Lezione 13

I linguaggi del primo ordine/1

Espressioni di generalità/1

Espressioni di generalità: “tutti”, “ciascuno”, “alcuni”, “qualche”, “un, nessun …

Tutti gli italiani amano il calcio

Nessun italiano odia il calcio

Qualche italiano ama il calcio

Alcuni italiani odiano il calcio

Un uomo attraversa la strada

Ciascun ospite ricevette un regalo

Espressioni di generalità/2

Le espressioni di generalità non fanno parte dei linguaggi booleani. Tuttavia, in certi casi, è possibile tradurle in un linguaggio booleano.

Consideriamo il linguaggio dell'aggressività:

"Tutti sono aggressivi con arabella" si traduce:

$G(a,a) \wedge G(b,a) \wedge G(c,a)$

"Qualcuno è aggressivo con arabella" si traduce:

$G(a,a) \vee G(b,a) \vee G(c,a)$

Espressioni di generalità/3

Supponiamo che il **dominio** (= insieme degli oggetti a cui si riferiscono i nomi) di un dato linguaggio booleano sia **finito** e che a_1, a_2, …, a_n siano gli oggetti che lo costituiscono (per es. in LA, arabella, bianca e carlo).

Sia P(…) una qualsiasi proposizione aperta del linguaggio booleano (per es. "… è aggressivo con arabella").

Che P(…) è vera di **tutti** gli individui del dominio si può esprimere così:

$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$

Che P è vera di **qualche** individuo del dominio si esprime così:

$P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$

Espressioni di generalità/4

Questo metodo funziona sempre, anche per casi più complessi:

Qualche piccione occupa la celletta n. 3 (la n. 3 è occupata):

$O(m,3) \vee O(d,3) \vee O(t,3)$

Tutte le cellette sono occupate:

$[O(m,1) \vee O(d,1) \vee O(t,1)] \wedge [O(m,2) \vee O(d,2) \vee O(t,2)] \wedge$

$\wedge \ldots [O(m,5) \vee O(d,5) \vee O(t,5)]$

La traduzione è tanto più lunga quanto maggiore è il numero degli oggetti del dominio.

Espressioni di generalità/5

Il successo di questo metodo di traduzione dipende in modo cruciale dalle seguenti condizioni:

1) La **finitezza** del dominio

2) La conoscenza della sua **cardinalità** (= il numero di individui che costituiscono il dominio)

Immaginate una piccionaia con **infinite** cellette. Non è possibile tradurre la proposizione “almeno una celletta è occupata”.

Se considerassimo, oltre ai nostri tre piccioni, anche quelli di passaggio, non vi sarebbe modo di tradure “nessun piccione occupa la celletta n. 1”.

Espressioni di generalità/6

Concentriamo la nostra attenzione sulle espressioni “tutti” e “qualcuno” (e sui loro sinonimi).

Dal punto di vista sintattico, queste espressioni hanno in italiano un comportamento identico a quello dei nomi.

Dalla proposizione aperta “… è aggressivo con arabella” possiamo formare una proposizione chiusa sia riempiendo il suo spazio vuoto con “carlo”, sia riempiendolo con “qualcuno”:

Carlo è aggressivo con arabella

Qualcuno è aggressivo con arabella

Espressioni di generalità/7

Tuttavia il comportamento **logico** delle espressioni di generalità è molto diverso da quello dei nomi:

L'inferenza:

Qualcuno è aggressivo con arabella

Qualcuno è aggressivo con bianca

Qualcuno è aggressivo sia con arabella sia con bianca

è **corretta**.

Ma se sostituiamo il nome "carlo" con l'espressione "qualcuno" otteniamo un'inferenza scorretta!

Linguaggi del primo ordine/1

Dunque la sintassi logica delle espressioni di generalità deve necessariamente essere diversa da quella dei nomi!

Per descrivere questa sintassi abbiamo bisogno di linguaggi più **espressivi** dei linguaggi booleani: i **linguaggi del primo ordine.**

Questi linguaggi includono, oltre a quelle dei linguaggi booleani, due nuove categorie di espressioni:

-le **variabili**: x,y,w,z (eventualmente con sottoscritti: x_2, w_3, ecc.)

