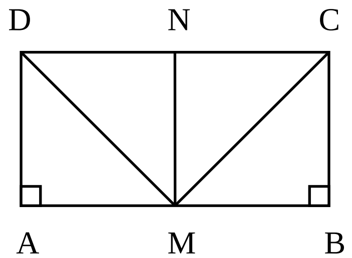
Appendice.

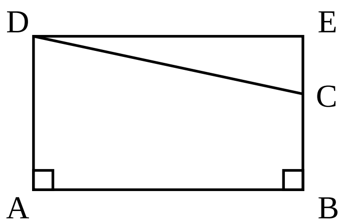
Riportiamo in dettaglio alcune dimostrazioni di Saccheri, con qualche modifica (cfr. R. Bonola, *La geometria non-euclidea*, Bologna, Zanichelli 1906).

La figura fondamentale di Saccheri è il ***quadrilatero birettangolo isoscele***, ossia il quadrilatero con due lati opposti uguali e perpendicolari alla base. Le proprietà di questa figura sono dedotte dal:

Lemma 1. ***In un quadrilatero*** ABCD ***cogli angoli consecutivi*** $\hat{A}, \hat{B}$ **retti*****, se i lati*** AD ***e*** BC ***sono uguali, sono uguali anche gli angoli*** $\hat{C}$ e $\hat{D}$.
Se i lati AD ***e*** BC ***cono disuguali, dei due angoli*** $\hat{C}$ e $\hat{D}$ ***è maggiore quello adiacente al lato minore e viceversa.***



La dimostrazione è immediata: supposto AD = BC, e detti M, N i punti medi di AB e DC, dalla uguaglianza dei triangoli DAM, CBM (1° criterio) segue quella dei triangoli DNM, CNM (3° criterio) e quindi $\hat{C} = \hat{D}$ come somme di angoli uguali.
Ne segue pure che la congiungente i punti medi di AB e DC é asse delle basi AB e DC.
Supposto invece AD > BC, e preso BE = AD dalla parte di C, C risulta interno al segmento BC e dunque $B\hat{C}D > B\hat{E}C$, in quanto angolo esterno del triangolo DCE.



Risulta inoltre: $A\hat{D}C < A\hat{D}E$, in quanto la semiretta DC è interna all'angolo $A\hat{D}E$, pertanto: $B\hat{C}D > B\hat{E}D = A\hat{D}E > A\hat{D}C$.

Vale anche il viceversa: ***se gli angoli*** $\hat{C}$ e $\hat{D}$ ***sono disuguali, i lati*** AD ***e*** BC ***sono disuguali, ed è maggiore quello adiacente all'angolo minore.***
La dimostrazione è analoga.

Osservazione.

Se vale il Postulato V, allora la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 2 angoli retti (prop. I, 32), pertanto la somma degli angoli interni di un quadrilatero = 4 retti, e quindi in questo caso gli angoli alla base superiore del quadrilatero di Saccheri ABCD sono retti: $\hat{C} = \hat{D} = 1 \text{retto}$.

Se : $\hat{C}, \hat{D}$ sono entrambi acuti, o entrambi ottusi, il postulato V è negato.

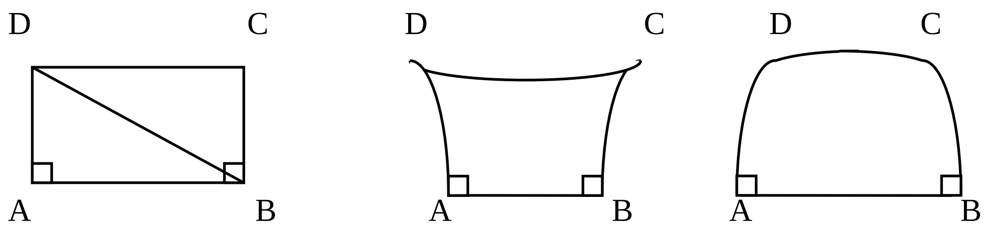
Saccheri distingue allora le tre ipotesi:

ipotesi dell'angolo retto ($\hat{C}, \hat{D}$ **entrambi retti)**

ipotesi dell'angolo acuto ($\hat{C}, \hat{D}$ **entrambi acuti)**

ipotesi dell'angolo ottuso ($\hat{C}, \hat{D}$ **entrambi ottusi)**

e dimostra che si ha rispettivamente: $DC \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} AB$

