Lezione 7

Linguaggi booleani/1

Traduzioni/1

Il linguaggio formale delle piccionaia è sufficientemente potente da esprimere un gran numero di informazioni:

1. La celletta n.1 è occupata
   $O(m,1) \vee O(d,1) \vee O(t,1)$

2. La celletta n.3 è vuota
   $\neg O(m,3) \wedge \neg O(d,3) \wedge \neg O(t,3)$

Traduzioni/2

mike è assente

$\neg O(m,1) \wedge \neg O(m,2) \wedge \neg O(m,3) \wedge \neg O(m,4) \wedge$
$\wedge \neg O(m,5)$

mike è presente

$O(m,1) \vee O(m,2) \vee O(m,3) \vee O(m,4) \vee O(m,5)$

Traduzioni/3

tutti i piccioni sono presenti:

$(O(m,1) \vee O(m,2) \vee O(m,3) \vee O(m,4) \vee O(m,5)) \wedge (O(d,1) \vee O(d,2) \vee O(d,3) \vee O(d,4) \vee O(d,5)) \wedge (O(t,1) \vee O(t,2) \vee O(t,3) \vee O(t,4) \vee O(t,5))$

nessun piccione è presente:

$(\neg O(m,1) \wedge \neg O(m,2) \wedge \neg O(m,3) \wedge \neg O(m,4) \wedge \neg O(m,5)) \wedge (\neg O(d,1) \wedge \neg O(d,2) \wedge \neg O(d,3) \wedge \neg O(d,4) \wedge \neg O(d,5)) \wedge (\neg O(t,1) \wedge \neg O(t,2) \wedge \neg O(t,3) \wedge \neg O(t,4) \wedge \neg O(t,5))$

Traduzioni/4

mike e duke sono vicini (occupano cellette adiacenti:

$(O(m,1) \wedge O(d,2)) \vee (O(m,2) \wedge O(d,1)) \vee (O(m,2) \wedge O(d,3)) \vee (O(m,3) \wedge O(d,2)) \vee (O(m,3) \wedge O(d,4)) \vee (O(m,4) \wedge O(d,3)) \vee (O(m,4) \wedge O(d,5)) \vee (O(m,5) \wedge O(d,4))$

Linguaggi booleani

LP è un esempio di un'importante classe di linguaggi, chiamati **linguaggi booleani**. Un linguaggio booleano **L** è caratterizzato dall'insieme delle sue proposizioni elementari, dette anche **vocabolario extra-logico di L**. La nozione generale di **proposizione chiusa** di un linguaggio booleano L può essere definita nel modo seguente:

1) Le proposizioni elementari sono proposizioni chiuse di **L**
2) Per ciascuna proposizione chiusa P di **L**, $\neg P$ è una proposizione chiusa di **L**.
3) Per ciascuna coppia di proposizioni chiuse P e Q di **L**, $P \wedge Q$ è una proposizione chiusa di **L**.
4) Per ciascuna coppia di proposizioni chiuse di **L**, $P \vee Q$ è una proposizione chiusa di **L**.
5) Nessun'altra stringa di simboli primitivi è una proposizione chiusa di **L**.

Forme logiche

Chiamiamo **proposizione booleana** qualunque proposizione di un linguaggio booleano. Ciascuna proposizioni booleana ha esattamente una di queste quattro forme:

1) proposizione elementare
2) congiunzione
3) disgiunzione
4) negazione.

Costituenti

Definiamo ora la nozione di **costituente** di una proposizione booleana.

Data una proposizione booleana P, un **costituente** di P è una qualsiasi "parte" di P che è essa stessa una proposizione booleana. Così:

1. le proposizioni elementari hanno esattamente un costi-tuente, cioè se stesse;
2. le proposizioni $P \wedge Q$ e $P \vee Q$ hanno come costitutenti se stesse e i costituenti di P e di Q;
3. i costituenti di $\neg P$ sono $\neg P$ stessa e tutti i costituenti di P.