- i **quantificatori**:

  per ogni oggetto …

  per qualche oggetto …

Linguaggi del primo ordine/2

L’espressione “per ogni oggetto …” viene chiamata **quantificatore universale** e viene abbreviata così:

$(\forall \ldots)$

Mentre l’espressione “per qualche oggetto …” viene chiamata **quantificatore esistenziale** e viene abbreviata così:

$(\exists \ldots)$

Linguaggi del primo ordine/3

Supponete di voler esprimere in un linguaggio del primo ordine che la proposizione aperta "… è aggressivo con arabella" è vera di **tutti** gli oggetti del dominio. Allora dovete:

1) Riempire lo spazio vuoto della proposizione aperta con una **variabile** a vostra scelta, per es. x

x è aggressivo con arabella

2) Riempire lo spazio vuoto del **quantificatore universale** "per tutti gli oggetti x" con la **stessa** variabile

3) per tutti gli oggetti x

4) Premettere a "x è aggressivo con arabella" l'espressione "per tutti gli oggetti x"

per tutti gli oggetti x, x è aggressivo con arabella

Linguaggi del primo ordine/4

La proposizione

per tutti gli oggetti x, x è aggressivo con arabella

che in forma abbreviata si scrive

$(\forall x)\ G(x,a)$

ha, in italiano lo stesso significato dell'espressione

Tutti sono aggressivi con arabella

ed è vera se è solo se la proposizione aperta "…è aggressivo con arabella" è vera di **tutti** gli oggetti del dominio.

Linguaggi del primo ordine/5

Analogamente, per esprimere il fatto che la proposizione aperta “… è aggressivo con arabella” è vera di qualche (almno un) **oggetto** del dominio dovete:

1) Riempire lo spazio vuoto della proposizione aperta con una **variabile** a vostra scelta, per es. x

x è aggressivo con arabella

2) Riempire lo spazio vuoto del **quantificatore esistenziale** “per qualche oggetto x” con la **stessa** variabile

3) per qualche oggetto x

4) Premettere a “x è aggressivo con arabella” l’espressione “per qualche oggetto x”

per qualche oggetto x, x è aggressivo con arabella

Linguaggi del primo ordine/6

La proposizione

per qualche oggetto x, x è aggressivo con arabella

che in forma abbreviata si scrive

$(\exists x)\ G(x,a)$

ha, in italiano lo stesso significato dell'espressione

Qualcuno è aggressivo con arabella

ed è vera se è solo se la proposizione aperta "…è aggressivo con arabella" è vera di **almeno un** oggetto del dominio.

Linguaggi del primo ordine/7

Chiamiamo **universali** le proposizioni della forma

$$(\forall x)\ G(x,a)$$

e **esistenziali** quelle della forma

$$(\exists x)\ G(x,a)$$

In un linguaggio del primo ordine le proposizioni aperte in uno o più spazi vuote possono essere chiuse senza utilizzare nomi, ma utilizzando solo i quantificatori:

variabile vincolata

(∀x) (∃y) (x è aggressivo con y)

variabile vincolata

Linguaggi del primo ordine/8

Una proposizione aperta in due spazi vuoti come

x è aggressivo con y

è vera o falsa di coppie (ordinate) di oggetti del dominio.

La proposizione:

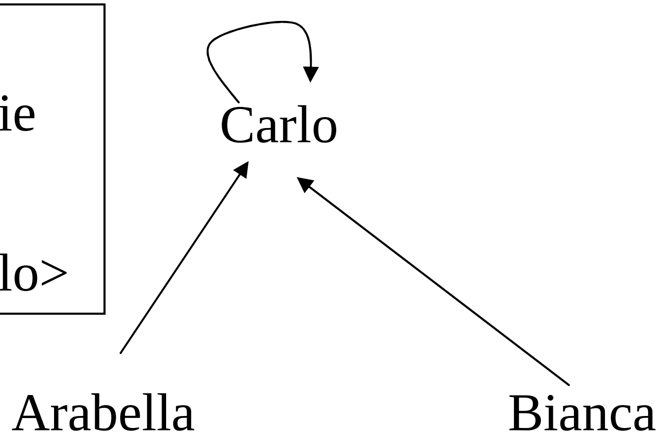
$(\exists y)$(x è aggressivo con y)

Ottenuta “vincolando” la variabile libera y con il quantificatore esistenziale, è una proposizione aperta in uno spazio vuoto ed è dunque vera o falsa di singoli oggetti del dominio.

Linguaggi del primo ordine/9

In questo stato la proposizione aperta “x è aggressivo con y” è vera delle seguenti coppie di oggetti del dominio:

<arabella, carlo>, <carlo,carlo>, <bianca, carlo>



Mentre la proposizione aperta “($\forall$ y)(y è aggressivo con x)” è vera solo di Carlo.

La proposizione chiusa

($\exists$ x)($\forall$ y)(y è aggressivo con x)

è vera o falsa in questo stato?

Linguaggi del primo ordine/10

Siamo a questo punto in grado di definire i **linguaggi del primo ordine** (LPO). Il vocabolario di un LPO comprenderà:

1. Un insieme di **nomi** (che può essere vuoto)
2. Un insieme infinito di **variabili**, x,y,w,z (eventualmente con sottoscritti)
3. Un insieme non vuoto di **proposizioni aperte primitive** (dette anche **predicati primitivi**) ciascuna delle quali comprende un numero determinato di spazi vuoti.
4. Un insieme di **parole logiche** che comprende gli **operatori booleani** ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) e i due **quantificatori** ($\forall$…), ($\exists$…)
5. Le due parentesi tonde: (,).

