

La Pseudosfera

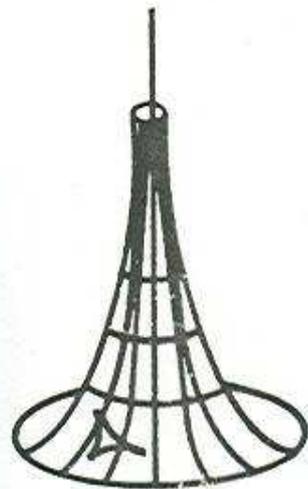
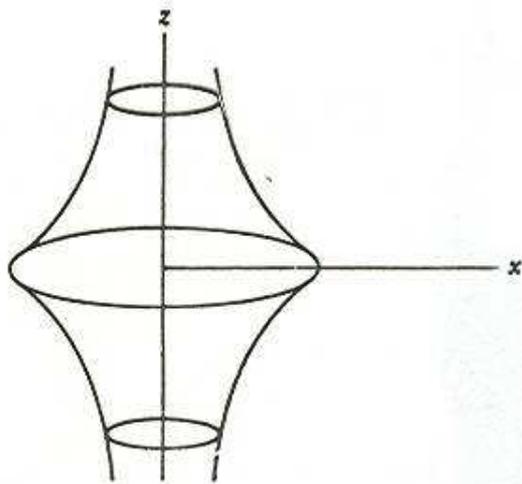
Un modello di geometria iperbolica piana su una superficie a curvatura costante negativa dello spazio euclideo fu ottenuta da Eugenio Beltrami (1835-1900) nel 1866

La pseudosfera è generata dalla rotazione della trattoria:

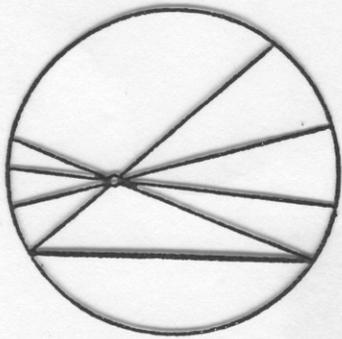
$$z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2}$$

attorno al suo asintoto. Dunque l'equazione della pseudosfera è data da:

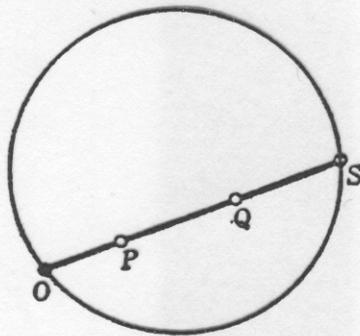
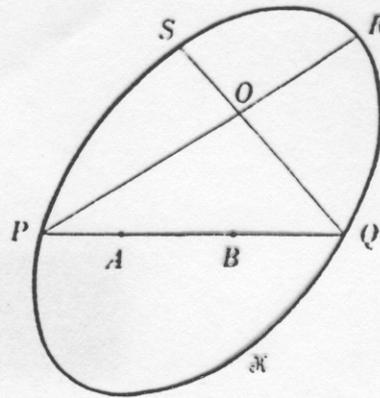
$$z = k \log \frac{\sqrt{k^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{k^2 - x^2 - y^2}.$$



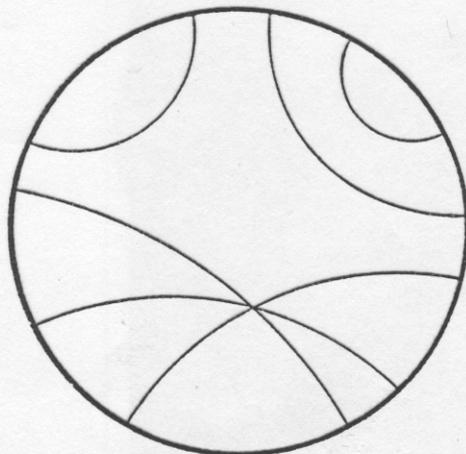
pseudosfera [↑] con
triangolo



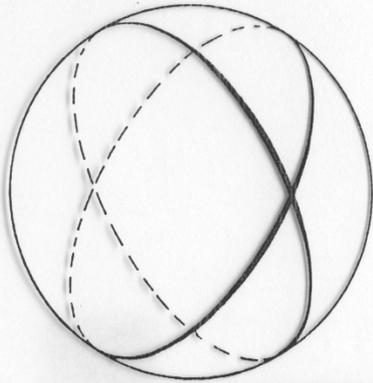
Modello non euclideo di Klein.



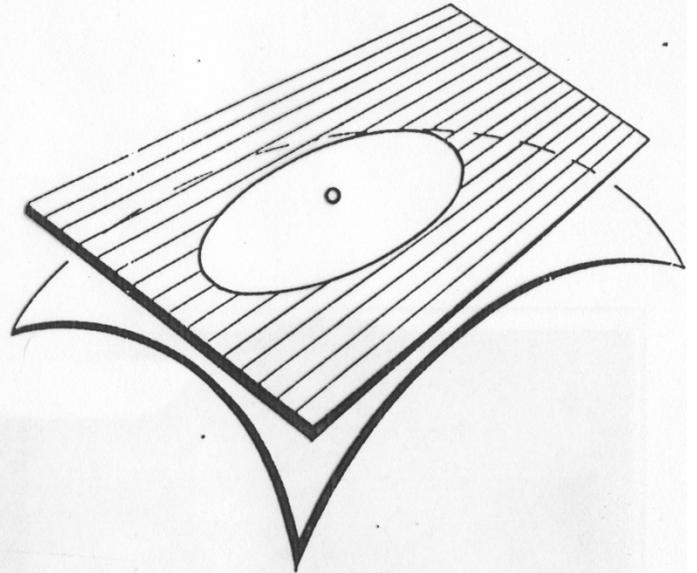
Distanza non euclidea.