Esercizi riassuntivi/12

esercizio 20 Determinate la forma logica e i costituenti delle seguenti proposizioni booleane:

1. $(P \wedge (Q \vee R)) \wedge \neg Q$
2 $P \wedge (\neg Q \vee (P \wedge Q))$
3 P
4 $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$
5 $(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

Ricorrenze/1

Dobbiamo accuratamente distinguere fra una stringa di simboli e le sue **ricorrenze** (spesso si dice anche **occorrenze**).

Per esempio: nell'espressione aritmetica:

1+ 3 - 2 = 3 -2 + 1

ci sono stringhe che ricorrono più di una volta ("1", "3", "3 - 2" "+") mentre altre ricorrono una sola volta.

Ricorrenze/2

Analogamente, in un linguaggio booleano, dobbiamo distinguere fra una proposizione o una parola logica e le sue ricorrenze.

Per esempio, nella proposizione

$(O(m,1) \wedge \neg\, O(d,2)) \vee (\neg O(m,1) \wedge O(d,3))$

La proposizione "O(m,1)" ricorre 2 volte, mentre "O(d,2)" e "O(d,3)" ricorrono una volta ciascuna;

Le parole logiche "$\wedge$" e "$\neg$" ricorrono 2 volte ciascuna, mentre la parola logica "$\vee$" ricorre una sola volta.

Ambito di una parola logica

Per **ambito** di una ricorrenza di una parola logica # in una proposizione booleana P, intendiamo **il più piccolo costituente** di P in cui # ricorre. Così, per esempio, l'ambito della prima ricorrenza di $\wedge$ nella proposizione booleana:

"$(O(m,1) \wedge (O(d,2) \vee O(d,3))) \wedge \neg O(t,1)$"

è il costituente "$(O(m,1) \wedge (O(d,2) \vee O(d,3)))$", mentre l'ambito della sua seconda ricorrenza è l'intera proposizione.

Parola logica principale

Data una proposizione booleana P, la sua parola logica principale è la parola logica che ricorre in P con ambito massimo. Così, per esempio, la parola logica principale di

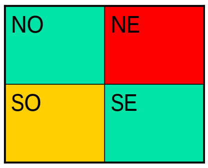
“$(O(m,1) \wedge (O(d,2) \vee O(d,3))) \wedge \neg O(t,1)$”

è la congiunzione

Dire che una proposizione P ha la forma logica di una congiunzione (disgiunzione, negazione) significa che la parola logica principale di P è la congiunzione (disgiunzione, negazione).

Il problema della carta geografica

Per vedere un altro esempio di una classe di problemi che può essere trattata per mezzo di un linguaggio booleano, considerate una **carta geografica** divisa in quattro regioni colorate:



Ciascuna regione è colorata esattamente di un colore: verde, rosso o blu.

Informazioni di sfondo

Le informazioni di sfondo, cioè le informazioni che devono valere in tutti i mondi possibili, sono le seguenti:

1) ciascuna regione è rossa o verde o blu.
2) nessuna regione è sia verde sia rossa;
3) nessuna regione è sia verde sia blu.
4) nessuna regione è sia rossa sia blu.

Il linguaggio della carta geog./1

C’è più di un modo di definire un linguaggio booleano in grado di trattare questa classe di problemi. Una possibilità consiste nel basarsi sull’insieme di proposizioni elementari che possono essere ottenute dalle seguenti tre proposizioni aperte primitive:

la regione ... è rossa (R(...) in breve)
la regione ... è verde (V(...) in breve)
la regione ... è blu (B(...) in breve)

riempiendo gli spazi vuoti con il nome di una regione.

Il linguaggio della carta geog./2

Un’altra possibilità è quella di basarsi sull’insieme di proposizioni elementari che può essere ottenuto dalla seguente proposizione aperta (primitiva):

la regione ... è colorata di ---

Riempiendo il primo spazio vuoto con il nome di una regione e il secondo spazio vuoto con il nome di uno dei nostri tre colori.

Esempio 1/1

Diciamo che due regioni sono **confinanti** quando condividono un intero lato. Così NO confina con NE e con SO, ma non con SE.