Linguaggi del primo ordine/11

P è una proposizione atomica di un LPO se e solo se P è ottenuta da una proposizione aperta primitiva del LPO riempiendo ciascuno dei suoi spazi vuoti con una variiabile o con un nome del LPO

1. Ogni proposizione atomica di L è una proposizione di L
2. Se Q è una proposizione di L, allora lo è anche $\neg$Q
3. Se Q e R sono proposizioni di L, allora lo sono anche (Q$\wedge$R), (Q$\vee$R), (Q$\rightarrow$R).
4. Se Q è una proposizione di L, allora lo sono anche ($\forall$v)Q e ($\exists$v)Q
5. Nient'altro è una proposizione di L.

Lezione 14

I linguaggi del primo ordine/2

Variabili libere e vincolate/1

Considerate la proposizione

$$G(x,a) \wedge (\forall x) \neg G(x,b)$$

In questa proposizone la **stessa** variabile ricorre **sia libera sia vincolata**.

In realtà quelle che sono libere o vincolate sono le **ricorrenze** delle variabili.

Nel nostro esempio la **prima ricorrenza** di x è **libera** e la **seconda** è **vincolata**.

Variabili libere e vincolate/2

w è aggressivo con x

- proposizione atomica aperta

- ricorrono in essa due variabili, w e x, una volta ciascuna entrambe libere;

Bianca è aggressiva con arabella

- atomica chiusa

- nessuna variabile ricorre in essa e, **a fortiori**, nessuna variabile né libera né vincolata;

w è aggressivo con z $\wedge$ z è aggressivo con w

- congiuntiva aperta

- due variabili w e z ricorrono in essa, due volte ciascuna, entrambe libere

Variabili libere e vincolate/3

w è aggressivo con z $\rightarrow$ ($\exists$w) (w è aggressivo con bianca)

- condizionale aperta

- due variabili, w e z, ricorrono in essa; z ricorre una volta sola ed è libera; w tre volte ed è sia libera sia vincolata;

($\forall$w) (w è aggressivo con z $\rightarrow$ w è aggressivo con bianca)

- universale aperta

- due variabile, w e z, ricorrono in esssa; w ricorre tre volte ed è vincolata; z ricorre una volta ed è libera.

Linguaggio ordinario e LPO/1

Normalmente, le espressioni di generalità vengono utilizzate in espressioni del tipo:

… tutti gli S …

… ciascun S …

… ogni S …

… alcuni S …

… qualche S …

… un S …

in cui la lettera S è sostituita da un sostantivo

Linguaggio ordinario e LPO/2

Considerate la seguente proposizione

Tutti i critici d'arte apprezzano i quadri di Rembrandt

Come facciamo ad esprimerla in un LPO?

Se consideriamo la proposizione aperta

…. apprezzano i quadri di Rembrandt

e la quantifichiamo universalmente otteniamo

$(\forall x)$ (x apprezza i quadri di Rembrandt)

che non ha affatto lo stesso significato!

Linguaggio ordinario e LPO/3

La soluzione corretta consiste nel quantificare univeralmente la seguente proposizone aperta di forma **condizionale**:

Se x è un critico d'arte, allora x apprezza i quadri di Rembrandt

$(\forall x)$(x è un critico d'arte $\rightarrow$ x apprezza i quadri di Rembrandt)

In generale:

Tutti gli S sono V

si traduce:

$(\forall x)$(x è S $\rightarrow$ x è V)

Linguaggio ordinario e LPO

Tutte le balene sono mammiferi

$(\forall x)$ (x è una balena $\rightarrow$ x è un mammifero)

La *Traviata* è amata da tutti gli italiani

$(\forall x)$ (x è un italiano $\rightarrow$ x ama la traviata)

Tutti gli italiani amano il calcio

$(\forall x)$ (x è un italiano $\rightarrow$ x ama il calcio)

Linguaggio ordinario e LPO/5

Considerate la proposizione:

Alcuni sciatori odiano la montagna

Come facciamo a costruire una proposizione del primo ordine che abbia lo stesso significato?

