Università degli Studi di Ferrara

PERCORSO DIDATTICO DI MATEMATICA CON I SOFTWARE

PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO CON IL SOFTWARE GEOMETRICO CaR

SSIS VIII Ciclo
Laboratorio di attivitá didattiche e trasversali:
'Laboratorio di matematica con i software didattici'

Dott. Mirco Andreotti

A.A. 2007/2008

Indice

0.1 Introduzione 1
0.2 Indicazioni generali 2
0.2.1 Destinatari 2
0.2.2 Prerequisiti 2
0.2.3 Obiettivi 2
0.2.4 Contenuti 2
0.2.5 Tempi dell'intervento didattico 3
0.3 Sviluppo dei contenuti 4
0.3.1 Un esempio introduttivo di utilizzo di CaR 4
0.3.2 Costruzione della retta tangente ad una curva 5
0.3.3 Costruzione della circonferenza goniometrica 8
0.3.4 Il segno e il valore dell'inclinazione della tangente 9
0.3.5 Costruzione dell'andamento del segno della derivata di una funzione 11
0.3.6 Costruzione dell'andamento della derivata di una funzione 12
0.3.7 Studio di una funzione derivabile 13
0.3.8 Studio di una funzione non derivabile 14
0.3.9 Studio di un problema di massimo con CaR 15
0.4 Conclusioni 17

Bibliografia **19**

Elenco delle figure **21**

Elenco delle tabelle **23**

0.1 Introduzione

In questo percorso didattico vogliamo fornire esempi di applicazioni e utili indicazioni per l'utilizzo del software geometrico CaR [1][2] applicato allo studio dei problemi di massimo e minimo da affrontare con gli studenti della scuola secondaria superiore.
L'idea di questo percorso non é quello di proporre uno sviluppo di contenuti relativi ai problemi di massimo e di minimo come si potrebbero affrontare in classe. Piuttosto vogliamo seguire tali contenuti giá trattati nel percorso didattico 'Applicazioni del Calcolo Differenziale'[3] proponendo attivitá da svolgere direttamente nel laboratorio di matematica insieme agli studenti, incentrate sull'utilizzo dei software didattici di matematica. L'idea di base é quindi quella di far costruire agli studenti gli strumenti geometrici necessari per lo studio del problema trattato e non di far trovare loro giá tutti gli strumenti pronti. Per esempio il metodo di costruzione della retta tangente ad una curva dovrá essere sviluppato insieme agli studenti.
Per lo studio dei massimi e minimi di funzioni o in generale problemi di massimo e di minimo si potrebbe pensare all'uso di software quali per esempio Cabrí o altri simili. Per questo percorso é stato scelto il software CaR, con interfaccia CaRMetal, in quanto é un ottimo software geometrico interattivo, quanto Cabrí per esempio, é disponibile per i sistemi operativi piú usati (Linux, Mac e Windows) e soprattutto é gratuito e libero. Riportiamo in Fig.1 le due interfacce disponibili di CaR, quella tradizionale e CaRMetal. Queste ultime caratteristiche sono molto

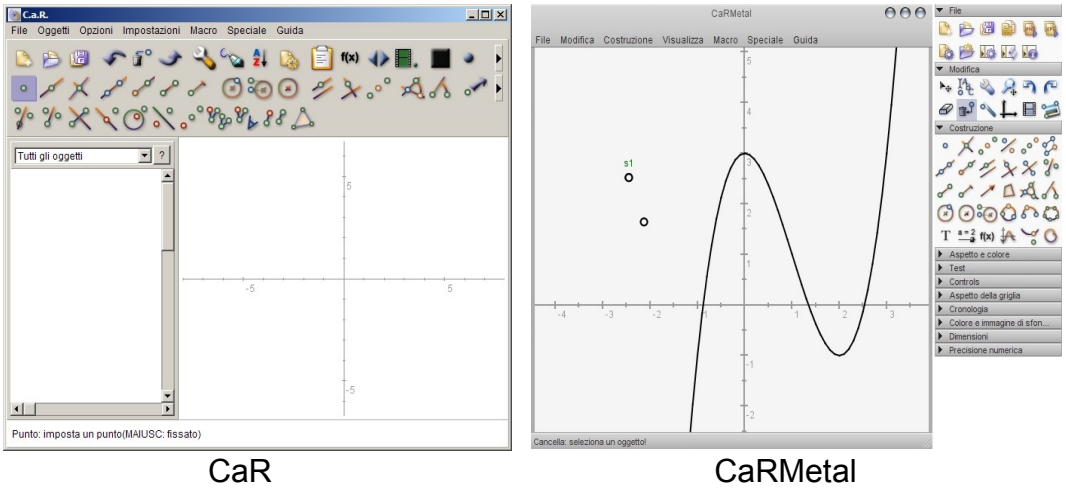

Figura 1: Interfaccia CaR e CaRMetal.

importanti in quanto permettono ad ogni professore e studente un uso privato

senza l'impiego di risorse finanziare, discorso valido anche per la scuola in cui si utilizza questo software.

0.2 Indicazioni generali

0.2.1 Destinatari

Facendo riferimento a quanto riportato in materia di indicazioni dei programmi ministeriali nell'unitá didattica [3], ci proponiamo di svolgere questa attivitá di laboratorio di matematica in una classe quarta di un liceo scientifico PNI. Con 5 ore di matematica alla settimana si puó pensare di programmare un'attivitá di laboratorio con un minimo di completezza.

0.2.2 Prerequisiti

Per quanto riguarda l'uso dei software in sé si richiede che gli studenti abbiamo un minimo di dimestichezza con l'uso del pc in generale. Ovvero come salvare i file, copiare, incollare e altre operazioni di base simili. Per quanto riguarda l'uso del software CaR non si richiede che gli studenti lo sappiano usare, ma ci si propone di farlo imparare usandolo praticamente e fornendo solo alcune alcune nozioni di base.

0.2.3 Obiettivi

L'obiettivo principale di questa attivitá di laboratorio da svolgere con gli studenti é ovviamente quella di far loro comprendere in modo piú approfondito i problemi di massimo e di minimo delle funzioni e non solo.
Trasversalmente si vuole tentare di trasmettere un metodo elastico di approccio ad un nuovo software, quindi di abituarli un minimo ad affrontare con questo spirito un qualsiasi altro nuovo software.