Supponiamo di avere ricevuto le seguenti informazioni:

1 La regione NO è rossa
2 La regione SO è verde
3 Regioni non-confinanti sono dello stesso colore.

Esempio 1/2

Le seguenti inferenze sono ovviamente corrette:

1 La regione NO è rossa
2 La regione SO è verde
3 Regioni non-confinanti sono dello stesso colore

La regione SE è rossa

1 La regione NO è rossa
2 La regione SO è verde
3 Regioni non-confinanti sono dello stesso colore

La regione NE è verde

Esempio 1/3

1* R(NO)
2* V(SO)
3* $[(R(NO) \land R(SE)) \lor (V(NO) \land V(SE)) \lor (B(NO) \land B(SE))] \land$
$\land [(R(NE) \land R(SO)) \lor (V(NE) \land V(SO)) \lor (B(NE) \land B(SO))]$
----
4 $\neg V(NO)$
5 $\neg B(NO)$
6 $(R(NO) \land R(SE)) \lor (V(NO) \land V(SE)) \lor (B(NO) \land B(SE))$ — EV$\land$1 (3*)
7 $\neg(V(NO) \land V(SE))$ — IF$\land$1 (4)
8 $\neg(B(NO) \land B(SE))$ — IF$\land$1 (5)
9 $(R(NO) \land R(SE)) \lor (V(NO) \land V(SE))$ — EV$\lor$2 (6,8)
10 $R(NO) \land R(SE)$ — EV$\lor$2 (7,9)
11 R(SE) — EV$\land$2 (10).

Esempio 1/4

Se rendiamo espliciti tutti i passi in cui internvengono le IS:

1* R(NO)
2* V(SO)
3* $[(R(NO) \land R(SE)) \lor (V(NO) \land V(SE)) \lor (B(NO) \land B(SE))] \land$
$\land [(R(NE) \land R(SO)) \lor (V(NE) \land V(SO)) \lor (B(NE) \land B(SO))]$
----
4 $\neg(R(NO) \land V(NO))$ — IS
5 $\neg(R(NO) \land B(NO))$ — IS
4 $\neg V(NO)$ — EF$\land$2 (4,1*)
5 $\neg B(NO)$ — EF$\land$2 (5,1*)
6 $(R(NO) \land R(SE)) \lor (V(NO) \land V(SE)) \lor (B(NO) \land B(SE))$ — EV$\land$1 (3*)
7 $\neg(V(NO) \land V(SE))$ — IF$\land$1 (4)
8 $\neg(B(NO) \land B(SE))$ — IF$\land$1 (5)
9 $(R(NO) \land R(SE)) \lor (V(NO) \land V(SE))$ — EV$\lor$2 (6,8)
10 $R(NO) \land R(SE)$ — EV$\lor$2 (7,9)
11 R(SE) — EV$\land$2 (10).

Lezione 8

Linguaggi booleani/2

Relazioni di aggressività

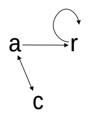
Come ultimo esempio di una classe di problemi che può essere trattata per mezzo di un linguaggio booleano, consideriamo il seguente. Siamo interessati alle relazioni di aggressività fra tre amici, Arabella, Camilla e Riccardo.

In questo contesto un mondo possibile è una specificazione di chi è aggressivo verso chi e il numero totale di mondi possibili è 2^9.

Diagrammi di aggressività

Per rappresentare i mondi possibili in questo caso useremo le seguenti convenzioni:

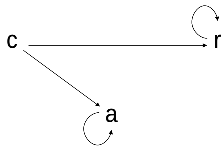
I nostri “oggetti” saranno rappresentati da punti e le **relazioni di aggressività** da frecce:



Arabella è aggressiva con riccardo e con camilla
Camilla è aggressiva solo con arabella
Riccardo è aggressivo solo con se stesso

Esercizi riassuntivi/13

esercizio 21: Date una rappresentazione grafica del mondo possibile in cui camilla è aggressiva verso arabella e riccardo, mentre riccardo e arabella sono aggressivi solo verso se stessi.