$(\exists x)(x$ è uno sciatore $\wedge$ x odia la montagna$)$

In generale:

Alcuni S sono V

$(\exists x)(x \text{ è } S \wedge x \text{ è } V)$

Linguaggio ordinario e LPO/6

I metodi di traduzione che abbiamo illustrato non possono essere applicati meccanicamente:

Se un numero è pari, è divisibile per 2

$(\forall x)$(x è pari $\rightarrow$ x è divisibile per 2)

Se qualcuno ha un nipote, ha un figlio:

$(\forall x)$(x ha un nipote $\rightarrow$ x ha un figlio)

Se un cane abbaia, non morde:

$(\forall x)$[(x è un cane $\wedge$ x abbaia) $\rightarrow$ x non morde]

Linguaggio ordinario e LPO/7

Qualcuno è aggressivo con tutti:

$(\exists x)$(x è aggressivo con tutti)

$(\exists x)(\forall y)$(x è aggressivo con y)

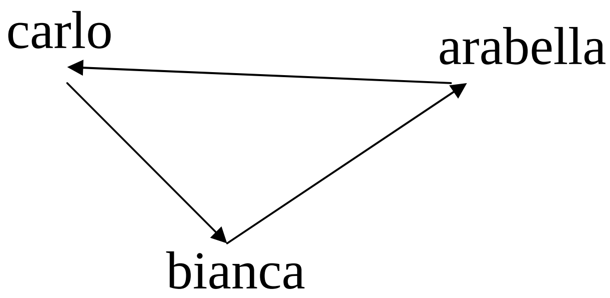
Tutti sono aggressivi con qualcuno:

$(\forall x)$ (x è aggressivo con qualcuno)

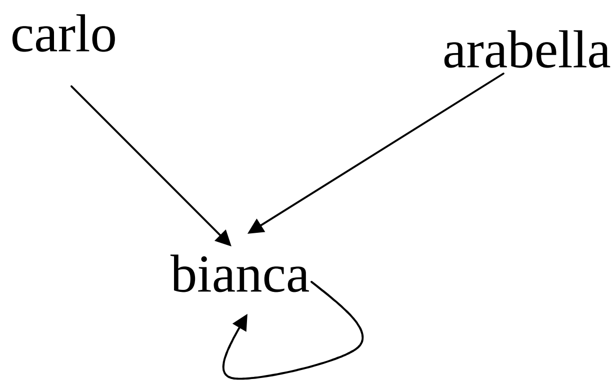
$(\forall x)$ $(\exists y)$ (x è aggressivo con y)

Linguaggio ordinario e LPO/8

"Tutti sono aggressivi con qualcuno" è ambigua



$(\forall x)(\exists y)G(x,y)$



$(\exists x)(\forall y)\ G(y,x)$

Linguaggio ordinario e LPO/9

Chiunque sia aggressivo con se stesso lo è con tutti

$(\forall x)$(x è aggressivo con x $\rightarrow$ x è aggressivo con tutti)

$(\forall x)$[x è aggressivo con x $\rightarrow$ $(\forall y)$ (x è aggressivo con y)]

Qualcuno che è aggressivo con arabella è aggressivo con chiunque sia aggressivo con bianca

$(\exists x)$(x è aggressivo con arabella $\wedge$ x è aggressivo con chiunque sia aggressivo con bianca)

$(\exists x)$[x è aggressivo con arabella $\wedge$ $(\forall y)$ (y è aggressivo con bianca $\rightarrow$ x è aggressivo con y)]

Linguaggio ordinario e LPO/10

Qualcuno è aggressivo con chi non è aggressivo con nessuno

$(\exists x)$(x è aggressivo con chi non è aggressivo con nessuno)

$(\exists x)(\forall y)$(y non è aggressivo con nessuno $\rightarrow$ x è aggressivo con y)

$(\exists x)(\forall y)(\forall z)$(y non è aggressivo con z $\rightarrow$ x è aggressivo con y)

$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\neg G(y,z) \rightarrow G(x,y))$

Esercizi connessi: 5.2 e 5.3 a p. 271.

Lezione 15

Il significato dei quantificatori

Regole di eliminazione/1

Applichiamo anche ai quantificatori la nostra teoria del significato secondo cui il significato di una parola logica è definito determinando le **conseguenze immediate** della verità e della falsità di una proposizione che contiene quella parola logica.

Dobbiamo dunque determinare **regole di eliminazione** per le proposizioni che hanno una delle seguenti forme logiche:

$(\forall x)\ P(x)$ $\neg(\forall x)\ P(x)$

$(\exists x)\ P(x)$ $\neg\ (\exists\ x)\ P(x)$

dove P(x) è una proposizione aperta arbitraria in una variabile libera.

Regole di eliminazione/2

Cominciamo con il caso di $\neg(\forall x)\, P(x)$

Consideriamo ad esempio la proposizione:

(*) $\neg(\forall x)$ (x è aggressivo con bianca)

Cosa possiamo concludere?

La (*) significa che la proposizione aperta

x è aggressivo con bianca

non è vera di **tutti** gli oggetti del dominio, dunque è falsa di **almeno un** oggetto del dominio, ma non sappiamo di quale!

