Il programma di Erlangen

Una visione unitaria della geometria in senso globale venne introdotta da Felix Klein (1849-1925) utilizzando il concetto di gruppo. Siamo negli anni 1865-68 e la geometria analitica viveva un periodo di ripresa con i nuovi lavori di Plücker e Cayley. Klein fu assistente di Plücker all'università di Bonn ma le sue ricerche si orientarono in una diversa direzione. Nel 1868 usciva la *Nuova geometria* di Felix Klein.
La nuova concezione di Klein ebbe origine dagli studi sulla teoria dei gruppi che, a partire dalle intuizioni di Lagrange, si era andata organizzando in una nuova branca algebrica e che probabilmente Klein ebbe modo di approfondire nel corso di numerosi viaggi a Parigi.
Klein collaborò in alcune sue ricerche col matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899), che era stato suo compagno di studi a Göttingen e il cui nome è rimasto legato alle trasformazioni di contatto da lui scoperte, e ai gruppi continui di sostituzioni sui quali scrisse un ponderoso trattato in tre volumi (1893).
Il concetto di gruppo è estremamente generale: i suoi elementi possono ad esempio essere numeri (come nell'aritmetica), o punti (come nella geometria), o trasformazioni (come nell'algebra e nella geometria); la sua operazione può essere aritmetica (come l'addizione e la moltiplicazione) o geometrica (come la rotazione attorno ad un punto o la traslazione) o più generalmente algebrica (la composizione di due applicazioni qualunque). Klein utilizzò le possibilità unificatrici del concetto di gruppo per caratterizzare le diverse geometrie che si erano sviluppate, con metodi e linguaggi differenti, nel corso del secolo.
La visione di Klein è illustrata nella prolusione che egli tenne ad Erlangen nel 1872, in occasione della libera docenza, ed è nota come Programma di Erlangen (*Erlanger Programme*). Una traduzione in italiano venne fatta alla fine del secolo dal matematico italiano Gino Fano (titolo della traduzione italiana: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*). In esso una geometria è descritta come lo studio delle proprietà che sono invarianti rispetto ad un particolare gruppo di trasformazioni. Ad esempio la geometria euclidea del piano è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni ortogonali (traslazioni, rotazioni e simmetrie) del piano in sé. La geometria affine è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti per trasformazioni ortogonali affini (lineari affini a determinante $\neq 0$), tra queste proprietà ad esempio vi è quella di trasformare una conica di un determinato tipo in una conica dello stesso tipo, la geometria proiettiva è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni proiettive, e così via.
In questo modo qualsiasi classificazione di trasformazioni in gruppi e sottogruppi diventa una classificazione delle diverse geometrie, consentendo anche di interpretare le geometrie non euclidee iperbolica ed ellittica, assieme alla geometria euclidea, nell'ambito della geometria proiettiva.
L'influenza del programma di Erlangen, dapprima limitata, divenne poi universale, caratterizzando l'impostazione generale di tutti i corsi universitari di geometria. Klein d'altronde svolse ininterrottamente per circa mezzo secolo attività di insegnamento e divulgazione esercitando un forte influsso sugli ambenti pedagogici a vari livelli. Nel 1886 Klein divenne professore all'Università di Göttingen che, così come era stato per l'Ecole Polytechnique all'inizio del secolo ad opera di Monge e Poncelet, era diventata

il centro irradiante della geometria moderna, attraverso le ricerche di Gauss, Riemann e Klein.
Le ricerche sulla teoria dei gruppi non esauriscono la ricerca matematica di Klein. E' rimasta classica la sua storia delle matematiche del secolo XIX pubblicata postuma: *Volesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1926-27). Il suo nome è pure ricordato in topologia in relazione ad una superficie ad una sola faccia detta 'otre' o 'bottiglia di Klein'. E' stato da noi ricordato anche in relazione al primo modello di geometria iperbolica piana realizzato nel piano euclideo.

Applicazione della teoria dei gruppi alla geometria

Gruppo astratto

Il concetto fondamentale su cui si basa l'impostazione di Klein è quello di gruppo di trasformazioni.
Ricordiamo la:

Definizione di gruppo: $< A, \cdot >$

A insieme, $\cdot$ operazione $A \times A \to A \,/\, (a, b) \to a \cdot b$, con le proprietà:

1) associativa: $(ab)c = a\,(bc) \quad \forall\, a,b,c \in A$
2) con elemento neutro: $\exists\, e \in A \,/\, ae = a \quad \forall\, a \in A$
3) $\forall\, a \in A \;\; \exists\, x \in A \;/\; ax = e$

Ne segue:

1) $ax = e \;\Rightarrow\; xa = e$
2) se e è l'elemento unitario: $ea = a \;\; \forall\, a \in A$
3) $ax = e$ e $ay = e \;\Rightarrow\; x = y$ (l'inverso è unico)
4) $ae = a$ e $ae^* = a \;\; \forall\, a \in A \;\Rightarrow\; e = e^*$ (l'unità è unica)