Il linguaggio dell'aggressività

Osservate che, nel caso del problema dell'aggressività, non ci sono proposizioni che valgono in tutti i mondi possibili (informazioni di sfondo).

Possiamo prendere come proposizioni elementari del nostro linguaggio booleano quelle che possono essere ottenute dalla seguente proposizione aperta primitiva

"... è aggressivo con ---" (in breve "G(...,---)")

riempiendo i suoi spazi vuoti con i nomi dei tre amici, "arabella" (in breve "a"), "camilla" (in breve "c") e "riccardo" (in breve "r").

Chiamiamo questo linguaggio LA.

Esempio 1/1

1. Tutti sono aggressivi con qualcuno
2. Camilla non è aggressiva con arabella
3. Riccardo è aggressivo con camilla
4. Riccardo e camilla non sono aggressivi a vicenda.

Esempio 1/2

1. (G(a,a) ∨ G(a,c) ∨ G(a,r)) ∧ (G(c,a) ∨ ∨ G(c,c) ∨ G(c,r)) ∧ (G(r,a) ∨ G(r,c) ∨ ∨ G(r,r))
2. ¬G(c,a)
3. G(r,c)
4. ¬(G(r,c) ∧ G(c,r))

Esempio 1/3

1. [(G(a,a) ∨ G(a,c) ∨ G(a,r)) ∧ (G(c,a) ∨ G(c,c) ∨ G(c,r))] ∧ (G(r,a) ∨ G(r,c) ∨ G(r,r))
2. ¬G(c,a)
3. G(r,c)
4. ¬(G(r,c) ∧ G(c,r))

----

5. (G(a,a) ∨ G(a,c) ∨ G(a,r)) ∧ (G(c,a) ∨ G(c,c) ∨ G(c,r))
6. G(c,a) ∨ G(c,c) ∨ G(c,r)
7. G(c,c) ∨ G(c,r)
8. ¬ G(c,r)
9. G(c,c)

Esempio 1/4

La deduzione precedente mostra che l'inferenza

1. [(G(a,a) ∨ G(a,c) ∨ G(a,r)) ∧ (G(c,a) ∨ G(c,c) ∨ G(c,r))] ∧ (G(r,a) ∨ G(r,c) ∨ G(r,r))
2. ¬G(c,a)
3. G(r,c)
4. ¬(G(r,c) ∧ G(c,r))

----

6. G(c,c)

è **corretta.**

Esempio 1/5

Le nostre informazioni invece non ci consentono di inferire nulla sulle persone con cui è aggressiva arabella, per cui per esempio la seguente inferenza:

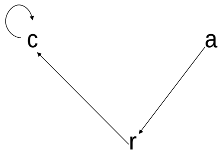
1. $[(G(a,a) \vee G(a,c) \vee G(a,r)) \wedge (G(c,a) \vee G(c,c) \vee G(c,r))] \wedge (G(r,a) \vee G(r,c) \vee G(r,r))$
2. $\neg G(c,a)$
3. $G(r,c)$
4. $\neg(G(r,c) \wedge G(c,r))$

6.G(a,c)

non è **corretta.**

Esempio 1/6

Ecco un controesempio



Camilla è aggressiva solo con se stessa, riccardo solo con camilla e arabella solo con riccardo.

Linguaggio e metalinguaggio/1

Consideriamo l'enunciato:

(1.0) Arabella è aggressiva con camilla.

L'enunciato 1.0 è una proposizione dell'italiano ordinario (e anche una proposizione del linguaggio booleano LA) che asserisce che due persone stanno in una certa relazione fra loro. Consideriamo ora il seguente enunciato (vero):

(1.1) Nell'enunciato "arabella è aggressiva con camilla" ricorrono due nomi propri, "arabella" e "camilla".

Linguaggio e metalinguaggio/2

Nel contesto dell'enunciato 1.1, l'enunciato 1.0 non è più *usato* per dire qualcosa su arabella e su camilla, ma *menzionato*, per dire qualcosa sull'enunciato stesso, cioè che esso contiene due nomi propri.