Regole di eliminazione/3

Dato che non sappiamo di quale oggetto del dominio è falsa "x è aggressivo con bianca", non possiamo inferire la falsità di nessuna delle proposizioni che si ottengono sostituendo alla "x" un nome del dominio.

Non possiamo cioè inferire da

$\neg(\forall x)$ (x è aggressivo con bianca)

nessuna delle seguenti proposizioni:

Arabella non è aggressiva con bianca

Bianca non è aggressiva con bianca

Carlo non è aggressivo con bianca

Regole di eliminazione/4

Sappiamo che "tutti sono aggressivi con bianca" è falsa.

Sappiamo dunque solo che esiste una persona che non è aggressiva con bianca.

Chiamiamo questa persona "signor (o signora) q"

Possiamo allora inferire dalla falsità di "tutti sono aggressivi con bianca" la proposizione

q non è aggressivo con bianca.

ATTENZIONE: non sappiamo chi sia q! q è semplicemente una qualunque delle persone non aggressive con bianca.

Regole di eliminazione/5

Questo modo di usare nomi "fittizi" è usuale nel discorso ordinario:

Il conte è stato assassinato da qualcuno che calza scarpe n. 44

Chiamiamo "tizio" l'assassino del conte

Allora tizio porta scarpe n. 44

e in matematica ...

Se a è divisibile per b e b è divisibile per c, allora a è divisibile per c. Infatti: se a è divisibile per b **esiste un intero**, **chiamiamolo m**, tale che a = m·b. Se b è divisibile per c, **esiste un intero**, **chiamiamolo n**, tale che b = n ·c. Dunque a = m· n ·c. Ma anche m· n è un intero, dunque a è divisibile per c.

Regole di eliminazione/6

Abbiamo dunque bisogno di introdurre nel nostro linguaggio dei nomi “fittizi” che ci consentano di “battezzare” oggetti del dominio la cui precisa identità non ci è nota (come “tizio”, “caio” e “sempronio” nel discorso ordinario, o le lettere nel discorso matematico).

Questi nuovi “pseudo-nomi” li chiamiamo **parametri** e li indichiamo con le lettere “q”, “r”, ecc. (eventualmente con sottoscritti).

E’ importante distinguere i “veri” nomi del linguaggio (“arabella”, “carlo”, “bianca”) **dai parametri** (“q”, “r”, ecc.)

Regole di eliminazione/7

Dunque in un linguaggio del primo ordine, per indicare oggetti del dominio abbiamo tre categorie di espressioni:

i nomi (“arabella”, “bianca”, “carlo”)

le variabili (“x”, “y”, “z”, ecc.)

i parametri (“p”, “q”, “r”, ecc.)

In generale chiamiamo **termine** un’espressione che appartiene ad una qualsiasi di queste tre categorie.

I nomi e i parametri sono **termini chiusi**.

Le variabili sono **termini aperti**.

Regole di eliminazione/8

Possiamo ora formulare la regola di inferenza relativa alla falsità di proposizioni quantificate universalmente:

$$\dfrac{\neg(\forall v)\ P(v)}{\neg P[v/p]}$$

"v" è una variabile metalinguistica che indica una qualsiasi variabile del linguaggio oggetto

"p" è una variabile metalinguistica che indica un qualsiasi parametro **nuovo**, cioè un parametro che non ricorre in nessuna delle proposizioni precedenti.

L'espressione P[v/p] denota il risultato della sostituzione di tutte le ricorrenze libere della variabile "v" con il parametro nuovo "p".

Regole di eliminazione/9

Supponiamo di sapere che:

1. $\neg(\forall x)\, V(x)$ [E' falso che tutti i paesi siano verdi]
2. $\neg(\forall x)\, B(x)$ [E' falso che tutti i paesi siano blu]

Dalla 1 possiamo inferire

$\neg V(q)$ [E' falso che q sia verde]

e dalla 2 che

$\neg B(r)$ [E' falso che r sia blu]

ATTENZIONE!: nella seconda inferenza non possiamo usare **lo stesso** parametro della prima. In ogni applicazione della regola dobbiamo usare un parametro nuovo!

Regole di eliminazione/10

Se non avessimo osservato questa restrizione, avremmo potuto inferire:

Dalla 1:

$\neg$V(q) [E’ falso che q sia verde]

e dalla 2 che

$\neg$B(q) [E’ falso che q sia blu]

E dunque che esiste un paese (denotato da “q”) che non è né blu né verde. Ma questa conclusione non segue affatto dalle nostre premesse!

E’ del tutto possibile che “Non tutti i paesi sono blu” e “Non tutti i paesi sono verdi” siano entrambe vere, ma “esiste un paese né blu né verde” falsa. [Costruite un controesempio]

Regole di eliminazione/11

Dobbiamo ora specificare le conseguenze della **verità** di una proposizione quantificata universalmente.