Definizione di sottogruppo

E' un sottoinsieme $B \subset A$ chiuso rispetto alla operazione $\cdot$: $a, b \in B \;\Rightarrow\; ab,\; a^{-1} \in B$ ($ab^{-1} \in B$)

Gruppo di trasformazioni

Siano: M insieme, $M = \{x, y, z, \dots\}$, $f: M \to M$ biettiva, l'insieme:

$$\mathbf{G} = \{\boldsymbol{f}: \mathbf{M} \to \mathbf{M},\ \boldsymbol{f} \text{ biettiva}\}$$

è un gruppo con l'operazione di **composizione**:

$$(f \cdot g)(x) = f(g(x))$$

L'unità del gruppo è l'applicazione identica: $id(x) = x \quad \forall x \in \mathbf{M}.$
L'applicazione inversa è:

$$f^{-1}(x) = y \qquad dove \qquad y = f(x)$$

risulta allora:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id_M$$

G è detto un **gruppo di trasformazioni di M**.

Geometria di un gruppo dato

Siano M un insieme qualunque, G un gruppo di trasformazioni di M. Conveniamo di chiamare M **spazio**, i suoi elementi **punti** e un qualunque insieme di punti, **figura**.
Diremo che **la figura A è equivalente alla figura B** se esiste una trasformazione di G che manda A su B, cioè:

$$\mathbf{A \sim B \quad se \ \exists\ \varphi \in G \ (\varphi : M \to M) \ / \ \varphi(A) = B}$$

Poiché G è un gruppo si ha immediatamente che se A è equivalente a B, B è equivalente ad A, e due figure equivalenti ad una terza sono equivalenti tra loro:

$$\mathbf{A \sim B \ \Rightarrow \ \varphi(A) = B \ \Rightarrow \ \varphi^{-1}(B) = A \ \Rightarrow \ B \sim A}$$
$$\mathbf{\varphi(A) = C, \psi(B) = C \ \Rightarrow \ (\psi^{-1} \cdot \varphi)(A) = B}$$

Dunque le proprietà di gruppo garantiscono le proprietà fondamentali (riflessività e transitività) delle figure equivalenti.

Klein allora chiama **geometrica** ogni proprietà delle figure dello spazio M e ogni grandezza legata ad una figura che resti invariata per tutte le trasformazioni del gruppo G, vale a dire che sia comune a tutte le figure equivalenti.
Il sistema di proposizioni relative alle proprietà delle figure e delle grandezze invarianti per tutte le trasformazioni del gruppo G si chiama la **geometria del gruppo G**.

Vediamo ora alcune applicazioni concrete della teoria dei gruppi secondo Klein. Studieremo essenzialmente solo la geometria del **gruppo proiettivo e dei suoi sottogruppi**.

Gruppo proiettivo e suoi sottogruppi fondamentali

Per semplificare l'espressione algebrica, ci limitiamo al caso bidimensionale. Poiché seguiamo un metodo analitico, i risultati si possono facilmente estendere ad un numero maggiore di dimensioni.

Gruppo proiettivo

Consideriamo un piano proiettivo, cioè un insieme di punti ognuno dei quali è definito da una terna di coordinate omogenee

$$(x_1, x_2, x_3)$$

Una applicazione biunivoca del piano in sé che a ciascun punto **M**(x_1, x_2, x_3) fa corrispondere il punto **M'**(x'_1, x'_2, x'_3) di coordinate:

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases}$$

dove c_{ij} sono costanti reali tali che:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

e ρ' è una quantità qualunque non nulla, è una **trasformazione proiettiva del piano proiettivo**, cioè una applicazione biunivoca del piano in sé che manda punti allineati in punti allineati (trasforma rette in rette). Le applicazioni lineari a determinante non nullo in coordinate omogenee rappresentano tutte e sole le trasformazioni proiettive (analogo risultato sussiste per lo spazio proiettivo).

Le proprietà di gruppo delle trasformazioni proiettive sono dimostrabili in base alle definizioni e agli assiomi della geometria proiettiva. Tuttavia la verifica di queste proprietà attraverso la rappresentazione analitica è molto semplice.
In termini di matrici, posto:

$$C^1 = \left(c_{ij}^1\right), \quad C^2 = \left(c_{ij}^2\right), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\rho_1' X' = C^1 X, \quad \rho_2' X'' = C^2 X'$$

da cui:

$$\rho' X'' = CX'',$$

dove $C'' = C^2\, C^1$ è il prodotto righe per colonne. Dunque:

$$\det C = \det C^2 \cdot \det C^1 \neq 0$$

Ne segue che l'applicazione composta $f_2 \cdot f_1$ è una trasformazione proiettiva poiché è espressa in coordinate omogenee da una trasformazione lineare a determinante non nullo. Per la trasformazione inversa di $\boldsymbol{f}(\mathbf{M}) = \mathbf{M'}$, invertendo la trasformazione lineare:

$$\rho' X' = CX \quad \Leftrightarrow \quad \rho X = C^{-1} X' \quad \textbf{dove} \quad \rho = \frac{1}{\rho'} \quad \textbf{e} \quad \det C^{-1} = \frac{1}{\det C} \neq 0$$

Il gruppo di trasformazioni proiettive è detto **gruppo proiettivo**.

