
Il triangolo OAB è il trapezoide delimitato dal grafico della retta OB che ha equazione $y = \frac{r}{h} \cdot x$. Allora, applicando la definizione, il volume del cono è dato da:

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2\, dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

3. Volume della sfera

Determiniamo ora il volume della sfera che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x il semicerchio di raggio r che ha centro nell'origine degli assi.

▶ **Figura 21.**



a. L'equazione della circonferenza di centro O e raggio r è $x^2 + y^2 = r^2$, quindi per la semicirconferenza i cui punti hanno ordinata positiva si ha $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

b. Sfera ottenuta dalla rotazione attorno all'asse x della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

L'equazione della semicirconferenza della figura 21a è $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Quindi:

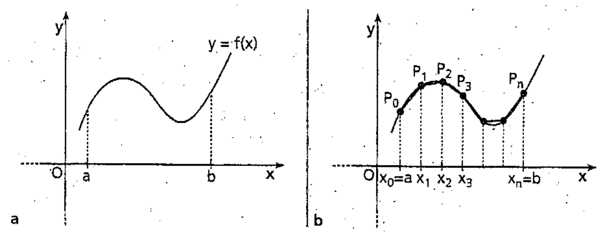
$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \pi \cdot \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

5 LA LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA PIANA E L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Consideriamo una funzione $f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$ e ne disegniamo il grafico (figura 22a).



◀ **Figura 22.**

Suddividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti e consideriamo la poligonale che ha per vertici i punti $P_0, P_1, P_2 \ldots P_n$ (figura 22b). La lunghezza l_n della poligonale inscritta alla curva può essere calcolata sommando le distanze fra i punti $P_0, P_1, P_2 \ldots P_n$:

$$l_n = \overline{P_1P_0} + \overline{P_2P_1} + \ldots + \overline{P_nP_{n-1}}.$$

Poiché la funzione è derivabile in $[a; b]$, possiamo applicare il teorema di Lagrange su ciascun intervallo $[x_{i-1}; x_i]$ per $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\exists c_i \in]x_{i-1}; x_i[\text{ tale che } f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}},$$

cioè $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$.

Allora, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ la lunghezza del segmento P_iP_{i-1} risulta:

$$\overline{P_i P_{i-1}} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$$

$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 \cdot (x_i - x_{i-1})^2} =$$

$$= (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}.$$

Il teorema di Lagrange afferma che se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, allora esiste un punto interno c di $[a; b]$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Abbiamo applicato la formula della distanza tra due punti P_i e P_{i-1}, che hanno rispettivamente coordinate $(x_i; f(x_i))$ e $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$.

Sommando le lunghezze dei segmenti $\overline{P_1P_0}, \overline{P_2P_1}, \dots, \overline{P_nP_{n-1}}$, otteniamo:

$$l_n = \Delta x_1 \cdot \sqrt{1+[f'(c_1)]^2} + \Delta x_2 \cdot \sqrt{1+[f'(c_2)]^2} + \dots + \Delta x_n \cdot \sqrt{1+[f'(c_n)]^2}.$$

Questa lunghezza dipende dal numero n di suddivisioni e dai punti scelti per la suddivisione. Tanto minore è l'ampiezza degli intervalli $[x_{i-1}; x_i]$, tanto meglio la poligonale approssima la curva.
Quando la massima ampiezza degli intervalli Δx_{max} tende a zero, tutte le lunghezze l_n, ottenute scegliendo in qualsiasi modo la suddivisione dell'intervallo $[a; b]$, tendono all'integrale definito della funzione $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ esteso all'intervallo $[a; b]$:

$$l = \lim_{\Delta x_{max} \to 0} l_n = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

Infatti è verificata la definizione generale di integrale definito per la funzione $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$.

DEFINIZIONE

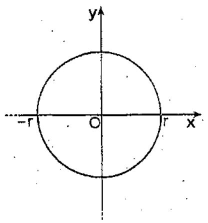
Lunghezza di una curva

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$ si chiama lunghezza della curva che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$, il numero espresso dal seguente integrale:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la lunghezza l della circonferenza di raggio r.



Poiché la circonferenza centrata nell'origine di raggio r ha equazione $x^2 + y^2 = r^2$, la semicirconferenza i cui punti hanno coordinata positiva corrisponde al grafico della funzione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ nell'intervallo $[-r; r]$.
Tale funzione ha derivata:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Allora, applicando la formula della lunghezza di un arco di curva, otteniamo:

$$\frac{l}{2} = \int_{-r}^{r} \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx = \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = r\int_{-r}^{r} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\, dx =$$

$$= r \cdot \left[\text{arcsen}\,\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r} = r \cdot \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \pi r.$$

Quindi abbiamo riottenuto la nota formula della lunghezza di una circonferenza $l = 2\pi r$.

L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

Se la curva precedentemente considerata viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x, si ottiene una superficie di rotazione.
Per ottenere la sua area si svolgono considerazioni analoghe a quelle relative alla lunghezza di una curva.

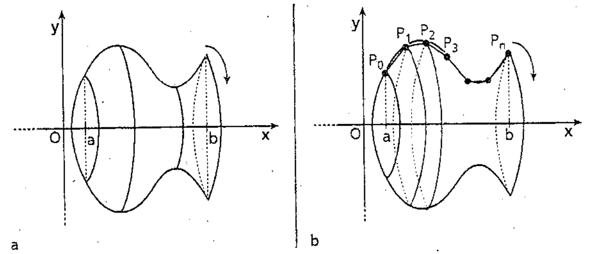


Figura 23.

Dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti e consideriamo la poligonale inscritta nella curva, che ha per vertici i punti $P_0, P_1, \dots, P_n$ (come in figura 23*b*). Nella rotazione completa attorno all'asse x, ogni segmento $\overline{P_iP_{i-1}}$ della poligonale descrive un tronco di cono di apotema $\overline{P_iP_{i-1}}$ e basi due cerchi di raggio rispettivamente $f(x_{i-1})$ e $f(x_i)$. La somma delle aree delle superfici laterali di questi tronchi di cono approssima l'area della superficie di rotazione:

$$A_n = \pi \cdot \overline{P_1P_0}[f(x_1) + f(x_0)] + \pi \cdot \overline{P_2P_1}[f(x_2) + f(x_1)] +$$
$$+ \dots + \pi \cdot \overline{P_nP_{n-1}}[f(x_n) + f(x_{n-1})].$$

L'area laterale di un tronco di cono con apotema a e raggi delle due basi r e r' è $A = \pi a(r + r')$.

Essa dipende da n e dai punti scelti per la suddivisione. Tanto minore è l'ampiezza degli intervalli $[x_{i-1}; x_i]$, tanto meglio A_n approssima l'area S della superficie di rotazione. Si può dimostrare, come si è fatto per la lunghezza della curva, che quando $\Delta x_{max} \to 0$ tutte le aree A_n convergono allo stesso limite dato da:

$$S = \lim_{\Delta x_{max} \to 0} A_n = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

DEFINIZIONE

Area di una superficie di rotazione

Data la funzione $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$, si chiama area della superficie che si ottiene ruotando in una rotazione completa il grafico della funzione, limitato dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$, il numero espresso dal seguente integrale:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx.$$

ESEMPIO

Calcoliamo l'area della superficie della sfera di raggio r, ottenuta dalla rotazione completa della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ attorno all'asse x.
Calcoliamo l'area della superficie utilizzando la definizione:

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right]^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx =$$

La derivata di $y = \sqrt{r^2-x^2}$ è $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\, dx =$$

$$= 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 2\pi r [x]_{-r}^{r} = 4\pi r^2.$$

6 GLI INTEGRALI IMPROPRI

Nei precedenti paragrafi abbiamo calcolato gli integrali definiti di funzioni continue in intervalli limitati e chiusi $[a; b]$. In questo paragrafo vedremo come il concetto di integrale possa essere ampliato considerando funzioni con un numero finito di punti di discontinuità in un intervallo limitato oppure considerando intervalli illimitati.

L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE CON UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI DISCONTINUITÀ IN $[a; b]$

Consideriamo per primo il caso in cui la funzione $f(x)$ sia continua in tutti i punti dell'intervallo $[a; b[$ ma non in b.
Consideriamo un punto z interno all'intervallo $[a; b[$: la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; z]$, quindi esiste l'integrale $\int_a^z f(x)\, dx$, il cui valore è un numero reale.

Questo vale per tutti i punti z dell'intervallo $[a; b[$, perciò possiamo costruire la funzione integrale:

$$F(z) = \int_a^z f(x)\, dx,$$

definita in $[a; b[$.

Nella funzione della figura, in b c'è un asintoto verticale.

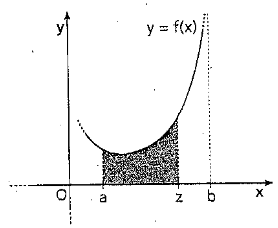


Figura 24. La funzione è continua e positiva nell'intervallo $[a; z]$. L'area della regione colorata corrisponde al valore di $F(z)$.

Se esiste finito il limite di $F(z)$ quando z tende a b da sinistra, cioè se esiste:

$$\lim_{z \to b^-} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio in**

$[a; b]$ e si definisce:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\, dx.$$

L'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ è detto **integrale improprio** della funzione $f(x)$ in $[a; b]$ e si dice anche che tale integrale è **convergente**.

Se il limite considerato non esiste oppure è infinito, si dice che la funzione non è integrabile in senso improprio in $[a; b]$ o anche che l'integrale è rispettivamente **indeterminato** oppure **divergente**.

Si dice anche che la funzione è **integrabile in senso generalizzato.**

La definizione data è utile per calcolare l'integrale per tutti i casi di discontinuità in b. Essa può anche essere applicata quando in b la funzione è continua. In questo caso si ottiene lo stesso risultato che si ha utilizzando la definizione di integrale definito già data.

ESEMPIO

Calcoliamo, se possibile, l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ nell'intervallo $[-2; 0]$.

Osserviamo che la funzione tende a $+\infty$ per $x \to 0$.

Determiniamo la funzione $F(z)$:

$$F(z) = \int_{-2}^{z} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_{-2}^{z} = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_{-2}^{z} = [3\sqrt[3]{x}]_{-2}^{z} =$$

$$= 3\sqrt[3]{z} + 3\sqrt[3]{2}.$$

Calcoliamo $\lim_{z \to 0^-} F(z)$:

$$\lim_{z \to 0^-} (3\sqrt[3]{z} + 3\sqrt[3]{2}) = 3\sqrt[3]{2}.$$

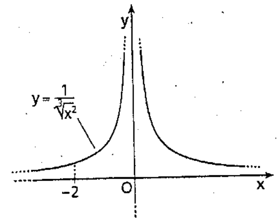


Figura 25. La regione colorata non è limitata ma la sua area è finita.

L'integrale si identifica con l'area ogni volta che la funzione è positiva.

La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[-2; 0]$ e vale:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = 3\sqrt[3]{2}.$$

Se la funzione $f(x)$ è continua in tutti i punti dell'intervallo $]a; b]$, possiamo definire l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ in modo analogo.

Considerato $z \in]a; b]$, se esiste finito il limite della funzione $F(z) = \int_z^b f(x)dx$ quando z tende ad a da destra, cioè se esiste:

$$\lim_{z \to a^+} F(z),$$

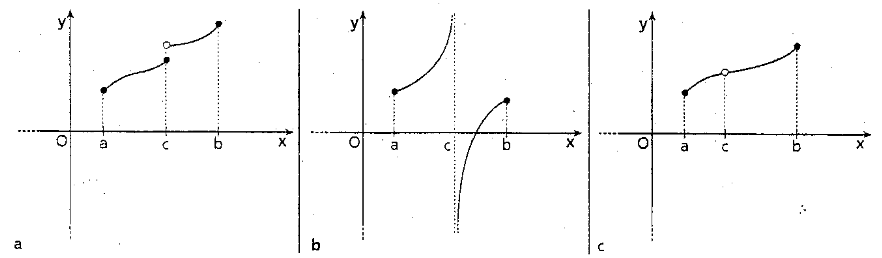
allora si dice che la funzione $f(x)$ è **integrabile in senso improprio in $[a; b]$** e si definisce:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)\,dx.$$

Prova a dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è integrabile in senso improprio in $[0; 1]$.

Se la funzione ha un punto di discontinuità in un punto c interno all'intervallo $[a; b]$, l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere definito, in senso improprio, come la somma degli integrali $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ se esistono. Tali integrali sono calcolati mediante le definizioni precedenti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{z \to c^+} \int_z^b f(x)\,dx.$$



▼ **Figura 26.** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. L'integrale improprio può essere utilizzato con tutte le specie di discontinuità.

In modo analogo la definizione di integrale può essere estesa al caso di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità.

L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO ILLIMITATO

Consideriamo una funzione $f(x)$ continua in tutti i punti di $[a; +\infty[$.
Comunque si scelga un punto z interno all'intervallo $[a; +\infty[$, esiste l'integrale $\int_a^z f(x)\,dx$ il cui valore è un numero reale ben definito, quindi possiamo costruire anche in questo caso la funzione integrale:

$$F(z) = \int_a^z f(x)\,dx,$$

definita in $[a; +\infty[$.

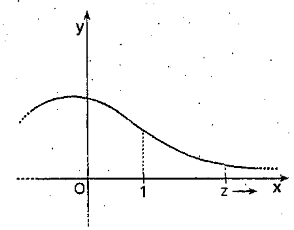
Se esiste finito il limite della funzione $F(z)$ quando z tende a $+\infty$, cioè se esiste:

$$\lim_{z \to +\infty} F(z),$$

allora si dice che la funzione $f(x)$ **è integrabile in senso improprio in $[a; +\infty[$** e si definisce:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\,dx.$$

Anche in questo caso si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **convergente**.



◀ **Figura 27.** Significato geometrico dell'integrale improprio nell'intervallo $[a; +\infty[$ nel caso di una funzione positiva. La regione compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x, tra 1 e $+\infty$, non è limitata, ma la sua area è finita.

Se il limite considerato è infinito si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **divergente**. Se il limite non esiste l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **indeterminato**. In entrambi i casi diciamo che la funzione $f(x)$ non è integrabile in senso improprio in $[a; +\infty[$.

In modo del tutto analogo, se una funzione è continua in $]-\infty; a]$ e se esiste finito il limite $\lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx$, diciamo che la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $]-\infty; a]$ e definiamo:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx.$$

ESEMPIO

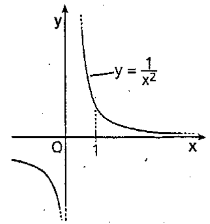
Calcoliamo, se esiste, l'integrale improprio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nell'intervallo $[1; +\infty[$.
Determiniamo la funzione $F(z)$ con z appartenente a $[1; +\infty[$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1.$$

Calcoliamo $\lim_{z \to +\infty} F(z)$:

$$\lim_{z \to +\infty}\left(-\frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio in $[1; +\infty[$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.



7 APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLA FISICA

Gli integrali definiti non sono utilizzati solo in ambito geometrico ma trovano larga applicazione anche in fisica. Vediamo alcuni esempi.

Lo spazio e la velocità
In un moto rettilineo sappiamo che se $s(t)$ è lo spazio percorso da un punto materiale all'istante t, allora la velocità e l'accelerazione del punto in quell'istante sono:

$v(t) = s'(t)$ velocità;
$a(t) = v'(t) = s''(t)$ accelerazione.

Quindi possiamo dedurre che la velocità $v(t)$ è una primitiva della accelerazione $a(t)$ e che lo spazio $s(t)$ è una primitiva della velocità $v(t)$. Pertanto, nota l'accelerazione in funzione del tempo t, per determinare la velocità e la legge del moto, basta integrare successivamente $a(t)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz \quad \rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz;$$

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz \quad \rightarrow \quad s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz.$$

ESEMPIO
Determiniamo la legge del moto di un punto che si muove lungo una retta con accelerazione $a(t) = -3t^2 + 1$, sapendo che per $t = 2\,s$ lo spazio percorso è $4\,m$ e la velocità è $2\,m/s$.