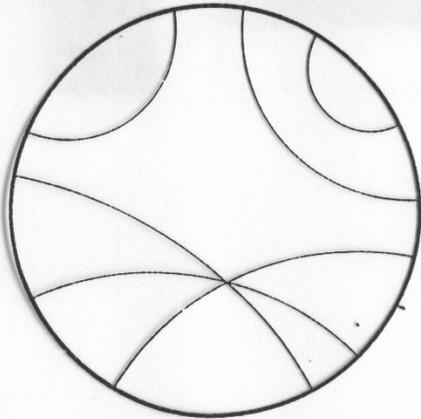
Modello non euclideo di Poincaré.



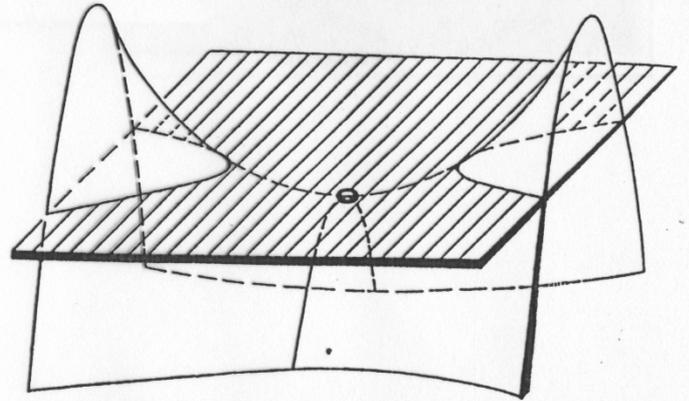
• Retto • in una geometria di Riemann.



Punto ellittico.



Modello non euclideo di Poincaré.



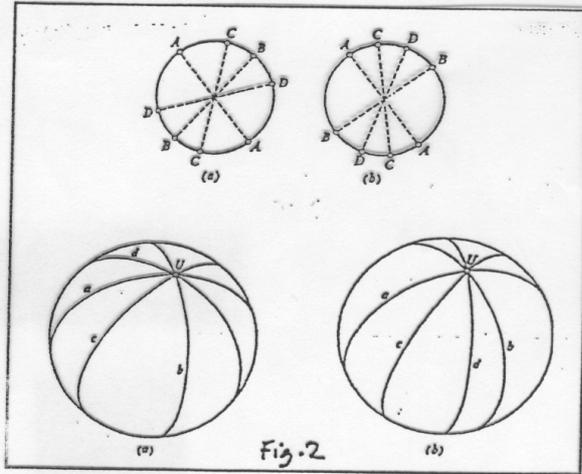
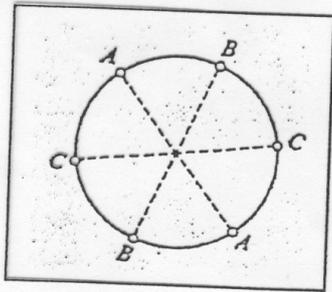