0.2.4 Contenuti

Parallelamente alla trattazione dei contenuti trattati nel percorso didattico [3] ci proponiamo di affrontare in sieme agli studenti nel laboratorio di matematica i contenuti qui elencati. L'idea é di affrontare in classe i singoli argomenti e metterli subito in pratica con il software.

1. Un esempio introduttivo di utilizzo di CaR
2. Costruzione della retta tangente ad una curva

3. Costruzione della circonferenza goniometrica
4. Il segno e il valore dell'inclinazione della tangente
5. Costruzione dell'andamento del segno della derivata di una funzione
6. Costruzione dell'andamento della derivata di una funzione
7. Studio di una funzione derivabile
8. Studio di una funzione non derivabile
9. Soluzione di un problema di massimo con CaR

0.2.5 Tempi dell'intervento didattico

Riportiamo nella Tab.1 uno schema delle ore che dovrebbero essere impiegate per lo sviluppo dei contenuti proposti nell'ipotesi di svolgere tutte le costruzioni presentate insieme agli studenti. Da tenere in considerazione il fatto che gli ar-

Attivitá	Laboratorio (Ore)
Un esempio introduttivo di utilizzo di CaR	1
Costruzione della retta tangente ad una curva	0.5
Costruzione della circonferenza goniometrica	0.5
Il segno e il valore dell'inclinazione della tangente	0.5
Costruzione dell'andamento del segno della derivata di una funzione	0.5
Costruzione dell'andamento della derivata di una funzione	0.5
Studio di una funzione derivabile	0.5
Studio di una funzione non derivabile	0.5
Soluzione di un problema di massimo con CaR	0.5
Totale	5

Tabella 1: Tempi previsti per lo svolgimento del percorso didattico.

gomenti trattati nel laboratorio dovranno seguire ad una preventiva trattazione in classe e saranno sviluppati in parallelo con i contenuti presentati nel percorso didattico [3]. Nel caso in cui si renda necessaria una riduzione dei tempi, allora

si puó procedere alla preparazione delle macro relative a certe costruzioni e farle usare direttamente agli studenti.

0.3 Sviluppo dei contenuti

Facendo riferimento alle sezioni del percorso didattico [3] in cui tratta lo studio della derivata prima in prossimitá dei massimi e minimi di una funzione, ci proponiamo di realizzare con CaR delle costruzioni geometriche che ci permettano di visualizzare appunto i questi comportamenti della derivata prima.
In sintesi quindi quello che dovremo ottenere sará la costruzione della retta tangente ad un curva rappresentante una funzione nel piano cartesiano e i comportamenti di tale retta, in particolare l'andamento dell'inclinazione al variare del punto di tangenza sulla curva.

0.3.1 Un esempio introduttivo di utilizzo di CaR

Visto che il nostro primo obiettivo é quello di costruire la retta tangente ad una curva, pensando a come questa si ottiene graficamente [1], ci si rende facilmente conto che dobbiamo capire quanto piccolo puó essere un segmento in CaR. Per ottenere la tangente ad una curva infatti dobbiamo far tendere a zero un intervallo, chiaramente questo non deve essere zero, ma deve essere il piú piccolo possibile. Avendo a che fare con un software, questo avrá una certa precisione che dobbiamo trovare. Diciamo che questo primo esercizio puó essere visto anche come prima applicazione di CaR.

A tale proposito ci proponiamo di costruire un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$ e di verificare quindi con quante cifre decimale CaR rappresenta questo numero. Un segmento di tale lunghezze é per esempio la diagonale di un quadrato di lato 1, oppure l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 1. Scegliamo questa seconda opzione e riportiamo in Fig.2 la costruzione ottenuta con la seguente procedura:

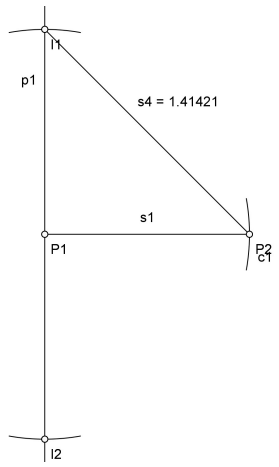

Figura 2: Costruzione geometrica di $\sqrt{2}$.

1. tracciamo il segmento $s1$ di lunghezza fissa pari a 1;

[1] Si rimanda alla definizione grafica della derivata di una funzione.

2. tracciamo la retta perpendicolare al segmento $s1$ passante per l'estremo $P1$;
3. tracciamo la circonferenza di centro l'estremo $P1$ e passante per $P2$, quindi di raggio $s1$;
4. evidenziamo l'intersezione $I1$ fra la circonferenza e la retta precedentemente tracciata, in questo modo otteniamo il segmento $p1$ ortognale a $s1$;
5. completiamo il triangolo rettangolo isoscele $P1P2I1$ di lato 1 tracciando il segmento $s4$;

Il segmento $s4$ cosí ottenuto avrá lunghezza $\sqrt{2}$ essendo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 1. Notiamo che CaR riporta come misura del segmento $s4$ un numero di 5 cifre decimali. Sappiamo bene che $\sqrt{2}$ non ha solo 5 cifre decimali, quindi significa che CaR ha una precisione di 10^{-5}.

In seguito cercheremo di non lavorare al limite di questa precisione, in quanto in questa situazione CaR non salva bene le costruizioni e le macro [2], quindi si rischia di perdere informazioni.

0.3.2 Costruzione della retta tangente ad una curva

Nello studio di funzione é necessario fare uso della derivata della funzione in esame. Geometricamente la derivata di una funzione in un punto é data dall'inclinazione, o coefficiente angolare, delle retta tangente in quel punto alla curva rappresentante la funzione nel piano cartesiano. Par queste ragioni é necessario procedere alla costruzione della retta tangente ad una curva.

Osservazioni sulle possibili costruzioni della tangente

Per ottenere la costruzione della tangente ad una curva si puó procedere in diversi modi. Elenchiamo nel seguito alcune costruzioni prese in considerazione che poi sono state scartate per i motivi riportati:

1. Si considerano due ascisse che si avvicinano e individuano una retta secante la curva, ma questo metodo risulta piuttosto laborioso.
2. Si considera un segmento con estremi sulla curva che definiscono una retta, quindi si riduce al minimo la lunghezza del segmento. Con questo metodo si incontrano delle difficoltá nell'uso delle macro di CaR, in quanto un segmento di lunghezza fissa non viene creato con due estremi secanti un curva,

[2] Probabilmente queste indicazioni si possono trovare anche nel tutorial di CaR, ma si possono scoprire anche con un po' di esperienza e di pratica con l'utilizzo del software.

mentre con un segmento di lunghezza variabile non si puó impostare con precisione la lunghezza minima in quanto é modificabile solo graficamente.