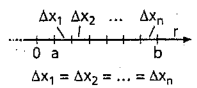
Possiamo applicare le formule precedenti prendendo $t_0 = 2$:

$$v(t) = v(2) + \int_2^t (-3z^2 + 1)\,dz = 2 + [-z^3 + z]_2^t = -t^3 + t + 8;$$

$$s(t) = s(2) + \int_2^t (-z^3 + z + 8)\,dz =$$

$$= 4 + \left[-\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} + 8z\right]_2^t = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 8t - 10.$$

Il lavoro di una forza
Consideriamo una forza avente per direzione costante una retta r e intensità variabile al variare del punto di applicazione. Per esempio la forza di richiamo di una molla, oppure la forza gravitazionale tra due corpi. Supponiamo che il punto di applicazione si muova lungo la retta orientata r e indichiamo con x la sua ascissa. Esprimeremo perciò l'intensità della forza come funzione $F(x)$ dell'ascissa del punto di applicazione.



■ Il lavoro di una forza costante di intensità F relativo a uno spostamento Δx nella direzione della forza stessa è dato da $L = F \cdot \Delta x$.

Per determinare in modo approssimato il lavoro compiuto dalla forza per uno spostamento da un punto di ascissa a a un punto di ascissa b, possiamo suddividere l'intervallo in n parti, $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, all'interno dei quali si possa ritenere l'intensità della forza approssimativamente costante, con valori $F(c_1)$, $F(c_2)$, ... e calcolare il lavoro nel modo seguente:

$$L_n = \Delta x_1 F(c_1) + \Delta x_2 F(c_2) + \ldots + \Delta x_n F(c_n).$$

L_n è un valore che dipende dalla suddivisione e varia al variare di n; si ha quindi una successione. Facendo tendere n all'infinito, se la successione L_n ammette limite, tale limite è l'integrale da a a b di $F(x)$ e coincide con il lavoro della forza, ossia:

$$L = \int_a^b F(x)\,dx.$$

ESEMPIO
Determiniamo il lavoro compiuto da una forza di una molla che sposta il suo punto di applicazione dal punto di ascissa $x_0 = 0$ al punto di ascissa $x_1 = 6$ sapendo che l'intensità varia con la legge $F(x) = \frac{1}{4}x$.

■ In generale, una forza F, legata allo spostamento x dalla legge:

$F = -kx$,

si dice forza elastica.

Utilizzando la formula precedente, otteniamo:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = \int_0^6 \frac{1}{4}x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^6 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{9}{2}.$$

La quantità di carica
L'intensità di una corrente è la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore nell'unità di tempo. Per calcolare l'intensità della corrente che circola nel conduttore all'istante t, ossia l'intensità istantanea, si utilizza la derivata della funzione $q(t)$ che lega la quantità di carica al tempo:

$$i(t) = q'(t).$$

Possiamo dedurre che la quantità di carica $q(t)$ è una primitiva della intensità di corrente $i(t)$. Se vogliamo determinare la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore, in un intervallo di tempo che va da t_0 a t_1, basta allora calcolare il seguente integrale:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t)\,dt.$$

ESEMPIO
Calcoliamo la quantità di carica che attraversa la sezione di un circuito nel primo secondo dopo la sua chiusura, sapendo che l'intensità di corrente varia con la legge $i(t) = k(1 - e^{-bt})$.
Utilizzando la formula precedente, poniamo $t_0 = 0$ e $t_1 = 1$, quindi scriviamo:

$$Q = \int_0^1 k(1 - e^{-bt})\,dt = \int_0^1 k\,dt - k\int_0^1 e^{-bt}\,dt = k\int_0^1 dt + \frac{1}{b}\int_0^1 -be^{-bt}\,dt =$$

$$= k[t]_0^1 + \frac{k}{b}[e^{-bt}]_0^1 = k + \frac{k}{b}(1 - e^{-b}).$$

LABORATORIO DI MATEMATICA

GLI INTEGRALI CON DERIVE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Scriviamo un programma nel linguaggio di Derive che determini l'area della eventuale superficie finita di piano compresa fra le parabole di equazione:

$y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$,

dopo aver letto i valori dei sei coefficienti in esse contenuti.

Proviamo il programma nei seguenti casi:

1. $y = x^2 - x - 2$ e $y = x^2$.
2. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 3$ e $y = x^2 - 2x + 1$.
3. $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2 - 4x + 4$.

Tracciamo per verifica il grafico delle due parabole del caso 3.

L'analisi del problema

Mettiamo a sistema le due equazioni, dal quale con sostituzione ricaviamo:

$$(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0.$$

Se i due coefficienti di x^2 sono uguali, le due parabole coincidono o s'incontrano in un punto o non s'incontrano, in ogni caso la superficie finita non si forma.

Se $a_1 \neq a_2$, calcoliamo il discriminante $\Delta = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$ ed esaminiamo i seguenti casi:

se $\Delta < 0$, le due parabole non s'incontrano e la superficie non esiste;

se $\Delta = 0$, le due parabole sono tangenti e l'area vale 0;

se $\Delta > 0$, le due parabole s'incontrano in due punti, le cui ascisse sono $x_1 = \frac{-(b_1 - b_2) - \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$ e $x_2 = \frac{-(b_1 - b_2) + \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)}$, la superficie finita si forma e la sua area è data da:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} ((a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2)\, dx \right|.$$

Abbiamo posto nella formula il valore assoluto dell'integrale per non essere costretti a controllare quale parabola abbia punti con ordinate maggiori nell'intervallo $[x_1; x_2]$.

Se $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$, una delle due equazioni rappresenta una retta, la formula rimane valida e dà l'area fra la retta e la parabola.

L'algoritmo

Inizio,
Leggi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2
Se $a_1 = a_2$,
  allora Scrivi I coefficienti di x^2 coincidono, Fine.
Calcola $\Delta = (b_1 - b_2)$^2 $- 4*(a_1 - a_2)*(c_1 - c_2)$
Se $\Delta < 0$,
  allora Scrivi Le parabole non s'incontrano, Fine.
Se $\Delta = 0$,
  allora Scrivi L'area vale 0, Fine.
Calcola x_1 e x_2
Calcola *area_2p*
Scrivi [L'area vale, *area_2p*], Fine.

Il programma nel linguaggio di Derive

Prima di tradurre l'algoritmo nel linguaggio di Derive trasformiamo la riga di editazione con *Opzioni_Visualizzazione Inserimento di espressioni su più righe* in modo da poter battere il programma nel seguente modo, andando a capo con i tasti ALT-INVIO. Per identare usiamo i tasti CTRL-TAB.

```
Area_2parab(a1, b1, c1, a2, b2, c2) :=
PROG(
 IF (a1 = a2,
  RETURN "I coefficienti di x^2 coincidono"),
 Δ := (b2 - b1)^2 - 4·(a2 - a1)·(c2 - c1),
 IF(Δ < 0,
  RETURN "Le parabole non s'incontrano"),
 IF(Δ = 0,
  RETURN "L'area vale 0"),
 x1 := (- (b2 - b1) - √Δ)/(2·(a2 - a1)),
 x2 := (- (b2 - b1) + √Δ)/(2·(a2 - a1)),
 area_2p := ABS(INT((a2 - a1)x^2 + (b2 - b1)x + (c2 - c1), x, x1, x2)),
 RETURN ["L'area vale", area_2p; "", ""])
```

e con INVIO lo immettiamo nell'etichetta #1 della zona algebrica (figura 1).

```
#1:  Area_2parab(a1,b1,c1,a2,b2,c2):=
       Prog
         If a1=a2
           RETURN "I coefficienti di x^2 coincidono"
         Δ:=(b2-b1)^2-4·(a2-a1)·(c2-c1)
         If Δ<0
           RETURN "Le parabole non s'incontrano"
         If Δ=0
           RETURN "L'area vale 0"
         x1:=(-(b2-b1)-√Δ)/(2·(a2-a1))
         x2:=(-(b2-b1)+√Δ)/(2·(a2-a1))
         area_2p:=ABS(∫((a2-a1)·x^2+(b2-b1)·x+(c2-c1),x,x1,x2))
         RETURN ["L'area vale",area_2p;"",""]
```

▲ **Figura 1.** Il programma nel linguaggio di Derive.

Le applicazioni del programma

• Applichiamo il programma ai tre casi richiesti. Immettiamo nella #2 il nome del programma con i dati del caso 1 Area_2parab(1, −1, −2, 1, 0, 0) e con *Semplifica_Base* otteniamo nella #3 la prima risposta. Operiamo in modo analogo per i casi 2 e 3 ottenendo le corrispondenti risposte in #5 e #7 (figura 2).

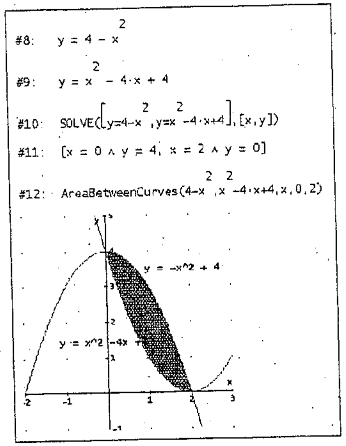
```
#2:  Area_2parab(1, -1, -2, 1, 0, 0)
#3:  I coefficienti di x^2 coincidono
#4:  Area_2parab(-1/2, 1, -3, 1, -2, 1)
#5:  Le parabole non s'incontrano
#6:  Area_2parab(-1, 0, 4, 1, -4, 4)
#7:  [L'area vale  8/3]
```

▲ **Figura 2.** Tre applicazioni del programma per il calcolo dell'area compresa fra due parabole.

Il grafico del caso 3

• Inseriamo le equazioni delle parabole del caso 3 nella #8 e nella #9 (figura 3).
• Determiniamo le intersezioni fra le due parabole con il comando *Risolvi_Sistema* applicato alle loro equazioni. L'impostazione del sistema appare nella #10 e la sua soluzione nella #11.
• Ricorriamo all'operatore AREABETWEENCURVES per evidenziare la superficie di piano compresa fra le due parabole. Lo impostiamo inserendo nella #12 il nome seguito fra parentesi dalle equazioni delle due curve, dalla variabile x e dalle intersezioni delle due curve, 0 e 2, lette nella #11.

• Lo applichiamo entrando nell'ambiente grafico 2D, dove selezioniamo *Opzioni_Semplifica prima di tracciare il grafico* e diamo *Traccia il grafico*.
• Con *Inserisci_Annotazione* scriviamo nel piano cartesiano le equazioni delle due parabole.
• Copiamo negli appunti il grafico che abbiamo realizzato con *Modifica_Copia finestra grafica* e ritorniamo nell'ambiente algebrico, dove con il bottone *Incolla* lo immettiamo fra le etichette della zona algebrica.



▶ **Figura 3.** La sessione di lavoro con il grafico del caso 3.

ESERCITAZIONI

Con l'aiuto di Derive determina l'area della superficie racchiusa fra le curve che hanno le seguenti equazioni ed evidenziane il grafico. (Suggerimento. Per risolvere le equazioni trascendenti con Derive seleziona il metodo *Numerico* all'interno del comando *Risolvi_Espressione*.)

1 $y=\dfrac{(x+1)^3}{x^2}$ e $18x+4y-63=0$. $\left[\dfrac{117}{16}-6\ln 2\right]$

2 $y=e^{-x}(x^2+2x+1)$ e $y=1-x^2$. $\left[\dfrac{17}{3}-2e\right]$

3 $y=\operatorname{arctg} x$ e $y=x^2+\dfrac{\pi}{4}x-1$. $\left[\dfrac{4}{3}\right]$

Con l'aiuto di Derive risolvi i seguenti problemi e poi traccia il grafico, corredato da didascalie, di tutti gli elementi coinvolti.

4 Determina i coefficienti delle parabole $y=ax^2+bx+c$, sapendo che incontrando la parabola $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-4$ nei suoi punti di ascissa -2 e 2, formano con essa una superficie finita di piano di area 16. $[y=-x^2-x+2;\ y=2x^2-x-10]$

5 Determina il valore del parametro k in modo che la retta $y=k$ formi con la curva di equazione $f(x)=\dfrac{4}{x^2+1}$ una superficie finita di piano di area $2(\pi-2)$. $[k=2]$

6 Determina il valore del parametro b in modo che sia massima la superficie che sta al di sopra dell'asse x ed è compresa fra la curva di equazione $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ e le rette $x=b$ e $x=b+\dfrac{1}{2}$. $\left[b=\dfrac{\sqrt{33}-5}{4}\right]$

7 Trova le parabole appartenenti al fascio di punti base $O(0;\ 0)$ e $A(2;\ 0)$, che, incontrando la curva di equazione $f(x)=x^3-x^2-2x$, formano due superfici finite di piano equiestese. $[y=-x^2+2x,\ y=2x^2-4x$ e $y=5x^2-10x]$

Per ognuna delle seguenti coppie di curve, di cui sono date le equazioni contenenti dei parametri, scrivi un programma nel linguaggio di Derive, che, dopo aver letto il valore dei parametri, calcoli l'area della eventuale superficie finita di piano compresa fra di esse.
Applicalo con i dati indicati e traccia il grafico corrispondente al caso *c*.

8 $y=mx+q$ e $y=ax^2+bx+c$.
a) $m=0,\ q=-2,\ a=-1,\ b=-2,\ c=-3$;
b) $m=-1,\ q=-3,\ a=1,\ b=-2,\ c=1$;
c) $m=-1,\ q=-1,\ a=1,\ b=6,\ c=9$. $\left[0;\ \text{non esiste};\ \dfrac{9}{2}\right]$

9 $y=mx+q$ e $xy=4$.
a) $m=\dfrac{1}{3}$ e $q=\dfrac{1}{3}$;
b) $m=-1$ e $q=4$;
c) $m=-\dfrac{1}{2}$ e $q=3$. $[\text{non esiste};\ 0;\ 3-4\ln 2]$

10 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ e $y=k$.
a) $k=2$;
b) $k=\dfrac{1}{2}$;
c) $k=\dfrac{10}{3}$. $\left[0;\ \text{non esiste};\ \dfrac{40}{9}-2\ln 3\right]$

11 $y=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x}$ e $y=k$.
a) $k=9$;
b) $k=2\sqrt{6}+5$;
c) $k=10$. $\left[\text{non esiste};\ 0;\ 1+\ln\dfrac{10}{27}\right]$

Opera come per le esercitazioni precedenti, ma tieni presente che le superfici finite di piano possono essere due.

12 $y=-x^3+ax^2+bx$ e $y=0$.
a) $a=-3$ e $b=-2$;
b) $a=2$ e $b=-1$;
c) $a=2$ e $b=-3$. $\left[\dfrac{1}{4}\text{ e }\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{12};\ \text{non esistono}\right]$

13 $xy=k$ e $x^2+y^2=4$.
a) $k=2$;
b) $k=3$;
c) $k=\sqrt{3}$. $\left[0\text{ e }0;\ \text{non esistono};\ \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{2}\text{ e }\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}\ln 3}{2}\right]$

14 $y=x^2-bx$ e $y=x^3$.
a) $b=1$;
b) $b=\dfrac{1}{4}$;
c) $b=-\dfrac{3}{4}$. $\left[\text{non esistono};\ \dfrac{1}{192};\ \dfrac{7}{192}\text{ e }\dfrac{45}{64}\right]$

ESERCIZI

2

GLI INTEGRALI DEFINITI E LE LORO APPLICAZIONI

LA TEORIA IN SINTESI

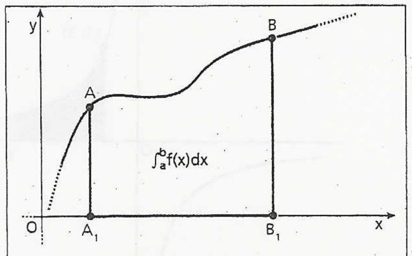
1. L'INTEGRALE DEFINITO E LE SUE PROPRIETÀ

L'area di un **trapezoide** può essere approssimata nel modo seguente:

- dividiamo l'intervallo $[a; b]$ in n parti uguali e consideriamo dei rettangoli aventi per base un segmento di suddivisione;
- indichiamo con s_n la somma delle aree dei rettangoli con altezza corrispondente al valore minimo della funzione in ognuno degli intervalli;
- indichiamo con S_n la somma delle aree dei rettangoli con altezza corrispondente al valore massimo della funzione in ognuno degli intervalli.