Osservazione: ogni trasformazione proiettiva è individuata dai coefficienti c_{ij}. Poiche le formule sono omogenee, è sufficiente assegnare 8 rapporti dei coefficienti c_{ij} affinché la trasformazione sia assegnata. Questi 8 rapporti sono detti i **parametri del gruppo proiettivo**. Il gruppo proiettivo è dunque un **gruppo a 8 parametri** perché ogni suo elemento è individuato da 8 parametri indipendenti.

Invarianti del gruppo proiettivo

La geometria proiettiva è la disciplina che studia le proprietà delle figure e delle grandezze legate alle figure che sono invarianti per ogni trasformazione proiettiva. Possiamo dunque definire la geometria proiettiva come la **geometria del gruppo proiettivo**.
In geometria proiettiva hanno particolare importanza gli **invarianti del gruppo proiettivo**.

Si dicono **invarianti di *n* punti**, relativamente al gruppo proiettivo, le funzioni scalari

$$F(M_1, M_2, \cdots, M_n)$$

che non sono identicamente costanti ma prendono valori uguali sui sistemi di n punti proiettivamente equivalenti, ossia che si trasformano gli uni negli altri per mezzo di trasformazioni del gruppo proiettivo.
Si può osservare che il gruppo proiettivo non ha invarianti per $n \leq 3$ (segue dal fatto che assegnati tre punti M_1, M_2, M_3, ed altri tre punti $M°_1$, $M°_2$, $M°_3$, esiste sempre una trasformazione proiettiva che fa passare da M_1, M_2, M_3 a $M°_1$, $M°_2$, $M°_3$, dunque sarebbe:

$$F(M_1, M_2, M_3) = F(M_1^0, M_2^0, M_3^0) = c \qquad \forall M_1, M_2, M_3$$

Allo stesso modo si può dimostrare che non esistono invarianti di 4 punti non allineati
Sappiamo che il **birapporto** o **rapporto anarmonico** di 4 punti allineati:

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} : \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4}$$

è invariante per trasformazioni proiettive, dunque il birapporto è un invariante di 4 punti per il gruppo proiettivo.
Per $n \geq 5$ si può dimostrare che esistono invarianti di n punti, che si possono sempre esprimere in funzione di birapporti di 4 di questi punti. Per questo il rapporto anarmonico è detto l'**invariante fondamentale** del gruppo proiettivo.

Gruppi di automorfismi

Sia G un gruppo di trasformazioni di uno spazio qualunque M. Se le trasformazioni del gruppo G trasformano un insieme U di punti in se stesso (cioè sono applicazioni di U in sé) esse si dicono **automorfe** rispetto ad U o che sono **automorfismi** rispetto ad U.
Gli automorfismi possono spostare i punti dell'insieme U, purché ciascun punto dell'insieme U venga trasformato in un punto di U.
L'insieme delle trasformazioni del gruppo G automorfe rispetto ad U è un gruppo, dunque un sottogruppo di G.
Il fatto è evidente, poiché la composizione di due automorfismi rispetto ad U è ancora un automorfismo rispetto ad U, come pure l'inverso di un automorfismo.

Gruppo affine

Scegliamo una retta qualunque del piano proiettivo, chiamiamola **retta all'infinito** e indichiamola con ∞.
Gli automorfismi relativamente alla retta all'infinito sono un sottogruppo del gruppo proiettivo, che viene chiamato **gruppo affine**, e ciascuna trasformazione appartenente a questo gruppo, **trasformazione affine**.
Chiaramente le trasformazioni affini fanno corrispondere ai punti del piano proiettivo situati a distanza finita (dunque non appartenenti alla retta all'∞) punti a distanza finita.
Consideriamo i punti del piano proiettivo privato della retta all'infinito (si dice anche che è stato eseguito un **taglio** secondo la retta all'infinito). Il piano proiettivo privato della retta all'infinito è detto **piano affine**.
Determiniamo la rappresentazione analitica delle trasformazioni affini nel piano affine (escludendo cioè i punti all'infinito).
Introduciamo dapprima nel piano proiettivo un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3) tali che la retta all'infinito abbia per equazione, in questo sistema, $x = 0$. Consideriamo una trasformazione proiettiva definita da:

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3 \end{cases}$$

Essa rappresenta una trasformazione affine se $x_3 = 0$ implica $x'_3 = 0$ per x_1, x_2 qualunque. (Cioè se la retta $x_3 = 0$ ha se stessa come immagine). Per questo è necessario e sufficiente che: $c_{31} = c_{32} = 0$.
Si ottiene così la rappresentazione analitica di una trasformazione affine:

$$\begin{cases} \rho' x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \\ \rho' x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 \\ \rho' x'_3 = \qquad\qquad\qquad\quad c_{33}x_3 \end{cases}$$

e poiché $x_3 \neq 0$ per ogni punto a distanza finita, è possibile aritmetizzare il piano affine nella sua totalità introducendo le coordinate non omogenee:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y.$$