Fig. 2

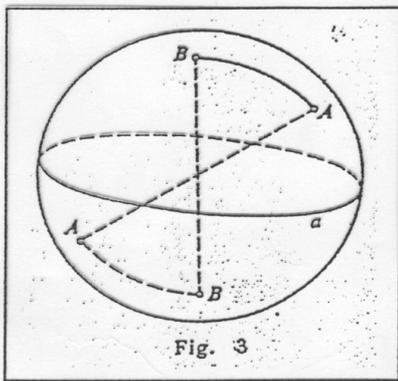


Fig. 3

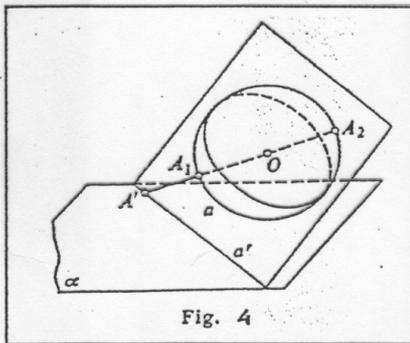


Fig. 4

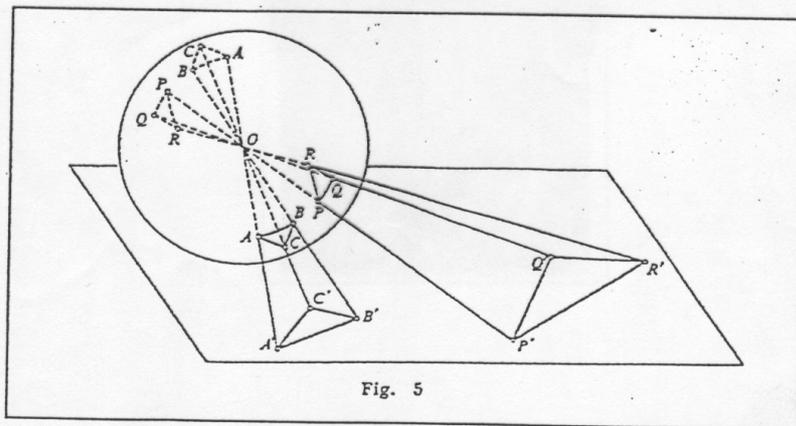
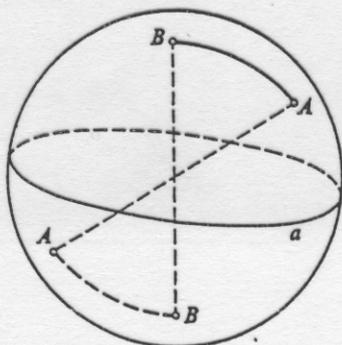
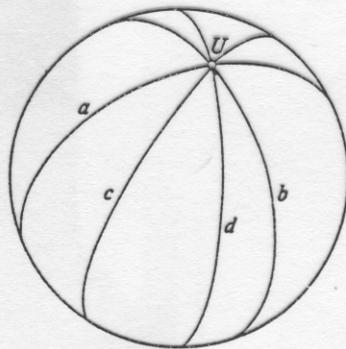
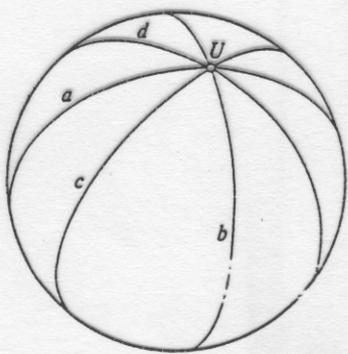
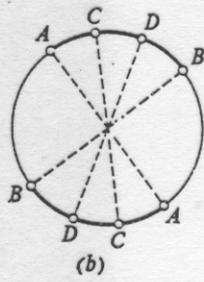
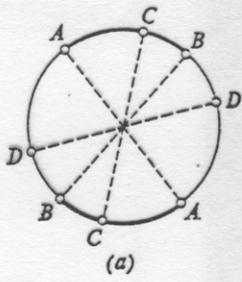