Se $f(x)$ è continua e positiva (o nulla) nell'intervallo $[a; b]$ chiamiamo **integrale definito** esteso all'intervallo $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$



$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$

Il numero a viene chiamato **estremo inferiore**, b **estremo superiore**. La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda**.

Abbiamo anche fornito una definizione più generale di integrale definito, che permette di calcolarlo anche quando $f(x)$ è negativa.

Per convenzione si pone:

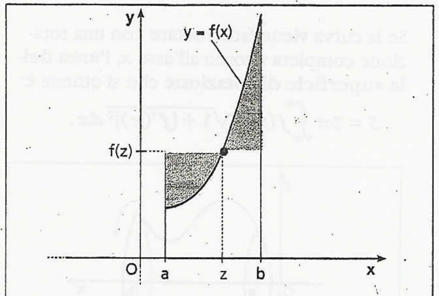
se $a > b$, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

se $a = b$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Proprietà dell'integrale definito

- Se $a<b<c$, $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$;
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;
- $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$;
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$;
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$;
- $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

2. IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

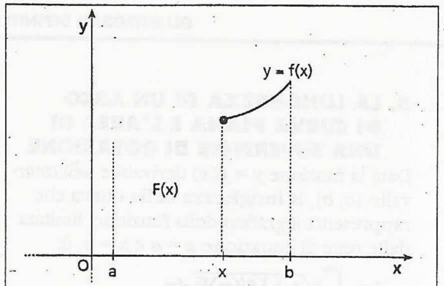


f confinua ⇒ ∃ z ∈ [a; b] tale che $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(z)$

Teorema della media

Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a; b]$, la **funzione integrale** definita anch'essa per $x \in [a; b]$ è

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$F'(x) = f(x)$

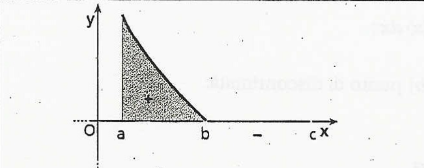
Teorema fondamentale del calcolo integrale

Formula del calcolo dell'integrale definito: se $\varphi(x)$ è una primitiva qualunque di $f(x)$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a).$$

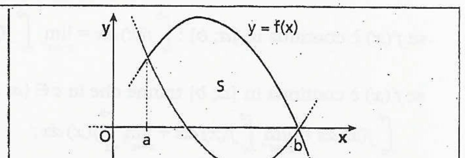
▶ $\int_2^4 4x\,dx = \left[4\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = [2x^2]_2^4 = 2\cdot 4^2 - 2\cdot 2^2 = 32 - 8 = 24.$

3. IL CALCOLO DELLE AREE



$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$

a. Area S della parte di piano compresa tra la funzione e l'asse x.



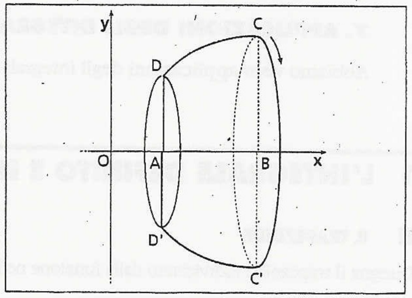
$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

b. Area S della parte di piano compresa tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, con $f(x) > g(x)$.

4. IL CALCOLO DEI VOLUMI DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

Dato il trapezoide $ABCD$ esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico di $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, il **volume del solido** che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo è:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

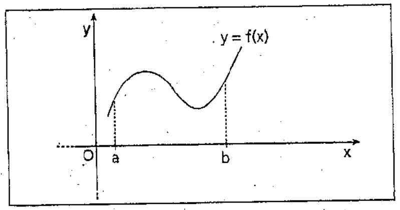


MODULO W

5. LA LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA PIANA E L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

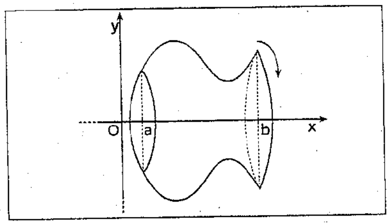
Data la funzione $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo $[a; b]$, la **lunghezza della curva** che rappresenta il grafico della funzione, limitata dalle rette di equazione $x = a$ e $x = b$, è:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Se la curva viene fatta ruotare con una rotazione completa attorno all'asse x, l'**area della superficie di rotazione** che si ottiene è:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



6. GLI INTEGRALI IMPROPRI

Se $f(x)$ è continua in $[a; b[$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to b^-} \int_a^z f(x)\,dx$;

se $f(x)$ è continua in $]a; b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)\,dx$;

se $f(x)$ è continua in $[a; b]$ tranne che in $c \in [a; b]$ punto di discontinuità:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to c^-} \int_a^z f(x)\,dx + \lim_{z\to c^+} \int_z^b f(x)\,dx;$$

se $f(x)$ è continua in $[a; +\infty[$: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)\,dx$;

se $f(x)$ è continua in $]-\infty; a]$: $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{z\to-\infty} \int_z^a f(x)\,dx$.

7. APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLA FISICA

Abbiamo visto applicazioni degli integrali definiti in meccanica, dinamica ed elettromagnetismo.

1 L'INTEGRALE DEFINITO E LE SUE PROPRIETÀ

→ Teoria a pag. 73 W

IL TRAPEZOIDE

Disegna il trapezoide individuato dalla funzione nell'intervallo scritto a fianco.

1 $y = x^2 + 2$, $[-1; 4]$.

2 $y = \ln(x+1)$, $[0; e]$.

3 $y = \cos x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4 $y = \frac{x+1}{x+2}$, $[-1; 2]$.

Rappresenta graficamente il trapezoide descritto dall'insieme T.

5 $T = \{(x; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le -x^2 + 6x\}$

6 $T = \{(x; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le -2x + 1\}$

7 $T = \{(x; y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le e^x\}$

Trova un valore per eccesso e uno per difetto dell'area del trapezoide individuato dalla funzione $f(x)$ nell'intervallo segnato a fianco con sei suddivisioni di uguale ampiezza.

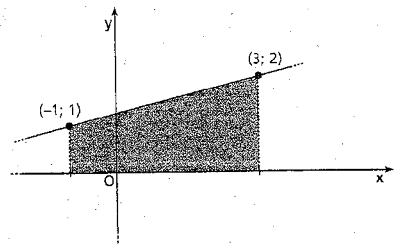
8 $f(x) = x + 3$, $[-1; 2]$.

9 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $[0; 4]$.

L'INTEGRALE DEFINITO

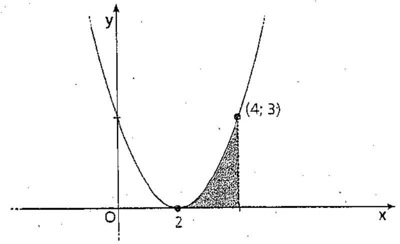
Scrivi l'integrale che calcola il valore dell'area della regione rappresentata in figura.

10



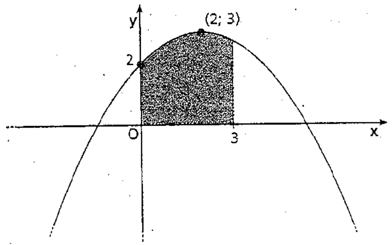
$\left[\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx\right]$

11



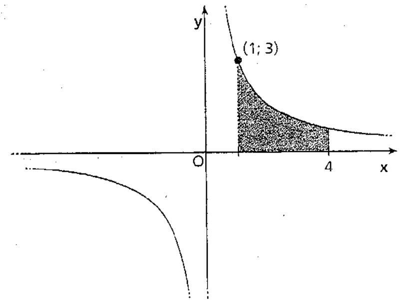
$\left[\frac{3}{4}\int_2^4 (x-2)^2\,dx\right]$

12



$\left[\int_0^3 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) dx\right]$

13



$\left[3\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx\right]$

MODULO W

Rappresenta la regione individuata dall'integrale.

14 a) $\int_1^3 2x^2\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$.

15 a) $\int_1^4 (-x^2+4x)\,dx$; b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 (-\ln x)\,dx$.

Quali delle seguenti scritture non hanno significato? Motiva la risposta.

16 a) $\int_{-2}^1 \sqrt{x}\,dx$; b) $\int_0^4 \arcsen x\,dx$. [a, b]

17 a) $\int_0^6 \sqrt{x+3}\,dx$; b) $\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx$. [b]

18 a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sen x\,dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$. [b]

√ **19** **Vero o falso?**

Per ognuna delle seguenti proposizioni indica se è vera o falsa e motiva la risposta.

a) L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta geometricamente l'area della regione compresa tra il grafico di $f(x)$, l'asse x e le rette di equazioni $x=a$ e $x=b$. V F

b) L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere un numero negativo se $a>b$. V F

c) $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 f(t)\,dt$. V F

d) $\int_4^4 \ln x\,dx = 0$. V F

e) $2\int_1^4 (x-1)\,dx = \int_1^4 (2x-2)\,dx$. V F

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg^2 x\,dx = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg x\,dx\right)^2$. V F

LE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

√ **20** **Vero o falso?**

Per ognuna delle seguenti proposizioni indica se è vera o falsa e motiva la risposta.

a) $\int_{-2}^6 (2x^2+4)\,dx = -2\int_6^{-2} (x^2+2)\,dx$. V F

b) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, se $f(x)$ è dispari. V F

c) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, se $f(x)$ è pari. V F

d) $\int_1^4 3\,dx = 9$. V F

e) $\int_2^3 k\,dx = k$. V F

f) Se $f(x)$ è una funzione dispari, allora $\int_{-2}^4 f(x)\,dx = \int_2^4 f(x)\,dx$. V F

Calcola il valore dei seguenti integrali utilizzando i valori degli integrali definiti scritti a fianco e sfruttando le proprietà dell'integrale definito.

21 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 2\sen x)\,dx$ — $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sen x\,dx = 1$. [3]

22 $\int_0^1 (2^x \ln 2 + 1)\,dx$ — $\int_0^1 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}$, $\int_0^1 dx = 1$. [2]

23 $\int_0^3 (x^2+6x)\,dx$ — $\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}$, $\int_2^3 x^2\,dx = \frac{19}{3}$, $\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}$. [36]

24 $\int_1^3 (4x^3+2)\,dx$ — $\int_1^2 x^3\,dx = \frac{15}{4}$, $\int_2^3 x^3\,dx = \frac{65}{4}$, $\int_1^3 2\,dx = 4$. [84]

25 $\int_1^9 (1+2\sqrt{x})\,dx$ — $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}$, $\int_4^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{38}{3}$, $\int_1^9 dx = 8$. $\left[\frac{128}{3}\right]$

26 Se $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$ e $\int_1^2 g(x)\,dx = -1$, calcola $\int_1^2 [4f(x)+g(x)]\,dx$. [7]

IL CAMBIAMENTO DEGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE NEL METODO DI SOSTITUZIONE

ESERCIZIO GUIDA

27 Calcoliamo l'integrale $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ sapendo che $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$.

Poniamo $\frac{x}{2} = t$, allora:

$x = 2t \quad \rightarrow \quad dx = 2dt$

e:

per $x=0 \quad \rightarrow \quad t=0$,
per $x=2 \quad \rightarrow \quad t=1$.

Quindi, integrando per sostituzione e applicando la proprietà del prodotto di un integrale per una costante, otteniamo:

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 2f(t)\,dt = 2\int_0^1 f(t)\,dt = 2\cdot 4 = 8.$$

Essenzialmente abbiamo applicato la formula:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

Calcola il valore dei seguenti integrali definiti, noto il valore dell'integrale indicato a fianco.

28 $\int_0^4 f(2x)\,dx$ — $\int_0^8 f(x)\,dx = 10$. [5]

29 $\int_2^4 f\left(\frac{x}{4}\right)dx$ — $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 6$. [24]

30 $\int_1^2 3f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ — $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 9$. [54]

31 $\int_0^8 2f(x)\,dx$ — $\int_0^4 f(2x)\,dx = 10$. [40]

32 Calcola, se è possibile, i seguenti integrali, sapendo che $\int_1^2 f(x)\,dx = -4$ e che $\int_1^4 f(x)\,dx = 9$.

a) $\int_2^4 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, b) $\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, c) $\int_1^2 f(4x)\,dx$. [a) − 16; b) 26; c) impossibile]

Completa.

√ **33** L'integrale $\int_0^2 \frac{1}{e^{\sqrt{2x}}}\,dx$, con la sostituzione $\sqrt{2x}=t$, diventa $\int_{\dots}^{\dots} \frac{\dots}{e^t}\,dt$.

√ **34** Se poniamo $\sqrt{x}=t$, l'integrale $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ si scrive come $2\int_1^{\dots} \frac{dt}{1+\dots}$.

√ **35** **Vero o falso?**

Per ognuna delle seguenti proposizioni indica se è vera o falsa e motiva la risposta.

a) Se $F(t)=\int_0^t f(x)\,dx$, allora $F'(t)=f(t)$. V F

b) $\int_2^4 f(4x)\,dx=\int_1^2 f(2x)\,dx$. V F

c) Se $\int_{-4}^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=9$, allora $\int_{-2}^1 f(x)\,dx=\frac{9}{2}$. V F

d) Se $\int_{-2}^1 f(x)\,dx=1$ e $\int_1^4 f(x)\,dx=8$, allora $\int_{-4}^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=18$. V F

e) Se $\int_0^2 f(2x)\,dx=4$ e $\int_2^5 f(2x)\,dx=10$, allora $\int_0^{10} f(x)\,dx=14$. V F

2 IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

→ Teoria a pag. 78 W

IL TEOREMA DELLA MEDIA

Indica quali delle seguenti funzioni rispettano le ipotesi del teorema della media nell'intervallo scritto a fianco.

36 $y=\frac{4}{x-1}$ [1; 4]. [no]

37 $y=\sqrt{x}$ [0; 6]. [sì]

38 $y=\ln(x+3)$ [− 3; 0]. [no]

39 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [1; 3]. [no]

40 $y=6+\frac{|x|}{x}$ [− 1; 1]. [no]

41 $y=\frac{x-2}{x^2-x-2}$ [0; 3]. [no]

IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO

ESERCIZIO GUIDA

42 Calcoliamo l'integrale definito $\int_1^2 (3x^2+x)\,dx$.

Utilizziamo la formula fondamentale:

$$\int_a^b f(x)\,dx=[\varphi(x)]_a^b=\varphi(b)-\varphi(a)$$

dove $\varphi(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$.

Determiniamo le primitive $\varphi(x)$ di $3x^2+x$:

$$\int (3x^2+x)\,dx = x^3+\frac{1}{2}x^2+c.$$

Una primitiva è $\varphi(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2$, allora si ha:

$$\int_1^2 (3x^2+x)\,dx=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2.$$

Sostituiamo alla x dentro la parentesi quadra prima 2 e poi 1 e calcoliamo la differenza:

$$\left[x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=(8+2)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{2}.$$

Quindi $\int_1^2 (3x^2+x)\,dx=\frac{17}{2}$.

