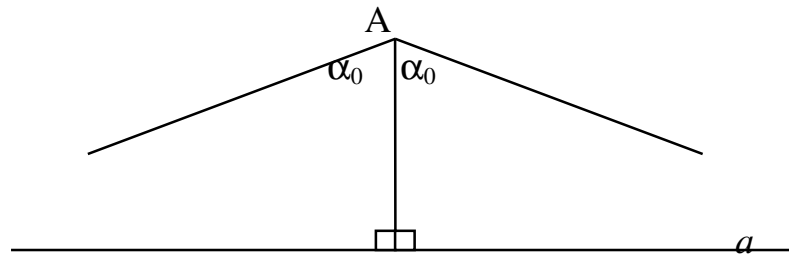


Proprietà dell'angolo di parallelismo

L'angolo che la parallela in uno dei due versi forma con la perpendicolare AH alla retta data a è detto **angolo di parallelismo**.

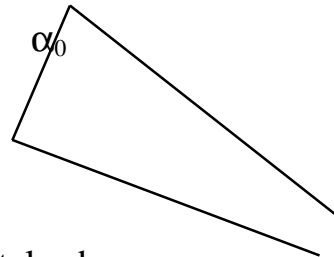
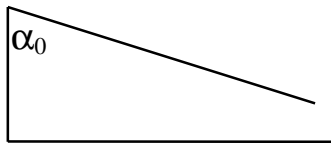
Esso è uguale per le parallele nei due versi, che dunque risultano simmetriche rispetto ad AH, formando due coppie di angoli opposti al vertice

Ogni retta interna ad una di queste coppie di angoli incontra la retta a , mentre ogni retta interna all'altra coppia di angoli non incontra la retta a .



α_0 = angolo di parallelismo; α_0 è indipendente dal verso

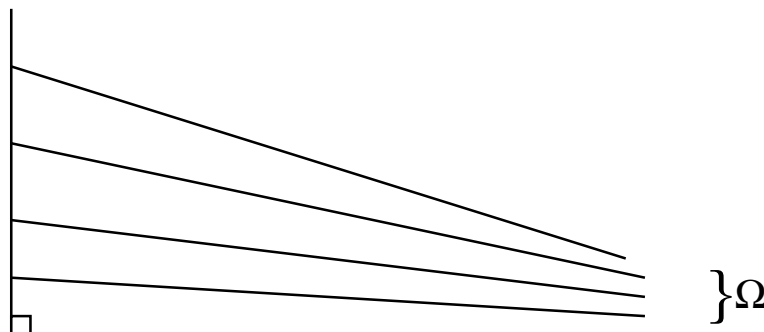
Inoltre α_0 dipende solo dalla distanza del punto A dalla retta a , cioè è lo stesso per rette e punti posti alla medesima distanza :



Posto, con Lobacevskij: $\Pi(x) = \alpha_0$

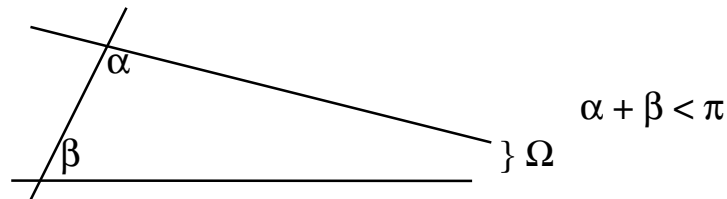
$\Pi(x)$ risulta una funzione continua decrescente tale che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Pi(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$$

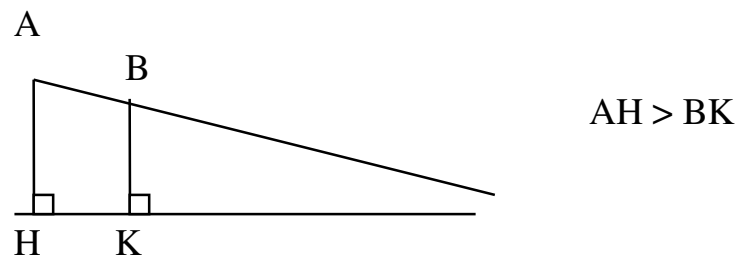


Proprietà delle parallele nella geometria iperbolica

La somma degli angoli coniugati interni formati da una trasversale con due rette parallele nel verso di parallelismo è minore di due angoli retti



La distanza (di un punto di una di due rette parallele dall'altra) decresce procedendo nel verso di parallelismo:



La distanza di un punto variabile su una di due rette parallele dall'altra è una funzione continua della ascissa del punto, che tende a zero quando l'ascissa tende all'infinito nel verso di parallelismo, e diverge nel verso opposto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = +\infty$$

(avendo preso le ascisse positive nel verso di parallelismo)

Trilateri (o triangoli limite)

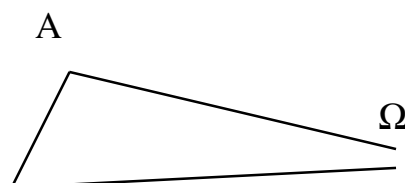
Una striscia tra due rette parallele è l'intersezione dei due semipiani limitati da una parallela che contengono l'altra.

Un trilatero è una parte della striscia limitata da un segmento congiungente due punti delle rette parallele. Un trilatero è la figura limite di un triangolo quando un vertice diventa un punto improprio

Due trilateri sono uguali se hanno uguali il lato e un angolo

Due trilateri sono uguali se hanno uguali i due angoli

L'angolo esterno di un trilatero è maggiore dell'angolo interno non adiacente

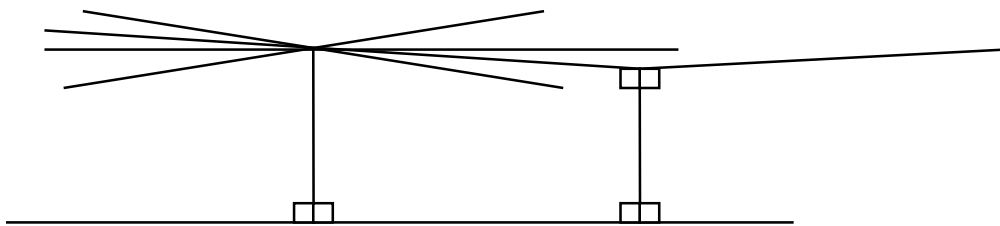


B

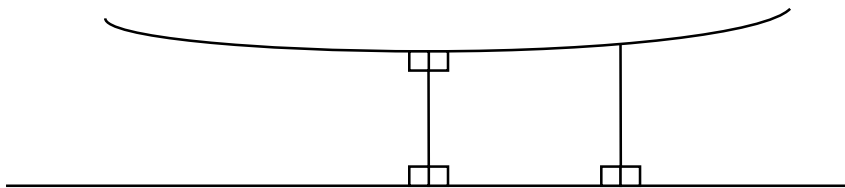
Proprietà delle rette divergenti

Le infinite rette non secanti che per un punto esterno si possono condurre ad una retta data, e che non sono parallele ad essa nel senso di Lobacevskij, si dicono **rette divergenti**

Due rette divergenti ammettono una ed una sola perpendicolare comune

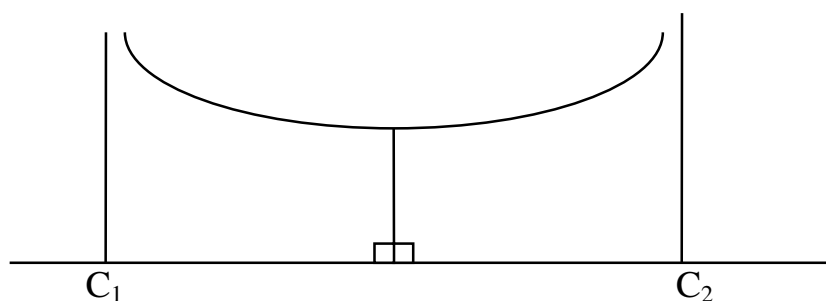


La distanza (di un punto) di una retta divergente dall'altra aumenta allontanandosi dal piede della perpendicolare comune



Tale distanza tende a $+\infty$ allontanando il punto dal piede della perpendicolare comune in uno qualunque dei due versi

Le proiezioni dei punti di una retta divergente sull'altra coprono solo un segmento di lunghezza finita sulla seconda



ossia esistono due punti C_1 e C_2 sulla retta a , simmetrici rispetto alla perpendicolare comune, per i quali e oltre i quali le perpendicolari ad a non intersecano la retta b .

Osservazioni

Dal fatto che l'angolo di parallelismo $\Pi(x) \rightarrow \pi/2$ per $x \rightarrow 0$ si può dedurre che in piccole regioni di spazio la geometria di Lobacevskij differisce poco da quella di Euclide.