3. Si considera una circonferenza di raggio fisso con centro sulla curva, si traccia la retta passante per il centro e uno dei punti di intersezione fra curva e circonferenza, quindi si riduce al minimo il raggio della circonferenza. Creando poi una macro di questa costruzione si vede che finché si utilizza la stessa sessione di lavoro la macro funziona correttamente, nel momento in cui invece si ricarica la macro in una diversa sessione di lavoro allora questa produce la costruzione voluta, ma con una circonferenza di lunghezza 1 e non minima, quindi la retta non risulta piú apparentemente tangente, ma risulta secante.

Dalle precedenti considerazioni abbiamo scelto di procedere con una costruzione che risulta piuttosto semplice e che mantiene le proprietá invariate anche in sessioni di lavoro diverse quando questa viene utilizzata come macro. Riportiamo nella sezione seguente la costruzione a le indicazioni per la macro corrispondente.

Costruzione della tangente

Per la costruzione della retta tangente usiamo un segmento fisso arbitrario, il quale definisce il raggio di un circonferenza con centro sulla curva. Si costruisce quindi la retta passante per il centro della circonferenza e uno dei punti di intersezione fra questa e la curva. A questo punto basta ridurre al minimo la misura del segmento fisso e corrispondentemente si ridurrá al minimo il raggio della circonferenza facendo diventare la retta secante una retta apparentemente tangente alla curva.

In questa costruzione faremo uso delle seguenti macro di CaR:

1. *Funzione o curva parametrica*, la quale costruisce una curva descritta da una certa funzione.
2. *Segmento di lunghezza fissata*, la quale costruisce un segmento di lunghezza definita dall'utente e che puó essere variata in qualsiasi momento.
3. *Circonferenza da 3 punti*, la quale costruisce una circonferenza a partire da 2 punti la cui distanza definisce il raggio e 1 punto che definisce il centro. Questa macro é equivalente al trasporto di una misura.
4. *Retta*, costruisce una retta dati 2 punti.

Il metodo scelto per la costruzione della retta tangente ad una curva, rappresentato in Fig.3, si sviluppa nelle seguenti fasi:

1. Costruiamo una funzione a piacere, nell'esempio riportato usiamo $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

2. Costruiamo il segmento $s1$ di lunghezza fissata.

3. Costruiamo la circonferenza $c1$ di raggio pari alla misura di $s1$ con centro sulla curva.

4. Costruiamo la retta passante per il centro della circonferenza $P3$ e per il punto $P4$ di intersezione fra la circonferenza e la curva. La costruzione ottenuta fin qui é riportate in Fig.3(a).

5. Riduciamo al minimo (10^{-5}) la lunghezza del segmento $s1$ e nascondiamo la circonferenza e il punto di intersezione fra questa e la curva. La retta risultante ora é tangente alla curva come mostrato in Fig.3(b).

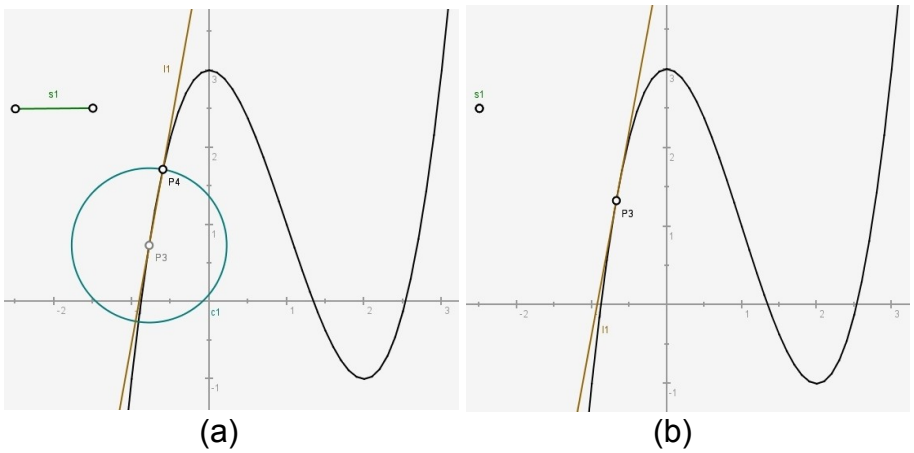

Figura 3: Costruzione della retta tangente ad una curva. (a) Prima fase della costruzione della retta secante, (b) seconda fase di riduzione a retta tangente.

Muovendo il punto $P3$ é possibile vedere come la retta muovendosi rimanga tangente alla curva. Facendo riferimento all'andamento della tangente in prossimitá dei massimi e minimi per funzioni derivabili possiamo vedere come in corrispondenza di questi punti la retta diventi orizzontale, che implica derivata prima nulla.

Per inglobare questa costruzione in una macro impostiamo come oggetti iniziali il segmento, la curva e un punto sulla curva e come oggetti finali la retta. Applicando questa macro tutte le costruzioni intermedie non risulteranno visibili.

0.3.3 Costruzione della circonferenza goniometrica

Per studiare l'andamento della derivata prima in prossimitá dei massimi e minimi abbiamo bisogno di conoscere l'inclinazione della retta tangente alla curva, quindi dobbiamo conoscere la tangente dell'angolo formato dalla retta tangente e l'asse delle ascisse. Come primo passo per determinare il segno della derivata prima e/o il valore dell'inclinazione possiamo pensare di costruire la circonferenza goniometrica, sulla quale trasporteremo una retta passante per il centro e parallela alla retta tangente alla curva. Procediamo poi alla costruzione geometrica della tangente dell'angolo fra la retta parallela e una retta orizzontale. Per la costruzione della circonferenza goniometrica seguiamo la seguente procedura riferita alla Fig.4:

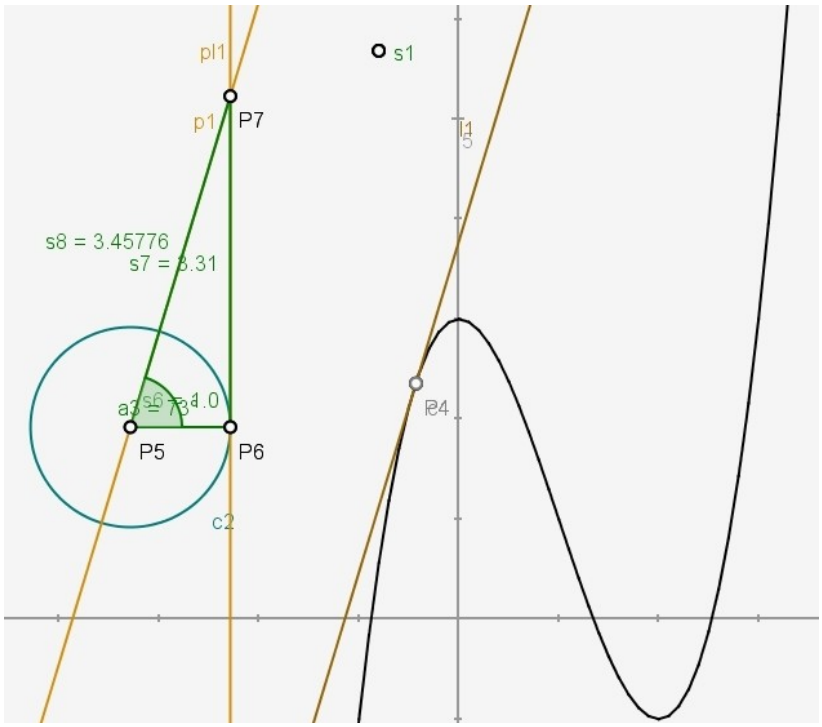

Figura 4: Costruzione della circonferenza goniometrica e del segmento rappresentante la tangente di un angolo.

1. Costruiamo una funzione a piacere e la retta tangente in un punto usando la macro precedentemente realizzata.

2. Costruiamo una circonferenza $c2$ di raggio unitario fisso. Vogliamo far notare che questa circonferenza é del tutto opzionale, come risulterá chiaro dal prossimo punto.

3. Costruiamo un segmento $s6$ fisso con un estremo il centro $P5$ della circonferenza e l'altro estremo $P6$ sulla circonferenza. Editiamo l'estremo $P6$ del segmento $s6$ e rendiamo questo orizzontale impostando la coordinata y di $P6$ uguale alla coordinata y di $P5$ con l'espressione $y(P5)$. Impostiamo inoltre che nella direzione orizzontale tale punto disti 1 da $P5$ con l'espressione $x(P5) + 1$. Questa impostazione rende la precedente circonferenza inutile, ma la lasciamo costruita a carattere didattico.

4. Costruiamo una retta $p1$ ortogonale al segmento $s6$ e passante per l'estremo $P6$.

5. Costruiamo una retta parallela $pl1$ alla tangente alla curva e passante per il centro della circonferenza.

6. Costruiamo il segmento $s7$ con estremi $P6$ e punto di intersezione $P7$ e il segmento $s8$ con estremi $P5$ e $P7$. Nascondiamo quindi le rette $p1$ e $pl1$ usate per la costruzione.

7. Costruiamo l'angolo $P6\widehat{P5}P7$.

La misura del segmento $s7$ rappresenta il valore assoluto della tangente dell'angolo $P6\widehat{P5}P7$, il quale altro non é che l'angolo formato dalla retta tangente alla curva con una retta orizzontale, quale potrebbe essere per esempio l'asse delle ascisse.

Per comoditá di utilizzo impostiamo una macro con la precedente costruzione, la quale avrá come oggetti iniziali la retta tangente alla curva e il centro dela circonferenza, mentre come oggetti finali avrá il triangolo $P5\ \overset{\triangle}{P6}\ P7$ e la circonferenza.

0.3.4 Il segno e il valore dell'inclinazione della tangente

Per poter studiare il segno e il valore dell'inclinazione della retta tangente dobbiamo aggiungere alla precedente costruzione una ulteriore costruzione che ci permetta di ottenere queste informazioni. A tale prposito si potrebbe pensare di usare l'ampiezza dell'angolo di inclinazione, ma ci rendiamo conto che in CaR gli angoli hanno sempre ampiezza positiva. Sempre riferendoci agli angoli potremmo pensare di usare la misura acuta e ottusa dello stesso angolo, ma facendo alcune prove si incontrano delle difficoltá in sede di riutilizzo di macro che si basano su questa differenziazione.

Abbandoniamo quindi la strada degli angoli per utilizzare la lunghezza del segmento $s5$ con estremi $P8P9$, riportato in Fig.5, il quale rappresenta la tangente dell'angolo sulla circonferenza goniometrica. Riferendoci alla Fig.5 possiamo facilmente notare che se il punto $P9$ ha ordinata maggiore di quella del punto $P8$, allora il valore della tangente sará positivo, differentemente il valore della tangente sará negativo.

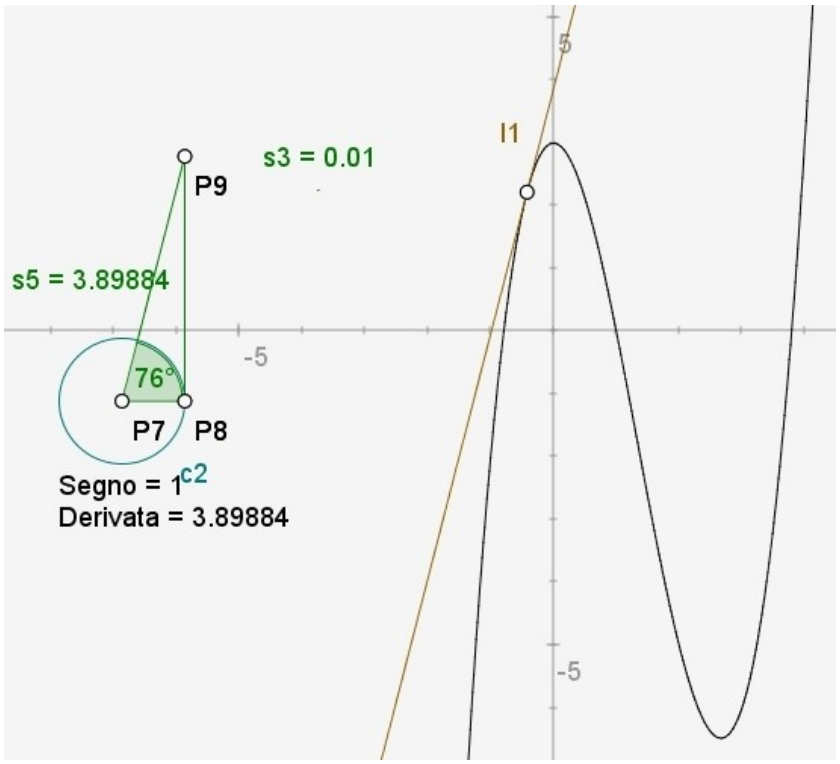

Figura 5: Costruzione del segno e del valore della derivata.