Supponiamo di sapere che la proposizione:

$(\forall x)$(x è aggressivo con carlo)

è vera.

Questo significa che la proposizione aperta

x è aggressivo con carlo

è vera di **tutti** gli oggetti del dominio.

Dunque è vera qualunque proposizione ottenuta sostituendo alla variabile “x” un nome o un parametro.

Regole di eliminazione/12

E’ dunque giustificata la seguente regola di inferenza

$$\frac{(\forall v)\ P(v)}{P[v/t]}$$

“v” è una variabile metalinguistica che indica una qualsiasi variabile del linguaggio oggetto

“t” è una variabile metalinguistica che indica un qualsiasi **termine chiuso** del linguaggio.

L’espressione P[v/t] denota il risultato della sostituzione di tutte le ricorrenze libere della variabile “v” con il termine chiuso “t”.

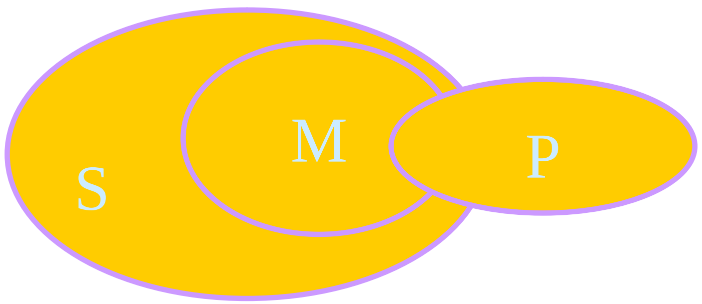
Regole di eliminazione/13

Consideriamo la seguente inferenza:

$\neg(\forall x)(M(x) \rightarrow P(x))$ [non tutti gli M sono P]

$(\forall x)(M(x) \rightarrow S(x))$ [tutti gli M sono S]

$\neg(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$ [non tutti gli S sono P]



Questa è un’inferenza **corretta** (non ci sono controesempi). Proviamo a dimostrarla con le nostre regole.

Regole di eliminazione/14

1. $\neg(\forall x)(M(x) \rightarrow P(x))$	[non tutti gli M sono P]
2. $(\forall x)(M(x) \rightarrow S(x))$	[tutti gli M sono S]
3. $\neg\neg(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$	[E’ falso che non tutti gli S sono P]
4. $(\forall x)(S(x) \rightarrow P(x))$	E$\neg\neg$ (3)
5. $\neg(M(q) \rightarrow P(q))$	EF$\forall$ (1) [q è un parametro nuovo]
6. $M(q)$	EF$\rightarrow$1(5)
7. $\neg P(q)$	EF$\rightarrow$2(5)
8. $M(q) \rightarrow S(q)$	EV$\forall$ (2) [la regola non ha restrizioni]
9. $S(q)$	EV$\rightarrow$1 (8, 6)
10. $S(q) \rightarrow P(q)$	EV$\forall$ (4) [la regola non ha restrizioni]
11. $P(q)$	EV$\rightarrow$1 (10, 9)

$\times$

Regole di eliminazione/15

Passiamo ora alle regole che definiscono il significato del quantificatore esistenziale.

Supponiamo di sapere che:

$(\exists x)$ (x è aggressivo con arabella)

è falsa.

Questo significa che la proposizione aperta

(*) x è aggressivo con arabella

è falsa di tutti gli oggetti del dominio.

Dunque è falsa qualunque proposizione che risulta da (*) sostituendo la variabile “x” con un qualsiasi termine chiuso.

Regole di eliminazione/16

Dunque la seguente regola di eliminazione è giustificata:

$$\dfrac{\neg(\exists v)\, P(v)}{\neg P[v/t]}$$

"v" è una variabile metalinguistica che indica una qualsiasi variabile del linguaggio oggetto

"t" è una variabile metalinguistica che indica un qualsiasi **termine chiuso** del linguaggio.

L'espressione P[v/t] denota il risultato della sostituzione di tutte le ricorrenze libere della variabile "v" con il termine chiuso "t".

Regole di eliminazione/17

Passiamo ora alle conseguenze della **verità** di una proposizione quantificata esistenzialmente.

Supponiamo di sapere che la proposizione:

(*) $\quad$ $(\exists x)$ (x è aggressivo con arabella)

è vera.

Chiamiamo “q” una persona del dominio che non è aggressiva con arabella (“q” deve essere **nuovo**).

Possiamo allora inferire dalla (*) che

q è aggressivo con arabella

Regole di eliminazione/18

Dunque la seguente regola di eliminazione è giustificata:

$$\frac{(\exists v)\ P(v)}{P[v/p]}$$

"v" è una variabile metalinguistica che indica una qualsiasi variabile del linguaggio oggetto

"p" è una variabile metalinguistica che indica un qualsiasi parametro **nuovo**.