La relazione tra grandezze lineari e grandezze angolari determinata dalla funzione $\Pi(x)$ induce una caratteristica originale nella geometria di Lobacevskij:

non esiste una teoria della similitudine in geometria di Lobacevskij.

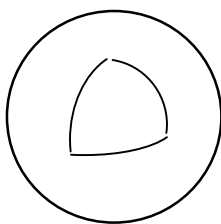
Grandezze lineari e grandezze angolari sono legate da equazioni, in particolare i lati e gli angoli di un triangolo sono legati da equazioni come:

$$\cosh \frac{a}{R} = \cosh \frac{b}{R} \cosh \frac{c}{R} - \sinh \frac{b}{R} \sinh \frac{c}{R} \cos \alpha$$

che esprime il lato di un triangolo non euclideo arbitrario in funzione dei due altri lati e del coseno dell'angolo opposto.

(Si osservi che la formula precedente è simile alla formula di un triangolo sferico:

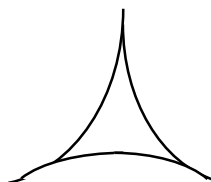
$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos \alpha)$$



Definire tutti gli angoli di un triangolo implica la definizione dei suoi lati

Due triangoli aventi gli angoli ordinatamente uguali hanno uguali anche i lati

Crescendo i lati variano gli angoli e non è possibile costruire triangoli simili di grandezza arbitraria:



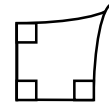
Unità di misura

In geometria euclidea esistono costanti angolari assolute, che si prestano ad una descrizione geometrica astratta, come ad esempio l'angolo retto. Scegliendo come unità di misura una frazione di angolo retto, non c'è bisogno di una unità campione, come invece è necessario per le unità di misura lineari.

Le geometria iperbolica al contrario prevede, accanto alle costanti angolari assolute, anche costanti lineari assolute. Un segmento verificante l'equazione $\Pi(x) = \pi/2$, è completamente individuato attraverso la funzione $\Pi(x)$, che dipende esclusivamente dalle proprietà del piano lobacevskiano.

Teoria dell'area

Il quarto lato di un quadrilatero trirettangolo è acuto



La somma degli angoli interni di ogni triangolo è minore di due angoli retti:

$$S(\Delta) < \pi$$

e la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è minore di $2(n-2)$ angoli retti.

Si definisce allora **deficit** di un triangolo Δ : $D(\Delta) = \pi - S(\Delta)$

e **deficit** di un poligono: $D(P) = 2(n-2)\text{retti} - S(P)$

Risulta allora in ogni triangolo:

$$0 < D(\Delta) < \pi$$

Si definisce **area** ogni funzione a valori positivi

$$f(\Delta)$$

definita nell'insieme dei triangoli tale che:

$$1^\circ) \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Rightarrow f(\Delta_1) = f(\Delta_2)$$

2°) se Δ è composto per addizione dei triangoli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) + f(\Delta_2) + \dots + f(\Delta_n)$$

allora il deficit gode di queste proprietà (è additivo sull'insieme dei triangoli) ed ogni funzione area è proporzionale al deficit:

$$f(\Delta) = k^2 D(\Delta)$$

dove k^2 è una costante positiva.

Osservazioni

Poiché $D(\Delta) < \pi$ l'area di un triangolo è sempre: $f(\Delta) < k^2$ e dunque:

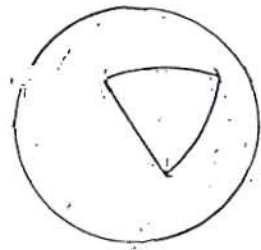
non esistono triangoli di area arbitrariamente grande

in particolare se la scelta di k^2 è completamente arbitraria può non esistere

un triangolo di area unitaria: $k^2 < \frac{1}{\pi} \Rightarrow f(\Delta) = k^2 D(\Delta) < 1$

Esistono tuttavia poligoni di area arbitrariamente grande: basta addizionare più volte un triangolo (di area positiva qualunque).

Non esiste una teoria della similitudine: non esistono cioè triangoli simili, ossia con angoli ordinatamente uguali, e area diversa, poiché fissare gli angoli equivale a fissare l'area.