Calcola i seguenti integrali definiti.

43 $\int_2^5 (x+1)\,dx$ $\left[\frac{27}{2}\right]$

44 $\int_0^1 (x^2+x)\,dx$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

45 $\int_{-2}^1 \left(\frac{3x^2+2x-1}{3}\right)dx$ [1]

46 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}x+\cos x)\,dx$ [2]

47 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos x-1)\,dx$ $\left[1-\frac{\pi}{6}\right]$

48 $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $\left[\frac{17}{6}\right]$

49 $\int_4^9 (3\sqrt{x}+2x)\,dx$ [103]

50 $\int_0^1 (\sqrt[3]{x}-x)\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

51 $\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+3x^2+1\right)dx$ [73]

52 $\int_2^3 \left(2x+\frac{1}{x}+1\right)dx$ $\left[6+\ln\frac{3}{2}\right]$

53 $\int_1^4 \left(5x\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$ [62 − ln 4]

54 $\int_{-2}^{-1} 2e^x\,dx$ $\left[\frac{2}{e}\left(\frac{e-1}{e}\right)\right]$

55 $\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{e+1}{3}} \frac{3}{3x-1}\,dx$ [1]

56 $\int_{-1}^4 (x+\ln 2\cdot 2^x)\,dx$ [23]

57 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+1}\,dx$ [ln 4 − ln 3]

58 $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+1}{x}\,dx$ $\left[-\frac{3}{2}-\ln 2\right]$

ESERCIZI VARI L'INTEGRALE DEFINITO

✓ **59** Se nell'integrale $\int_3^5 f(x)\,dx$ viene applicata la sostituzione $x = 3 + \ln(2 - t)$, gli estremi di integrazione diventano:

A $t_1 = 2 - e^2 \wedge t_2 = -1$.
B $t_1 = -1 \wedge t_2 = 2 - e^2$.
C $t_1 = 2 + e^2 \wedge t_2 = 1$.
D $t_1 = 1 \wedge t_2 = 2 + e^2$.
E $t_1 = 1 \wedge t_2 = 2 - e^{-2}$.

✓ **60** Quanto vale $\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx$?

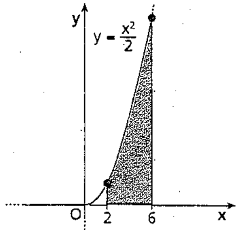
A $\frac{1}{a} - 1$.
B $-\frac{1}{a} - 1$.
C $\frac{a-1}{a}$.
D $a - 1$.
E $\frac{1}{a^2} - 1$.

✓ **61** L'integrale $\int_0^2 \frac{6e^x}{3e^x - 5}\,dx$ vale:

A $\ln\frac{(3e^2-5)^2}{4}$.
B $\ln\frac{|3e^2-5|}{2}$.
C $2\ln\frac{|3e^2-5|}{4}$.
D $\ln\frac{4}{(3e^2-5)^2}$.
E $2\ln|3e^2-5|$.

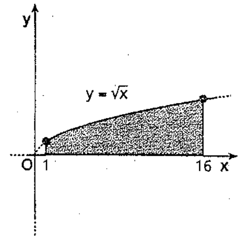
Calcola l'area del trapezoide rappresentato in ciascuna delle seguenti figure utilizzando gli integrali definiti.

62



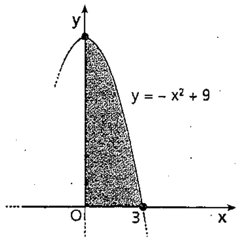
$\left[\frac{104}{3}\right]$

64



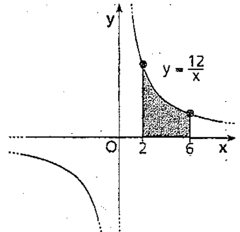
[42]

63



[18]

65



$[12 \cdot \ln 3]$

Disegna i trapezoidi definiti dai grafici delle seguenti funzioni negli intervalli scritti a fianco e calcolane l'area utilizzando gli integrali definiti.

66 $y = 2x^2$, $[0; 3]$. [18]

67 $y = -x^2 + 16$, $[-4; 4]$. $\left[\frac{256}{3}\right]$

68 $y = -x^2 + 2x$, $[0; 2]$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

69 $y = \sqrt{x+1}$, $[-1; 1]$. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$

70 $y = -\frac{1}{x}$, $[-2; -1]$. $[\ln 2]$

Calcola i seguenti integrali definiti.

71 $\int_0^1 4(x+1)^3\,dx$ [15]

72 $\int_{-3}^0 (2x^2+5)\,dx$ [33]

73 $\int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$ [2]

74 $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + 1)\,dx$ [0]

75 $\int_0^\pi \operatorname{sen} 2x\,dx$ [0]

76 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $[\ln(e+1) - \ln 2]$

77 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $\left[\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}\right]$

78 $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$ $[e-1]$

79 $\int_0^1 (2x-1)\,5^{x^2-x}\,dx$ [0]

80 $\int_0^1 x^3(x^4+1)^5\,dx$ $\left[\frac{21}{8}\right]$

81 $\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

82 $\int_0^2 x(x^2-1)^3\,dx$ [10]

83 $\int_0^{\sqrt{8}} 6x\sqrt{x^2+1}\,dx$ [52]

84 $\int_0^2 e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{(e^2+1)^3} - \sqrt{8}\right)\right]$

85 $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{6x}{(x^2+1)^2}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

86 $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$ $\left[-\frac{1}{4}\ln 2\right]$

87 $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $[e^3 - e^2]$

88 $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ $[\operatorname{arcsen} e^{-1} - \operatorname{arcsen} e^{-2}]$

89 $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)\ln(x-1)}\,dx$ $[\ln\ln 3 - \ln\ln 2]$

90 $\int_{\frac{1}{2}}^1 6\pi x\operatorname{sen}(\pi x^2)\,dx$ $\left[3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$

91 $\int_0^{\ln\frac{1}{4}} \frac{e^x}{\cos^2(\pi e^x)}\,dx$ $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

92 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)dx$ [8]

93 $\int_{-3}^{-1} \frac{x^2+2}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

94 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\,dx$ $[\ln 4]$

95 $\int_3^8 \frac{3\sqrt{x+1}}{2}\,dx$ [19]

96 $\int_1^3 \frac{-4}{(2x-1)^3}\,dx$ $\left[-\frac{24}{25}\right]$

97 $\int_e^{e^3} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ $[\ln 3]$

98 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\operatorname{sen} x+1)^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

99 $\int_0^1 \frac{x}{(x^2-2)^4}\,dx$ $\left[\frac{7}{48}\right]$

100 $\int_8^{27} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $[3(e^3 - e^2)]$

101 $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$

102 $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx$ $[\sqrt{3}]$

103 $\int_1^3 \frac{4x+3}{2x^2+3x}\,dx$ $[\ln 27 - \ln 5]$

104 $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$ $[\operatorname{arcsen}\ln 2]$

105 $\int_0^1 (2-e^x)(2x-e^x)^4\,dx$ $\left[\frac{(2-e)^5+1}{5}\right]$

106 $\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{3x+25}}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

107 $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

108 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx$ $[2\sqrt{2}-2]$

109 $\int_1^{10} \ln x\,dx$ $[10\cdot\ln 10-9]$

110 $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ $\left[\frac{\pi-\ln 4}{4}\right]$

111 $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\,dx$ $\left[\frac{\pi-2}{2}\right]$

112 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x\,dx$ $[2]$

113 $\int_0^2 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ $\left[\frac{e^2-1}{2(e^2+1)}\right]$

114 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x\cos x+1)\,dx$ $\left[\frac{\pi+1}{2}\right]$

115 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ $[0]$

116 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

117 $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^2}\right)dx$ $[5]$

118 $\int_0^1 \frac{2}{x^2+6x+9}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

119 $\int_{-1}^2 xe^x\,dx$ $\left[e^2+\frac{2}{e}\right]$

120 $\int_0^1 xe^{x-1}\,dx$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

121 $\int_1^2 2x\ln x\,dx$ $\left[4\ln 2-\frac{3}{2}\right]$

122 $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

123 $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ $[-4]$

124 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$ $[0]$

125 $\int_2^4 \frac{2x^2+x+1}{2x-1}\,dx$ $[8+\ln 7-\ln 3]$

126 $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ $[2\pi]$

127 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ $\left[\ln\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right]$

128 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$ $\left[\frac{3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-1}{\ln 3}\right]$

129 $\int_0^1 \frac{3\operatorname{arctg}^2 x+\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{\pi^2(\pi+2)}{64}\right]$

130 $\int_0^1 x\cdot 3^x\,dx$ $\left[\frac{3\ln 3-2}{\ln^2 3}\right]$

131 $\int_0^{\frac{7}{8}} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\left[\frac{4}{3}-\frac{23}{24\sqrt{2}}\right]$

132 $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^x\cos x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{\pi}{2}}\right)\right]$

133 $\int_0^2 2\sqrt{4-x^2}\,dx$ $[2\pi]$

134 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{16}\right]$

135 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 x\cos^3 x\,dx$ $\left[\frac{9}{280\sqrt{2}}\right]$

136 $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ $[4]$

137 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi-2}{8}\right]$

138 $\int_{-2}^0 \frac{3x+5}{x^2+2x-3}\,dx$ $[-\ln 3]$

139 $\int_{e^{\frac{\pi}{4}}}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{x\operatorname{sen}^2(\ln x)}\,dx$ $[1]$

140 $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$ $[e-2]$

141 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx$ $\left[2-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right]$

142 $\int_0^1 \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+2x+1}\,dx$ $[2]$

143 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x\cos 2x\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

144 $\int_{-\frac{2}{3}}^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}(2+x)}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

145 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx$ $[2]$

146 $\int_1^5 \left(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ $[11\sqrt{5}-3]$

147 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

148 $\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \operatorname{tg} 2x\,dx$ $[0]$

149 $\int_0^2 \frac{x+2}{e^{x-3}}\,dx$ $[3e^3-5e]$

150 $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}(5\sqrt{2}-4)\right]$

151 $\int_{-1}^1 x^2\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ $\left[\frac{44}{105}\sqrt{2}\right]$

152 $\int_1^2 \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x}\,dx$ $[2+\ln 9-\ln 2]$

153 $\int_1^3 3x^2\ln x\,dx$ $\left[27\ln 3-\frac{26}{3}\right]$

154 $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ $\left[1-\frac{2}{e}\right]$

155 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right]$

156 $\int_0^3 |x-1|\,dx$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

157 $\int_0^4 |3x^2-4x-4|\,dx$ $[32]$

158 $\int_{-1}^0 \frac{x-2}{x^2-8x+16}\,dx$ $\left[\frac{1}{10}+\ln\frac{4}{5}\right]$

159 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$ $\left[\frac{2}{15}\right]$

160 $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$ $\left[\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right]$

161 $\int_1^2 x^3 e^x\,dx$ $[2e(e+1)]$

162 $\int_2^3 \ln(x^2-x)\,dx$ $[3\ln 6-3\ln 2-2]$

163 $\int_1^{e^{\pi}} \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ $\left[\frac{e^{\pi}+1}{2}\right]$

164 $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

165 $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\left[\frac{3}{35}\left(96\sqrt[3]{2}-17\right)\right]$

166 $\int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx$ $\left[3-\frac{6}{e}\right]$

167 $\int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+2}{x^3+2x}\,dx$ $[-\ln 4]$

168 $\int_6^{25} \frac{x}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{558}{5}\right]$

169 $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

IL VALOR MEDIO DI UNA FUNZIONE

ESERCIZIO GUIDA

170 Calcoliamo il valor medio della funzione $y=\sqrt{x}$, continua nell'intervallo $[0;9]$.

Per calcolare il valor medio $f(z)$ della funzione utilizziamo il teorema della media:

$$f(z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Quindi:

$$f(z)=\frac{1}{9-0}\int_0^9 \sqrt{x}\,dx.$$

Eseguiamo il calcolo:

$$f(z)=\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9=\frac{1}{9}(18-0)=2.$$

Poiché $f(z)=\sqrt{z}=2$, possiamo ricavare il valore di z, punto in cui la funzione vale 2:

$$z=2^2=4.$$

Determina il valor medio delle seguenti funzioni nell'intervallo scritto a fianco e calcola il punto z in cui la funzione assume tale valore.

171 $y = x^3$ $[0; 2]$ $\left[f(z) = 2;\ z = \sqrt[3]{2}\right]$

172 $y = \dfrac{1}{x}$ $[1; 2]$ $\left[f(z) = \ln 2;\ z = \dfrac{1}{\ln 2}\right]$

173 $y = x^2 + 1$ $[0; 3]$ $\left[f(z) = 4;\ z = \sqrt{3}\right]$

174 $y = 4 - x^2$ $[1; 2]$ $\left[f(z) = \dfrac{5}{3};\ z = \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right]$

175 $y = \sqrt{x+2}$ $[-1; 2]$ $\left[f(z) = \dfrac{14}{9};\ z = \dfrac{34}{81}\right]$

176 $y = x\cos x$ $[-\pi; \pi]$ $\left[f(z) = 0;\ z = 0,\ z = \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$

177 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ $[0; 1]$ $\left[f(z) = \dfrac{\pi}{4};\ z = \sqrt{\dfrac{4}{\pi} - 1}\right]$

178 $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ $[3; 6]$ $\left[f(z) = \dfrac{1}{4};\ z = 4\right]$

179 $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ $[2; e+1]$ $\left[f(z) = \dfrac{2+e}{e-1};\ z = e\right]$

LA FUNZIONE INTEGRALE E LA SUA DERIVATA

ESERCIZIO GUIDA

180 Calcola la derivata prima della funzione: a) $G(x) = \int_0^x \cos t\,dt$; b) $G(x) = \int_2^{x^2} \dfrac{\ln t}{t}\,dt$.

a) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, allora $F'(x) = f(x)$,

quindi se $G(x) = \int_0^x \cos t\,dt$, allora $G'(x) = \cos x$.

b) La funzione $G(x)$ si ottiene dalla composizione di due funzioni:

$G(x) = F(x^2) = F(z)$ con $F(z) = \int_2^z \dfrac{\ln t}{t}\,dt$ e $x^2 = z$.

$F(z)$ è la funzione integrale della funzione $\dfrac{\ln t}{t}$ e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$F'(z) = \dfrac{\ln z}{z}$.

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, otteniamo:

$$G'(x) = F'(x^2)\cdot 2x = \frac{\ln x^2}{x^2}\cdot 2x = 2\,\frac{\ln x^2}{x}.$$

Osservazione. In generale possiamo dire che la derivata della funzione:

$$G(x) = \int_{x_0}^{f(x)} g(t)\,dt \quad \text{è} \quad F'(x) = g(f(x))\cdot f'(x).$$

Calcola la derivata prima delle seguenti funzioni.

181 $G(x) = \int_1^x \dfrac{t^2}{1+t}\,dt$ $\left[G'(x) = \dfrac{x^2}{1+x}\right]$

182 $G(x) = \int_x^2 \sqrt{t}\,dt$ $\left[G'(x) = -\sqrt{x}\right]$

183 $G(x) = \int_2^{x^4} \operatorname{arctg} t\,dt$ $\left[G'(x) = 4x^3 \operatorname{arctg} x^4\right]$

184 $G(x) = \int_{-3}^{2x^2} \sqrt{4+t^3}\,dt$ $\left[G'(x) = 8x\sqrt{1+2x^6}\right]$

185 $G(x) = \int_{-2}^{e^{x^2}} \ln^2 t\,dt$ $\left[G'(x) = 2x^5 e^{x^2}\right]$

186 $G(x) = \int_0^{\ln(1+x)} \dfrac{e^t - 1}{t}\,dt$ $\left[G'(x) = \dfrac{x}{(1+x)\ln(1+x)}\right]$

187 Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt = \pi\cos\pi x$.