E’ dunque superfluo introdurre le coordinate omogenee quando si tratta del piano affine. Dividendo le prime due uguaglianze del sistema omogeneo per la terza e ponendo

$$\frac{c_{11}}{c_{33}} = a_1, \quad \frac{c_{21}}{c_{33}} = a_2, \quad \frac{c_{12}}{c_{33}} = b_1, \quad \frac{c_{22}}{c_{33}} = b_2, \quad \frac{c_{13}}{c_{33}} = c_1, \quad \frac{c_{23}}{c_{33}} = c_2$$

si ottiene la rappresentazione analitica del gruppo affine in coordinate non omogenee:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \qquad (*)$$

ogni trasformazione della forma (*) è affine a condizione che:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

altrimenti la trasformazione non è biunivoca.
Poiché le formule (*) hanno 6 parametri, il gruppo affine è un **gruppo a 6 parametri**.

Invarianti del gruppo affine

La geometria del gruppo affine è detta geometria affine e studia le proprietà delle figure invarianti per il gruppo affine. Essa differisce considerevolmente dalla geometria proiettiva. Ad esempio, in geometria proiettiva due rette si tagliano sempre, mentre in geometria affine esistono rette parallele. Infatti due rette del piano proiettivo che concorrono in un punto all’infinito, divengono parallele nel piano affine, poiché abbiamo eseguito un taglio del piano proiettivo secondo la retta all’infinito eliminando il loro punto d’incontro.
Evidentemente il postulato delle parallele euclideo vale nel piano affine: per ciascun punto preso al di fuori di una retta passa 1 e 1 sola retta parallela alla retta data. Osserviamo inoltre che la retta affine ammette un ordine lineare, come la retta euclidea.
Cerchiamo gli invarianti del gruppo affine.
Ovviamente ogni invariante del gruppo proiettivo è anche un invariante del gruppo affine, poiché le trasformazioni affini sono particolari trasformazioni proiettive. Non vale il viceversa, poiché esistono invarianti affini non proiettivi.
L’invariante affine fondamentale è il **rapporto armonico di tre punti allineati**.
Il rapporto armonico di tre punti $\mathbf{M_1}$ (x_1, y_1), $\mathbf{M_2}$ (x_2, y_3), $\mathbf{M_3}$ (x_3, y_3), è definito dall’una o dall’altra delle due formule:

$$(M_1, M_2, M_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}; \qquad (M_1, M_2, M_3) = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Non c'è ambiguità, poiché nel caso abbiano significato entrambe ($x_3 \neq x_2$, $y_3 \neq y_2$) esse ammettono lo stesso valore, in considerazione della equazione della retta $y = mx+q$.
E' facile vedere che il rapporto armonico è invariante per le trasformazioni affini. Indicando con x', y' le coordinate del punto **M'** trasformato di **M** (x, y) tramite uan applicazione affine, si ha:

$$x'_2 - x'_1 = a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) = (M_1, M_2, M_3)[a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)];$$
$$x'_3 - x'_2 = a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)$$

dunque:

$$(M'_1, M'_2, M'_3) = \frac{x'_2 - x'_1}{x'_3 - x'_2} = (M_1 M_2 M_3)$$

Se i tre punti non sono allineati, non si hanno degli invarianti affini. Questo perché tre punti non allineati ammettono una trasformazione affine che fa loro corrispondere altri tre punti qualunque non allineati. Per $n \geq 4$ si trovano degli invarianti affini di n punti qualunque. Questi invarianti si lasciano tutti esprimere per mezzo di rapporti armonici. Per questa ragione il rapporto armonico è **l'invariante fondamentale del gruppo affine**.

Osservazione.
Si può introdurre il piano affine e, più generalmente, la geometria affine mediante un sistema di assiomi appropriato, senza far menzione della geometria proiettiva. In questa ottica, **piano affine** è un insieme di enti di due specie, punti e rette, che verificano gli assiomi di 5 gruppi:
I gruppo. Definisce le relazioni appartenenza e contiene i primi 3 assiomi del gruppo I della geometria euclidea
II gruppo. Definisce l'ordine dei punti sulla retta, corrisponde al 2° gruppo di assiomi della geometria euclidea (poiché la retta affine ammette un ordine lineare di punti, gli assiomi di ordine della geometria affine devono coincidere con quelli della geometria euclidea)
III gruppo. Contiene l'assioma di continuità di Dedekind
IV gruppo. Contiene l'assioma delle parallele di Euclide
V gruppo. Corrisponde alla proposizione di Desargues (dei triangoli omologici) nel cui enunciato si tiene conto dell'esistenza di rette parallele.
La definizione di piano affine tiene conto di tutti gli assiomi della geometria euclidea ad eccezione di quelli di congruenza.

Gruppo affine unimodulare

Diciamo che la trasformazione affine:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

è unimodulare se: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \pm 1$.