Possiamo quindi determinare il segno e il valore della derivata della funzione con le seguenti procedure:

Segno. Per ottenere il segno della derivata aggiungiamo un'espressione algebrica la quale riporterá il valore $+1$ se $y(P9) > y(P8)$ e il valore -1 se $y(P9) < y(P8)$. Tale espressione algebrica si ottiene con l'espressione condizionale $if(y(P9) > y(P8), +1, -1)$. Il valore ottenuto é riportato dall'espressione *Segno* in Fig.5.

Derivata. Per ottenere il valore della derivata aggiungiamo un'espressione algebrica la quale riporterá la misura $+s5$ del segmento $s5$ se $y(P9) \geq y(P8)$ e la misura negativa $-s5$ del segmento $s5$ se $y(P9) < y(P8)$. Tale espressione alge-

brica si ottiene con l'espressione condizionale $if(y(P9) >= y(P8), +s5, -s5)$. Il valore ottenuto é riportato dall'espressione *Derivata* in Fig.5.

Con le precedenti costruzioni siamo in grado di procedere alla costruzione e allo studio dell'andamento del segno e del valore della derivata prima della funzione che affrontiamo nei prossimi due paragrafi.

0.3.5 Costruzione dell'andamento del segno della derivata di una funzione

Come spiegato nel percorso didattico [3], per lo studio dei massimi e minimi é interessante determinare l'andamento del segno della derivata prima della funzione in funzione della variabile indipendente. Viste tutte le precedenti costruzioni preparate, per costruire con CaR questo andamento basta costruire un punto tracciante con la seguente procedura:

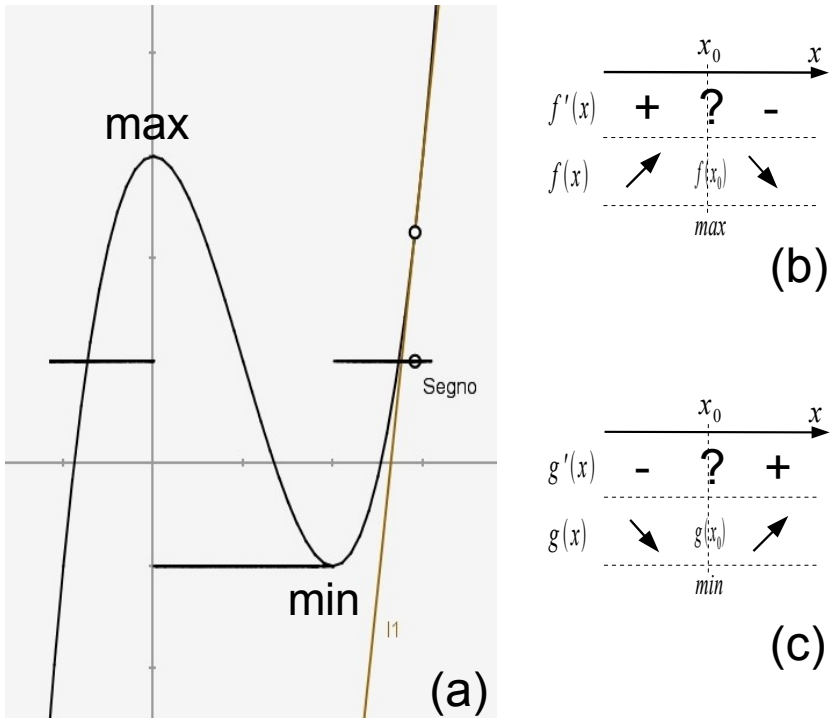

Figura 6: Andamento del segno della derivata in prossimitá di massimi e minimi.

1. Costruiamo un punto con ascissa la stessa del punto di tangenza sulla curva e ordinata il valore del segno ottenuto dalla costruzione del paragrafo 0.3.4. Aggiungiamo quindi questa costruzione nella macro che calcola il segno.

2. Utilizzando quindi la macro *Traccia di un punto*, selezioniamo il punto appena costruito e variamo il punto di tangenza ottenendo cosí l'andamento del segno della derivata riportato in Fig.6(a).

Guardando l'andamento del segno della derivata in Fig.6(a) ottenuto con la precedente costruzione notiamo che in corrispondenza di un massimo la derivata é prima positiva, poi diviene negativa, quindi si verifica la situazione riportata in Fig.6(b). Differentemente in corrispondenza di un minimo la derivata é prima negativa, poi diviene positiva, quindi si verifica la situazione riportata in Fig.6(c).

0.3.6 Costruzione dell'andamento della derivata di una funzione

Oltre al segno della derivata prima é anche interessante conoscere l'andamento della derivata prima della funzione in funzione della variabile indipendente. In modo del tutto analogo alla costruzione dell'andamento del segno della derivata possiamo costruire l'andamento del valore della derivata con la costruzione del punto tracciante seguendo la seguente procedura:

1. Costruiamo un punto con ascissa la stessa del punto di tangenza sulla curva e ordinata il valore della derivata ottenuto dalla costruzione del paragrafo 0.3.4. Aggiungiamo quindi questa costruzione nella macro che calcola il valore della derivata.

2. Utilizzando quindi la macro *Traccia di un punto*, selezioniamo il punto appena costruito e variamo il punto di tangenza ottenendo cosí l'andamento del valore della derivata riportato in Fig.7.