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, PNI, sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 9) $[0]$

188 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:

$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t\,dt$, con $x > 0$.

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corso di ordinamento, sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 7) $\left[f'(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]$

189 Trova i massimi e i minimi relativi della funzione integrale:

$F(x) = \int_0^x \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, in $[0; +\infty[$. $[x_n = (2n-1)\pi$ massimi; $x_n = 2n\pi$ minimi$]$

Calcola i seguenti limiti applicando, qualora sia possibile, il teorema di De l'Hôspital.

190 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

191 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt}{6x^3}$ $\left[\dfrac{1}{6}\right]$

192 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\int_{e^2}^{e^x} \dfrac{t}{\ln t}\,dt}{x-2}$ $\left[\dfrac{e^4}{2}\right]$

193 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^{x^2} t\operatorname{arctg} 2t\,dt}{x^4}$ $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]$

194 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^3} (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)\,dt}{x^5 - x^3}$ $[-1]$

195 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}x^2} (1-\cos t)\,dt}{x^6}$ $\left[\dfrac{\pi^3}{384}\right]$

196 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt}{\sqrt[2]{x^3}}$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

197 Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\int_0^x \dfrac{t^2}{t^4+1}\,dt$.

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corsi sperimentali, sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 5) $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

198 Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4}$.

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, PNI, sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 4) $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

3 IL CALCOLO DELLE AREE

→ Teoria a pag. 83 W

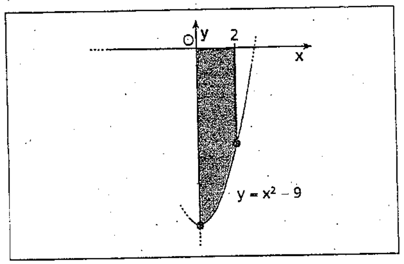
L'AREA DI UNA SUPERFICIE IN CUI LA FUNZIONE È NEGATIVA

ESERCIZIO GUIDA

199 Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = x^2 - 9$ definita sull'intervallo $[0; 2]$.

Osserviamo che il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; -9)$ con la concavità rivolta verso l'alto e che incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 3.

Disegniamo il grafico ed evidenziamo la superficie considerata.



Calcoliamo l'integrale definito esteso da 0 a 2:

$$\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 18 - 0 = -\frac{46}{3}.$$

Poiché la funzione è negativa in tutto l'intervallo, allora dobbiamo far precedere l'integrale definito da un segno meno, ossia:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx = -\left(-\frac{46}{3}\right) = \frac{46}{3}.$$

Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle seguenti funzioni definite negli intervalli indicati, calcolane l'area.

200 $y = \operatorname{sen} x$ $\quad [\pi; 2\pi]$ $\quad [2]$

201 $y = x^3$ $\quad [-2; 0]$ $\quad [4]$

202 $y = -x^2 + 1$ $\quad [1; 3]$ $\quad \left[\frac{20}{3}\right]$

203 $y = x^2 - 6x + 5$ $\quad [2; 4]$ $\quad \left[\frac{22}{3}\right]$

204 $y = -\frac{3}{x}$ $\quad [3; 6]$ $\quad [3 \ln 2]$

205 $y = -\sqrt{x}$ $\quad [9; 16]$ $\quad \left[\frac{74}{3}\right]$

206 $y = \ln x$ $\quad \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ $\quad \left[\frac{1}{2}(1 - \ln 2)\right]$

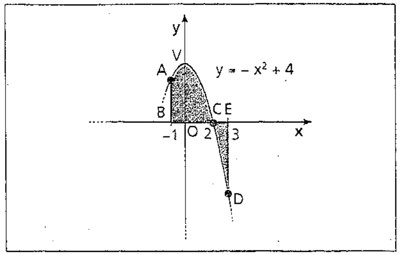
LA FUNZIONE È IN PARTE POSITIVA O NULLA E IN PARTE NEGATIVA

ESERCIZIO GUIDA

207 Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = -x^2 + 4$ definita sull'intervallo $[-1; 3]$.

Il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; 4)$ che ha la concavità rivolta verso il basso e incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 2.

Disegniamo tale grafico ed evidenziamo la superficie considerata.



Per calcolare l'area scomponiamo la superficie in due superfici: $ABCV$ delimitata dai valori positivi della funzione e CDE delimitata dai valori negativi e calcoliamo l'integrale su due intervalli diversi:

$$S = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)\,dx - \int_2^3 (-x^2 + 4)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{2} - \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4\right) - \left(-\frac{27}{3} + 12 + \frac{8}{3} - 8\right) =$$

$$= -\frac{9}{3} + 12 + \frac{19}{3} - 4 = \frac{34}{3}.$$

Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle seguenti funzioni definite negli intervalli indicati, calcolane l'area.

208 $y = -x^3$ $\quad [-1; 2]$ $\quad \left[\frac{17}{4}\right]$

209 $y = 3x^2 - 3$ $\quad [0; 2]$ $\quad [6]$

210 $y = \cos x$ $\quad \left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$ $\quad \left[\frac{3}{2}\right]$

211 $y = e^x - 1$ $\quad [-1; 1]$ $\quad [e + e^{-1} - 2]$

212 $y = -x^2 + 6x - 8$ $\quad [2; 5]$ $\quad \left[\frac{8}{3}\right]$

213 $y = \sqrt{x} - 1$ $\quad [0; 4]$ $\quad [2]$

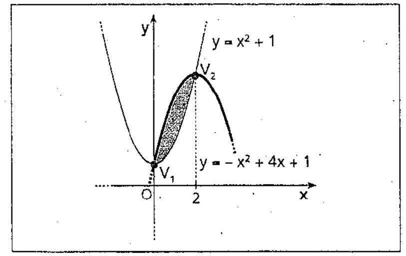
214 $y = \operatorname{tg} x$ $\quad \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ $\quad \left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$

DUE FUNZIONI DELIMITANO UNA SUPERFICIE CHIUSA

ESERCIZIO GUIDA

215 Determiniamo l'area della superficie racchiusa dalle parabole di equazione:

$y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 + 4x + 1$.



Tracciamo le due parabole. La prima ha vertice nel punto $V_1(0; 1)$, asse di simmetria l'asse y e concavità rivolta verso l'alto. La seconda ha vertice nel punto $V_2(2; 5)$, asse di simmetria la retta di equazione $x = 2$.

Le due parabole si intersecano nei punti $V_1(0; 1)$ e $V_2(2; 5)$, perciò gli estremi di integrazione sono 0 e 2.

Disegniamo le due parabole ed evidenziamo la superficie da esse racchiusa.

Sappiamo che l'area della superficie è data dall'integrale della differenza tra la funzione "più alta" e quella "più bassa", perciò:

$$S = \int_0^2 [(-x^2 + 4x + 1) - (x^2 + 1)]\,dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}.$$

216 Determina l'area della regione finita di piano individuata dalle parabole di equazione: $y = x^2 - 1$ e $y = -x^2 - 3x - 1$. $\left[\frac{9}{8}\right]$

217 Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalla retta di equazione $y = 3x - 1$ e dalla parabola di equazione $y = -x^2 + x + 2$. $\left[\frac{32}{3}\right]$

218 Trova l'area della regione finita di piano individuata dall'iperbole di equazione $y = -\frac{3}{x}$ e dalla retta di equazione $y = x + 4$. $[4 - 3 \cdot \ln 3]$

219 Determina l'area della regione finita di piano contenuta nel I quadrante e individuata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 2$ e dalla curva di equazione $y = x^3$. $\left[\frac{17}{12}\right]$

220 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4$ e dalle tangenti condotte alla parabola nei suoi punti di intersezione con l'asse x. $\left[\frac{16}{3}\right]$

221 Dopo aver verificato che la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ incontra la curva di equazione $y = 2^x$ nei punti $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ e $B(0; 1)$, determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla due curve. $\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{\ln 4}\right]$

222 Trova l'area della regione finita di piano limitata dalle curve di equazione $y = \operatorname{sen} x$ e $y = -\cos x$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. $[2\sqrt{2}]$

223 È data la regione finita di piano individuata dall'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$, dal ramo di parabola di equazione $y = \sqrt{x}$ e dalla retta di equazione $x = 9$. Calcola l'area. $\left[\frac{52}{3} - \ln 9\right]$

224 Determina l'area della regione finita di piano individuata dall'iperbole di equazione $y = \frac{4}{x}$ e dalla parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 9$. $[8\ln 2 - 3]$

ESERCIZI VARI IL CALCOLO DELLE AREE DI FIGURE PIANE

√ 225 L'area del trapezoide delimitato dalla funzione $y = x^3$ in $[-1; 0]$ è uguale a:

A 3.

B $\frac{1}{4}$.

C $-\frac{1}{3}$.

D $-\frac{1}{4}$.

E $\frac{1}{3}$.

√ 226 L'area della regione piana limitata dalla curva di equazione $y = x^2 - 2x$ con $x \in [0; 3]$ e dall'asse x, si calcola facendo:

A $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx$.

B $\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx + \int_2^3 (2x - x^2)\,dx$.

C $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx$.

D $\int_0^3 (2x - x^2)\,dx$.

E $\int_0^3 (x^2 - 2x)\,dx$.

√ 227 La funzione $f(x)$, continua nell'intervallo $[-1; 3]$, è tale che $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0]$. Allora l'area della parte di piano compresa fra il grafico della funzione $f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette $x = -1$ e $x = 3$ vale:

A $\int_{-1}^0 f(x)\,dx - \int_3^0 f(x)\,dx$.

B $\int_{-1}^0 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$.

C $\int_{-1}^3 f(x)\,dx - \int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

D $\int_3^0 f(x)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

E $\int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_3^0 f(x)\,dx$.

√ 228 Completa la seguente uguaglianza che serve per calcolare l'area della parte di piano limitata dalle parabole $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2 - 2x$:

$$A = \int_0^{\dots} (-x^2 + 2x)\,dx + \int_0^{\dots} (-x^2 + \dots)\,dx =$$
$$= \int_0^{\dots} (-2x^2 + \dots)\,dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \dots\right]_0^{\dots} = \dots$$

229 Abbina a ciascuna funzione $y = f(x)$ l'area della regione di piano da essa limitata nell'intervallo scritto a fianco.

1. $f(x) = \lvert x \rvert$ in $[-2; 3]$	a) $\frac{25}{4}$.
2. $f(x) = \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$ in $[0; \pi]$	b) $\frac{13}{2}$.
3. $f(x) = \frac{1}{2}(4x^3 - 2x)$ in $[0; 2]$	c) $\frac{4}{3}$.
4. $f(x) = x^2 + 2\lvert x \rvert$ in $[-1; 1]$	d) $\frac{8}{3}$.

230 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \cos^2 x$ e dalle rette di equazione $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = -2x + 1$. $\left[\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi^2}{16}\right]$

231 Traccia il grafico della parabola di equazione $x = y^2 - 2y$ e calcola l'area della regione di piano compresa tra la curva e l'asse y. $\left[\frac{4}{3}\right]$

232 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ determina l'area della regione finita delimitata dallo stesso grafico e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{5}$. $\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right]$

233 Calcola l'area della regione contenuta nel semipiano delle ordinate positive delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. $[4\pi]$

234 Determina l'area della regione di piano delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. $[12\pi]$

235 Rappresenta sul piano cartesiano l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa tra essa e il rombo che si ottiene congiungendo i vertici dell'ellisse. $[20(\pi-2)]$

236 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y=1-xe^{-x}$ calcola l'area della regione finita di piano delimitata dallo stesso grafico, dal suo asintoto, dall'asse y e dalla retta di equazione $x=2$. $[1-3e^{-2}]$

237 Rappresenta la funzione $y=\frac{x^2+1}{x+1}$ e determina l'area della regione finita delimitata dagli assi x e y, dal grafico della funzione e dalla retta parallela all'asse y passante per il punto di minimo relativo della funzione. $\left[\frac{5-4\sqrt{2}}{2}+\ln 2\right]$

238 Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalla parabola di equazione $y=-x^2+6x$ e dalla retta di coefficiente angolare 1 passante per il punto della parabola di ascissa 4. $\left[\frac{9}{2}\right]$

239 Considera la funzione $y=4\cos^3 x+\cos x$ e rappresentala graficamente nell'intervallo $[-\pi;\ \pi]$. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data e dall'asse x. $\left[\frac{22}{3}\right]$

240 Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ e $g(x)=\frac{x^2}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right]$

241 Rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $xy=6$ e determina le equazioni delle tangenti all'iperbole nel suo punto A di ascissa 3 e nel suo punto B di ascissa 1. Individua il punto C di intersezione delle due tangenti e calcola l'area del triangolo mistilineo ABC, avente il lato AB appartenente all'iperbole. $\left[2x+3y-12=0,\ 6x+y-12=0;\ C\left(\frac{3}{2};3\right);\ 6\ln 3-1\right]$

242 Rappresenta graficamente la funzione $y=\frac{x-3a}{x+a}$ $(a>0)$ al variare di a. Determina (in funzione di a) l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse y e l'asse x. $[4a\ln 4-3a]$

243 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola con asse parallelo all'asse x, avente vertice $V(-4;\ 0)$ e passante per il punto $A(0;\ 2)$, e dalla retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante passante per A. $\left[\frac{125}{6}\right]$

244 Determina l'area del triangolo ABC, dove A è il vertice della parabola $y=-x^2+4x$ e B e C sono i punti della parabola di ordinata -5. Trova inoltre l'area della regione finita di piano compresa fra la parte di parabola che contiene il triangolo e il triangolo stesso. $[A_1=27;\ A_2=9]$

245 Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y=2+\frac{4}{x-1}$ e stabilisci se si tratta di una conica. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data, dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 0 e dall'asse x. $\left[4\ln 2-\frac{5}{2}\right]$

246 Traccia il grafico della funzione $y=\frac{x^2-3x+1}{x-3}$ e successivamente calcola l'area della regione finita di piano delimitata dallo stesso grafico, dal suo asintoto obliquo, dall'asse y e dalla retta di equazione $x=2$. $[\ln 3-1]$

247 Determina il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $y=\frac{3}{2}$, passanti per il punto $A(0;\ 4)$. Classifica tale luogo geometrico e calcola l'area della regione finita di piano compresa tra esso, l'asse x e le rette di equazione $x=1$ e $x=3$. $\left[\frac{217}{30}\right]$

248 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per $A(2;\ 3)$, $B(1;\ 1)$ e $C(-2;\ 0)$ e quella della funzione omografica di centro $D(1;\ 0)$ che interseca l'asse delle ordinate in -3. Trova poi l'area della regione finita di piano compresa tra le due coniche e la retta di equazione $x=4$. $\left[y=\frac{5}{12}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{6};\ y=\frac{3}{x-1};\ \frac{215}{18}-\ln 27\right]$

249 Calcola l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$ e $g(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$ nell'intervallo $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[\frac{\pi}{2}-1-\frac{1}{2}\ln 2\right]$

250 Trova per quale valore di t l'integrale $\int_t^1 2\sqrt{1-x}\,dx$ è uguale all'area della parte finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y=x^2-2x$ e dall'asse x. $[t=0]$

251 Data la parabola di equazione $y=ax^2+3x+5$, con $a\in\mathbb{R}$, determina il valore di a in modo che l'area della regione finita di piano individuata dalla parabola e dalla retta di equazione $y=x+5$ sia uguale a $\frac{1}{3}$. $[a=\pm 2]$

252 Dopo aver rappresentato graficamente la funzione $y=x^3-x^2$, determina l'area della regione finita di piano compresa fra la curva, la retta ad essa tangente nel suo punto di minimo e la retta ad essa tangente nel suo punto di intersezione con l'asse x distinto dall'origine. $\left[\frac{13}{2916}\right]$