Analogamente, nell'enunciato 1.1 i nomi propri "arabella" e "camilla" non sono usati per riferirsi ad arabella e camilla (come nell'enunciato 1.0) ma menzionati per dire qualcosa sui nomi stessi. La differenza fra i due casi è messa in evidenza dall'uso delle virgolette.

Linguaggio e metalinguaggio/3

Le virgolette sono un dispositivo usato per sospendere il normale riferimento delle espressioni linguistiche, e per formare nomi di queste ultime in modo da poterne parlare.

Poiché l'enunciato 1.1 parla di espressioni linguistiche, il linguaggio al quale esso appartiene è chiamato *metalinguaggio* e il linguaggio in cui queste espressioni sono usate è chiamato *linguaggio oggetto*.

Nel nostro esempio, sia linguaggio sia il metalinguaggio sono (porzioni del) l'italiano.

Linguaggio e metalinguaggio/4

Questa "ascesa" linguistica da un dato linguaggio al suo metalinguaggio può essere reiterata. Supponiamo di dire:

(1.2) L'enunciato "Nell'enunciato 'arabella è aggressiva con camilla' ricorrono due nomi propri, 'arabella' e 'Camilla' " è vero.

Qui ascendiamo a un *meta*metalinguaggio poiché stiamo dicendo qualcosa su un enunciato del metalinguaggio. In questo anche il metametalinguaggio è l'italiano. Tuttavia osservate che né il metalinguaggio né il metametalinguaggio sono parte di LA. Questo perché l'italiano, ma non LA, è un linguaggio *universale* nel senso che possiamo parlare in italiano di qualsiasi cosa, incluso l'italiano stesso.

Linguaggio e metalinguaggio/5

Questa distinzione fra linguaggio e metalinguaggio fu introdotta da Alfred Tarski nel 1931, allo scopo di risolvere un famoso paradosso che risale alla filosofia greca e che fu studiato nei dettagli dal filosofo *Crisippo* (III secolo a.C.): il *paradosso del mentitore*. Chiamiamo dunque *enunciato di Crisippo* il seguente:

(1.3) l'enunciato 1.3 è falso.

Si tratta di un enunciato vero o falso?

Linguaggio e metalinguaggio/6

Supponiamo che l'enunciato di Crisippo sia vero. Ma esso dice di se stesso di essere falso. Dunque deve essere falso.

Supponiamo invece che sia falso. Ma esso dice di se stesso di essere falso. Dunque deve essere vero. Così l'enunciato di Crisippo è vero se e solo se è falso! Questo è il paradosso del mentitore.

Linguaggio e metalinguaggio/7

Tarski trasformò questo paradosso in una dimostrazione del fatto che nessun linguaggio che contiene il proprio "predicato di verità" può essere coerente.

Questo significa che nessun linguaggio coerente L può contenere una proposizione aperta V(...) in uno spazio vuoto tale che V(...) è vera di una proposizione P di L se e solo se P è vera. Dunque, per Tarski, l'italiano è un linguaggio incoerente!

Linguaggio e metalinguaggio/8

Questo suggerisce che si deve distinguere fra il linguaggio oggetto e il metalinguaggio se si vuole parlare coerentemente della verità di proposizioni del linguaggio oggetto.

Finora i nostri linguaggi oggetto sono stati linguaggi booleani mentre il ruolo di metalinguaggio è stato svolto dall'italiano.

Tuttavia, ci sono espressioni di varie categorie grammaticali che non appartengono all'italiano ma devono però appartenere al nostro metalinguaggio. In primo luogo, il metalinguaggio deve contenere variabili per riferirsi a proposizioni generiche del linguaggio oggetto. Abbiamo usato le lettere schematiche "P", "Q", "R", etc. in questo ruolo.

Lezione 9

Il condizionale/1

Il condizionale

E' venuto il momento di definire il significato dell'ultima parola logica booleana che considereremo: il condizionale

"se … allora ---"

Il condizionale fornisce una proposizione di un dato linguaggio booleano L quando i suoi due spazi vuoti vengono riepiti da una coppia di proposizioni di L.