L'espressione P[v/p] denota il risultato della sostituzione di tutte le ricorrenze libere della variabile "v" con il parametro **nuovo** "p".

Regole di eliminazione/19

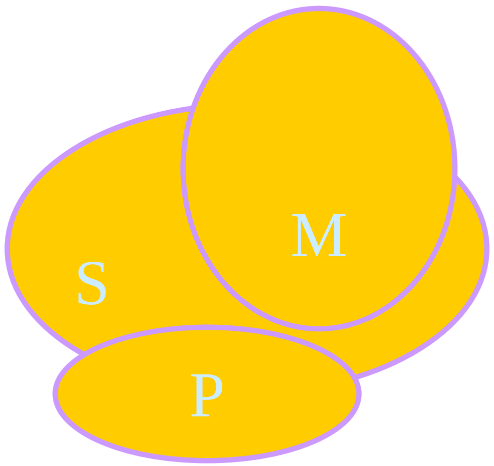
Consideriamo la seguente inferenza:

$(\exists x)(M(x) \wedge S(x))$ [Qualche M è S]

$\neg(\exists x)(P(x) \wedge M(x))$ [Nessun P è M]

____

$(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$ [Qualche S non è P]



Questa è un'inferenza **corretta** (non ci sono controesempi). Proviamo a dimostrarla con le nostre regole.

Regole di eliminazione/20

1. $(\exists x)(M(x) \wedge S(x))$	[qualche M è S]
2. $\neg(\exists x)\ (P(x) \wedge M(x))$	[nessun P è M]
3. $\neg(\exists\ x)(S(x) \wedge \neg P(x))$	[è falso che qualche S non è P]
4. $M(q) \wedge S(q)$	EV $\exists$ (1) [q è un parametro nuovo]
5. $M(q)$	EV$\wedge$1 (4)
7. $S(q)$	EV$\wedge$2 (4)
8. $\neg(S(q) \wedge \neg P(q))$	EF$\exists$ (3) [la regola non ha restrizioni]
9. $\neg\neg P(q)$	EF$\wedge$1 (8, 7)
10. $P(q)$	E $\neg\neg$ (9)
11. $\neg(P(q) \wedge M(q))$	EF$\exists$ (2) [la regola non ha restrizioni]
12. $\neg\ P(q)$	EF$\wedge$2 (11, 5)

$\times$

Lezione 16

Verità e correttezza nei linguaggi
del primo ordine

Stati del primo ordine/1

Abbiamo finora usato la nozione di implicazione in un senso intuitivo:

“Γ Implica P” significa “P è vera in tutti gli stati in cui sono vere tutte le proposizioni nell’insieme Γ”

Per rendere più precisa questa nozione dobbiamo **definire** la nozione generale di verità in uno stato.

Nel caso dei linguaggi booleani, uno stato per un linguaggio L può essere ridotto all’assegnazione di un “valore di verità” (“1” per “vero” e “0” per falso) alle **proposizioni atomiche** del linguaggio.

Stati del primo ordine/2

Per esempio, lo stato:

m	d		t	

è rappresentato dalla seguente assegnazione (|P| indica il valore di verità assegnato alla proposizione atomica P) :

|O(m,1)| = 1; |O(d,2)| =1; |O(t,4)| = 1;

A tutte le altre proposizioni atomiche viene assegnato il valore 0.

Così uno stato booleano può essere identificato con l’insieme delle proposizioni atomiche che sono vere in esso.

Stati del primo ordine/3

Il **dominio** di un linguaggio booleano L (= l'insieme di "oggetti" di cui si parla in L) coincide con l'insieme degli oggetti designati dai **nomi** di L.

In un LPO (linguaggio del primo ordine) il dominio degli stati può essere più grande dell'insieme degli oggetti denotati dai nomi del linguaggio. (Un LPO può anche non avere nomi!)

Dunque uno stato per un LPO, a differenza di uno stato per un linguaggio booleano, non può essere caratterizzato dall'insieme delle proposizioni atomiche chiuse che sono vere in esso.

Stati del primo ordine/4

Un modo per definire uno stato per un linguaggio del primo ordine L consiste nello specificare:

• un dominio (insieme) **D** non vuoto di oggetti

• per ogni nome di L, l'oggetto di **D** da esso denotato

• per ogni proposizione aperta primitiva con *m* spazi vuoti, le m-uple ordinate di oggetti del dominio **D** di cui essa è, rispettivamente, vera e falsa.

Stati del primo ordine/4

Supponiamo di essere interessati alle relazioni di aggressività fra arabella, bianca e carlo (e basta).