253 Rappresenta graficamente la funzione $y=\frac{2x+1}{x^2-4x+4}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra l'asse x, la retta di equazione $x=1$ e la retta parallela all'asse y passante per il punto di minimo della funzione. $\left[2\ln\frac{4}{5}+2\right]$

254 Rappresenta graficamente la funzione $y=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e la retta di equazione $x=\frac{1}{2}$. $[2-\sqrt{3}]$

255 Rappresenta graficamente la funzione $y=xe^{-a^2x}$, con $a>0$, e determina l'area della regione finita di piano sottesa alla curva nell'intervallo $[0; a]$. Calcola il limite a cui tende l'area quando a tende a $+\infty$. $\left[\frac{1}{2a^2}(1-e^{-a^3}); 0\right]$

256 Studia e rappresenta la funzione di equazione $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$. Determina l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione data, dall'asse x e dalla retta passante per l'origine e per il punto di flesso avente ascissa positiva. $\left[\frac{1}{4}(\sqrt{3}+\ln(2-\sqrt{3}))\right]$

257 Dopo aver rappresentato graficamente il luogo dei centri delle iperboli di equazione $y=\frac{(m^2-3)x+2}{(m+2)x+4}$ $(m\in\mathbb{R})$, determina l'area della regione finita di piano compresa fra il luogo geometrico, la retta a esso tangente nel punto di minimo e la retta di equazione $x=-2$. $\left[4\ln 2-\frac{5}{2}\right]$

258 Dato il fascio di parabole di equazione $y=(2k+1)x^2+6kx$, con $k\in\mathbb{R}$, individua i punti base e la parabola degenere. Trova poi le parabole del fascio che formano con quella degenere un segmento parabolico di area 9. Calcola l'area della regione finita di piano compresa fra le parabole trovate. $\left[k_1=\frac{1}{2},\ k_2=-\frac{3}{2};\ 18\right]$

259 Rappresenta la funzione $y=\frac{x^3-x^2}{x+2}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e la retta passante per il punto di ascissa 2 appartenente alla funzione e per $A(4; 0)$. $\left[\frac{29}{6}+12\ln\frac{3}{4}\right]$

260 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro $C(2; -3)$ e raggio $r=3\sqrt{2}$ e quella della parabola con asse parallelo all'asse y e tangente alla circonferenza nei punti A e B in cui quest'ultima interseca l'asse x. Calcola infine l'area della regione finita di piano racchiusa fra l'arco di circonferenza e quello di parabola. (Suggerimento: l'area compresa tra l'arco di circonferenza e l'asse x si ottiene come differenza fra l'area del corrispondente settore circolare e l'area del triangolo.) $\left[15-\frac{9}{2}\pi\right]$

261 Rappresenta graficamente la funzione $y=\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ e determina l'area della regione finita di piano compresa fra la curva, l'asse x e la retta tangente alla curva nel suo punto di flesso. (Suggerimento: per il calcolo dell'integrale poni $x=4\,\mathrm{sen}^2\,t$.) $\left[\frac{15\sqrt{3}-8\pi}{12}\right]$

4 IL CALCOLO DEI VOLUMI DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

→ Teoria a pag. 86 W

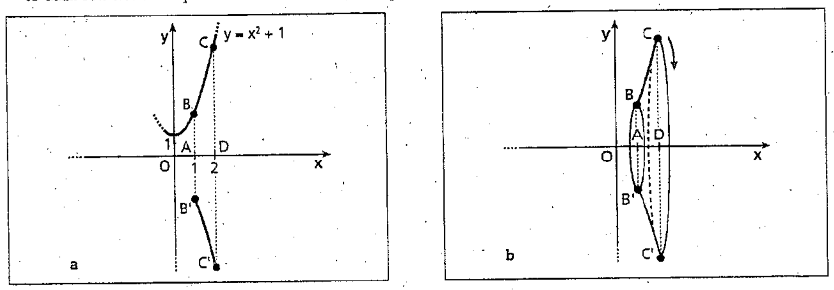
ESERCIZIO GUIDA

262 Consideriamo la funzione $y=x^2+1$ e calcoliamo il volume V del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x di un giro completo (ossia di 360°) il trapezoide esteso all'intervallo $[1; 2]$.

Disegniamo il solido.

a) Tracciamo il grafico della funzione nell'intervallo considerato e il suo simmetrico rispetto all'asse x (figura *a*).

b) Tracciamo, in prospettiva, due circonferenze di raggio, rispettivamente, AB e CD. Si ottiene così il solido generato dalla rotazione completa intorno all'asse x del trapezoide $ABCD$ (figura *b*).



Calcoliamo il volume di tale solido, applicando la formula $V=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\,dx$:

$$V=\pi\cdot\int_1^2(x^2+1)^2\,dx=\pi\cdot\int_1^2(x^4+2x^2+1)\,dx=\pi\cdot\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_1^2=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+1-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{178}{15}\pi.$$

263 Rappresenta la funzione $y=5$ nell'intervallo $[1; 6]$. Che solido otteniamo ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. [cilindro; 125π]

264 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=x^3$ nell'intervallo $[0; 1]$. $\left[\frac{\pi}{7}\right]$

265 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=\sqrt{\mathrm{sen}\,x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. $[\pi]$

266 Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=x\sqrt{x}$ nell'intervallo $[1; 4]$. $\left[\frac{255}{4}\pi\right]$

267 Trova il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=\sqrt{x+4}$ nell'intervallo $[0; 5]$. $\left[\frac{65}{2}\pi\right]$

268 Disegna il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=\sqrt{-\cos x}$ nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Calcola il volume. $\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi\right]$

269 Trova il volume del solido ottenuto ruotando di 360° attorno all'asse x il trapezoide definito dalla funzione $y=\frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1; 4]$. $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$

270 Rappresenta la funzione $y=\sqrt{1-x^2}$ definita in $[-1; 1]$. Che solido otteniamo ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. $\left[\text{sfera; } \frac{4}{3}\pi\right]$

271 Rappresenta la funzione $y=3+x$ nell'intervallo $[0; 3]$. Che solido otteniamo ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. [tronco di cono; 63π]

272 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=\frac{1}{\cos x}$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $[\pi]$

273 Determina il volume del solido ottenuto ruotando di 360° attorno all'asse x il trapezoide definito dalla funzione $y=9-x^2$ nell'intervallo $[0; 2]$. $\left[\frac{602}{5}\pi\right]$

274 Rappresenta la funzione $y=4-2x$ nell'intervallo $[0; 2]$. Che solido otteniamo ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. $\left[\text{cono; } \frac{32}{3}\pi\right]$

275 Rappresenta la funzione $y=\sqrt{-x^2+4x}$ nell'intervallo $[2; 4]$. Che solido otteniamo ruotando di 360° attorno all'asse x il grafico di tale funzione? Calcola il volume del solido ottenuto e verifica il risultato applicando la relativa formula geometrica. $\left[\text{semisfera; } \frac{16}{3}\pi\right]$

276 Data la funzione $y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$ definita in $[-5; 5]$, calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 360° attorno all'asse x del relativo grafico. $[60\pi]$

277 Trova il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=\sqrt{\frac{x+4}{x}}$ nell'intervallo $[-5; -4]$. $\left[\left(1-4\ln\frac{5}{4}\right)\pi\right]$

278 Calcola il volume del solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide individuato dal grafico della funzione $y=\frac{1}{2^x}$ nell'intervallo $[0; 1]$. $\left[\frac{3}{4\ln 4}\pi\right]$

279 Rappresenta graficamente la funzione $y=\sqrt{e^{3x}}$ e determina il volume del solido ottenuto mediante una rotazione completa attorno all'asse x, con $x\in[0; 1]$. $\left[\frac{\pi}{3}(e^3-1)\right]$

280 Data la curva di equazione $x=4y^2$, rappresentala graficamente nel semipiano $y\geq 0$. Determina il volume V del solido generato in una rotazione di 360° attorno all'asse delle y del tratto di curva, con $x\in[0; 16]$. Calcola infine il rapporto tra il volume del cilindro circoscritto al solido generato nella rotazione e il volume V trovato. $\left[\frac{512}{5}\pi; 5\right]$

281 Si disegni in un piano cartesiano ortogonale Oxy la curva C di equazione $y=\frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$ e si calcoli il volume del solido ottenuto facendo ruotare di un giro completo attorno all'asse delle ascisse la regione finita di piano compresa tra l'arco della curva C, i cui estremi sono i punti di ascissa $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1, e le rette tangenti a C negli estremi stessi.
(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, sessione suppletiva*, 1991, *corso di ordinamento, problema* 2) $\left[\pi\cdot\left(\frac{23}{12}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)\right]$

282 Dopo aver studiato la funzione di equazione $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, determina il volume del solido generato da una rotazione di 360° attorno all'asse x della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dalle rette di equazioni $x=3$ e $x=4$. $[\pi+3\pi\ln 2]$

283 Studia le due funzioni:

$\gamma)\ y=1-\frac{1}{8}x^3$ e $\gamma')\ y=\sqrt{1-\frac{1}{8}x^3}$

e disegna i loro grafici nello stesso piano cartesiano xOy. Calcola poi il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della regione finita piana delimitata da γ e γ'. $\left[\frac{3}{14}\pi\right]$

284 Dopo aver rappresentato graficamente le parabole di equazioni $y=x^2$ e $x=y^2$, determina il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte finita di piano delimitata dalle due parabole. $\left[\frac{3}{10}\pi\right]$

285 Rappresenta graficamente le curve di equazioni $y=2\sqrt{x-1}$ e $y=\sqrt{x}$ e calcola il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 360° intorno all'asse x della figura definita dai due grafici e dall'asse x. $\left[\frac{2}{3}\pi\right]$

286 Data la parabola di equazione $y=ax^2+bx+c$, con $a, b, c\in\mathbb{R}$, trova i coefficienti a, b, c in modo che la parabola intersechi l'asse x nell'origine e in $A(1; 0)$ e in modo che l'arco OA di parabola generi nella rotazione di 360° intorno all'asse x un solido di volume uguale a $\frac{49}{30}\pi$. $[a=\pm 7]$

5 LA LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA PIANA E L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

→ Teoria a pag. 89 W

LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA

ESERCIZIO GUIDA

287 Calcoliamo la lunghezza del ramo di curva di equazione $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ compreso fra i punti di ascissa $x = 2$ e $x = 4$.

Determiniamo la derivata della funzione data:

$$D\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right] = D\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x-1}.$$

Calcoliamo la lunghezza della curva utilizzando la formula $l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, dove $a = 2$ e $b = 4$.

$$l = \int_2^4 \sqrt{1+[\sqrt{x-1}]^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1+x-1}\,dx = \int_2^4 \sqrt{x}\,dx = \int_2^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4 = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Date le seguenti funzioni determina la lunghezza della parte del loro grafico compresa fra i punti di ascissa scritta a fianco.

288 $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}$, $a = -2$, $b = -1$. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right]$

289 $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}$, $a = 2$, $b = 5$. $\left[\frac{14}{3}\right]$

290 $y = \sqrt{x^3}$, $a = 0$, $b = 1$. $\left[\frac{13}{27}\sqrt{13} - \frac{8}{27}\right]$

291 $y = \sqrt{4-x^2}$, $a = -2$, $b = 2$. $[2\pi]$

292 $y = \sqrt{9-x^2}$, $a = -3$, $b = 3$. $[3\pi]$

293 $y = x^2$, $a = 0$, $b = 2$. $\left[\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right]$

L'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

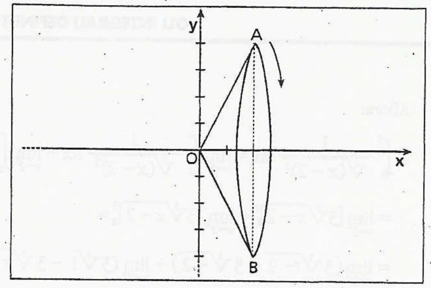
ESERCIZIO GUIDA

294 Calcoliamo l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 2x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 2$.

Disegniamo il solido.

a) Tracciamo il grafico della retta nell'intervallo considerato e il suo simmetrico rispetto all'asse x.

b) Tracciamo, in prospettiva, la circonferenza di diametro AB. Si ottiene così la superficie generata dalla rotazione completa intorno all'asse x del segmento OA.



Scriviamo la derivata della funzione data: $y' = 2$.

Calcoliamo l'area di tale superficie, applicando la formula $S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$:

$$S = 2\pi\int_0^2 2x\cdot\sqrt{1+2^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 2x\cdot\sqrt{5}\,dx =$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{5}\,x^2\right]_0^2 = 8\pi\sqrt{5}.$$

295 Calcola l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = 3x$ avente estremi di ascissa $x = 0$ e $x = 1$. $[3\pi\sqrt{10}]$

296 Determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x del segmento appartenente alla retta di equazione $y = -x + 2$ situato nel primo quadrante. $[4\pi\sqrt{2}]$

297 Trova l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di parabola di equazione $y = 2\sqrt{x}$ limitato dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = 3$. $\left[\frac{16\pi}{3}(4-\sqrt{2})\right]$

298 Calcola l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di parabola di equazione $y = 2\sqrt{x+1}$ contenuto nel secondo quadrante. $\left[\frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\right]$

299 Determina l'area della superficie ottenuta dalla rotazione completa attorno all'asse x dell'arco di circonferenza che ha centro $C(1; 0)$ e raggio 2 contenuto nel primo quadrante. $[12\pi]$

6 GLI INTEGRALI IMPROPRI

→ Teoria a pag. 92 W

L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE CON UN NUMERO FINITO DI PUNTI DI DISCONTINUITÀ NELL'INTERVALLO [a; b]

ESERCIZIO GUIDA

300 Calcoliamo, se possibile, l'integrale della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ nell'intervallo $[0; 3]$.

La funzione $f(x)$ è continua per $x \neq 2$, quindi è integrabile negli intervalli $[0; t]$, con $0 < t < 2$, e $[z; 3]$, con $2 < z < 3$. Determiniamo una primitiva di $f(x)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \int (x-2)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x-2} + c.$$

Allora:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \lim_{t\to 2^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx + \lim_{z\to 2^+}\int_z^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 2^-}[3\sqrt[3]{x-2}]_0^t + \lim_{z\to 2^+}[3\sqrt[3]{x-2}]_z^3 =$$

$$= \lim_{t\to 2^-}(3\sqrt[3]{t-2} - 3\sqrt[3]{-2}) + \lim_{z\to 2^+}(3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{z-2}) = -3\sqrt[3]{-2} + 3 = 3\sqrt[3]{2} + 3.$$

La funzione è integrabile nell'intervallo $[0; 3]$ e risulta: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = 3(\sqrt[3]{2}+1)$.

Calcola, se possibile, l'integrale delle seguenti funzioni nell'intervallo indicato a fianco.

301 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $[0; 1]$. [divergente]

302 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $[0; 1]$. $\left[\frac{5}{3}\right]$

303 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, $[0; 4]$. [4]

304 $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$, $[0; 1]$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

305 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[0; 1]$. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

306 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, $[-3; 0]$. $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

307 $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$, $[-2; -1]$. [divergente]

308 $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$, $[0; 1]$. [divergente]

309 $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. [divergente]

310 $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$, $[-1; 0]$ [divergente]

L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO ILLIMITATO

ESERCIZIO GUIDA

311 Calcoliamo l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2}dx$ se è convergente.

La funzione integranda è continua in tutti i punti dell'intervallo $[1; +\infty[$ perciò determiniamo la funzione $F(z)$ con z appartenente a $[1; +\infty[$:

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{(x+3)^2}dx = \left[-\frac{1}{x+3}\right]_1^z = -\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo $\lim_{z\to+\infty} F(z)$:

$$\lim_{z\to+\infty}\left(-\frac{1}{z+3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

L'integrale è convergente e vale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+3)^2}dx = \frac{1}{4}$.