La proposizione che occupa la prima posizione viene detta *antecedente* del condizionale, mentre quella che occupa la seconda posizione viene detta il suo *conseguente*.

Il condizionale nel linguaggio ordinario

Osservate che vi sono molti modi equivalenti in italiano per esprimere la proposizione espressa da un condizionale. Per esempio, le seguenti proposizioni:

- Q se P
- Q è una condizione necessaria per P
- P è una condizione sufficiente per Q
- supponiamo che P sia vera. Allora Q è vera
- P purché Q

sono tutte equivalenti a "se P, allora Q"

Esercizi riassuntivi/14

esercizio 22: traducente in proposizioni della forma "se P allora Q" le proposizioni seguenti:

1. Tina occupa la celletta n. 3 solo se Duke occupa la celletta n. 2.
2. Che Duke occupi la celletta n. 2 è una condizione sufficiente perché Mike occupi la n. 4.
3. Supponete che la NO sia verde. Allora anche la SO è verde.

Esercizi riassuntivi/15

esercizio 23: traducete in proposizioni della forma "se P allora Q" le proposizioni seguenti:

1. Tina occupa la celletta n. 2 purché Mike occupi la n. 1.
2. La regione NO è verde solo se la NE è verde.
3. La NO è verde se la NE è verde.

Costituenti immediati

Diciamo **costituente proprio** di una proposizione booleana P, un costituente di P che è diverso da P stessa.

Diciamo **costituente immediato** di una proposizione booleana P un costituente proprio di P che non è contenuto in nessun altro costituente proprio di P.

Per esempio: i costituenti immediati di

$(O(m,1) \wedge O(d,2)) \vee (O(m,2) \wedge O(t,3))$ sono

$O(m,1) \wedge O(d,2)$ e $O(m,2) \wedge O(t,3)$

Parole logiche booleane

Una **parola logica booleana** è una parola logica che ha la seguente proprietà:

(**B**) *La verità (o la falsità) di una proposizione P di cui essa è la parola logica principale dipende esclusivamente dalla verità e dalla falsità dei suoi costituenti immediati.*

Per esempio: la verità (o la falsità) di $P \vee Q$ dipende esclusivamente dalla verità e dalla falsità di P e di Q.

$P \vee Q$ è vera se almeno una fra P e Q è vera

Completezza funzionale

E' possibile dimostrare (teorema di completezza funzionale) che qualunque parola logica booleana (che soddisfa cioè la proprietà B) può essere espressa in termini delle nostre parole logiche "$\neg$", "$\wedge$", e "$\vee$". (Abbiamo visto i casi della disgiunzione esclusiva e della parola logica "né…né---".)

Anzi c'è di più: "$\vee$" può essere tradotta in termini di "$\neg$" e "$\wedge$" e "$\wedge$" può essere tradotta in termini di "$\neg$" e "$\vee$".

Dunque, si può dimostrare che ciascuna di queste coppie di parole logiche (la coppia "$\neg$" e "$\wedge$" oppure la coppia "$\neg$" e "$\vee$") è sufficiente a esprimere tutte le altre parole booleane.

Come? (Provate a pensarci.)

Il significato del condizionale/1

Alcuni usi del condizionale nel linguaggio ordinario non possono essere rappresentati **esattamente** da nessuna parola logica **booleana**.

Per rappresentarli adeguatamente dobbiamo fare ricorso a parole logiche non-booleane (che non soddisfano la condizione B).

Dunque, se vogliamo rappresentare il condizionale mediante una parola logica booleana, dobbiamo farlo mediante una parola logica che **approssima** il suo significato nel linguaggio ordinario.

Il significato del condizionale/2

Indichiamo con "$P \rightarrow Q$" il **condizionale booleano**, cioè la parola logica booleana che, secondo noi, approssima meglio il significato ordinario del condizionale (o uno dei suoi significati ordinari).

Per il teorema di completezza funzionale "$P \rightarrow Q$" deve poter essere tradotta in termini di negazione e congiunzione oppure in termini di negazione e disgiunzione.