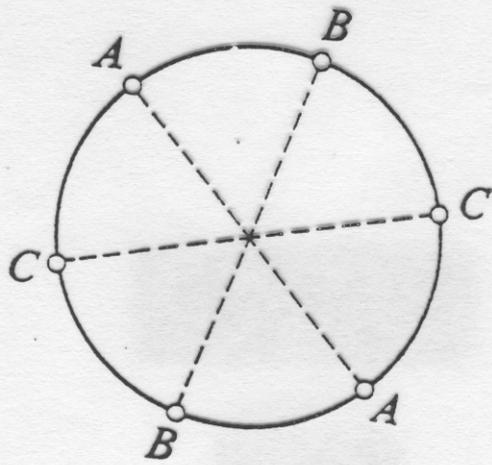
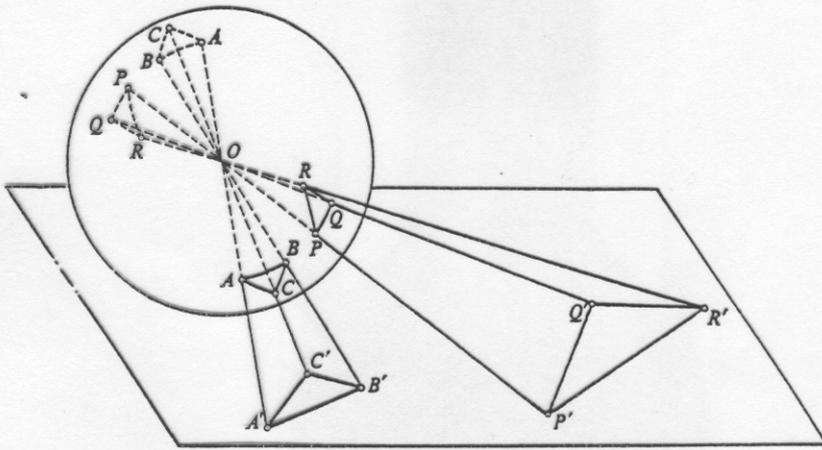
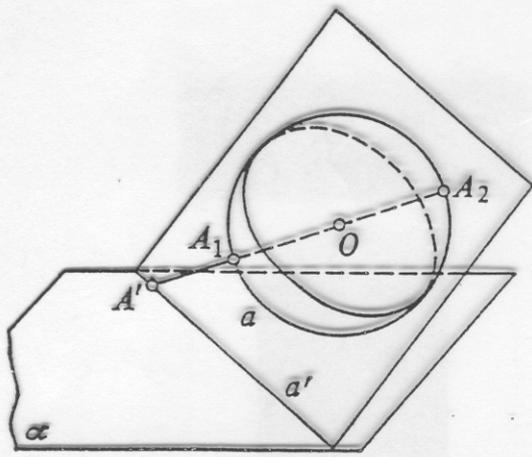
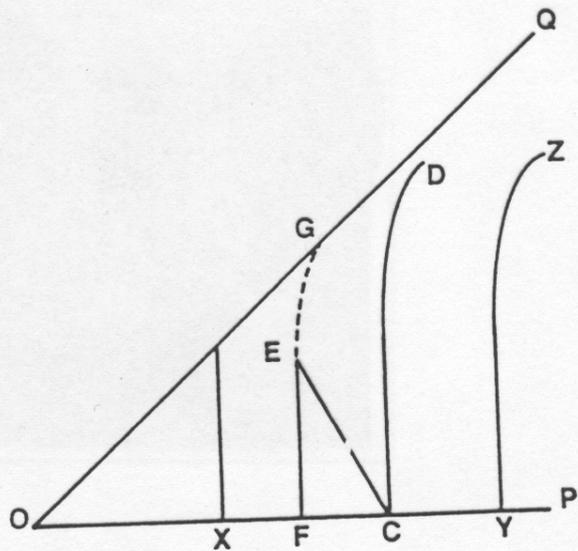
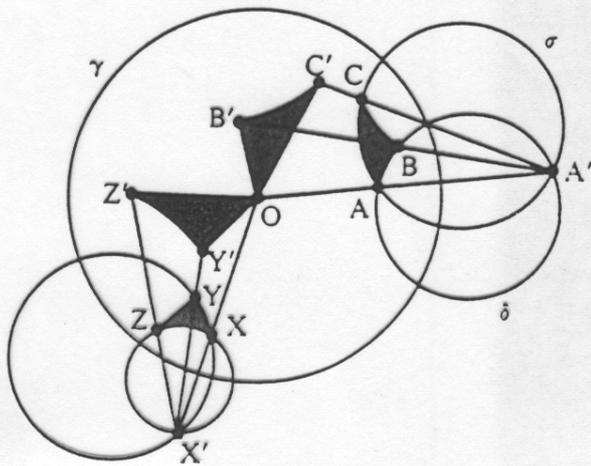
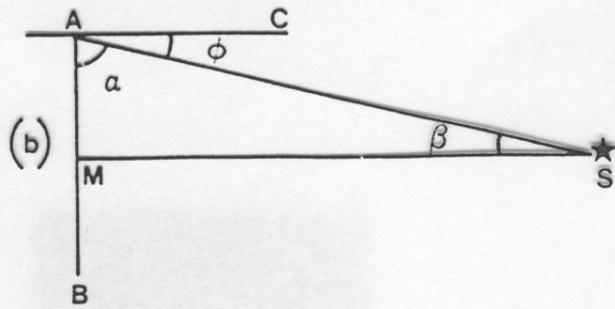
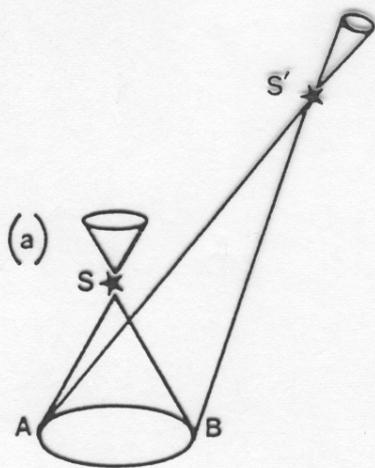
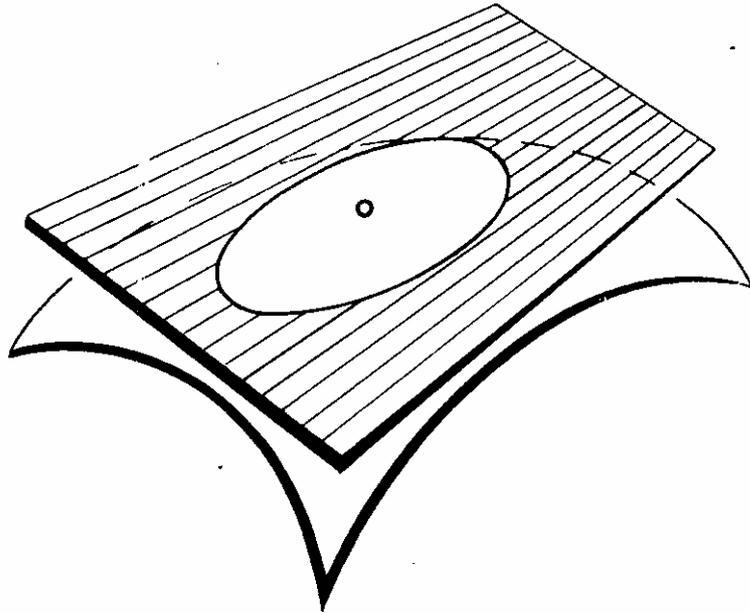