Calcola i seguenti integrali se sono convergenti.

312 $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ [1]

313 $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}dx$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

314 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

315 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

316 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x+3}dx$ [divergente]

317 $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$ [divergente]

318 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ [1]

319 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$ [divergente]

320 $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ $\left[\frac{3\pi}{4}\right]$

321 $\int_0^{+\infty} \frac{-x}{x^2+2x+1}dx$ [divergente]

322 $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

ESERCIZI VARI GLI INTEGRALI IMPROPRI

√ **323** La funzione $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ed è tale che $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Quale fra i seguenti integrali *non* è improprio?

A $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

B $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$.

C $\int_0^3 f(x)\,dx$.

D $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

E $\int_2^{100} f(x)\,dx$.

√ **324** Quale fra le seguenti uguaglianze *non* permette di risolvere un integrale improprio?

A $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{a\to 1}\int_0^a \ln x\,dx$.

B $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to 0}\left(\int_{-1}^t \frac{1}{x}dx + \int_t^1 \frac{1}{x}dx\right)$.

C $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt$.

D $\int_{-\infty}^3 e^x dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^3 e^t dt$.

E $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sen}\,x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \mathrm{sen}\,x\,dx\right)$.

√ **325** L'integrale $\int_1^a \frac{\ln(x+1)}{6-x^2+x}dx$ con $a \in [0; 7]$:

A è un integrale improprio se $a = 1$.

B non è un integrale improprio.

C è un integrale improprio se $a = 2$.

D è un integrale improprio se $a = 3$.

E è un integrale improprio se $a = 0$.

√ **326** Quali, fra i seguenti integrali impropri, è convergente?

A $\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2}dx$.

B $\int_{1^+}^2 \frac{1}{x-1}dx$.

C $\int_0^1 \frac{1}{x^4}dx$.

D $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2}dx$.

E $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Calcola i seguenti integrali, se sono convergenti.

327 $\int_1^{+\infty} e^{1-x}\,dx$ [1]

328 $\int_{-\infty}^0 xe^{x^2}\,dx$ [divergente]

329 $\int_{-\infty}^0 4x^2 e^{x^3}\,dx$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

330 $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x-6}$ $\left[\frac{\ln 6}{5}\right]$

331 $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+6x+8}$ [divergente]

332 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ [−2]

333 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+3x}{e^x}\,dx$ [divergente]

334 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^6}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{12}\right]$

335 $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ $\left[\ln\frac{6}{5}\right]$

336 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right]$

337 $\int_0^1 2\frac{\ln x}{x}\,dx$ [divergente]

338 $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

339 $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ $\left[\frac{\ln 5}{2}\right]$

340 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ [ln 3]

341 $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

342 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ [divergente]

343 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx$ [4]

344 $\int_2^5 \frac{x}{(x-2)^2}\,dx$ [divergente]

345 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2-10x+25}\,dx$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

346 $\int_0^{+\infty} \frac{4x}{1+x^4}\,dx$ [π]

347 $\int_3^{+\infty} \frac{x-1}{x^2-2x}\,dx$ [divergente]

348 $\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}}\,dx$ $[-\sqrt{2}]$

349 $\int_{-2}^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

350 $\int_{-\infty}^2 \frac{2}{x^2-4x+5}\,dx$ [π]

351 $\int_2^{+\infty} \frac{x+4}{2x+3}\,dx$ [divergente]

352 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

353 $\int_0^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ $[3(e^2-1)]$

354 $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+4e^{2x}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2\right]$

355 $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+9x^4}\,dx$ $\left[-\frac{\pi}{12}\right]$

356 $\int_{-1}^0 \ln\frac{1}{x+1}\,dx$ [1]

357 $\int_{-\infty}^{-4} \frac{x}{9-x^2}\,dx$ [divergente]

358 $\int_0^1 4x\ln x\,dx$ [−1]

359 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2\ln^2 4}\right]$

360 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

361 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx$ [4]

362 $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-3x}\,dx$ $\left[\frac{2}{3}\ln 2\right]$

363 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ [divergente]

364 $\int_2^{+\infty} \frac{2\ln x}{x^3}\,dx$ $\left[\ln\sqrt[4]{2}+\frac{1}{8}\right]$

365 $\int_{-1}^1 \left(2+\frac{x}{|x|}\right)dx$ [4]

366 $\int_{-1}^1 f(x)\,dx,$ con $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{se } -1\le x<0 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{se } 0\le x\le 1 \end{cases}$ $\left[\frac{3}{2}+\ln 2\right]$

367 $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx,$ con $f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & \text{se } -1\le x\le 0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{se } 0<x\le \pi \end{cases}$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

368 Disegna la curva di equazione $y=e^{2x}$ e calcola l'area della regione compresa fra il grafico, l'asse x e l'asse y e con $x\le 0$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

369 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, calcola l'area delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette di equazione $x=-1$ e $x=1$. [π]

370 Traccia il grafico della funzione $y=e^{-x}+1$ e quello simmetrico rispetto al suo asintoto orizzontale. Calcola l'area delimitata nel primo quadrante dai due grafici e dalla retta di equazione $x=1$. $\left[\frac{2}{e}\right]$

371 Dopo aver rappresentato graficamente la funzione $y=\frac{2x^2+1}{x^2}$, determina l'area della regione illimitata compresa fra il grafico e l'asintoto orizzontale della funzione, i cui punti hanno ascissa maggiore di 1. [1]

372 Rappresenta graficamente la funzione $y=x\,e^{-x^2}$ e calcola l'area della regione illimitata contenuta nel terzo quadrante e delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione. $\left[\frac{1}{2}\right]$

373 Determina l'area della regione illimitata del primo quadrante compresa fra il grafico della funzione $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ e l'asintoto verticale. [1]

374 Calcola l'area della regione illimitata del quarto quadrante compresa fra il grafico della funzione $y=\ln x$ e l'asintoto verticale. [1]

375 Calcola l'area della regione compresa fra l'asse x, la retta di equazione $x=-1$ e il grafico della funzione $y=\ln(x+1)$. [1]

376 Dato l'integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{ax}{(x-1)^4}\,dx$$

trova a in modo che il suo valore sia 5. $[a=6]$

377 Data la funzione $y=\frac{1}{(ax+b)^2}$, determina a e b sapendo che la funzione ha un asintoto verticale di equazione $x=\frac{1}{2}$ e che l'area della regione del primo quadrante, con $x\ge 1$, compresa fra il suo grafico, la retta di equazione $x=1$ e l'asse x è uguale a $\frac{1}{2}$. $[a_1=2,\ b_1=-1;\ a_2=-2,\ b_2=1]$

378 Nella funzione:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{se } x\le 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x>0 \end{cases}$$

trova a, b, c in modo che sia continua e derivabile in $x=0$ e sapendo che il suo grafico passa per il punto $P(-1;3)$. Rappresenta graficamente $f(x)$ e poi calcola l'area delimitata dalla curva, dalla retta di equazione $x=-1$ e dall'asse x con $x\ge -1$. $\left[a=1,\ b=-1,\ c=1;\ \frac{17}{6}\right]$

379 Rappresenta graficamente la funzione $y=(x-1)\,e^{-2x}$ e calcola l'area compresa fra il grafico della funzione, l'asse x, con $x\ge 2$, e la retta di equazione $x=2$. $\left[\frac{3}{4e^4}\right]$

380 Calcola nell'intervallo $[0;3e]$ l'area della parte di piano compresa fra i grafici delle due funzioni:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x, & \text{se } x\ne 0 \\ 0, & \text{se } x=0 \end{cases} \qquad \text{e } g(x)=x.$$

$\left[\frac{9}{2}e^2\ln 3-\frac{7}{4}e^2\right]$

7 APPLICAZIONI DEGLI INTEGRALI ALLA FISICA

→ Teoria a pag. 96 W

ESERCIZIO GUIDA

381 **Determiniamo lo spazio percorso nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0=2$ s e $t_1=5$ s, da un punto materiale che si muove su di una retta con una velocità $v(t)$, espressa in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, che è funzione del tempo t ed è definita dalla legge $v(t)=2t^2+1$.**

Essendo $v=s'(t)$, lo spazio percorso da un punto materiale nell'intervallo di tempo dall'istante t_0 all'istante t_1 è dato da $s=\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$. Sostituiamo i dati:

$$s=\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt=\int_2^5 (2t^2+1)\,dt=\left[\frac{2t^3}{3}+t\right]_2^5=\frac{2\cdot 125}{3}+5-\left(\frac{2\cdot 8}{3}+2\right)=\frac{265-22}{3}=\frac{243}{3}=81.$$

Lo spazio percorso dal punto materiale è perciò 81 m.

382 Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, con velocità $v(t)=\cos \pi t$. Sapendo che la posizione occupata dal corpo all'istante iniziale $t_0=0$ s è $s_0=1$, determina la legge oraria del punto materiale. $\left[s(t)=\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi}+1\right]$

383 Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, a causa di una forza elastica F la cui intensità è legata all'ascissa del punto dalla legge: $F(x)=-kx$. Determina il lavoro L compiuto dalla forza quando il punto materiale si sposta dalla posizione $x_0=5$ alla posizione $x_1=1$. $[L=12k]$

384 In un circuito l'intensità della corrente, misurata in A, all'istante t è data da $i(t)=3t^2+4t$. Calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0=1$ s all'istante $t_1=5$ s. (Se $q(t)$ è la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito all'istante t, allora $q'(t)=i$) [172 C]

385 In un moto rettilineo la velocità di un punto materiale in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ è data dalla legge $v(t)=t^2+t+1$. Determina lo spazio percorso nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0=1$ s e $t_1=9$ s. $\left[\frac{872}{3}\text{ m}\right]$

386 Su un punto materiale P che si muove lungo una retta orientata, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, agisce una forza F che è legata all'ascissa di P dalla relazione $F(x)=x\sqrt{x^2+1}$. Determina il lavoro compiuto su P dalla forza F quando P si sposta dalla posizione $x_1=1$ alla posizione $x_2=3$. $\left[\frac{1}{3}(\sqrt{1000}-\sqrt{8})\text{ J}\right]$

387 In un moto rettilineo la velocità di un punto materiale è funzione del tempo ed è espressa dalla legge: $v(t)=\frac{t}{t^2+2}$. Determina la velocità media e lo spazio percorso nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t_0=2$ s e $t_1=8$ s. $\left[v_m=\frac{1}{12}\ln 11;\ s=\frac{1}{2}\ln 11\right]$

388 In un circuito l'intensità della corrente, misurata in A, all'istante t è data da $i(t)=-\frac{e^{-100t}}{100}$. Calcola la quantità di carica che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0=\frac{1}{1000}$ s all'istante $t_1=\frac{1}{100}$ s. $[-5{,}37\cdot 10^{-5}\text{ C}]$

389 In un punto O è posta una massa $M=2\cdot 10^{10}$ kg. Una seconda massa $m=20$ kg si trova alla distanza x da O ed è sottoposta alla forza di attrazione gravitazionale di M. Ricordando che la legge di gravitazione universale è $F=G\frac{M\cdot m}{x^2}$ dove $G=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$, calcola il lavoro della forza gravitazionale quando la massa m si sposta dalla posizione $x_0=50$ m alla posizione $x_1=10$ m. [2,1344 J]

390 Un'automobile si muove su un rettilineo con accelerazione che varia nel tempo secondo la legge $a(t)=\frac{t^2}{81}+\frac{2}{\sqrt{t}}$. Calcola la velocità dopo 9 secondi dall'istante iniziale $t=0$ s in cui $v_0=3{,}6$ km/h. [16 m/s]

391 Una forza, variabile a seconda della posizione in cui viene applicata, induce un corpo a spostarsi di un certo tratto. Calcola il lavoro compiuto nello spostare il corpo dalla posizione $s_0=3$ m alla posizione $s_1=5$ m, se $F=3s^2-4s+2$. [70 J]

392 In un circuito in moto rispetto ad un campo magnetico B, la forza elettromotrice varia al variare del tempo secondo la legge $f=-3t^2+2t$, dove f è espressa in volt e t in secondi. Calcola il flusso del campo magnetico B all'istante $t=4$ s, sapendo che all'istante $t=0$ s il flusso vale $\phi=0$ Wb. [48 Wb]

393 In un moto su una retta orientata, la velocità di un punto materiale è data dalla legge $v(t)=t\cdot e^{-t}$. Determina l'equazione del moto sapendo che all'istante iniziale $t_0=0$ s il punto ha ascissa 1. $[s(t)=2-(t+1)\cdot e^{-t}]$

394 La funzione $f(x)=\cos x\, e^{-x}$ rappresenta in opportune unità di misura e per $x\ge 0$, la corrente di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo x il tempo. In tal caso la carica Q inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Calcolare il valore di Q. $\left[\frac{1}{2}\right]$
(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corso di ordinamento, sessione suppletiva*, 1992)

MODULO W

395 Determina l'energia dispersa per effetto Joule in un circuito di resistenza $R = 10\ \Omega$, percorso da corrente alternata di intensità, misurata in A, $i(t) = 100 \operatorname{sen} 400\pi t$ nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t_0 = 0$ s all'istante $t_1 = \frac{1}{200}$ s. (L'energia dissipata per effetto Joule, nell'intervallo di tempo che va dall'istante t_0 all'istante t_1, è data da $R\int_{t_0}^{t_1} i^2\,dt$). [250 J]

396 Sia $v(t) = t \operatorname{sen} t$ la legge con cui varia la velocità in un moto rettilineo. Determina:
a) la legge oraria sapendo che al tempo $t = 0$ secondi lo spazio è uguale a 3 metri;
b) la legge con cui varia l'accelerazione nel tempo. [a) $s(t) = 3 - t\cos t + \operatorname{sen} t$; b) $a(t) = \operatorname{sen} t + t\cos t$]

397 Sia $a(t) = e^{2t} + 2$ la legge con cui varia nel tempo l'accelerazione di un punto materiale P che si muove su una retta. Trova la legge oraria del moto sapendo che $v_0 = 2$ m/s e $s_0 = 5$ m.
$$\left[s(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{19}{4}\right]$$

398 Un punto materiale P si muove su un tratto rettilineo con accelerazione $a = a(t) = 6t + 2$, dove a è misurata in m/s^2 e t in secondi. Calcola lo spazio percorso tra l'istante $t_1 = 2$ s e $t_2 = 8$ s e la velocità al tempo t_2, sapendo che al tempo $t_3 = 1$ s la velocità è $v_3 = 1$ m/s e si trova ad una distanza $s_3 = 1$ m dall'origine del sistema di riferimento scelto. [$s = 540$ m; $v(t_2) = 204$ m/s]

399 Una pallina, collegata a una molla, oscilla di moto armonico con velocità $v(t) = 2 \operatorname{sen} 4t$. Determina la legge oraria e l'accelerazione in funzione del tempo sapendo che nell'istante iniziale $s_0 = 2$ m. Rappresenta graficamente le tre leggi $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ durante un'oscillazione completa.
$$\left[s(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{5}{2};\ a(t) = 8\cos 4t\right]$$

400 Un carrello inizia a muoversi su un binario rettilineo con accelerazione che varia nel tempo secondo la legge $a(t) = (2 - t)e^t$. In quale istante è massima la velocità? Che spazio ha percorso fino a quel momento? [$t = 2$; $s(2) = 2e^2 - 10$]

401 Un sacco di sabbia di massa 100 kg viene sollevato da una gru. Il sacco però ha un foro da cui perde sabbia in modo uniforme: così ha perso un quarto del suo contenuto nell'istante in cui la gru lo ha sollevato fino a 25 metri. Qual è il lavoro compiuto dalla gru fino a tale istante? (Suggerimento: trova la legge con cui varia la massa m al variare dell'altezza h.) [21 437,5 J]

TEST DI FINE UNITÀ

1 Quale delle seguenti uguaglianze è *errata*?

A $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

B $\int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx$.