Si dimostra facilmente che le trasformazioni affini unimodulari formano un gruppo. Infatti:

1) La composizione di due trasformazioni affini unimodulari è affine unimodulare, in quanto se la trasformazione:

$$\begin{cases} x'' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y'' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

è la composizione delle trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = a_1^{(1)} x + b_1^{(1)} y + c_1^{(1)} \\ y' = a_2^{(1)} x + b_2^{(1)} y + c_2^{(1)} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x'' = a_1^{(2)} x + b_1^{(2)} y + c_1^{(2)} \\ y'' = a_2^{(2)} x + b_2^{(2)} y + c_2^{(2)} \end{cases}$$

allora si ha la relazione tra le matrici:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} & b_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} & b_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} & b_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

e dunque il determinante è il prodotto dei determinanti: $\Delta = \Delta_1 \, \Delta_2 = \pm 1$.

2) L'inversa di una trasformazione affine di modulo 1 è affine di modulo 1. Infatti l'inversa di una applicazione affine ha come matrice dei coefficienti la matrice inversa della applicazione data, dunque il suo determinante Δ_2 è legato al determinante della applicazione data da:

$$\Delta_2 = \frac{1}{\Delta_1} = \pm 1 .$$

Il gruppo di queste applicazioni, come pure la geometria da esso derivata, è detto affine **unimodulare**.
Il gruppo affine unimodulare è un gruppo a 5 parametri poiché le equazioni dipendono da 6 parametri, ma la condizione sul determinante implica l'equazione:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$$

che lascia solo 5 parametri indipendenti.
Ciascun ente della geometria affine in generale è evidentemente un ente della geometria affine unimodulare. Al contrario, la seconda comprende enti estranei alla prima, poiché la classe degli invarianti del gruppo affine unimodulare è più grande della classe degli invarianti del gruppo affine in generale.

Facciamo vedere che il gruppo affine unimodulare ammette un invariante di tre punti non allineati.
Supponiamo che tre punti $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ si trasformino in $M_1'(x_1', y_1'), M_2'(x_2', y_2'), M_3'(x_3', y_3')$. Si verifica allora facilmente che:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Ne segue che il valore assoluto del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

è un invariante di 3 punti.
In geometria affine unimodulare a ciascun triangolo $M_1M_2M_3$ si associa l'invariante:

$$S = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

La quantità S è detta l'**area del triangolo** $M_1M_2M_3$.
Si può poi definire l'area di un poligono e l'area di una figura a contorno curvilineo; per area di un poligono si intende la somma delle area dei triangoli componenti, e per area di una figura curvilinea il limite della successione delle aree dei poligoni inscritti che la approssimano. Dunque la geometria affine unimodulare comprende tra i suoi oggetti le aree delle figure.

Gruppo ortogonale

La trasformazione affine

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

è detta **ortogonale** se la sua matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

è ortogonale, cioè è tale che: $A\,{}^tA = I$ dove I è la matrice unità e ${}^tA$ è la matrice trasposta di A, ossia:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \qquad {}^{t}A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$$

L'insieme delle trasformazioni ortogonali è un gruppo: Infatti:

1) La composizione di due trasformazioni ortogonali è ortogonale. Poiché è già stato osservato che la composizione di due trasformazioni affini è affine, basta verificare l'ortogonalità della matrice associata alla trasformazione composta. Siano A_1 e A_2 le matrici associate alle applicazioni ortogonali date. Il loro prodotto righe per colonne sia la matrice $A = A_2\, A_1$. Si ha allora:

$$A\,{}^{t}A = A_2\, A_1\, {}^{t}(A_2\, A_1) = A_2\, A_1\, ({}^{t}A_1\, {}^{t}A_2) = A_2\, (A_1\, {}^{t}A_1)\, {}^{t}A_2 = A_2\, I\, {}^{t}A_2 = A_2\, {}^{t}A_2 = I$$

2. L'inversa di una trasformazione ortogonale è ortogonale. Infatti l'inversa di una trasformazione ortogonale di matrice A è una trasformazione affine di matrice A^{-1}. Per l'ortogonalita di A e l'unicità della matrice inversa:

$$A\,{}^{t}A = I \;\Rightarrow\; A^{-1} = {}^{t}A$$

e dunque:

$$A^{-1}\,{}^{t}A^{-1} = {}^{t}A\,{}^{t}({}^{t}A) = {}^{t}A\,A = I$$

Il gruppo delle trasformazioni ortogonali è detto **gruppo ortogonale**. Poiché ogni trasformazione ortogonale ha determinante uguale a ± 1, il gruppo ortogonale è un sottogruppo del gruppo affine unimodulare.

La condizione di ortogonalità si può anche esprimere mediante le tre condizioni scalari:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 1\\ a_2^2 + b_2^2 &= 1\\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

pertanto il gruppo ortogonale si enuclea dal gruppo affine imponendo tre restrizioni ai sei parametri a_i, b_i, c_i e dunque è un **gruppo a 6 parametri**.
Si può dare alle condizioni di ortogonalità una forma differente. Poiché A è ortogonale se è solo se ${}^{t}A$ è ortogonale, le condizioni:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1\\ b_2^1 + b_2^2 &= 1\\ a_1 b_1 + a_2 b_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

sono equivalenti alle precedenti (*).