Fig. 5

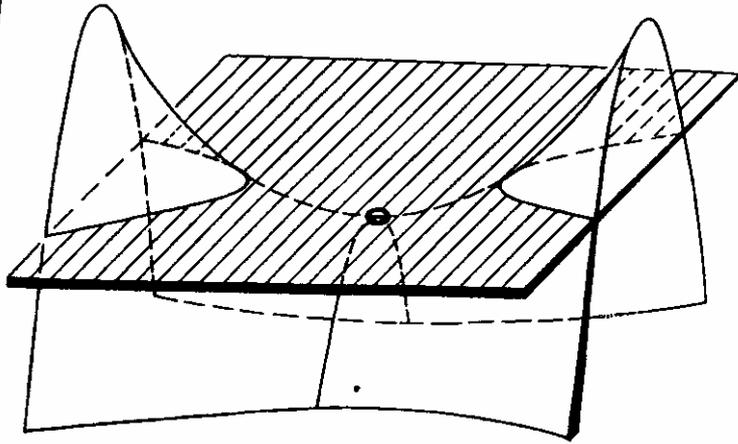








Punto ellittico.



Punto iperbolico.

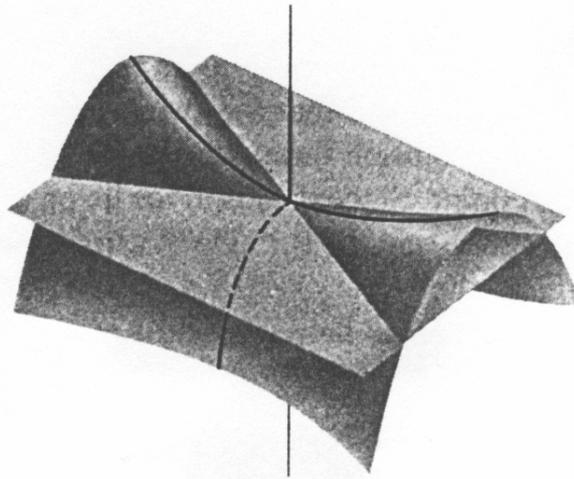


FIGURE A.12

$K = k_1 k_2$ of these maximum and minimum curvatures is now called the *Gaussian curvature* (after Gauss, who first studied it), or simply “the curvature,” of the surface at the point P. Once again, K will in general change as P varies over the surface; if K happens to stay constant, we obtain the three geometries discussed in Chapter 10, according as K is negative (pseudosphere), zero (plane), or positive (sphere).

In Figure A.12, the tangent plane, normal line, and principal curves for a saddle-shaped surface are shown. For point P on this surface the Gaussian curvature will be a negative number, according to our convention, since the osculating circles for the two principal curves lie on different sides of the tangent plane. On the other hand, for the egg-shaped surface in Figure A.13, the two principal curves lie on the same side of the tangent plane, so the Gaussian curvature is positive.

