



Lezione 10

Il condizionale/2

Regole di introduzione per $\rightarrow$

$\frac{\neg P}{P \rightarrow Q} \text{IV} \rightarrow 1$ $\frac{P}{\neg(P \rightarrow Q)} \text{IF} \rightarrow$	$\frac{Q}{P \rightarrow Q} \text{IV} \rightarrow 2$ $\frac{\neg Q}{\neg(P \rightarrow Q)} \text{IF} \rightarrow$
--	--

$\equiv_{\text{def}} \neg(P \wedge \neg Q)$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

170

Esempio 2/1

Abbiamo i seguenti dati:

$\neg O(m,1) \rightarrow (O(t,2) \rightarrow O(d,3))$
 $O(t,2)$
 $O(d,4)$

Possiamo inferire la posizione di mike?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

171

Esempio 2/2

1. $\neg O(m,1) \rightarrow (O(t,2) \rightarrow O(d,3))$
2. $O(t,2)$
3. $O(d,4)$
4. $\neg(O(d,3) \wedge O(d,4))$ IS
5. $\neg O(d,3)$ EF $\wedge$ 2 (4,3)
6. $\neg(O(t,2) \rightarrow O(d,3))$ IF $\rightarrow$ (2,5)
7. $\neg\neg O(m,1)$ EV $\rightarrow$ 2 (1,6)
8. $O(m,1)$ E $\neg\neg$ (7)

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

172

Esempio 3/1

1. La regione SO è rossa o blu
2. Se la SO è blu, anche la NO è blu
3. La SO non è rossa
4. Se la SE non è verde allora la NO non è blu

Possiamo determinare il colore della SE?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

173

Esempio 3/2

1. $R(SO) \vee B(SO)$
2. $B(SO) \rightarrow B(NO)$
3. $\neg R(SO)$
4. $\neg V(SE) \rightarrow \neg B(NO)$

Di che colore è la SE?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

174

Esempio 3/3

1. $R(SO) \vee B(SO)$
2. $B(SO) \rightarrow B(NO)$
3. $\neg R(SO)$
4. $\neg V(SE) \rightarrow \neg B(NO)$
-
5. $B(SO)$
6. $B(NO)$
7. $\neg B(NO)$
8. $\neg \neg V(SE)$
9. $V(SE)$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

175

Esempio 4/1

Supponiamo di sapere che la proposizione

1. $(O(1,t) \rightarrow O(2,m)) \rightarrow O(1,t)$

è vera.

E' corretto inferire da questa proposizione che Tina occupa la celletta n. 1?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

176

Esempio 4/2

Possiamo ragionare così:

O tina occupa la 1 o non la occupa. Supponiamo che non la occupi.

Aggiungiamo dunque alle nostre informazioni la seguente proposizione

$\neg O(t,1)$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

177

Esempio 4/3

1. $(O(1,t) \rightarrow O(2,m)) \rightarrow O(1,t)$
2. $\neg O(t,1)$
-
3. $\neg(O(1,t) \rightarrow O(2,m))$ EV $\rightarrow$ 2 (1,2)
4. $O(1,t)$ EF $\rightarrow$ 1 (3)

Ma questo è assurdo, poiché la riga 4 asserisce che tina occupa la 1 il che contraddice l'assunzione 2. Dunque se Tina non occupasse la 1 allora dovrebbe occuparla! Non è possibile che tina non occupi la 1.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

178

Esempio 4/4

Ma se non è possibile che tina non occupi la 1, allora tina occupa la 1.

Dunque abbiamo dimostrato **per assurdo** che tina occupa la 1.

Osservate però che tale conclusione non può essere ottenuta direttamente applicando le nostre regole di eliminazione o di introduzione!

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

179

L'incompletezza delle regole Intelim/1

Chiamiamo regole **intelim** l'insieme costituito dalle regole di eliminazione e dalle regole di introduzione.

Il nostro esempio precedente mostra che l'insieme delle regole intelim è **incompleto**!

