Assiomi della Geometria elementare

(D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1ª ed. 1899)

Si considerano tre sistemi di enti primitivi: gli enti del primo sistema sono detti **punti**, del secondo **rette**, e del terzo **piani**. L'insieme di tutti i punti, rette e piani è detto **spazio**.
Si suppone che tra questi enti abbiano luogo certe relazioni (di **appartenenza**, di **ordinamento**, di **congruenza**) che devono verificare gli assiomi seguenti. Gli assiomi sono ripartiti in cinque gruppi:

I. Assiomi di associazione (o di appartenenza)
II. Assiomi di ordinamento
III. Assiomi di congruenza
IV. Assiomi di continuità
V. Assioma delle parallele

Gruppo I. Assiomi di associazione

I,1. Dati due punti A, B, esiste una retta che contiene (passa per) ognuno dei punti A, B.
I,2. Dati due punti distinti A, B, c'è una sola retta che passa per entrambi i punti A, B.
I,3. Su una retta sono situati almeno due punti. Esistono almeno tre punti non situati su una medesima retta. (= ogni retta contiene almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non appartengono alla medesima retta).
I,4. Dati tre punti non allineati* A, B, C, esiste un piano α che passa per ognuno dei tre punti A, B, C. Ciascun piano contiene almeno un punto.
I,5. Dati tre punti non allineati* A, B, C, esiste al più un piano che passa per ognuno dei punti A, B, C. Ogni piano contiene al meno un punto.
I,6. Se due punti A, B della retta a sono contenuti nel piano α, ogni punto di a è contenuto nel piano α.
I,7. Se due piani α, β hanno un punto in comune A, hanno in comune almeno un altro punto B.
I,8. Esistono almeno quattro punti che non appartengono al medesimo piano.

Gli assiomi I,1-3 riguardano solo i punti e le rette e costituiscono il primo gruppo di assiomi della geometria elementare piana.
* allineati = che appartengono alla medesima retta.

Conseguenze degli assiomi di associazione:
- Due rette hanno al più in comune un punto; due piani o non hanno alcun punto in comune, oppure hanno in comune una retta che contiene tutti i loro punti comuni; un piano e una retta non appartenente al piano possono avere al più un punto comune.

- Per una retta ed un punto fuori di essa, come per due rette aventi un punto in comune, passa uno ed un solo piano.
- Ogni piano contiene almeno tre punti.

Gruppo II. Assiomi di ordinamento

Riguardano la relazione ternaria che associa tre punti A, B, C di una medesima retta e che si esprime ‘un punto B è situato tra i punti A e C’.

II,1. Se un punto B è situato tra un punto A e un punto C, allora A, B, C sono tre punti distinti di una retta e B è situato anche tra C e A.
II,2. Dati due punti qualunque A e C, esiste almeno un punto B situato sulla retta AC e tale che C sia situato tra A e B.
II,3. Di tre punti qualunque di una retta, uno solo è situato tra gli altri due.

Gli assiomi II,1-3 si dicono **assiomi lineari di ordinamento**. Essi consentono di dare la seguente definizione:

Una coppia di punti A e B è detta **segmento** e indicata con AB o BA. I punti situati tra A e B sono detti punti **interni** o semplicemente punti del segmento AB, e i punti A, B **estremi** del segmneto. Tutti gli altri punti della retta AB sono detti **esterni** al segmento AB.

II, 4. (Assioma di **Pasch**). Siano A, B, C tre punti non allineati e *a* una retta nel piano ABC che non passa per alcuno dei punti A, B, C; se la retta *a* passa per un punto del segmento AB, essa passerà anche o per un punto del segmento BC o per un punto del segmento AC.

Conseguenze degli assiomi di associazione e di ordine:
- Dati due punti qualunque A e C esiste sulla retta AC almeno un punto D situato tra A e C.
- Dati tre punti non allineati A, B, C, una retta che taglia due qualunque dei segmenti AB, BC, AC non può tagliare anche il terzo.
- Se C è situato sul segmento AD e B sul segmento AC, B è situato pure sul segmento AD e C su BD.
- Tra due punti qualunque di una retta esistono infiniti punti appartenenti alla retta (Nota: i soli assiomi di associazione non consentivano di concludere che l’insieme degli elementi della geometria è infinito)

Definizione di **semiretta**.