Supponiamo anche che il linguaggio che scegliamo per parlare di queste relazioni sia la semplice estensione al primo ordine del linguaggio dell'aggressività (cioè quello che si ottiene dal linguaggio booleano aggiungendo variabili, parametri, e quantificatori). Chiamiamo questo linguaggio LAQ.

In tal caso vi è una corrispondenza immediata fra uno stato booleano e uno stato del primo ordine.

Stati del primo ordine/4

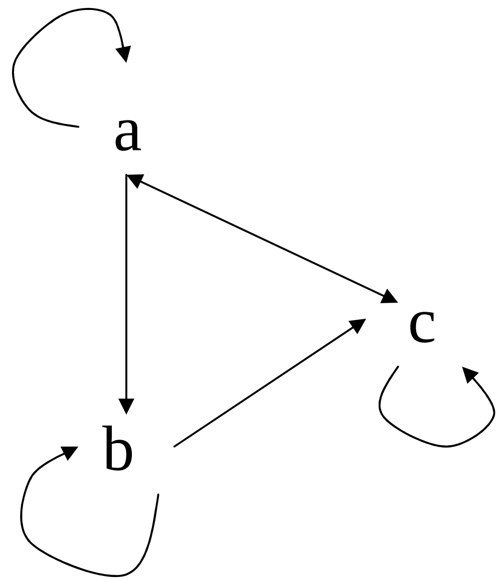
Consideriamo in particolare lo stato **s** così definito:

1. Il dominio **D** di **s** coincide con l'insieme degli oggetti denotati dai nomi di LAQ; per cui **D** = {arabella, bianca, carlo}.
2. Il nome "arabella" denota arabella.
3. Il nome "bianca" denota bianca.
4. Il nome "carlo" denota carlo.
5. La proposizione aperta "…è aggressivo con ---" è vera delle seguenti coppie di oggetti di **D: <**arabella,arabella>, <bianca,bianca>, <carlo,carlo>, <arabella,bianca>, <bianca,carlo>, <arabella,carlo>, ed è falsa di tutte le altre coppie.

Stati del primo ordine/5

Lo stato booleano che corrisponde allo stato del primo ordine **s** è allora il seguente:

|arabella è aggressiva con arabella| = 1
|arabella è aggressiva con bianca| = 1
|arabella è aggressiva con carlo| = 1
|bianca è aggressiva con arabella| = 0
|bianca è aggressiva con bianca| = 1
|bianca è aggressiva con carlo| = 1
|carlo è aggressivo con arabella| = 1
|carlo è aggressivo con bianca| = 0
|carlo è aggressivo con carlo| = 1



Stati del primo ordine/6

Supponiamo invece di essere interessati non alle relazioni di aggressività fra tre soggetti ben specificati, ma a quelle fra tutti i discendenti di arabella (arabella inclusa).

In tal caso il nostro LPO dovrà contenere solo il nome "arabella" oltre alla solita proposizione aperta "…è aggressivo con ---".

Il dominio di uno stato del genere può anche essere **infinito**!

Diciamo LAQ' questo linguaggio.

Stati del primo ordine/7

Uno stato per LAQ’ sarà allora costituito:

a) dall’insieme **D** comprendente arabella e i suoi discendenti;

b) dall’assegnazione di un particolare oggetto di **D** (arabella) al nome “arabella”;

c) dall’assegnazione di un particolare insieme di coppie ordinate di oggetti di **D** alla proposizione aperta “…è aggressivo con ---” (le coppie <x,y> tali che x è aggressivo con y).

Stati del primo ordine/8

Supponiamo che ciascun discendente di arabella abbia un unico figlio che è aggressivo con il proprio figlio.

Lo stato **s** corrispondente avrà un dominio **infinito;**

il nome “arabella” denoterà denoterà il “primo” oggetto del dominio;

la proposizione aperta “…è aggressivo con ---” sarà vera di ogni coppia di oggetti <x,y> tale che y è figlio di x.

Stati del primo ordine/9

Supponiamo che arabella abbia due figli, ciascuno dei quali ha un figlio senza figli, e che nessuno sia aggressivo con nessuno.

Allora lo stato corrispondente avrà un dominio finito di cardinalità 5, il nome “arabella” denoterà di nuovo il “primo” oggetto del dominio e la proposizione aperta “…è aggressivo con ---” sarà falsa di ogni coppia di oggetti del dominio.

Stati del primo ordine/10

Uno stato **s** del primo ordine per un linguaggio L è una coppia <**D**, **f**> tale che

- **D** è un insieme non vuoto di oggetti che include **almeno** gli oggetti denotati dai nomi di L

- **f** è una **funzione** la quale

    - a ciascun nome di L associa un unico oggetto di **D**

    - a ciascuna proposizione aperta primitiva in *m* spazi vuoti di L associa un insieme di *m*-uple ordinate di oggetti di **D**.