L'inferenza è **intuitivamente** corretta, ma non possiamo inferire la sua conclusione dalla premessa usando **solo** le nostre regole.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

180

L'incompletezza delle regole intelim/2

Vediamo un altro esempio. Consideriamo le seguenti informazioni:

$O(m,1) \vee O(m,2)$
 $O(m,1) \rightarrow O(t,3)$
 $O(m,2) \rightarrow O(t,3)$

Qual è la celletta occupata da tina?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

181

L'incompletezza delle regole intelim/3

Di nuovo, possiamo inferire che tina occupa la 3 ragionando per assurdo. Supponiamo che tina non occupi la 3 e mostriamo che questa ipotesi è **incompatibile con le nostre informazioni**.

1. $O(m,1) \vee O(m,2)$
2. $O(m,1) \rightarrow O(t,3)$
3. $O(m,2) \rightarrow O(t,3)$
4. $\neg O(t,3)$

-
- | | |
|------------------|--------------------------|
| 5. $\neg O(m,1)$ | EV $\rightarrow$ 2 (2,4) |
| 6. $\neg O(m,2)$ | EV $\rightarrow$ 2 (3,4) |
| 7. $O(m,2)$ | EV $\vee$ 2 (1,5) |

Ma la 6 e la 7 si contraddicono!

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

182

L'incompletezza delle regole intelim/4

Così la 4 ("tina non occupa la 3") è **incompatibile** con le informazioni date.

Questo implica intuitivamente che l'unica proposizione relativa alla posizione di tina compatibile con le nostre informazioni è "tina occupa la 3".

Dunque le nostre informazioni **implicano intuitivamente** che tina occupa la 3. Ma, ancora una volta questa conclusione non può essere inferita **solo** applicando le nostre regole.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

183

Lezione 11

Il sistema KE

Inferenza e verità

Le nostre regole di inferenza **trasmettono la verità** dalle premesse alla conclusione. Hanno cioè la seguente proprietà:

Se le premesse sono vere in uno stato **s** anche la conclusione è vera in **s**.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

185

Successioni intelim

Diciamo **successione intelim basata su Γ** una successione di proposizioni tale che ciascuna proposizione della successione è o

- una delle informazioni iniziali in Γ , oppure
- è ottenuta da proposizioni che la precedono mediante l'applicazione di una regola di eliminazione, oppure
- è ottenuta da proposizioni che la precedono mediante l'applicazione di una regola di introduzione.

26/05/2005

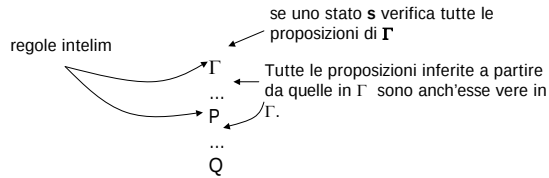
Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

186

Successioni intelim e verità

Dato che le nostre regole di inferenza trasmettono la verità in uno stato, le successioni intelim hanno la seguente proprietà.

Tutte le proposizioni di una successione intelim basata su Γ sono vere in tutti gli stati s che verificano tutte le proposizioni di Γ .



26/05/2005

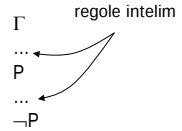
Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

187

Stati impossibili

Se una successione intelim basata su Γ contiene sia una proposizione P sia la sua negazione $\neg P$, allora **non può esistere** uno stato di cose che verifica tutte le proposizioni in Γ .

Infatti se esistesse uno stato s che verifica tutte le proposizioni in Γ , **tutte** le proposizioni della successione sarebbero **vere** in s . Ma questo non è possibile, perché **nessuno** stato s verifica sia una proposizione sia la sua negazione.



Non esiste uno stato che verifica tutte le proposizioni in Γ !

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

188

Il principio di bivalenza

Dato un qualsiasi stato s e una qualsiasi proposizione P :

o P è vera in s oppure $\neg P$ è vera in s

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

189

Il principio di non-contraddizione

Dato un qualsiasi stato s e una qualsiasi proposizione P :

non è possibile che P e $\neg P$ siano entrambe vere in s

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

190

Regole strutturali

Il **Principio di Bivalenza** e il **Principio di Non-Contraddizione** giustificano le seguenti due regole strutturali:

$\frac{}{P \mid \neg P}$ ← **Regola di Bivalenza**

Regola di Non-Contraddizione → $\frac{P \quad \neg P}{\times}$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

191

Ridondanza delle I-regole

Se aggiungiamo alle nostre regole intelim la regola di bivalenza e la regola di non-contraddizione, **le regole di introduzione diventano ridondanti**.