- Sia O un punto della retta *a*, e A, B due punti distinti di questa stessa retta: se il punto O non è situato tra A e B, si dice che A e B sono situati sulla retta *a* **dalla stessa parte** rispetto al punto O. Se il punto O è situato tra A e B, si dice che A e B sono situati sulla retta *a* **da parti opposte** rispetto al punto O. Si dimostra che:

- Il punto O della retta *a* divide tutti gli altri punti di questa retta in due classi non vuote tali che due punti qualunque della retta *a* appartenenti ad una medesima classe si trovano dalla stessa parte rispetto ad O, e due punti appartenenti a classi diverse sono situati da parti opposte rispetto ad O.
- Diremo allora che: il punto O della retta *a* associato ad un altro punto A di questa retta definisce sulla retta una **semiretta** o **raggio** OA; i punti situati dalla stessa parte di A rispetto ad O sono detti punti della semiretta OA e il punto O è detto **origine** della semiretta.
- Ogni punto O sulla retta *a* determina su *a* due semirette di origine comune in O.

Si può munire la semiretta di un ordine totale: si definisce che A precede B su una semiretta di origine O se A è situato sul segmento OB. Di conseguenza:
- si può definire un ordine totale su una retta (dividendo la retta in due semirette e stabilendo che tutti i punti di una precedano tutti i punti dell'altra)
- l'ordine sulla retta non dipende dall'origine O delle semirette: sono possibili due soli ordini totali su una retta che sono uno l'inverso dell'altro: diremo che la scelta di uno di questi determina il **verso** della retta.

Si può dimostrare che **una retta sconnette il piano**, nel senso del teorema seguente:
- Ogni retta *a* situata in un piano α divide i punti del piano esterni alla retta in due classi non vuote (detti **semipiani**) tali che due punti qualunque A e B appartenenti a classi diverse determinano un segmento AB contenente un punto della retta *a*, e che due punti A e A' della stessa classe determinano un segmento AA' che non ha come punto interno alcun punto della retta *a*.

Analogamente, senza l'introduzione di ulteriori assiomi, si dimostra che:
- Ogni piano α divide i punti dello spazio non contenuti nel piano in due classi non vuote tali che due punti qualunque A e B appartenenti a classi diverse determinano un segmento AB che contiene un punto del piano α, e tali che due punti A e A' della stessa classe determinano un segmento AA' che non contiene alcun punto del piano α.

Osservazioni:
- Gli assiomi del II gruppo danno un senso alle nozioni molto importanti concernenti l'ordine dei punti su una retta, la loro disposizione 'da una stessa parte' o 'da parti opposte'. La nozione fondamentale è quella che si esprime dicendo: 'situato tra' e tutte le altre sono derivate da queste.
- Per mezzo degli assiomi II,1-4 si possono dare facilmente le definizioni di linea poligonale, di triangolo o più generalmente di poligono, si dimostra la proposizione secondo la quale un poligono divide il piano in due regioni, una 'interna' ed una 'esterna', ...; tuttavia questi assiomi non consentono ad esempio di affermare che l'insieme degli elementi geometrici è più che numerabile.

Gruppo III. Gli assiomi di congruenza

Viene introdotta la terza relazione fondamentale, quella di **congruenza di due segmenti** e di **congruenza di due angoli**.