A differenza di tutti i gruppi esaminati finora, il gruppo ortogonale ammette un invariante di due punti: è la funzione di due punti $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ definita da:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Il carattere invariante di questa funzione è facile a verificarsi: se $M_1^{'}(x_1^{'}, y_1^{'}), M_2^{'}(x_2^{'}, y_2^{'})$ sono i trasformati di M_1 e M_2 per una trasformazione ortogonale di coefficienti a_i, b_i, c_i, per le (**) si ha:

$$\rho(M_1^{'}, M_2^{'}) = \sqrt{[a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1)]^2 + [a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1)]^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(x_2 - x_1)^2 + (b_1^2 + b_2^2)(y_2 - y_1)^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \rho(M_1, M_2)$$

Nella geometria del gruppo ortogonale, la quantità $\rho(M_1, M_2)$ è detta **distanza** dei punti M_1 e M_2. La distanza di due punti rappresenta **l'invariante fondamentale** di questa geometria, poiché tutti gli altri invarianti si lasciano esprimere in funzione della distanza.
La geometria del gruppo ortogonale non è altro che la geometria elementare in cui le figure equivalenti si corrispondono per rotazioni, traslazioni e simmetrie.

Confronto tra diverse geometrie

Abbiamo visto il gruppo proiettivo e i suoi sottogruppi principali: affine, affine unimodulare, ortogonale. A questi quattro gruppi corrispondono quattro geometrie: proiettiva, affine, affine unimodulare o metrica, elementare.
Di questi gruppi, il più ampio è quello messo alla base della geometria proiettiva (cioè il gruppo proiettivo) e il più ristretto quello che sta alla base della geometria elementare (cioè il gruppo ortogonale). D'altra parte la geometria proiettiva ha la classe di enti più povera di tutti, e la geometria elementare la più ricca. In effetti la geometria elementare ingloba sia gli enti e le relazioni affini (rapporti armonici di tre punti, parallelismo) che gli enti proiettivi (birapporto di quattro punti…). Al contrario, la geometria proiettiva prescinde dalle proprietà strettamente affini delle figure, e la geometria affine ignora le proprietà metriche, in quanto non distingue ossia considera equivalenti figure che differiscono solo per proprietà metriche, come la lunghezza.
In generale, più il gruppo fondamentale di una geometria è esteso, meno è ricco in enti geometrici. Il fatto è evidente, poiché più le trasformazioni del gruppo sono numerose, meno si trovano relazioni o proprietà che sono invarianti per *tutte* queste trasformazioni.
Le proprietà e le grandezze invarianti per un gruppo qualunque si rivelano 'più stabili' che le proprietà e le grandezze invarianti per un suo sottogruppo qualunque, poiché 'resistono' ad un maggior numero di trasformazioni.

Potremmo schematizzare i rapporti tra i gruppi e tra le geometrie associate nel modo seguente.
Indichiamo con:

G_E = gruppo ortogonale	**W_E = geometria elementare**
G_M = gruppo affine di modulo 1	**W_M = geometria metrica**
G_A = gruppo affine	**W_A = geometria affine**
G_P = gruppo proiettivo	**W_P = geometria proiettiva**

Si ha allora la successione dei gruppi, ordinata per inclusione:

$$\mathbf{G_E \subset G_M \subset G_A \subset G_P}$$

cui corrisponde la successione in ordine inverso per le proprietà che si conservano (gli enti, gli invarianti) delle geometrie derivate:

$$\mathbf{W_E \supset W_M \supset W_A \supset W_P}$$

Dove in:

W_E	si conservano:	la lunghezza, l'ampiezza angolare, le dimensioni e la forma di qualsiasi figura
W_M	si conservano:	le aree
W_A	si conservano:	il parallelismo, la natura di una conica
W_P	si conservano:	l'allineamento, la collinearità, i birapporti, i gruppi armonici, la proprietà di essere una sezione conica

Naturalmente in ogni geometria si conservano anche gli invarianti delle geometrie successive.
La geometria affine **W_A** fu messa in luce per la prima volta da Euler e poi da Möbius nel suo *Die Barycentrische Calcul* e risulta utile nella meccanica delle deformazioni: non fu mai presa in esame da Klein.
Possiamo anche aggiungere il gruppo delle traslazioni **G_t** e il gruppo delle trasformazioni rigide (traslazioni e rotazioni) del piano **G_r** :