Per esempio l'applicazione di $\text{IV}\vee 1$ a sinistra può essere rimpiazzata dalla configurazione a destra dove non ci sono applicazioni di regole di introduzione:

$\frac{P}{P \vee Q}$ $\frac{P}{P \vee Q \mid \neg(P \vee Q)} \rightarrow \frac{}{\neg P}$
 $\times$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

192

Il sistema KE

Diciamo KE il sistema di regole che comprende:

- Le regole di eliminazione
- La regola di bivalenza
- La regola di non contraddizione

Dato che le regole di introduzione possono essere simulate dalle regole di KE, la loro aggiunta al sistema non ne aumenterebbe il potere deduttivo.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

193

KE-alberi

Regola di Bivalenza

P_1
 $\vdots$
 P_n
...

... = successioni
eliminate

Q | $\neg Q$
...

KE-albero basato
su $P_1, \dots, P_n$

R | $\neg R$ | S | $\neg S$
...

Regola di Non-Contraddizione

T | $\neg T$ | U | $\neg U$
x

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

194

KE-deduzioni

KE-deduzione di C
da $P_1, \dots, P_n$

P_1
 $\vdots$
 P_n
...

Q | $\neg Q$
...

R | $\neg R$ | S | $\neg S$
...

T | $\neg T$ | C | C | U | $\neg U$
x

La conclusione C ricorre
in tutti i rami aperti

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

195

KE-refutazioni/1

KE-refutazione di
 $P_1, \dots, P_n$

P_1
 $\vdots$
 P_n
...

Q | $\neg Q$
...

R | $\neg R$ | S | $\neg S$
...

T | $\neg T$ | U | $\neg U$ | V | $\neg V$ | Z | $\neg Z$
x

Non esiste uno stato
in cui $P_1, \dots, P_n$ sono
tutte vere, cioè
l'insieme delle
proposizioni $P_1, \dots, P_n$
è **incoerente**.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

196

KE-refutazioni/2

Nelle dimostrazioni per assurdo, per dimostrare che una certa conclusione C può essere inferita da un certo insieme di informazioni Γ dimostriamo che non può esistere uno stato di cose s in cui sono vere $P_1, \dots, P_n$ e la negazione di C.

Stati che verificano Γ

Stati che verificano
 Γ e verificano P

Stati che verificano
 Γ e falsificano P

tutti gli stati che verificano
 Γ verificano anche P

non esistono!

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

197

KE-refutazioni/3

C è KE-deducibile da $P_1, \dots, P_n$ se e solo se $P_1, \dots, P_n, \neg C$ è KE-incoerente.

P_1
 $\vdots$
 P_n
...

C | $\neg C$

KE-refutazione di
 $P_1, \dots, P_n, \neg C$



26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

198

Lestofanti e cavalieri

C'è un'isola abitata solo da due tipi di persone, i **cavalieri** che dicono sempre il vero, e i **lestofanti** che dicono sempre il falso.

Così, in questo caso, per qualunque abitante a dell'isola, le **informazioni di sfondo** sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &C(a) \vee L(a) \\ &\neg(C(a) \wedge L(a)) \\ &\text{Cavaliere}(a) \wedge \text{Dice}(a, "P") \rightarrow P \\ &\text{Lestofante}(a) \wedge \text{Dice}(a, "P") \rightarrow \neg P \end{aligned}$$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

199

Esercizi/1

Un abitante dell'isola fa la seguente dichiarazione:

"Io e mio fratello siamo entrambi lestofanti"

Di che tipo è l'abitante in questione e di che tipo è suo fratello?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

200

Esercizi/2

$D(a, "L(a) \wedge L(f)")$	
$C(a)$	$\neg C(a)$
$C(a) \wedge D(a, "L(a) \wedge L(f)") \rightarrow$ $\rightarrow L(a) \wedge L(f)$	$C(a) \vee L(a)$ $L(a)$
$C(a) \wedge D(a, "L(a) \wedge L(f)")$ $L(a) \wedge L(f)$	$L(a) \wedge D(a, "L(a) \wedge L(f)") \rightarrow$ $\rightarrow \neg(L(a) \wedge L(f))$
$L(a)$	$L(a) \wedge D(a, "L(a) \wedge L(f)")$ $\neg(L(a) \wedge L(f))$
$\neg(C(a) \wedge L(a))$	$\neg L(f)$
$\neg L(a)$	$C(f) \vee L(f)$
x	$C(f)$

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

201

Esercizi/3

Un secondo abitante dell'isola fa la seguente dichiarazione:

"O io o mio padre o entrambi siamo lestofanti"

Di che tipo è l'abitante in questione e di che tipo è suo padre?