III,1. Dati due punti A, B di una retta *a* ed un punto A' della stessa retta o di un'altra retta *a'*, si trova sempre su *a'*, da un parte qualunque di A', un punto B' e uno solo tale che il segmento AB sia congrunte al segmento A'B'. (Più brevemente: ogni segmento può essere preso in modo univoco su una retta qualunque da un lato qualunque di uno dei punti di questa retta).
La relazione di congruenza tra AB e A'B' si indica AB ≡ A'B'.
Il segmento AB è congruente al segmento BA: AB ≡BA.
III,2. Se due segmenti A'B' e A"B" sono congrienti ad un medesimo segmento AB, il segmento A'B' è congruente al segmento A"B", cioè:

$$A'B' \equiv AB,\ A''B'' \equiv AB \ \Rightarrow\ A'B' \equiv A''B''$$

Corollario.
- Ogni segmento è congruente a se stesso: AB ≡ AB.
- La relazione di congrienza è riflessiva, simmetrica e transitiva.
- In una relazione di congruenza non importa l'ordine dei punti che individuano i segmenti: AB ≡ A'B' $\Rightarrow$ BA ≡ A'B' , BA ≡ B'A'.

III,3. Siano AB, BC due segmenti della retta *a* che non hanno punti interni in comune; siano inoltre A'B' e B'C' due altri segmenti sulla medesima retta o su un'altra retta *a'* che non hanno alcun punto interno in comune. Se si ha inoltre: AB ≡ A'B' e BC ≡ B'C', ne segue necessariamente: AC ≡ A'C'.

Si può introdurre a questo punto la definizione di **angolo**. La congruenza tra angoli deve soddisfare i successivi due assiomi.
Definizione. Due semirette (*h*,*k*) uscenti da un medesimo punto O e non appartenenti ad una medesima retta costituiscono un **angolo**. Un angolo formato da *h*, *k* è indicato:

$$(h \hat{,} k) \quad ; \quad (k \hat{,} h)$$

Se A e B sono punti delle semirette *h*, *k*, l'angolo da esse formato si può indicare anche $\mathbf{A\hat{O}B}$.
Le semirette *h*, *k* sono dette **lati** dell'angolo, ed il punto O il suo **vertice**.

III,4. Siano $(h \hat{,} k)$ un angolo del piano α e *a'* una retta in questo stesso piano o in un altro piano α'; siano fissati su *a'* un punto O' ed una semiretta *h'*. Esiste allora nel piano α', da una parte fissata della retta *a'*, una ed uan sola semiretta *k'* tale che $(h \hat{,} k) \equiv (h' \hat{,} k')$. (Più brevemente: Un angolo qualunque può essere preso in modo univoco in un piano qualunque da un lato qualunque di una semiretta di questo piano;

od anche: esiste uno ed un solo angolo congruente ad un angolo dato, qualora siano fissati un lato, il vertice, ed il semipiano che deve contenere l'altro lato).

Inoltre: $(\widehat{h,k}) \equiv (\widehat{h',k'}) \Rightarrow (\widehat{k,h}) \equiv (\widehat{k',h'})$

e ogni angolo è congruente a se stesso: $(\widehat{h,k}) \equiv (\widehat{h,k})$ e $(\widehat{h,k}) \equiv (\widehat{k,h})$.

III,5. Siano A, B, C tre punti non allineati e A', B', C' tre altri punti non allineati. Se si ha inoltre: AB ≡ A'B', AC ≡ A'C' , $\mathrm{B\hat{A}C} \equiv \mathrm{B'\hat{A}'C'}$

ne segue necessariamente: $\mathrm{A\hat{B}C} \equiv \mathrm{A'\hat{B}'C'}, \mathrm{A\hat{C}B} \equiv \mathrm{A'\hat{C}'B'}$.

Quest'ultimo assioma stabilisce un legame tra la congruenza dei segmenti e degli angoli. Da esso seguono in particolare quelli che vanno sotto il nome di **criteri di congruenza dei triangoli**.
Gli assiomi III,1 e III,4 sono anche detti del **trasporto** di segmenti ed angoli.
Tra le altre conseguenze dei primi tre gruppi di assiomi ricordiamo la **teoria delle perpendicolari** ed in particolare:

Definizione di **regione interna ed esterna** all'angolo.
Considerate le semirette *h', k'* complementari di *h, k* rispettivamente, i punti del piano che stanno, rispetto alla retta *hh'* dalla stessa parte di *k* e che stanno dalla stessa parte di *h* rispetto alla retta *kk'* sono detti **punti interni** dell'angolo (*h,k)* e l'insieme di questi punti **regione interna** all'angolo. Tutti gli altri punti del piano contentenente l'angolo (*h,k*) ad esclusione dei lati e del vertice dell'angolo sono detti **punti esterni** e l'insieme di tali punti **regione esterna** all'angolo.
- Dati due punti A, B situati su lati diversi di un angolo, ogni semiretta avente per origine il vertice e passante all'interno dell'angolo taglia il segmento AB; inversamente ogni semiretta congiungente il vertice dell'angolo e un punto del segmento AB è interna all'angolo.
- La congruenza di angoli è simmetrica e transitiva
- Angoli opposti al vertice sono congruenti
- Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro (**angolo retto**: un angolo congruente al suo adiacente supplementare)
- Su ogni segmento AB esiste un ed un solo punto medio O (cioè tale che AO ≡ OB).
- In un triangolo isoscele la mediana della base è anche altezza e bisettrice dell'angolo al vertice
- Ogni angolo può essere diviso in due parti uguali in un modo unico
- Da un punto esterno qualunque (o per un punto qualunque di una retta) si può condurre una ed una sola perpendicolare ad una retta data.

Gli assiomi dei gruppi I-III permettono poi di definire le nozioni di **'più grande'** e **'più piccolo'** per i segmenti e gli angoli, di dimostrare il teorema dell'angolo esterno e gli altri teoremi sul confronto tra gli elementi di un triangolo e di due triangoli. In particolare:

Definizione. Dati due segmenti A e A'B', se esiste all'interno di AB un punto C tale che AC ≡ A'B', diciamo che il segmento AB è più grande del segmento A'B' (o che il segmento A'B' è più piccolo del segmento AB) e scriviamo AB > A'B' (A'B' > AB).
Dati due angoli (*h*,*k*) e (*h'*,*k'*) diciamo che (*h*,*k*) è più grande di (*h'*,*k'*) (o che (*h'*,*k'*) è più piccolo di (*h*,*k*)) e scriviamo: (*h*,*k*) > (*h'*,*k'*) (oppure (*h'*,*k'*) < (*h*,*k*)) se tra le semirette uscenti dal vertice di (*h*,*k*) e interne ad esso esiste una semiretta *l* tale che:
(*h*,*l*) ≡ (*h'*,*k'*).
- Dati due segmenti qualunque AB e CD è sempre vera una ed una sola delle seguenti relazioni: AC ≡ CD, AC > CD, AC < CD.
- AB < A'B', A'B' < A"B" ⇒ AB < A"B".
- L'angolo esterno di un triangolo è più grande di ciascuno degli angoli interni non adiacenti
- Ogni traingolo ha almeno due angoli acuti
- In un triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore, e reciprocamente ad angolo maggiore è opposto lato maggiore
- Il segmento di perpendicolare condotto da un punto ad una retta è più corto di ogni altro segmento congiungente il punto con un punto della retta
- In ogni triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza
Altri fatti geometrici importanti non seguono dagli assiomi I-III, per esempio non si può affermare che una retta passante per un punto interno ad un cerchio taglia il cerchio. Come si era già osservato per gli assiomi I-II, anche gli assiomi I-III non consentono di dimostrare che l'insieme degli elementi geometrici è più che numerabile.

Gruppo IV. Gli assiomi di continuità

Gli assiomi dei gruppi dal I al III permettono di confrontare due segmenti, ma non sono tuttavia sufficienti per stabilire un procedimento di misura che consenta di esprimere per mezzo di un numero il rapporto di un segmento qualunque ad una unità di misura.
La giustificazione della misura dei segmenti è fornita dall'assioma IV,1, detto assioma di Archimede. Scelta una unità lineare, l'assioma di Archimede permette di associare univocamente in corrispondenza a ciascun segmento un numero reale positivo detto la lunghezza del segmento.
Per affermare inversamente l'esistenza di un segmento di lunghezza uguale ad un numero positivo assegnato qualunque, bisogna tuttavia intrudurre un assioma ulteriore. Allontanandoci a questo punto dalla sistemazione hilbertiana, introduciamo come assioma IV,2 il cosiddetto assioma di Cantor. Nel sistema di Hilbert l'assioma di Cantor è sostituito dall'assioma di integrità.