La traduzione booleana che approssima meglio il significato ordinario del condizionale è la seguente:

"Se P allora Q" **approssima** $\neg(P \wedge \neg Q)$

Il significato del condizionale/3

Dunque definiamo il condizionale booleano "$\rightarrow$" nel modo seguente

$P \rightarrow Q =_{def} \neg(P \wedge \neg Q)$

Definire il condizionale in questo modo vuol dire che "$P \rightarrow Q$" significa esattamente:

"Non si dà il caso che P sia vera e Q sia falsa"

Per esempio

"Duke occupa la n.4 $\rightarrow$ Tina occupa la n. 5"

è equivalente a

"$\neg$(Duke occupa la n. 4 $\wedge$ $\neg$Tina occupa la n. 5)"

Il significato del condizionale/4

Vediamo altri esempi. La proposizione

Se Mike occupa la 1 e Tina occupa la 2, allora Duke occupa la 3,

viene tradotta nel modo seguente:

$\neg$[(Mike occupa la 1 $\wedge$ Tina occupa la 2) $\wedge$ $\neg$ Duke occupa la 3].

Se la NO non è rossa, allora è blu

si traduce come

$\neg(\neg R(NO) \wedge \neg B(NO))$.

Esercizi riassuntivi/16

esercizio 24: Trovate opportune proposizioni booleane che, secondo la nostra definizione del condizionale booleano, hanno lo stesso significato delle seguenti:

1. Se la NO è rossa oppure la NE è blu, allora la SE non è blu.
2. Se Mike occupa la 1, allora nessun piccione occupa la 2 o la 3.
3. Se Mike occupa una celletta pari, allora tutti i piccioni occupano una celletta pari.

Il significato del condizionale/5

La nostra definizione del condizionale implica che le regole di inferenza per "$\rightarrow$" possono essere ottenute dalle regole per "$\neg$" e "$\wedge$". Cominciamo con le E-regole.

$$\frac{P \rightarrow Q \quad P}{Q}\ \text{EV}\rightarrow 1 \qquad =_{def} \qquad \frac{\neg(P \wedge \neg Q) \quad P}{\neg\neg Q}$$

$$Q$$

Il significato del condizionale/6

Allo stesso modo deriviamo la seconda regola di eliminazione del condizionale vero:

P→Q $=_{def}$ ¬(P ∧ ¬Q)
¬ Q ¬ Q
------- EV →2 ----------
¬ P ¬ P

E le regole di eliminazione del condizionale falso:

¬(P→Q) $=_{def}$ ¬ ¬(P ∧ ¬Q) ¬(P→Q) $=_{def}$ ¬ ¬(P ∧ ¬Q)
--------- EF→1 ---------------- ---------EF→2 -------------
P P ∧ ¬Q ¬Q P ∧ ¬Q
P ¬Q

Esercizi riassuntivi/17

esercizio 25: derivate dalla nostra traduzione del condizionale le regole di introduzione per "→".

esercizio 26: mostrate che la nostra definizione del condizionale implica che "P →Q" ha lo stesso significato di "¬P ∨ Q".

Esempio 1/1

Torniamo al nostro problema della piccionaia. Abbiamo le seguenti informazioni iniziali:

1 [O(m,2) ∨ O(m,3)] → [O(t,3) ∨ O(t,4)]
2 O(m,3)

Siamo in grado di determinare la posizione di Tina?

Esempio 1/2

1 [O(m,2) ∨ O(m,3)] → [O(t,3) ∨ O(t,4)]
2 O(m,3)
----
3 O(m,2) ∨ O(m,3) IV∨2 (2)
4 O(t,3) ∨ O(t,4) EV→1 (1,3)
5 ¬(O(m,3) ∧ O(t,3)) IS
6 ¬ O(t,3) EF ∧1 (5,2)
7 O(t,4) EV∨2 (4,6)

Regole di eliminazione per →

P → Q P → Q
P ¬Q
--------- EV→1 -------- EV→2
Q ¬P

¬(P → Q) ¬(P → Q)
------------ EF→1 ------------- EF→2
P ¬Q