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

202

Esercizi/4

Abbreviamo con "A" la proposizione $L(a) \vee L(p) \vee [L(a) \wedge L(p)]$

$D(a, "A")$	
$C(a)$	$\neg C(a)$
$C(a) \wedge D(a, "A") \rightarrow A$	$C(a) \vee L(a)$
$C(a) \wedge D(a, "A")$	$L(a)$
$L(a) \vee L(p) \vee [L(a) \wedge L(p)]$	$L(a) \wedge D(a, "A") \rightarrow \neg A$
$\neg(C(a) \wedge L(a))$	$\neg\{L(a) \vee L(p) \vee [L(a) \wedge L(p)]\}$
$\neg L(a)$	$\neg L(a)$
$\neg[L(a) \wedge L(p)]$	x
$L(p) \vee [L(a) \wedge L(p)]$	
$L(p)$	

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

203

Lezione 12

Correttezza, completezza,
decidibilità

Correttezza e completezza

Γ **implica** $P =_{\text{def}}$ P è vera in tutti gli stati in cui sono vere tutte le proposizioni in Γ .

P è **KE-deducibile** da $\Gamma =_{\text{def}}$ Esiste un KE-albero chiuso basato su $\Gamma, \neg P$

Correttezza di KE: se P è KE-deducibile da Γ , allora Γ implica P

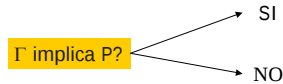
Completezza di KE: se Γ implica P , allora P è KE-deducibile da Γ

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

205

Procedure di decisione



Una procedura sistematica (algoritmo) che ci permette di rispondere sempre in un numero finito di passi ad ogni domanda di questo tipo, si chiama **procedura di decisione**.

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

206

Tipi di proposizioni

Diciamo semplici le proposizioni che sono elementari o negazioni di proposizioni elementari. Diciamo complesse le altre proposizioni. Le proposizioni complesse possono essere classificate in due categorie:

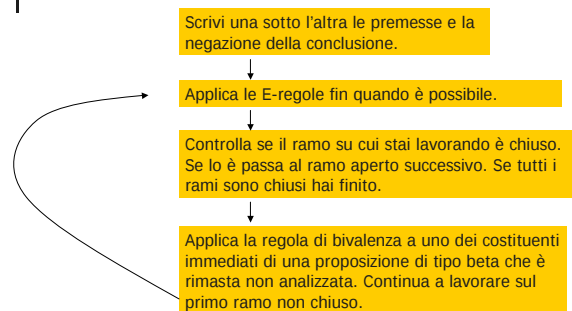
α	β
$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
$\neg(P \vee Q)$	$P \vee Q$
$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \rightarrow Q$
$\neg\neg P$	

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

207

La procedura BOOLE (schema)



26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

208

Esercizi/1

Considerate le seguenti premesse:

1. Se carlo non è aggressivo con arabella, allora arabella è aggressiva con bianca.
2. Arabella è aggressiva con bianca o con carlo.
3. Carlo non è aggressivo con chi è aggressivo con lui.

Stabilite, usando la procedura di dimostrazione delineata prima che queste tre premesse implicano la conclusione:

arabella è aggressiva con bianca

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

209

Esercizi/2

Considerate le seguenti premesse:

1. Se un paese è rosso confina solo con paesi verdi
2. Se un paese è verde confina solo con paesi rossi
3. Il paese n. 1 è blu

Stabilite se esse implicano la seguente conclusione:

Il paese n. 4 è blu

1	2
4	3

26/05/2005

Facoltà di Lettere e Filosofia
Università di Ferrara

210

Esercizi/3

Premesse:

1. Arabella è aggressiva con carlo oppure bianca è aggressiva con carlo
2. Arabella è aggressiva con se stessa oppure bianca è aggressiva con arabella
3. Ciascuno è aggressivo al massimo con una persona

Conclusione:

Né arabella né bianca sono aggressive con bianca