IV,1. (**Assioma di Archimede**). Siano AB e CD due segmenti qualunque. Esiste allora sulla semiretta AB un numero finito di punti A_1, A_2, ... , A_n tale che il punto A_1 sia situato tra A e A_2, il punto A_2 sia situato tra A_1 e A_3, ... , A_{n-1} sia situato tra A_{n-2} e A_n, i segmenti AA_1, A_1A_2, ... , $A_{n-1}A_n$ siano congruenti a CD, e il punto B sia situato tra A e A_n.

A A_1 A_2 A_3 ...... A_{n-1} B A_n

C   D

IV,2. (**Assioma di Cantor**). Sia A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n, ... una successione infinita di segmenti situati su una retta qualunque *a* e tale che ogni segmento sia situato all'interno del segmento precedente, per ogni segmnto assegnato esista un indice *n* per cui il segmento A_nB_n sia più piccolo del segmento assegnato. Allora esiste sulla retta *a* un punto X situato all'intreno di tutti i segmenti A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n, ...

X

A_1 A_2 A_3 ...... A_n B_n ...... B_3 B_2 B_1

C   D

Segue dall'assioma di Cantor che il punto X è necessariamente unico.

Conseguenze dell'assioma di Archimede.

Definizione. Se ad ogni numero reale positivo corrisponde uno ed uno solo numero reale positivo tale che:

1°) a segmenti congruenti corrispondono numeri uguali

2°) se B è un punto del segmento AC, ed i numeri *a* e *b* corrispondono ai segmenti Ab e BC, al segmento AB corrisponde il numero $a+b$

3°) il numero 1 corrisponde ad un segmento OO'

allora il numero associato a ciascun segmento è detto la sua **lunghezza** e il segmento OO' è detto **unità lineare** o unità di lunghezza.

Il procedimento mediante il quale si associa ad un qualunque segmento un numero reale *a* in modo da soddisfare alle condizioni precedenti è detto **procedimento di misura**. L'assioma di Archimede consente di determinare il procedimento di misura.
Sia OO' un segmento fissato come unità di misura. Portiamo sulla retta AB a partire dal punto A nella direzione di B dei segmenti AA_1, A_1A_2, ... , A_nA_{n+1} congruenti ad OO'. Esistono per l'assioma di Archimede due punti $A_{n-1}A_n$ tali che o B coincide con A_n oppure B è interno ad A_nA_{n+1}. Nel primo caso si pone: $a = n$.
Nel secondo caso: $n < a < n+1$.
Si consideri allora il punto medio P_1 del segmento A_nA_{n+1}. Il punto B può essere situato tra A_n e P_1 oppure tra P_1 e A_{n+1} oppure coincidere con P_1. Si ha allora rispettivamente:

$$n < a < n+1/2\ , \qquad n+1/2 < a < n\ , \qquad a = n+1/2\ .$$

Nel terzo caso *a* risulta determinato, negli altri due casi è approssimato a meno di 1/2 e il procedimento di misura prosegue prendendo il punto medio P_2 di quello tra i segmenti A_nP_1 e P_1A_{n+1} che contiene il punto B, e così via. In definitiva mediante il procedimento di misura viene assiciato al punto B in modo unico un numero *a* rappresentato in forma binaria dalla successione di cifre:

$$a = n,n_1n_2n_3\cdots = n + \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \cdots$$

dove n è la parte intera, che rappresenta quante unità lineari sono contenute nel segmento AB, n_1 è 0 oppure 1 a seconda che AB contenga, oltre le n unità intere, anche una metà di unità lineare, n_2 è 0 oppure 1 a seconda che AB contenga anche un quarto di unità lineare, e così di seguito.
La rappresentazione binaria è finita se B va a coincidere con uno dei punti P_1, P_2, P_3, ... , P_n, ... , infinita in caso contrario.