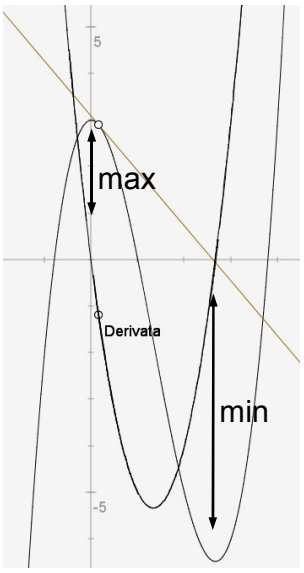

Figura 7: Andamento del valore della derivata.

Guardando l'andamento del valore della derivata in Fig.7 ottenuto con la precedente costruzione su una funzione derivabile, notiamo che in corrispondenza del massimo e del minimo relativi la derivata si annulla. Per quanto riguarda l'andamento del segno possiamo concludere quanto concluso nel precedente paragrafo. Usiamo quanto costruito finora per studiare alcune funzioni nel paragrafo seguente.

0.3.7 Studio di una funzione derivabile

Per quanto riguarda lo studio dei massimi e minimi per una funzione derivabile, possiamo riferirci ai risultati ottenuti nei precedenti due paragrafi. Riassumiamo gli andamenti di segno e di valore della derivata prima nella Fig.8, dalla quale possiamo notare che in corrispondenza di un massimo la derivata prima si annulla, quindi prima é positiva e dopo il massimo é negativa, in quanto prima la funzione é crescente poi decrescente. In corrispondenza di un minimo la derivata prima si annulla, come per il massimo, ma questa volta prima é negativa poi diventa positiva, in quanto la funzione prima é decrescente poi diviene crescente.

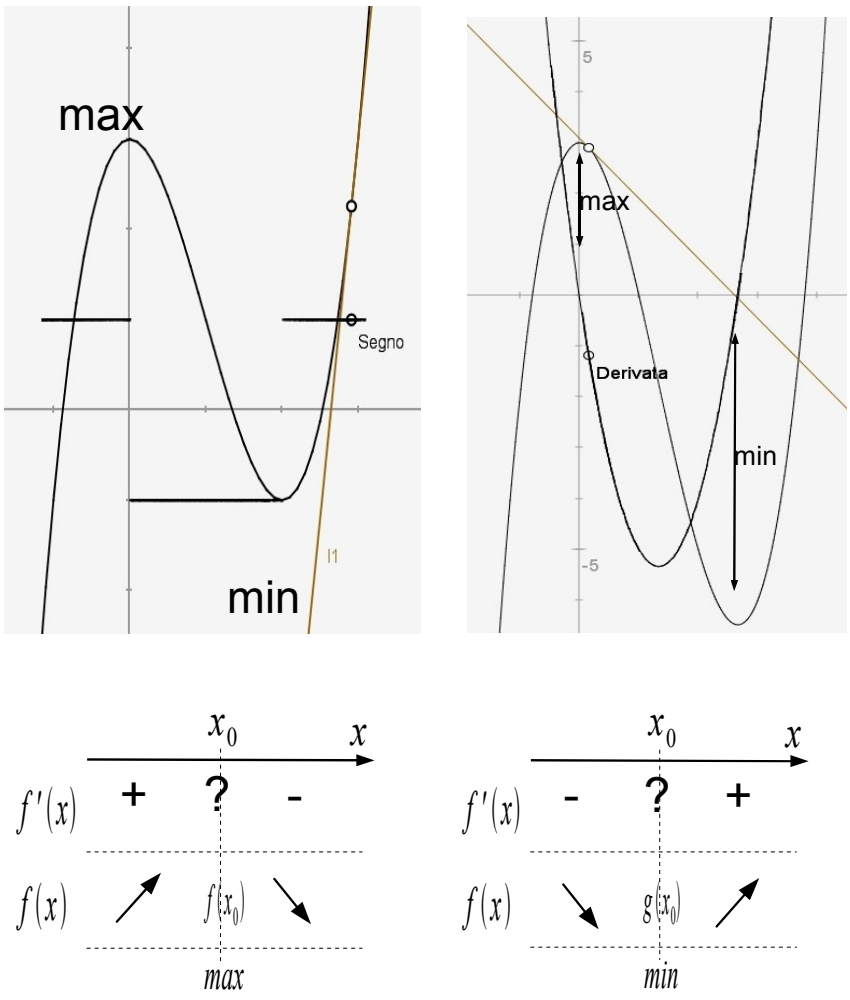

Figura 8: max e min in una funzione derivabile.

0.3.8 Studio di una funzione non derivabile

Piú interessante é lo studio di una funzione con un punto di massimo in cui non sia derivabile. Consideriamo per esempio la funzione:

$$f(x) = -2e^x|x|$$

rappresentata in Fig.9(a)(b). Procedendo con la costruzione del segno e della derivata riportiamo in Fig.9(a) l'andamento del segno della derivata prima, mentre in Fig.9(b) riportiamo l'andamento della derivata prima.
Dallo studio del segno della derivata prima possiamo vedere che la funzione in