$$\mathbf{G_t \subset G_r \subset G_E \subset G_M \subset G_A \subset G_P}$$

E poi considerare proprietà più generali di quelle proiettive. Le proprietà proiettive delle figure sono quelle che sono invarianti rispetto alle trasformazioni lineari (in coordinate omogenee) a determinante non nullo.
Se ammettiamo trasformazioni di grado superiore e cerchiamo proprietà di curve e superfici che sono invarianti anche per queste siamo portati a considerare altri gruppi di trasformazioni. Le trasformazioni che presto soppiantarono le trasformazioni lineari come oggetto principale di interesse furono quelle dette *birazionali*, in quanto sia esse che le loro inverse possono essere espresse come funzioni razionali delle coordinate, ossia come quozienti di polinomi (ci limitiamo in ciò che segue alla geometria piana):

$$x' = \varphi(x, y) \qquad ; \qquad y' = \psi(x, y)$$

dove φ, ψ sono funzioni razionali di x, y e tali inoltre che x, y possono essere espresse come funzioni razionali di x', y'.
Esempio di trasformazione birazionale è *l'inversione rispetto ad un cerchio*:

$$x' = r^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ; \quad y' = r^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad (r \neq 0)$$

L'interesse per le funzioni birazionali fu originato dal fatto che Riemann se ne era servito nelle sue ricerche sugli integrali e le funzioni abeliane.
Luigi Cremona (1830-1903) introdusse nel 1854 le trasformazioni birazionali generali. In coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 le equazioni di una trasformazione birazionale sono della forma:

$$x'_i = F_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

e quelle della sua inversa:

$$x_i = G_i(x'_1, x'_2, x'_3) \qquad i = 1, 2, 3$$

dove gli F_i e i G_i sono polinomi omogenei di grado n nelle rispettive variabili.

Al gruppo delle *trasformazioni birazionali* $\mathbf{G_B}$ corrisponde quella che venne chiamata *geometria algebrica* $\mathbf{W_B}$ (oggi il termine ha un significato più ampio).
Un gruppo ancor più generale di trasformazioni che si presentò alla attenzione dei matematici fu quello delle *trasformazioni topologiche* $\mathbf{G_T}$ cui corrisponde la *topologia* $\mathbf{W_T}$. Si ha allora:

$$\mathbf{G_P} \subset \mathbf{G_B} \subset \mathbf{G_T}$$
$$\mathbf{W_P} \supset \mathbf{W_B} \supset \mathbf{W_T}$$

Si ha allora che in:

$\mathbf{W_B}$	si conservano:	i generi di curve e superfici
$\mathbf{W_T}$	si conservano:	l'indice di connessione…

Quest'ultima schematizzazione si riferisce a sviluppi posteriori della matematica, mentre lo stesso Klein aveva caratterizzato la geometria algebrica allora emergente come la geometria delle trasformazioni birazionali.

Le precedenti catene di inclusioni tra gruppi di trasformazioni e geometrie derivate non esauriscono le esemplificazioni di Klein.
Bisogna notare anche che in realtà non tutta la geometria odierna può essere incorporata nello schema kleiniano: ad esempio l'attuale geometria algebrica e la geometria differenziale non rientrano in questo schema. Nel caso della geometria differenziale Klein parla delle trasformazioni che lasciano invariata l'espressione del ds^2. Di qui si è originata la teoria degli invarianti differenziali (*Gesammelte Matematiche Abhandlungen*, I, 487).

Altri sottogruppi del gruppo affine. Trasformazioni di similitudine

Oltre al gruppo ortogonale $\mathbf{G_E}$ (ossia il gruppo delle traslazioni, rotazioni e simmetrie) si possono evidenziare altri sottogruppi del gruppo affine.
Per ottenere gli invarianti associati alle figure simili bisogna introdurre il sottogruppo del gruppo affine noto come *gruppo metrico parabolico*.
In coordinate non omogenee le trasformazioni del gruppo metrico parabolico sono della forma:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = brx + ary + d \end{cases}$$

dove $a^2 + b^2 \neq 0$ e $r^2 = 1$.
Queste trasformazioni conservano le ampiezze degli angoli (non le aree).
Le *trasformazioni di similitudine* $\mathbf{G_{MP}}$ si possono anche rappresentare come segue:

$$\begin{cases} x' = r\,(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + c \\ y' = r\,(\pm x\sin\varphi \pm y\cos\varphi) + d \end{cases}$$

Il gruppo $\mathbf{G_{MP}}$ è detto anche *gruppo di Klein*.
La geometria metrica parabolica $\mathbf{W_{MP}}$ corrisponde alla teoria della similitudine contenuta nella geometria euclidea.