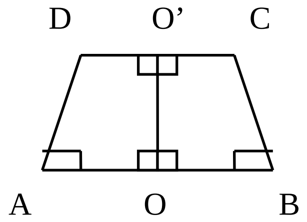


Dimostrazione:

Dall'ipotesi dell'angolo retto, per il lemma 1, segue l'uguaglianza dei triangoli ACD e CBA e dunque AB = CD.

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, la perpendicolare comune ad AB e CD nei punti medi O e O' divide il quadrilatero fondamentale in due quadrilateri tri-rettangoli uguali. Dunque per il lemma 1: AO > DO', OB > O'C.

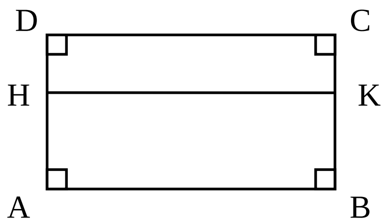
In modo analogo si procede nell'ipotesi dell'angolo acuto.



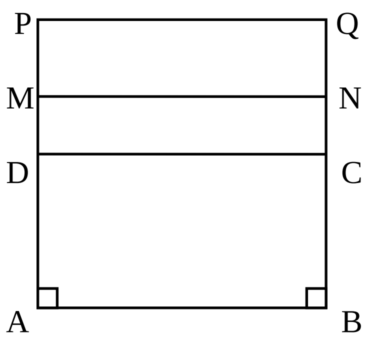
Il teorema si inverte ragionando per assurdo.

Teorema. ***Se una delle ipotesi si verifica in un quadrilatero*** **(*birettangolo isoscele*)** ***si verifica in ogni altro quadrilatero*** **(*birettangolo isoscele*)**.

Supponiamo che l'ipotesi dell'angolo retto sia verificata nel quadrilatero (di Saccheri) ABCD. Siano H, K due punti su AD e BC rispettivamente, equidistanti da A e da B: AH = BK.
Anche in ABKH vale l'ipotesi dell'angolo retto, infatti se fosse $A\hat{H}K = B\hat{K}H < 1\,\text{retto}$ allora $D\hat{H}K = C\hat{K}H > 1\,\text{retto}$. Dunque di avrebbe contemporaneamente: HK > AB e HK < DC, che è assurdo poiché AB = DC.



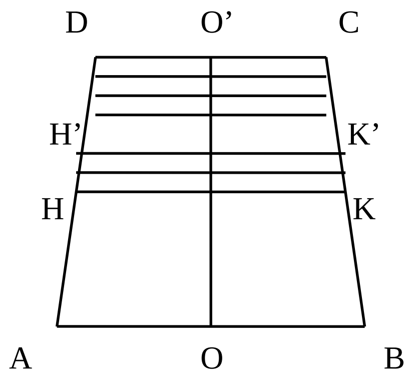
Sui prolungamenti di AD e BC si prendano poi i punti M, N equidistanti da A e da B. Dico che nel quadrilatero AMNB vale l'ipotesi dell'angolo retto.
Infatti se AM è multiplo di AD è immediato (il quadrilatero AMNB è composto di quadrilateri uguali ad ABCD). Se AM non è multiplo di AB, si prenda un multiplo di AD maggiore di AM e sulle semirette AD, BC due segmenti AP, BQ uguali a tale multiplo. Allora in ABQP vale l'ipotesi dell'angolo retto e conseguentemente, per quanto detto sopra, tale ipotesi vale anche nel quadrilatero AMNB.
Finalmente l'ipotesi dell'angolo retto vale in un qualunque quadrilatero di Saccheri, poiché come base si può prendere uno qualunque dei lati perpendicolari alla AB:



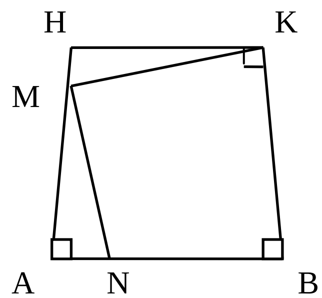
Supponiamo ora che l'ipotesi dell'angolo ottuso sia verificata in un quadrilatero ABCD, e prendiamo sui lati uguali due segmenti uguali AH = BK. Allora HK non può essere perpendicolare ad AB e CB altrimenti in ABKH, e dunque in ABCD, varrebbe l'ipotesi dell'angolo retto. Supponiamo KHA acuto; si ha allora:

$$HK > AB > DC$$

Muovendo ora la retta HK in modo che si mantenga perpendicolare alla mediana OO' del quadrilatero fondamentale **'per continuità'** esisterà una posizione H'K' = AB.
Per il lemma 1 in AH'K'B varrebbe l'ipotesi dell'angolo retto, e dunque anche in ABCD.
Il medesimo ragionamento viene applicato anche se i segmenti AH, BK sono maggiori di AB. Dunque si è dimostrato che se vale l'ipotesi dell'angolo ottuso in un quadrilatero di Saccheri di base AB, vale in ogni altro quadrilatero di Saccheri di base AB.



Consideriamo ora un quadrilatero (di Saccheri) di base qualunque BK. Poiché $\hat{K}, \hat{H}$ sono ottusi, la perpendicolare in K alla KB incontrerà la AH in M, formando l'angolo $A\hat{M}K$ ottuso (per il teorema dell'angolo esterno = prop. I, 16), e dunque (per il lemma 1): AB > MK.
Preso allora BN = MK, nel quadrilatero birettangolo isoscele BKMN vale l'ipotesi dell'angolo ottuso.



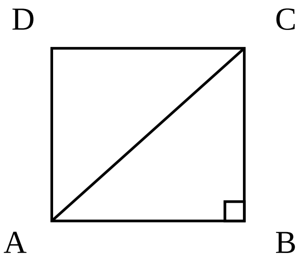
Finalmente: se vale l'ipotesi dell'angolo acuto per un quadrilatero di Saccheri, vale per ogni altro quadrilatero (di Saccheri).
Segue subito per assurdo.

Saccheri dimostra poi il teorema:

A seconda che valga l'ipotesi dell'angolo retto, acuto od ottuso, la somma degli angoli interni di un triangolo è rispettivamente:

$$\mathbf{S}\,(\Delta) = 2 \text{ retti}$$
$$\mathbf{S}\,(\Delta) < 2 \text{ retti}$$
$$\mathbf{S}\,(\Delta) > 2 \text{ retti}$$

Sia ABC un triangolo rettangolo in B. Si completi il quadrilatero tracciando il segmento AD = BC perpendicolare ad AB e congiungendo D con C.



Nell'ipotesi dell'angolo retto i due triangoli sono uguali, $B\hat{A}C = D\hat{C}A$, e dunque: $S(ABC) = 2\,\text{retti} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, essendo AB > DC si ha: $A\hat{C}B > D\hat{A}C$, dunque nel triangolo ABC: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2\,\text{retti}$.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto è AB < DC e dunque $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2\,\text{retti}$.

Il teorema si estende poi facilmente ad un triangolo qualunque, mediante la decomposizione di un triangolo in due triangoli rettangoli.

Infine il teorema inverso viene dimostrato da Saccheri mediante una riduzione all'assurdo.