C $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

D $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_b^a [g(x) - f(x)]\,dx$.

E $\int_{k\cdot a}^{k\cdot b} f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.

2 Quanto vale il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ nell'intervallo [0; 2]?

A 2. B 16. C 32. D 64. E 128.

3 Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^2$ ha valor medio $\frac{4}{3}$ nell'intervallo [0; a]?

A 1. B 2. C 3. D 4. E 5.

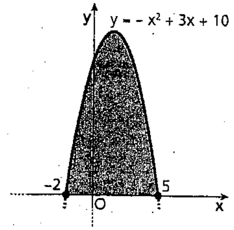
4 Quanto vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx$?

A -1. B $e - 1$. C $1 - e$.
D e. E 0.

5 Calcoliamo l'integrale $\int_4^9 \frac{1}{x - \sqrt{x}}\,dx$ per sostituzione ponendo $t = \sqrt{x} - 1$. Otteniamo:

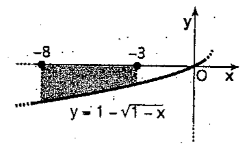
A $2\ln 2$. B $\ln 2$. C $\ln 9 - \ln 4$.
D $2\cdot(\ln 9 - \ln 4)$. E $\ln 5$.

6 Quanto vale l'area del trapezoide in figura?



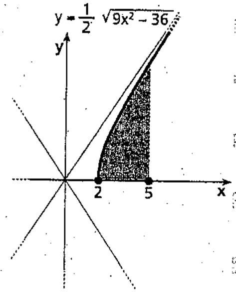
A $-\frac{45}{2}$. B $\frac{45}{2}$. C $\frac{343}{6}$.
D $\frac{70}{3}$. E $-\frac{70}{3}$.

7 Quanto vale l'area della superficie indicata in figura?



A -10. B 10. C $-\frac{23}{3}$. D $\frac{23}{3}$. E $\frac{7}{3}$.

8 Quale dei seguenti integrali permette di calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della regione di piano della seguente figura?



A $\pi\cdot\int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}\,dx$.

B $\int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 36}\,dx$.

C $\pi\cdot\int_2^5 \frac{1}{2}(9x^2 - 36)\,dx$.

D $\int_2^5 \frac{1}{4}(9x^2 - 36)\,dx$.

E $\pi\cdot\int_2^5 \frac{1}{4}(9x^2 - 36)\,dx$.

9 Sia $f''(x)$ una funzione continua in $[-1; 2]$ e tale che $f(-1) = f(2) = 4$ e $f'(-1) = f'(2) = 10$.
Allora $\int_{-1}^2 x f''(x)\,dx$ vale:

A 30. D 0.
B 2. E 4.
C $\ln 2$.

10 Se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, allora è necessario che:

A $a = b$.
B $f(x) = 0$.
C $a = -b$ e $f(x)$ sia dispari.
D $a = b = 0$.
E nessuna delle precedenti.

MODULO W

VERSO L'ESAME DI STATO

QUESITI

1 Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ e sempre positiva. Dimostra che la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente.

2 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a \quad \text{e} \quad \int_0^6 f(x)\,dx = b,$$

dove a e b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4.$$

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corso di ordinamento, sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 10) [$a = \ln 4$, $b = \ln 4$]

3 Calcolare la derivata rispetto a x della funzione $\int_x^b f(t)\,dt$ ove $f(x)$ è una funzione continua.
(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, sessione suppletiva*, 2002, *PNI, quesito* 3) [$-f(x)$]

4 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corso di ordinamento, sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 4) [-1]

5 Determinare il valore del parametro t che soddisfa l'equazione:

$$\int_0^t \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1)\,dx.$$

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 4) [$t = \ln(2e^3 - 1)$]

6 Una primitiva della funzione $f(x)$ è sen $2x$. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right)dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile.
(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corsi sperimentali, sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 4) $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$

7 Posto $\int_1^x f(x)\,dt = x^2 - 2x + 1$, trovare $f(x)$.
(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corsi sperimentali, sessione suppletiva*, 2002, *quesito* 6) [$f(x) = 2x - 2$]

8 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della seguente funzione:

$$\int_x^{x+2} e^{-t}\,dt.$$

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, corsi sperimentali, sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 6) [$(e^{-2} - 1)e^{-x}$]

9 Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ e $g(x) = \int_5^{x^2} f(t)\,dt$. Quanto vale $g'(0)$? [0]

10 È data $f(x)$ continua, come pure le sue derivate prima e seconda. È $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2(1+x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quanto vale $f(1)$? $\left[\frac{5}{2}\right]$

11 Siano $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ funzioni continue tali che due sole di esse siano derivabili in $\mathbb{R}$. Sono note le seguenti proposizioni:

a) se $s(x)$ non è derivabile, anche $p(x)$ non lo è;
b) se $s(x)$ è derivabile, $q(x)$ non lo è;
c) $q(x)$ è una primitiva di $r(x)$.

Quali sono le due funzioni derivabili? [$q(x)$, $r(x)$]

12 Sia $f(x)$ una funzione definita in $[3; 5]$ e tale che $2 \le f(x) \le 6$. A quale intervallo appartiene $\int_3^5 f(x)\,dx$? [$[4; 12]$]

PROBLEMI

13 a) Considera la funzione $y = x^3 - 4x$ e rappresentala graficamente.
b) Traccia la tangente t alla curva nel suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse.
c) Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data, dalla retta t e dall'asse y.
[b) $y = 8x - 16$; c) $A = 12$]

14 a) Studia e rappresenta graficamente la curva di equazione $x = 3\sqrt{1-y^2}$.
b) Calcola l'area della regione finita di piano appartenente al primo e al quarto quadrante determinata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ e dalla parabola di equazione $x = -y^2 + 1$.
$\left[\text{b) } A = \frac{3}{2}\pi - \frac{4}{3}\right]$

15 a) Rappresenta graficamente le coniche di equazione $y = -x^2 + 6x - 5$ e $y = 3 - \sqrt{12-3x}$, indicando di quali coniche si tratta e individuane le principali caratteristiche.
b) Calcola l'area della regione finita di piano i cui punti hanno coordinate $(x; y)$ che soddisfano il seguente sistema di disequazioni nelle due variabili x e y:
$$\begin{cases} y \le -x^2 + 6x - 5 \\ y - 3 \le 0 \\ y \ge 3 - \sqrt{12 - 3x} \end{cases}$$
$\left[\text{b) } A = \frac{14}{3}\right]$

16 a) Studia e rappresenta graficamente la curva di equazione $y = \frac{1}{(x-2)^2}$.
b) Verifica che la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x - 2$ è tangente alla curva data.
c) Calcola l'area della regione finita di piano individuata dalla curva, dalla parabola e dalla tangente alla parabola nel vertice situata nel semipiano di equazione $x - 2 \le 0$.
$\left[\text{c) } A = 2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right]$

17 Un punto si muove su una retta con velocità $v(t) = 2\ln(t+1)$.
a) Determina la legge oraria sapendo che per $t = 0$ lo spazio percorso è 1 m.
b) Trova la legge con cui varia l'accelerazione.
c) Rappresenta $v(t)$ e utilizza il grafico per rappresentare $s(t)$ e $a(t)$.
$\left[\text{a) } s(t) = 2(t+1)\ln(t+1) - 2t + 1;\ \text{b) } a(t) = \frac{2}{t+1}\right]$

18 a) Determina per quale valore del parametro reale $a (a \ge 0)$ l'area delimitata dalla curva $y = \frac{a+x}{x^2+1}$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$ vale $\frac{\pi + \ln 4}{4}$.
b) Rappresenta graficamente la curva trovata.
c) Determina l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di flesso di ascissa positiva.
$\left[\text{a) } a = 1;\ \text{c) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right]$

19 a) Rappresenta la curva di equazione $y = xe^{-2x}$.
b) Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse y e dalla retta $x = \ln 2$.
c) Determina il raggio di base di un cilindro equilatero sapendo che la sua superficie totale è data dall'area trovata.
$\left[\text{a) } -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16};\ \text{c) } \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3 - \ln 4}{6\pi}}\right]$

20 a) Studia il fascio di coniche di equazione $y = \frac{2ax}{x+2}$, $a \in \mathbb{R}$ e determina quelle passanti per i punti $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$ e $B(-1; 2)$.

b) Trova l'equazione della generica retta r passante per il punto base del fascio e l'equazione del luogo t del punto medio del segmento CD, con C e D punti di intersezione di r con le coniche trovate al punto a).
c) Determina l'area della regione finita di piano limitata dalle due coniche trovate e dalla curva simmetrica di t rispetto l'asse y.
$\left[\text{a) } y = \frac{2x}{x+2};\ y = -\frac{2x}{x+2};\ \text{b) } y = mx;\ x = -2;\ \text{c) } 8(1 - \ln 2)\right]$

21 a) Scrivi le primitive della funzione $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2 - x^2 + x^3}\ln(2 - x^2 + x^3)$.
b) Tra le primitive trovate rappresenta graficamente quella passante per $A\left(2; \frac{1}{2}\ln^2 6\right)$ limitandoti allo studio della derivata prima.
c) Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra le rette di equazioni $x = 1$, $x = 2$, l'asse delle ascisse e il grafico della funzione $f(x)$.
$\left[\text{a) } F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(2 - x^2 + x^3) + c;\ \text{c) } \frac{1}{2}(\ln^2 6 - \ln^2 2)\right]$

22 a) Data la parabola di equazione $y = 3x^2 - 2x$ e la retta $y = k$, con $k \ge -\frac{1}{3}$, determina l'area del triangolo individuato dai punti di intersezione della parabola con la retta e dal vertice.
b) Studia l'andamento dell'area al variare di k.
c) Determina l'area della regione finita di piano compresa tra la parabola e l'asse x e il valore k per il quale il rapporto tra l'area trovata e quella del triangolo è uguale a $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
$\left[\text{a) } \frac{1}{9}(1 + 3k)\sqrt{1 + 3k};\ \text{c) } \frac{4}{27};\ k = \frac{1}{3}\right]$

23 a) Studia il fascio di parabole di equazione $y = (3k - 2)x^2 - 3kx$, $k \in \mathbb{R}$ determinando i punti base e la parabola degenere.
b) Trova le parabole del fascio che formano con la retta del fascio un segmento parabolico di area 1.
[a) $O(0; 0)$, $A(1; -2)$; $y = -2x$; b) $y = 6x^2 - 8x$; $y = -6x^2 + 4x$]

24 a) Determina il punto per il quale passano tutte le curve del fascio di equazione $y = \frac{3x - a}{x + a}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e l'equazione della retta r passante per tale punto e perpendicolare alla retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 1$.
b) Trova le equazioni delle curve del fascio che staccano sulla retta r un segmento di lunghezza $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
c) Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra le curve trovate e la retta di equazione $x = \frac{1}{3}$.
$\left[\text{a) } A(0; -1);\ y = 3x - 1;\ \text{b) } y = \frac{3x - 1}{x + 1};\ y = \frac{9x - 5}{3x + 5};\ \text{c) } \frac{20}{3}\ln\frac{6}{5} + 4\ln\frac{3}{4}\right]$

25 a) Rappresenta la curva di equazione $y = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2}$.
b) Determina l'equazione della retta r a essa tangente nel suo punto di intersezione con l'asse x di ascissa positiva.
c) Trova per quale valore del parametro reale a, $a > 1$, l'area della regione finita di piano compresa tra la retta r, la curva e la retta $x = a$ vale $\frac{1}{12} + \frac{3}{16}\ln\frac{9}{5}$.
$\left[\text{b) } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3};\ \text{c) } a = 2\right]$

26 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione:

$$y=\frac{3x^2+6\ln|x-1|}{2}.$$

b) Determina l'equazione della retta r parallela all'asse y passante per il punto di flesso della curva di ascissa minore.

c) Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse delle ascisse, dalla retta di equazione $x=-1$ e dalla retta r.

$\left[\text{b) } x=0;\ \text{c) } -\frac{5}{2}+6\ln 2\right]$

27 a) Studia la funzione $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$ e rappresentala graficamente.

b) Dimostra che l'insieme limitato dal grafico della funzione e dai suoi asintoti ha area finita e calcolane il valore.

$\left[\frac{\pi}{2}\right]$

28 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola p di equazione:

$$y=\frac{1}{2}x^2-x+1.$$

a) Determinare le equazioni della retta t tangente alla parabola nel suo punto C di ascissa 0 e la retta s perpendicolare alla retta t e tangente alla parabola medesima.

b) Dopo aver controllato che la retta s e la parabola si toccano nel punto $A(2;\ 1)$, trovare le equazioni delle circonferenze tangenti alla parabola nel punto A e tangenti alla retta t.

c) Indicata con k la circonferenza, tra quelle trovate, che non ha altri punti in comune con p, oltre ad A, e detto B il punto in cui questa circonferenza tocca la retta t, calcolare l'area della porzione finita di piano delimitata dal segmento BC, dal minore degli archi AB della circonferenza k e dall'arco AC della parabola p.

d) Chiamata r la retta tangente alla circonferenza k e strettamente parallela alla retta t e considerato il segmento parabolico che tale retta r individua sulla parabola p, calcolare il volume del solido da esso generato quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

(*Esame di Stato di Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, sessione ordinaria*, 2001, *problema* 1)

$\left[\text{a) } t: y=-x+1,\ s: y-x-1;\ \text{b) } x^2+y^2-6x+7=0,\ x^2+y^2-2x-4y+3=0;\ \text{c) } \frac{7}{3}-\frac{\pi}{2};\ \text{d) } \frac{572\sqrt{2}}{15}\pi\right]$

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

1 INTRODUZIONE

Problema. Pur non conoscendo la funzione $y=f(x)$, sappiamo che la sua derivata y' soddisfa la seguente relazione: $y'-2x=1$. Vogliamo determinare la funzione incognita $y=f(x)$.

Consideriamo l'equazione data $y'-2x=1$.

- Isoliamo y': $y'=2x+1$;
- integriamo entrambi i membri rispetto alla variabile x:

$$\int y'\,dx=\int(2x+1)\,dx$$

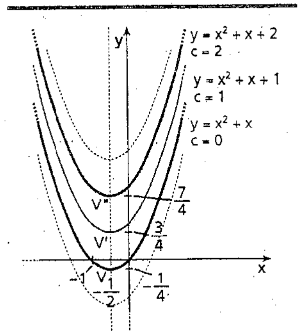
$$y=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+c,\ \text{con } c\in\mathbb{R}.$$

La funzione cercata è $y=x^2+x+c$.

In realtà non si tratta di una singola funzione, bensì di una famiglia di funzioni che si ottengono al variare di c. Tali funzioni sono rappresentate da parabole, il cui vertice in funzione di c è $V\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}+c\right)$, ossia parabole che hanno lo stesso asse di equazione $x=-\frac{1}{2}$.

La relazione iniziale del problema, cioè $y'-2x=1$, viene chiamata *equazione differenziale* e l'*incognita* è la funzione $y=f(x)$, nella variabile x.

■ Sappiamo che $\int y'\,dx=y+k$. Qui e in seguito al posto delle due costanti che risultano dalle integrazioni dei due membri mettiamo un'unica costante c nel secondo membro.



◀ **Figura 1.** Per $c=0$ abbiamo la parabola di equazione $y=x^2+x$, con il vertice $V\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$; per $c=1$ la parabola ha equazione $y=x^2+x+1$, di vertice $V'\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$; per $c=2$ la parabola ha equazione $y=x^2+x+2$, con il vertice $V''\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$, ...
Tutte le parabole hanno la concavità rivolta verso l'alto.

■ Le equazioni delle parabole di questa famiglia hanno una proprietà in comune, quella di avere la stessa derivata: $y'=2x+1$.