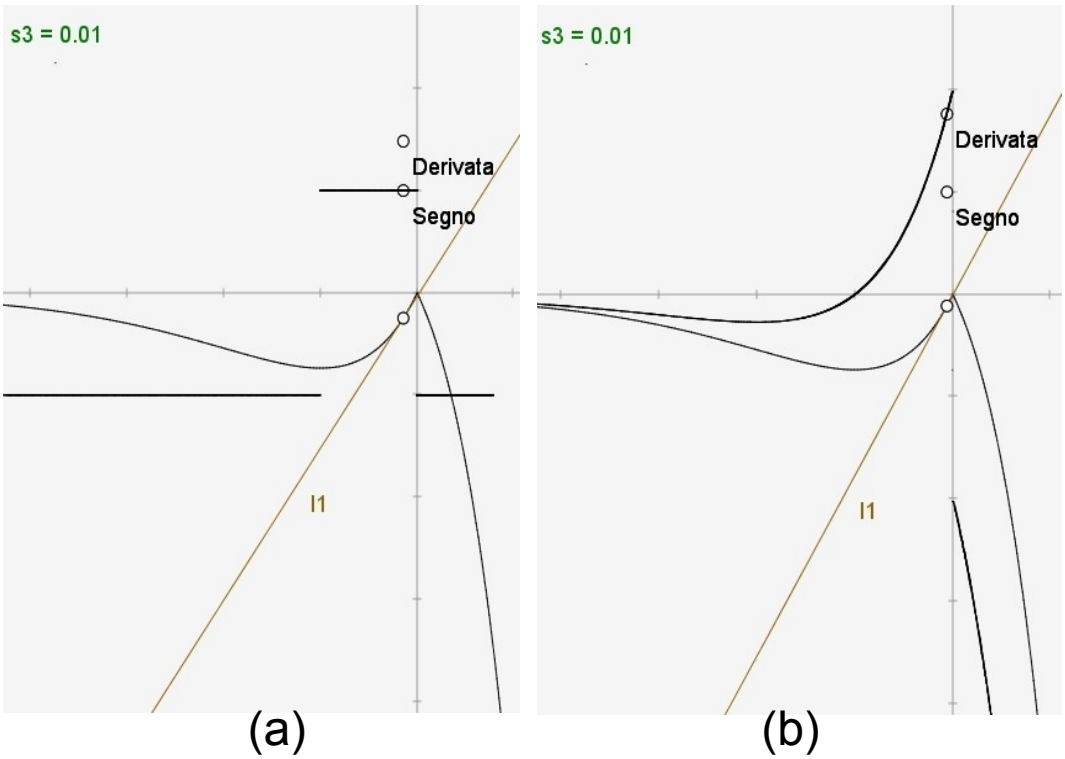

Figura 9: Max e min in una funzione non derivabile, $f(x) = -2e^x\|x\|$.

questione mostra un punto di minimo locale in corrispondenza di $x = -1$ e un punto di massimo assoluto in corrispondenza di $x = 0$.

Dallo studio del valore della derivata possiamo concludere quanto concluso con lo studio del segno, ma possiamo aggiungere la considerazione sul fatto che la funzione non é derivabile per $x = 0$ in quanto, come si vede chiaramente dall'andamento di Fig.9(b) la derivata destra e sinistra in $x = 0$ sono diverse, la prima é negativa, mentre la seconda é positiva. Possiamo inoltre concludere che

il punto $x = 0$ é un punto di massimo assoluto, in quanto si vede chiaramente che la funzione é sempre inferiore a $f(0) = 0$, cioé é sempre negativa. Il punto di massimo assoluto é un punto di non derivabilitá della funzione, in quanto é un punto angoloso.

0.3.9 Studio di un problema di massimo con CaR

Riproponiamo uno dei classici problemi di massimo che si risolvono per via algebrica, come proposto nel percorso didattico [3]:

Si deve realizzare un recinto rettangolare avendo a disposizione 100 m di rete. Tale recinto deve essere il piú capiente possibile, in termini di superficie racchiusa. Quanto devono essere i lati di questo rettangolo?

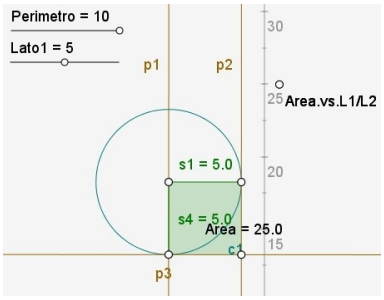

Figura 10: Costruzione del rettangolo a perimetro fisso.

Ci proponiamo di affrontare questo problema con il software CaR procedendo con la seguente costruzione riportata in Fig.10:

1. Costruiamo 2 espressioni algebriche con *sliderbar*, in modo che siano varibaili dall'utente, per rappresentare il perimetro P e un lato $L1$ del rettangolo da costruire. Come variazioni di P ed $L1$ impostiamo a livello indicativo $0 - 10$ per entrambi.
2. Costruiamo una segmento $s1$ con larghezza fissa pari alla misura del lato $L1$.
3. Costruiamo le due rette ortogonali al segmento $s1$ e passanti per i due estremi di questo.
4. Costruiamo una circonferenza $c1$ di raggio fisso pari a $P - L1$ con centro uno degli estremi del segmento $s1$ in modo da individuare il secondo lato del rettangolo che mantenga costante il perimetro.
5. Costuiamo il segmento $s4$ fra il centro della circonferenza e il punto di intersezione fra questa e la retta ortogonale a $s1$.
6. Tracciamo la retta ortogonale a $s4$ e passante per il precedente punto di intersezione al fine di completare il rettangolo.
7. Costruiamo il poligono che identifica il rettangolo costruito, il quale mostra l'area del rettangolo.

8. Costruiamo un punto avente come ascissa il rapporto fra i lati del rettangolo, quindi $s1/s4$, e ordinata l'area del rettangolo.

Eseguita questa costruzione riportata in Fig.10, possiamo procedere a nascondere gli elementi di costruzione che non interessano per lo studio del problema, quindi le rette e la circonferenza. Procediamo quindi con l'eseguire la traccia del punto *Area.vs.L1/L2* al variare del lato $L1$ come mostrato in Fig.11. Dalla configurazione illustrata in figura risulta che l'aera massima si ha per $x = 1$, cioé quando i dua lati sono uguali $L1 = L2$.