$\mathbf{W_A}$

$\mathbf{W_{MP}}$ — $\mathbf{W_{....}}$

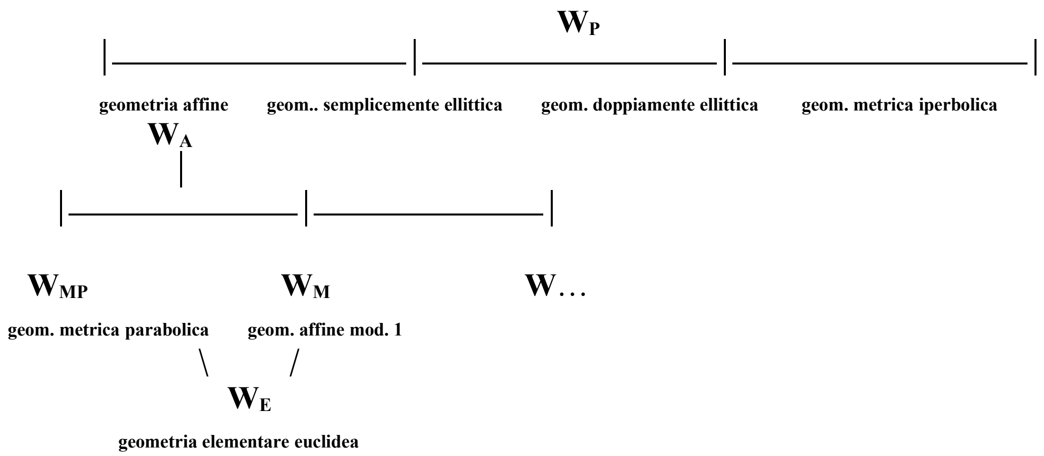
geom. metrica parabolica — **altre suddivisioni della geometria affine**

$\mathbf{W_E}$

geometria euclidea

Per caratterizzare la geometria metrica *iperbolica* bisogna tornare alla geometria proiettiva e considerare nel piano proiettivo una qualsiasi conica $\boldsymbol{K}$ reale non degenere (*assoluto*). Il sottogruppo del gruppo proiettivo costituito da tutte le trasformazioni che lasciano fissa questa conica (cioè gli automorfismi di $\boldsymbol{K}$) e detto *gruppo* (*metrico*) *iperbolico* e la corrispondente geometria è la *geometria* (*metrica*) *iperbolica*. I suoi invarianti sono quelli associati a queste trasformazioni, che abbiamo già introdotto come i movimenti congruenti del modello di Beltrami-Klein.
La geometria *semplicemente ellittica* si può ottenere come la geometria corrispondente al sottogruppo del gruppo proiettivo costituito da tutte le trasformazioni che lasciano fissa un'ellisse immaginaria (*assoluto*) del piano proiettivo. Il piano della geometria ellittica è il piano proiettivo e reale e i suoi invarianti sono quelli associati ai movimenti congruenti.
Anche la geometria *doppiamente ellittica* può essere incorporata in questo schema, ma bisogna partire dalle trasformazioni proiettive tridimensionali per caratterizzare la

geometria bidimensionale doppiamente ellittica. In questo caso il sottogruppo è costituito dalle trasformazioni proiettive tridimensionali che trasformano in se stessa (gli automorfismi di ***S***) una sfera ***S*** data, che costituisce il piano della geometria doppiamente ellittica. Anche in questo caso gli invarianti sono quelli associati alla congruenza.
Klein introdusse anche un certo numero di definizioni intermedie, ma noi riportiamo qui di seguito uno schema che indica solo le relazioni esistenti tra le principali geometrie:



Infine anche la geometria metrica parabolica (delle similitudini) si può interpretare anche come la geometria di un determinato gruppo di auotmorfismi proiettivi. Si tratta degli automorfismi dell'assoluto degenere costituito dai punti ciclici:

$$\mathbf{I_1 = (1, \mathit{i}, 0)} \quad ; \quad \mathbf{I_2 = (1, -\mathit{i}, 0)}$$

Da quanto visto possiamo concludere che *la teoria dei gruppi integra le differenti geometrie* (di Euclide, di Lobacevskii, di Riemann) in uno schema generale e trova punti di contatto dove prima non si rilevavano che contraddizioni.
Lasciamo ad ulteriori approfondimenti di completare l'interpretazione proiettiva di queste geometrie.

E' stato anche osservato come l'influenza del programma di Erlangen sia andata oltre il campo esclusivo della geometria.
La definizione gruppale e strutturale della geometria diede nuovo impulso alla riflessione epistemologica (Poicaré, Russel, Enriques,…) e alla critica dei fondamenti (Pasch, Veronese, Peano) contribuendo alla definitiva sistemazione assiomatica delle geometrie non-euclidee. Di qui prese poi l'avvio lo studio delle geometrie finite e dei gruppi classici (H. Weil, J. Dieudonné, Wan der Waerden), la teoria degli spazi vettoriali (Grassmann, Peano), degli spazi funzionali e degli spazi topologici (negli anni '20 del secolo scorso). Anche se non possiamo attribuire al programma di Erlangen il merito di questi risultati, tuttavia indubbiamente esso anticipò spirito e metodi della matematica moderna. Dice Bourbaki: "Superata come scienza autonoma e vivente, la geometria classica si è trasfigurata in un linguaggio universale della matematica contemporanea".

Bibliografia

N. Efimov, *Géométrie supérieure*, Mosca, MIR, 1978.
G. Fano, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*, «Annali di Matematica», serie II, *17*, pp. 307-343.
M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi, 1972.
N. Bourbaki, *Elementi di storia della matematica*, Milano, 1963. Feltrinelli,