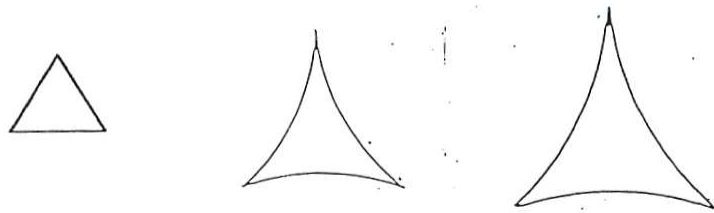
Confrontando la formula dell'area di un triangolo in geometria iperbolica piana:

$$f(ABC) = k^2(\pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}))$$

con quella di un triangolo sferico:

$$\text{Area}(ABC) = R^2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)$$

dove R è il raggio della sfera, vediamo che la prima segue dalla seconda sostituendo al posto di R , ik (circostanza notata per primo da Lambert).



Se si fa tendere k all'infinito, la differenza

$$\pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = D(ABC)$$

tende a zero, dovendo essere finito il prodotto per k . Si dice allora che la geometria iperbolica, al tendere di k^2 all'infinito, tende alla geometria euclidea, per la quale il deficit di un triangolo è uguale a zero.

Curve speciali del piano lobacevskiano

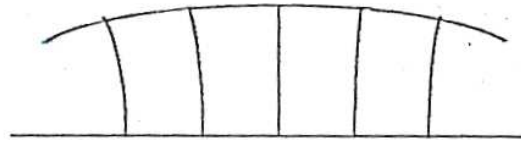
Equidistante od iperciclo:

è il luogo dei punti equidistanti da una retta e situati da una medesima parte rispetto ad essa (detta **base** dell'equidistante)

I segmenti di perpendicolare dalla curva alla base sono detti **altezze**

h = altezza dell'equidistante

a = base dell'equidistante



in geometria euclidea il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta, in geometria iperbolica è una curva di second'ordine.

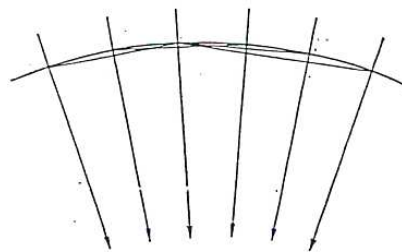
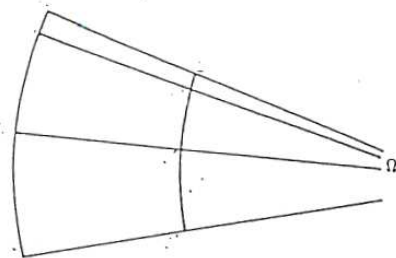
l'equidistante è normale alle sue altezze, ossia le tangenti alla curva sono perpendicolari alle altezze, dunque:

l'equidistante è anche la curva ortogonale ad un fascio di rette perpendicolari ad una medesima retta (**fascio ideale**)

Oriciclo:

è la curva ortogonale ad un fascio di rette parallele in un determinato verso (**fascio improprio**)

è anche il luogo delle secanti di uguale inclinazione alle rette del fascio (**raggi** dell'oriciclo)

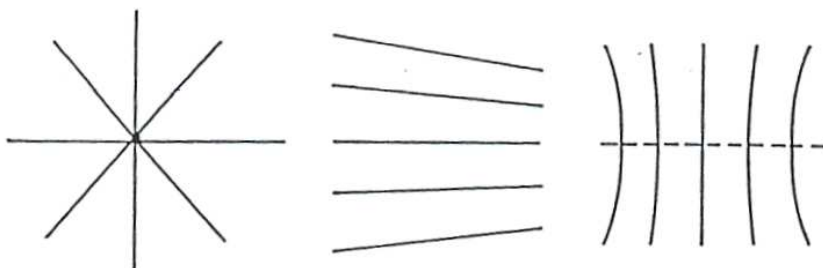


Una circonferenza è ortogonale ai raggi, un iperciclo è ortogonale alle altezze, un oriciclo è ortogonale ai raggi; riassumendo:

circonferenze, oricli ed ipercicli sono le traiettorie normali rispettivamente ad un fascio di rette proprio, improprio o ideale

Le rette di un fascio proprio sono incidenti, quelle di un fascio improprio sono parallele, quelle di un fascio ideale sono divergenti.