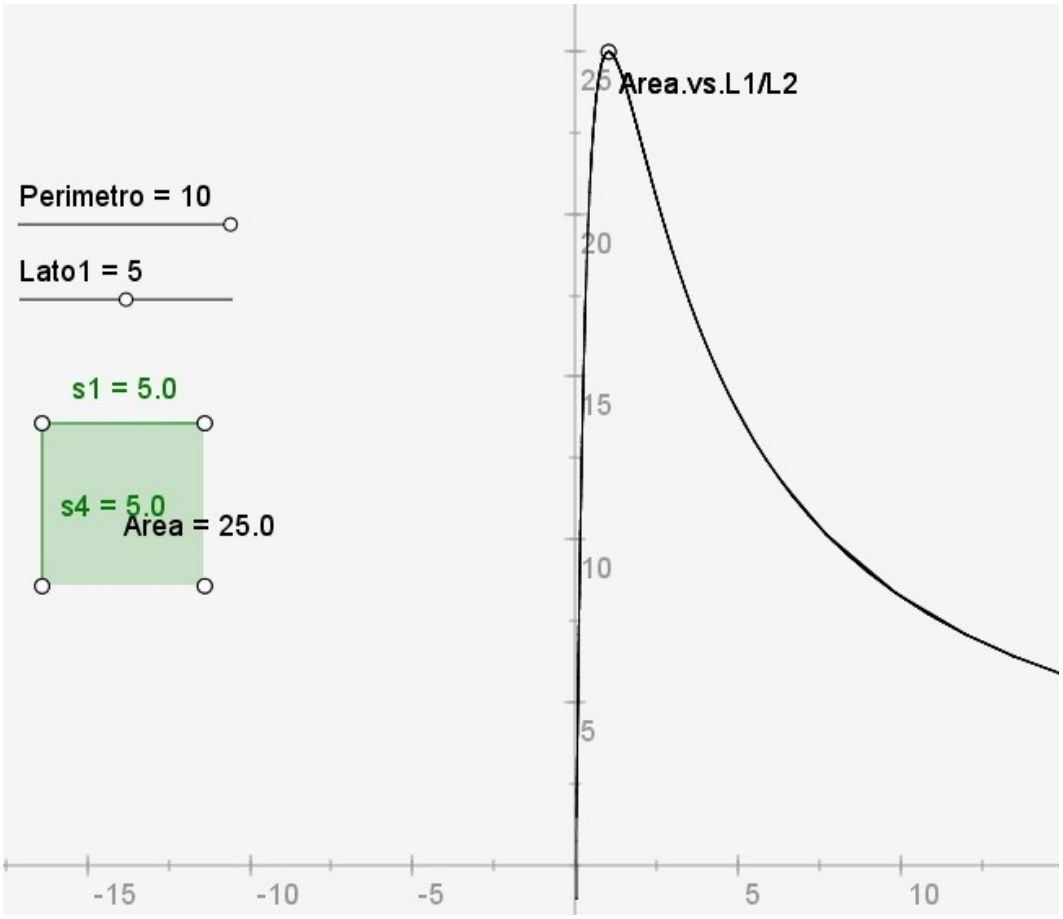

Figura 11: Andamento dell'area del rettangolo con perimetro fisso in funzione del rapporto fra i lati.

Ricaviamo analiticamente la funzione che esprime l'area del rettangolo in funzione del rapporto fra i lati e verifichiamo se corrisponde alla funzione ottenuta dalla traccia del punto costruito con CaR.
Impostiamo il sistema relativo al problema, indicando con P il semiperimetro

anziché il perimetro e indicando il rapporto fra i lati con $x = L1/L2$:

$$\begin{cases} S = L1 \cdot L2 \\ P = L1 + L2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = x \cdot L2^2 \\ P = L2 \cdot (1 + x) \end{cases}$$

dalla seconda relazione ricaviamo $L2 = P/(1 + x)$ e sostituiamo questo nella prima in modo da ottenere la seguente espressione dell'area:

$$S = P^2 \frac{x}{(1 + x)^2}$$

Verifichiamo che la funzione ottenuta sia effettivamenta quella determinata dalla precedente costruzione andando a graficare questa funzione sulla costruzione eseguita. Si puó facilmente notare che il punto *Area.vs.L1/L2*, al variare di L1, si muove sulla funzione disegnata. Non riportiamo la figura rappresentante questa situazione in quanto risulterebbe uguale alla Fig.11.
Chiaramente il problema si poteva anche affrontare in modo diverso, per esempio determinando l'espressione dell'area come funzione di un lato e del perimetro, come viene proposto nel percorso didattico [3]. Con questo secondo metodo si ottiene una funzione piú semplice, cioé una parabola.

0.4 Conclusioni

Con questo percorso abbiamo voluto fornire alcune attivitá di supporto per la trattazione dell'argomento studio di funzione con l'utilizzo dei software geometrici. Sono state affrontate costruzioni che dovrebbero guidare gli studenti ad una migliore comprensione degli argomenti coinvolti in quanto é un modo per toccare con quello che di solito si vede solo sulla lavagna o sui libri senza dinamicitá. Con il supporto di questi software si possono studiare questi argomenti con una visualizzazione dinamica dei comportamenti degli strumenti affrontati. Queste visualizzazioni potrebbero essere di aiuto agli studenti in quanto permettono di vedere quello che di solito si deve immaginare.

Affrontate le costruzioni presentate in questo percorso, se il tempo lo permette, si potrebbe spendere anche una lezione ad indagare di piú sul software stesso, per esempio analizzando quelle macro giá preparate che eseguono all'incirca le stesse costruzioni preparate dagli studenti. CaR infatti mette giá a disposizione una macro per la retta tangente, una per i massimi, una per i minimi e altre ancora. Usare direttamente queste macro, a nostro avviso, farebbe perdere di significato l'attivitá stessa di uso del software.

Il software geometrico CaR si é dimostrato essere un ottimo strumento per questi studi. Puó essere utilizzato con l'interfaccia tradizionale CaR oppure con l'interfaccia CaRMetal. Entrambe le interfacce sono potenzialmente equivalenti. La prima fa molto uso delle finestre di dialogo, quindi forse per gli studenti risulta piú intuitiva l'interfaccia CaRMetal, anche se a volte risulta un poco laboriosa, soprattutto in fase di modifiche di oggetti giá costruiti. In generale ritengo comunque CaR un ottimo software per la didattica e non solo.

Bibliografia

[1] Sito ufficiale in Inglese del software C.a.R.:
http://www.z-u-l.de

[2] Sito ufficiale della versione C.a.R. Metal del software C.a.R., il quale propone versioni del software Java-Based per i sistemi operativi Linux, Mac e Windows:
http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html

[3] Dott. Mirco Andreotti, 'Applicazioni del calcolo differenziale: studio di funzione reale di variabile reale e problemi di massimo e di minimo (anche per via elementare)'. Percorso didattico di matematica svolto durante l'attivitá di tirocinio alla SSIS VIII Ciclo di Ferrara nell'AA 2007/2008.
Percorso didattico di matematica

Elenco delle figure

1 Interfaccia CaR. 1
2 Costruzione di $\sqrt{2}$. 4
3 Costruzione della retta tangente. 7
4 Costruzione della circonferenza goniometrica. 8
5 Costruzione del segno e del valore della derivata. 10
6 Andamento del segno della derivata. 11
7 Andamento del valore della derivata. 12
8 Max e min in una funzione derivabile. 13
9 Max e min in una funzione non derivabile. 14
10 Costruzione del rettangolo. 15
11 Andamento dell'area del rettangolo con perimetro fisso. 16

Elenco delle tabelle

1 Tempi dell'intervento didattico. 3