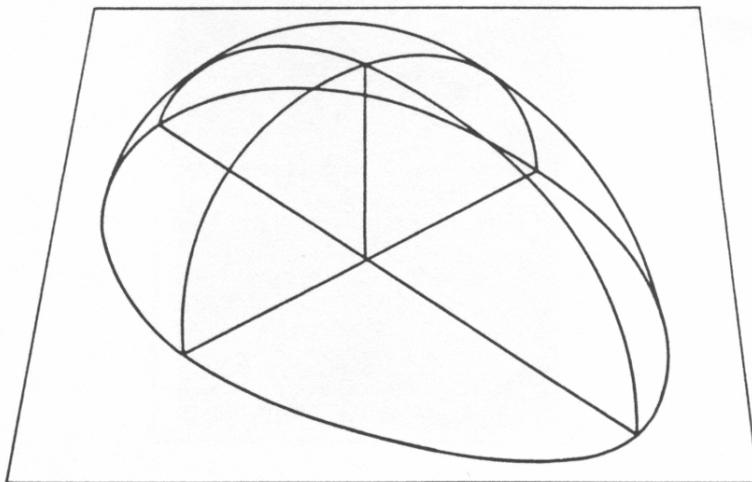
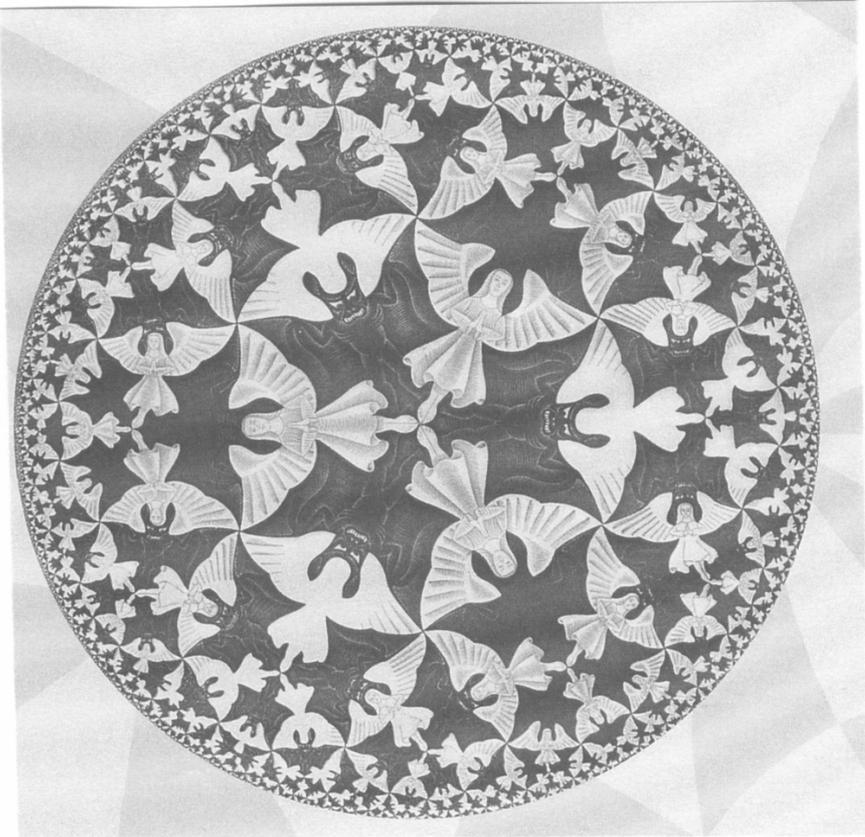
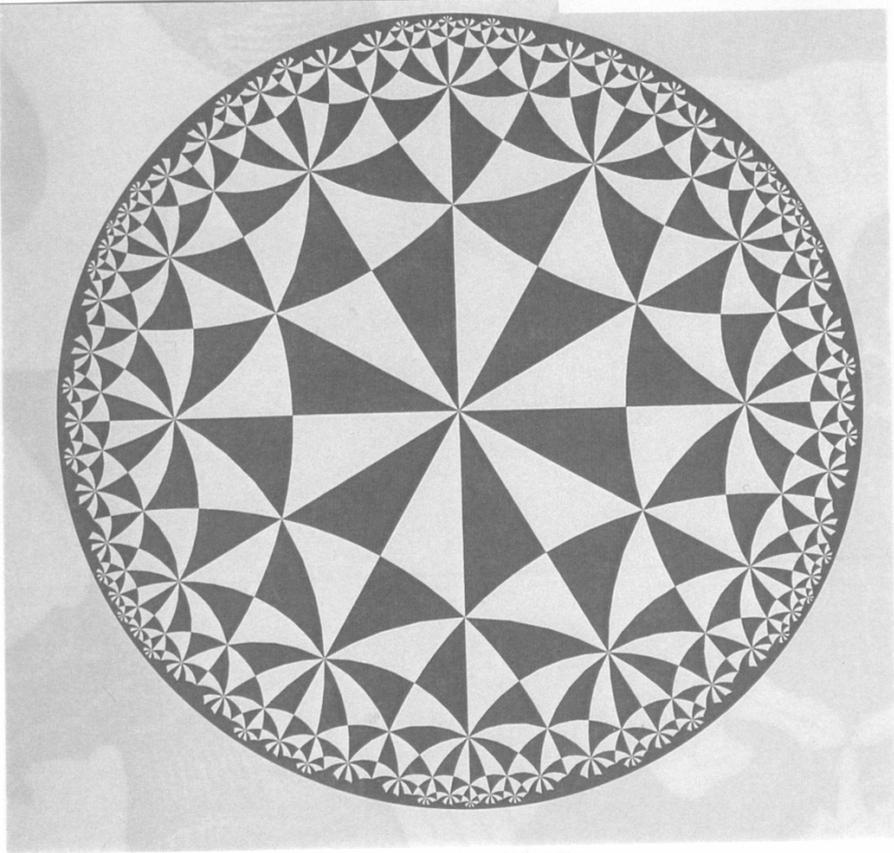
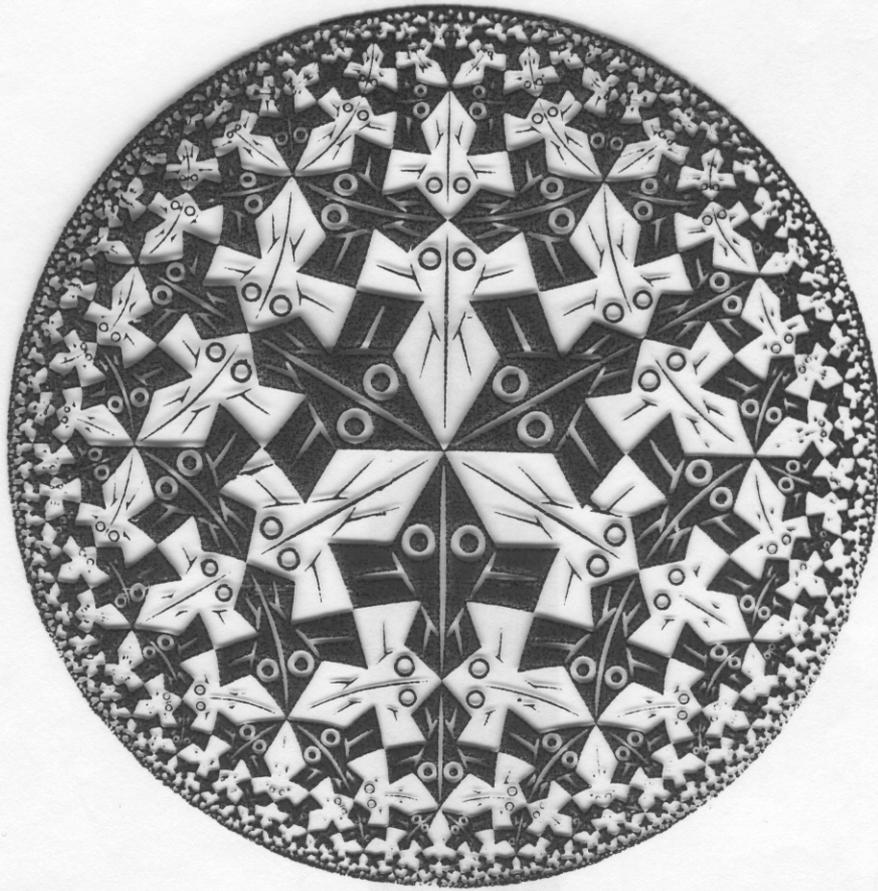