Equidistanti ed oricicli diventano piani nella geometria euclidea



Lo spazio lobacevskiano

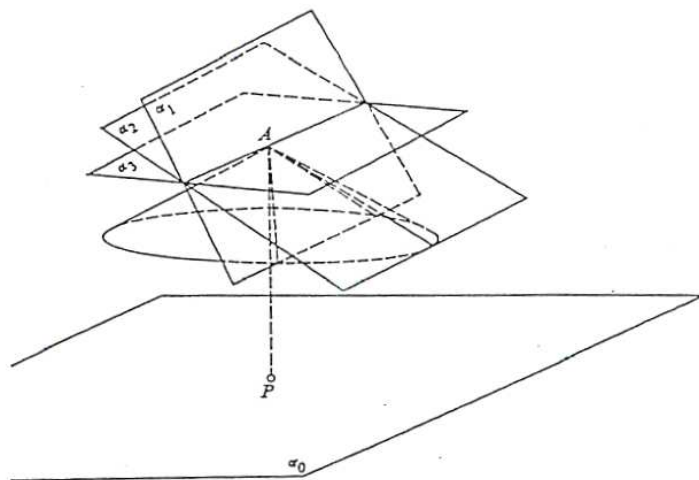
Sussistono tutti i teoremi della geometria assoluta che riguardano le rette e i piani perpendicolari e gli angoli diedri.

Due rette sono parallele quando lo sono nel piano che le contiene

Una retta è parallela ad un piano (in un determinato verso) quando lo è alla sua proiezione sul piano. **Due piani sono paralleli** se per ogni punto dell'uno passa una e una sola parallela all'altro (i piani sono **secanti** quando per ogni punto dell'uno passano due parallele all'altro, **divergenti** quando nessuno dei due piani contiene parallele all'altro).



Per un punto esterno ad un piano si possono condurre infiniti piani paralleli ad un piano dato, che formano tutti lo stesso angolo con la perpendicolare al piano per quel punto, cioè sono tutti tangenti ad un cono che ha come semiapertura l'angolo di parallelismo (che dipende solo dalla distanza).



Piani paralleli sono asintotici (cioè la distanza tende a zero nel verso di parallelismo). Piani divergenti hanno una (sola) perpendicolare comune e divergono in tutte le direzioni.

Analogamente a equidistante ed oriciclo, nello spazio lobacevskiano il luogo dei punti equidistanti da un piano non è un piano, ma una superficie di secondo ordine, la superficie **equidistante** o **ipersfera**, ortogonale a tutte le rette e a tutti i piani ortogonali al piano dato.

Il luogo dei punti ortogonali ad una stella di rette parallele in un determinato verso (cioè con centro in un punto improprio) è una superficie di secondo ordine detta **orisfera** o **sfera limite**.

Equidistante ed orisfera sono piani nella geometria euclidea.

Bibliografia

- Sugli *Elementi* Euclide e le loro edizioni:

A. Frajese - L. Maccioni, *Gli Elementi di Euclide*, Torino, UTET, 1970.

M. T. Borgato, *Alcune note storiche sugli 'Elementi' di Euclide e l'insegnamento della matematica in Italia*, «Archimede», 4 (1981), pp. 185-193.

- Sulle origini della geometria non-euclidea:

R. Bonola, *La geometria non euclidea, esposizione storico-critica del suo sviluppo*, Bologna, Zanichelli, 1906. (anche una riedizione in lingua inglese: R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry, A Critical and Historical Study of its Development*, Dover Publications, New York, 1955, contenente la traduzione inglese della *Scienza dello spazio assoluto* di J. Bolyai, e la *Teoria delle Parallele* di N. Lobacevskij).

N. Lobacevskij, *Nuovi principi della geometria*, introduzione di L. Lombardo Radice, Torino, Boringhieri, 1974.

J. Pont, *L'aventure des paralleles: histoire de la géométrie non euclidienne: précurseurs et attardés*, Berne, Lang, 1986.

M.T. Borgato - L. Pepe, *Una memoria inedita di Lagrange sulla teoria delle parallele*, «Boll. Storia Sci. Mat.», 8 (1988), pp. 307-335.

M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, vol. II, Torino, Einaudi, 1991.

- Sui fondamenti della geometria non-euclidea:

Richard L. Faber, *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, Dekker, New York and Basel, 1983.

Marvin J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman, New York, 1974, 1980, 1993 (anche in traduzione italiana).

N. Efimov, *Géométrie supérieure*, Mosca, MIR, 1985 (i capitoli I-III).

F. Conforto, *Postulati della geometria euclidea e geometria non euclidea*, in *Repertorio di Matematiche* a cura di M. Villa, vol. II, pp. 45-77.

E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia 1998.