Concludendo: ad ogni segmento AB corrisponde un numero reale positivo che è la sua lunghezza. Analogamente si può dimostrare che si può determinare in corrispondenza ad ogni angolo un numero reale positivo detto la sua **grandezza** (o **misura**) in modo che valgano le seguenti proprietà:

1°) ad angoli congruenti corrispondono numeri uguali

2°) se una semiretta l passa all'interno dell'angolo (h,k) per il suo vertice e se agli angoli (h,l) ed (l,k) corrispondono i numeri α e β, all'angolo (h,k) corrisponde il numero $\alpha+\beta$.

3°) ad un angolo (o,o') corrisponde l'unità.

Come conseguenza dell'assioma di Cantor si ha poi che:
- Per ogni numero reale positivo a esiste un segmento di lunghezza uguale ad a.
- Supponiamo che, fissata l'unità di misura, l'angolo retto misuri ω, allora ad ogni numero positivo α tale $0 < \alpha < \omega$ corrisponde un angolo di ampiezza uguale ad α.
- Esistono all'interno di ogni segmento dei punti che lo dividono in n parti uguali.
- Esistono all'interno di un angolo delle semirette uscenti dal vertice che lo dividono in n parti uguali.

A tutti gli effetti, senza modificare gli assiomi I-III, gli assiomi IV,1 e IV,2 si possono sostituire con la equivalente:
Proprietà di Dedekind. Se tutti i punti di una retta sono ripartiti in due classi non vuote disgiunte tali che ogni punto della prima classe precede ogni punto della seconda classe, allora: o esiste nella prima classe un punto preceduto da tutti quelli della prima classe, o esiste nella seconda classe un punto he precede tutti quelli della seconda classe.
Di dice che questo punto detrmina un *taglio* o una *sezione di Dedekind* sulla retta.

Gli assiomi dei gruppi I-IV consentono di introdurre **sistemi di coordinate per la retta, il piano e lo spazio**.
Costruiamo un sistema di coordinate sulla retta come segue. Sia a una retta qualunque. Scegliamo un punto O di questa retta come **origine delle coordinate** e conveniamo di chiamare *positiva* l'una e *negativa* l'altra delle due semirette determinate dal punto O sulla retta a. Fissiamo inoltre un segmento come unità di misura. Facciamo corrispondere a ciascun punto M di a la coordinata x tale che $|x|$ sia uguale alla lunghezza OM ed inoltre: $x > 0$ se x è situato sulla semiretta positiva, $x < 0$ se x è situato sulla semiretta negativa, $x = 0$ se M coincide con O. Allora: per ogni numero reale x esiste sulla retta a un punto ed uno solo di coordinata x.

Introduciamo un sistema di coordinate nel piano come segue. Sia α un piano qualunque. Indichiamo con O un punto qualunque del piano α e con a una retta di α passante per O. Il punto O divide la retta a in due semirette che distinguiamo che *positiva* e *negativa* e la retta a divide il piano α in due semipiani che distinguiamo in *semipiano positivo* e *semipiano negativo*. Fissata una unità di misura, sulla retta a risulta definito per quanto sopra, un sistema di coordinate avente l'origine in O.
Per il punto M si conduca la perpendicolare (che esiste ed è unica) alla retta a, siano M_x il piede di questa perpendicolare ed x la coordinata di M_x nel sistema costruito su a. Sia y un numero in valore assoluto uguale alla lunghezza del segmento MM_x e positivo se M è situato sul semipiano positivo, negativo se M sta nel semipiano negativo, uguale a 0 se M appartiene alla retta a. Allora ad ogni punto M del piano α corrisponde una coppia ordinata (x,y) di numeri reali, dette **coordinate** del punto e viceversa per ogni coppia ordinata (x,y) di numeri reali esiste nel piano α un punto ed uno solo di di coordinate (x,y).
Analogamente si può introdurre un sistema di coordinate nello spazio. Scegliamo un piano qualunque α e fissiamo su di esso un sistema di coordinate (vale a dire un un punto O, una retta per O, un verso positivo su questa, una unità di misura). Il piano α divide lo spazio in due semispazi di cui uno sarà detto *positivo* e l'altro *negativo*. Facciamo corrispondere a ciascun punto M dello spazio la terna di coordinate (x,y,z) tali che: (x,y) sono le coordinate del piede M' della perpendicolare abbassata da M su α; $|z|$ è uguale alla lunghezza di MM'; z > 0 se M sta nel semispazio positivo; z < 0 se M sta nel semipiano negativo; z = o se M appartiene al piano α.
Viceversa, per ogni terna di numeri reali (x,y,z) esiste nello spazio un punto ed uno solo di coordinate (x,y,z).