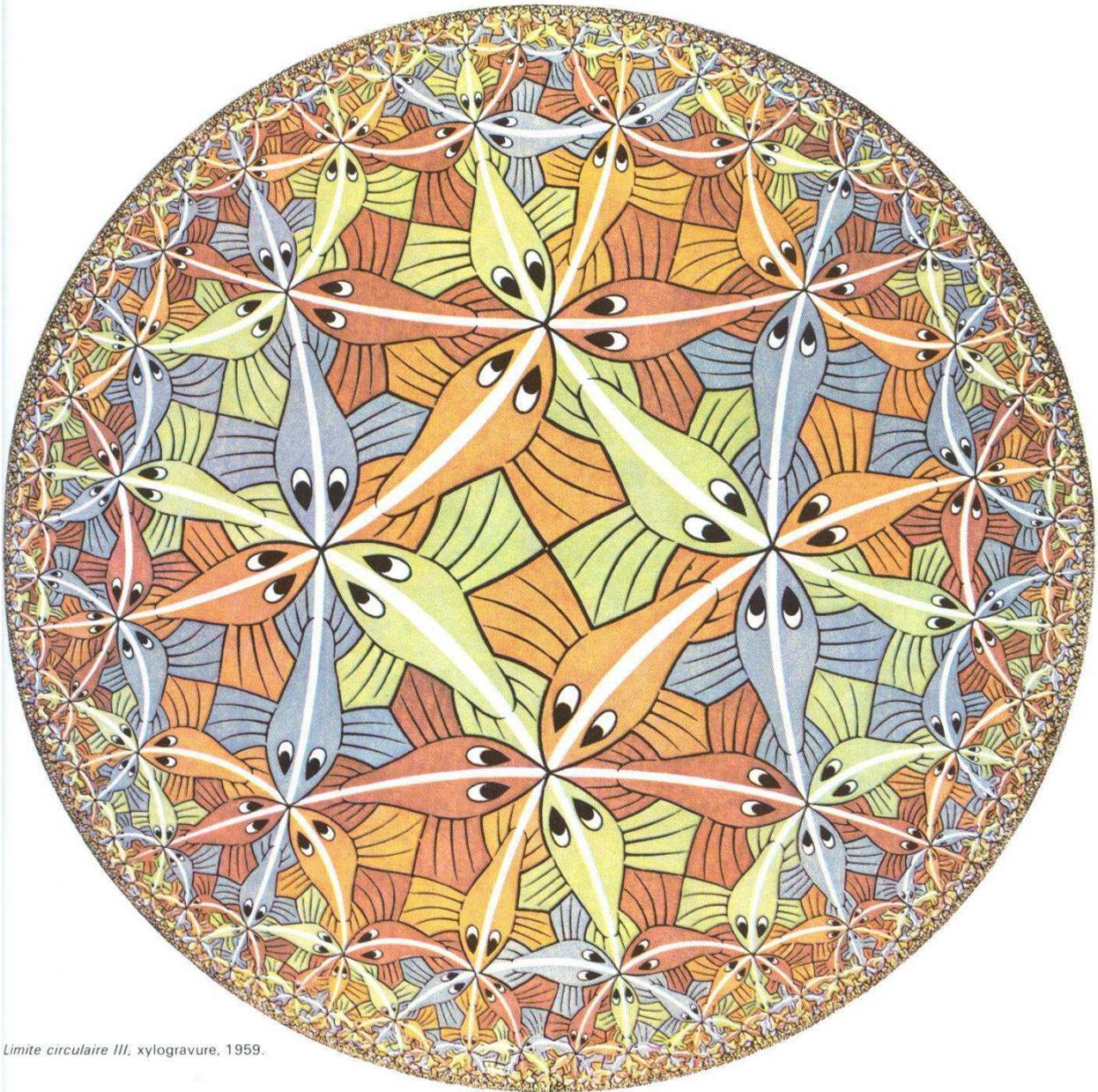
FIGURE A.13





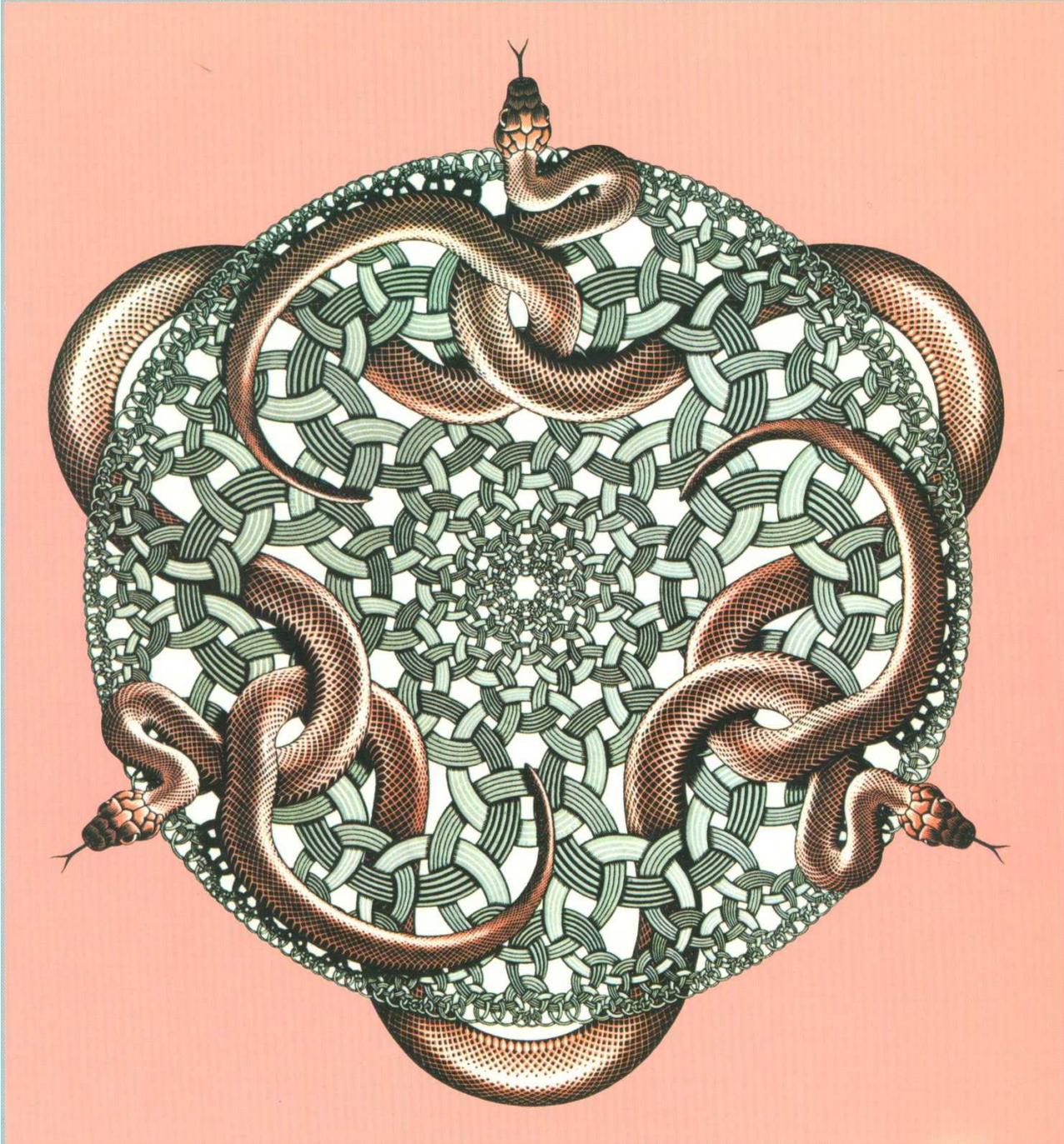
C. M. Escher, Cerchio Limite I (1950)

Il modello di Poincaré è riempito di pesci volanti.



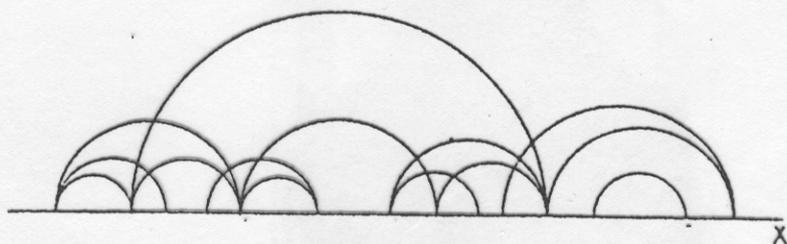
Limite circulaire III, xylogravure, 1959.

Les motifs bleus et oranges encadrent le centre en couleurs unies. Ici il s'agit de voir. Au centre d'une de nos compositions. Escher dit



5.8 Il modello di Poincaré

Il modello di Beltrami-Klein non è conforme. Un altro modello per stabilire la coerenza della geometria iperbolica, in cui poi l'angolo formato da due "rette" del modello è il solito angolo euclideo, è quello che porta il nome di Henri Poincaré. H. Poincaré introdusse tale modello in connessione con le sue ricerche sulle funzioni automorfe in un lavoro pubblicato su *Mathematische Annalen* del 1882 [24]. Vi sono in particolare trattate le inversioni rispetto a cerchi e viene introdotto quello che è chiamato il *modello di Poincaré nel semipiano*: i punti del piano



iperbolico sono i punti situati al di sopra di una retta X del piano euclideo, le rette iperboliche sono le semicirconferenze aperte con centro su X e le semirette euclidee ortogonali a X . Si osserva che ogni inversione rispetto ad un cerchio con centro su X , trasforma i punti del semipiano superiore in punti del semipiano superiore e ogni retta iperbolica in un'altra retta iperbolica. Sono considerati

congruenti due segmenti (o rispettivamente due angoli) che si corrispondono per un numero finito di trasformazioni.

La composizione di un numero finito di inversioni si può rappresentare con una trasformazione in coordinate complesse. Indicando con z' l'immagine di z tramite un numero finito di inversioni, si può allora esprimere z' in funzione di z con una formula del tipo:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

se si tratta della composizione di un numero pari di inversioni, e con una formula del tipo:

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

nel caso di un numero dispari di inversioni.

Sono poi verificate tutte le proprietà della geometria iperbolica. Una interpretazione delle varie geometrie non euclidee, fu data da Poincaré nel lavoro "Hypothèses fondamentales de la Géométrie" pubblicato nel *Bulletin de la Société Mathématiques de France* nel 1887 [25]. La variante più nota di questo modello non si trova esplicitamente nei lavori di Poincaré, ma sembra stata per la prima volta descritta da Joseph Wellstein (1869-1919) in H. Weber e J. Wellestein, *Enzyklopédie der Elementar-Mathematik*, 2 (1905), pp. 39-81.

Anche in tale modello la congruenza è legata alla trasformazione di inversione rispetto a cerchi.

Descriviamo gli enti fondamentali del modello di Poincaré nel cerchio. Innanzitutto ai punti del modello corrispondono i punti interni al cerchio, alle rette corrispondono nel cerchio i diametri (rette del 1° tipo) o gli archi di cerchio ortogonali al cerchio limite (rette del 2° tipo). L'appartenenza e l'ordine sono dedotti dalla geometria euclidea. In questo modello, una semiretta è allora rappresentata nel modello di Poincaré da un segmento di diametro o da un arco di circonferenza con un estremo sul cerchio limite, mentre un segmento ha entrambi

gli estremi sul cerchio limite. L'angolo è rappresentato da due semirette del 1° e del 2° tipo che hanno l'origine comune all'interno del cerchio. Due segmenti, o due angoli, sono congruenti ad altri due se si corrispondono attraverso un numero di inversioni rispetto a cerchi ortogonali al cerchio limite o riflessioni rispetto a diametri del cerchio limite.

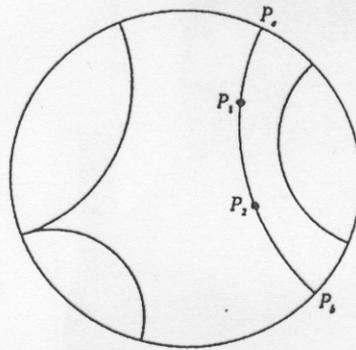
La distanza tra due punti P_1 e P_2 è definita con l'espressione seguente:

$$d(P_1, P_2) = \log(P_1P_2; P_aP_b)$$

dove P_a e P_b sono gli estremi dell'arco per P_1P_2 ortogonale al cerchio e il suo birapporto è definito come:

$$(P_1P_2; P_aP_b) = \frac{\overline{P_1P_b} \cdot \overline{P_2P_a}}{\overline{P_2P_b} \cdot \overline{P_1P_a}}$$

dove $\overline{P_1P_b}$ è la lunghezza euclidea del segmento euclideo di estremi P_1 e P_b .



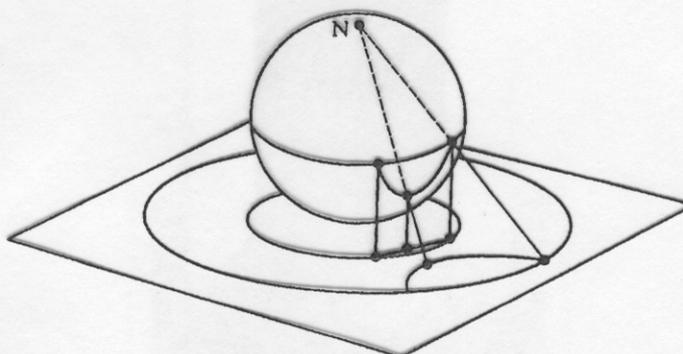
La misura dell'angolo non euclideo è assunta uguale alla misura dell'angolo euclideo curvilineo che lo rappresenta nel modello, cioè quello formato nel vertice dalle tangenti ai lati.

Poiché anche in questo modello gli assiomi e i teoremi della geometria iperbolica sono teoremi particolari della geometria euclidea, anche questo modello dimostra la coerenza della geometria iperbolica.

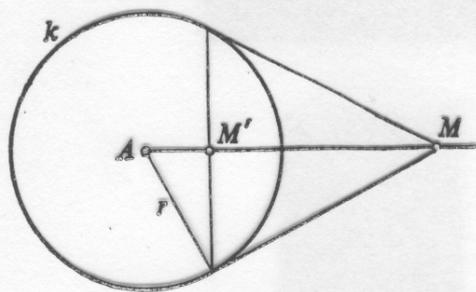
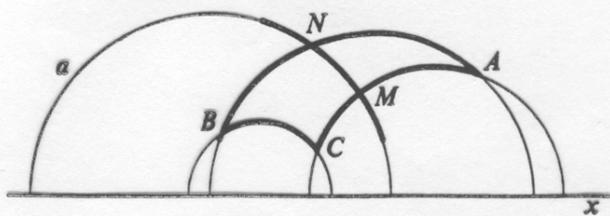
Sussistono inoltre gli analoghi tridimensionali come modelli della stereometria iperbolica.

5.9 L'isomorfismo tra i modelli di Beltrami-Klein e di Poincaré

Tra i modelli di Poincaré e di Beltrami-Klein nel cerchio, esiste un isomorfismo. In realtà tutti i modelli di geometria iperbolica sono isomorfi, poiché il sistema di assiomi che sta alla base della geometria iperbolica, come pure quello per la geometria euclidea è completo. Per costruire un tale isomorfismo possiamo partire dal cerchio limite di Beltrami-Klein, e consideriamo nello spazio euclideo tridimensionale, una sfera dello stesso raggio tangente al piano del modello di



Beltrami-Klein nel centro. Proiettiamo al di sopra ortogonalmente l'intero cerchio limite sulla semisfera inferiore di questa sfera; per questa proiezione le corde del modello di Klein diventano archi di cerchi ortogonali all'equatore. Proiettiamo quindi stereograficamente dal polo nord della sfera sul piano di partenza. L'equatore della sfera viene proiettata su un cerchio più ampio di quello usato nel modello di Beltrami-Klein e la semisfera inferiore è proiettata stereograficamente sull'interno di questo cerchio.



$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = r^2$$