Anche se le coordinate così introdotte sono costruite con rette perpendicolari, gli assiomi I-IV non consentono di stabilire molte delle proprietà delle coordinate cartesiane ortogonali. Ad esempio nel piano, dette M_x ed M_y le proiezioni di M sull'asse delle x e delle y rispettivamente, non si può dedurre che $OM_y = M_xM$ e neppure la nota formula delle distanza di due punti.

L'introduzione di un sistema di coordinate sulla retta stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta e l'insieme dei numeri reali. Ne segue in particolare che l'insieme dei punti di una retta (come il fascio di rette per un punto) ha la cardinalità dei numeri reali.
Di più, tra l'insieme ordinato dei punti di una retta e l'insieme dei numeri reali esiste una corrispondenza biunivoca che conserva l'ordine (proprietà *di continuità della retta*).
La possibilità di trasformare una retta in retta numerica mediante l'introduzione di un sistema di coordinate consente l'applicazione dell'analisi alla geometria.
Si possono ad esempio a questo punto dimostrare senza difficoltà i teoremi relativi alle intersezioni di rette e cerchi:
- Se una retta passa per un punto interno ad un cerchio, essa taglia la circonferenza del cerchio in due punti.
- Se una circonferenza k passa per un punto interno e per un punto esterno ad una circonferenza k', le circonferenze si tagliano in due punti.

VI. Assioma delle parallele

Definizione. Due rette poste in medesimo piano e non aventi alcun punto in comune sono dette parallele.
L'esistenza di rette parallele si deduce (come in Euclide) dal teorema: se tre rette a,b,c sono situate in un medesimo piano e se la retta c che incontra le rette a e b forma con esse angoli alterni-interni uguali, le rette a e b sono parallele.
Ne segue:
- Due rette situate in un medesimo piano e perpendicolari ad una terza sono parallele
- Per un punto esterno ad una retta data passa almeno una parallela ad una retta data.

Il sistema di proposizioni che si possono dedurre a partire dai soli assiomi I-V va sotto il nome di **geometria assoluta** (termine coniato da J. Bolyai). Tutti i teoremi precedenti appartengono alla geometria assoluta, che è una parte della geometria euclidea e anche della geometria non-euclidea iperbolica.
Per giustificare la teoria euclidea delle parallele basta aggiungere agli assiomi I-IV il seguente:

V. (**Assioma delle parallele**). Dati una retta a ed un punto A fuori di essa, nel piano individuato da a e da A esiste una sola retta per A che non incontra a.

Gli assiomi I-V costituiscono anche il fondamento della geometria cartesiana. Dopo aver munito la retta, il piano e lo spazio di un sistema di coordinate, disponendo della teoria euclidea delle parallele, e, in particolare, del **teorema di Pitagora**, si può dimostrare la formula della **distanza** di due punti qualunque $M_1(x_1,y_1,z_1)$ e $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \ ,$$

si dimostra che un piano è individuato da una equazione di primo grado:

$$ux + vy + wz + t = 0$$

eccetera. Si possono poi dimostrare teoremi geometrici con metodi analitici.