La critica al postulato V

Il postulato V non aveva le medesime caratteristiche di semplicità ed evidenza degli altri quattro, di cui i primi tre consentono la costruzione di rette e cerchi corrispondente all'uso della riga e del compasso, anche se tali strumenti non sono mai nominati da Euclide, ed il quarto stabilisce l'uguaglianza di tutti gli angoli retti. Inoltre il suo enunciato si presenta come una proposizione, la cui inversa è effettivamente dimostrata da Euclide.

Tale postulato dunque, introdotto da Euclide come artificio ad hoc per evitare il paralogismo della teoria delle parallele, fu rifiutato fin dai primi commentatori dell'opera euclidea, che cercarono di dimostrarlo, spesso modificando la definizione stessa di rette parallele. Seguendo la definizione di Euclide, il parallelismo di due rette non può essere verificato se non attraverso un prolungamento all'infinito, inoltre tale definizione si presentava in forma grammaticale negativa, considerata difettosa. Per questi motivi molti autori dell'antichità e dei tempi moderni la sostituirono con un'altra, in positivo e senza ricorso all'infinito: quella di *linee equidistanti*. Ma in tal caso la difficoltà era solo spostata, poiché bisognava dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta, e questa proposizione è di fatto equivalente al postulato V.

Delle critiche più antiche (Posidonio (I sec.), Gemino (I sec.), Tolomeo (87-165 d.C.), ci riferisce Proclo nel suo *Commento al primo libro di Euclide*, dove sviluppa anche le sue proprie considerazioni. Di altre (Aganis, Simplicio), abbiamo notizia attraverso commenti arabi posteriori.

Gli *Elementi* non ebbero grande fortuna presso i Romani, per il carattere eminentemente pratico della loro geometria, ed ebbero una sola traduzione globale in latino molto tarda per opera di Boezio che è andata perduta.

Passarono attraverso i bizantini attorno all'VIII secolo nel mondo arabo dove furono tradotti e commentati (ibn-Qurra, al-Haytham, al-Khayyam, Nasir ad-Din, al Maghribi) (900-1.100 d.C.).

Parallelamente nel periodo altomedievale che va dal 400 al 1100 d.C. circa non vi furono nell'Occidente latino tentativi seri di edificare una scienza matematica.

Gli *Elementi* entrarono a far parte della cultura occidentale nel XII secolo quando molti studiosi si recarono nei centri arabi, e particolarmente in Spagna, per studiare e tradurre le opere della cultura greca attraverso le loro traduzioni arabe od ebraiche (Adelardo di Bath, Platone da Tivoli, Gherardo da Cremona).

Le prime versioni degli *Elementi* dei secoli XII-XV (Campano da Novara) fino alla prima metà del secolo XVI, compilate sui testi arabi e poi sui testi greci, non portano in generale annotazioni critiche al postulato V. La critica rinasce dopo il 1550 principalmente per impulso del *Commento* di Proclo stampato per la prima volta nel 1533 a Basilea nel testo originale e a Padova nel 1560 in latino.

Da allora proseguirono gli sforzi di matematici, logici e filosofi per risolvere il problema del postulato V, cioè per dimostrarlo a partire dagli assiomi e dagli altri postulati. Ma il problema era impossibile, poiché il postulato V non è conseguenza dei precedenti, in altri termini è *indipendente* da essi. Questa enorme mole di lavoro condusse a una serie di dimostrazioni sbagliate del postulato V, che venivano criticate per essere sostituite da altre dimostrazioni, nelle quali l'errore era via via più riposto. Nella maggior parte dei casi l'errore consisteva in questo: al posto del postulato V veniva ammessa, tacitamente od esplicitamente (perché ritenuta più evidente), una proposizione ad esso equivalente.

La storia della teoria delle parallele è dunque lunghissima e non è possibile quindi percorrerla qui che in minima parte. L'esame di qualche dimostrazione errata è tuttavia illuminante.

Tentativi di dimostrazione del postulato V

Posidonio (I sec. a.C.)
Gemino (I sec. a.C.)
Tolomeo (87-165 d.C)
Proclo (V sec. d.C.)
Aganis (VI sec. d.C.)
Simplicio (VI sec. d. C.)
al-Jawhari (IX sec. d.C.)
ibn-Qurra (?-901 d.C.)
al-Haytham (965-1039 d.C.)
al-Khayyam (~1045-1125)
Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274)
al-Maghribi (?-1260)
Leon de Bagnols (Gersonide) (1288-1344)
Clavio (1537-1612)
Pietro Antonio Cataldi (1552-1626)
Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679)
Vitale Giordano da Bitonto (1633-1711)
André Tacquet (1616-1669)
John Wallis (1616-1703)
Gerolamo Saccheri (1667-1733)
Johann Heinrich Lambert (1728-1777)
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Schweikart (1780-1899)
Taurinus (1794-1874)

Fondazione della geometria non euclidea

Carl Friedrich Gauss (177-1855)
Janos Bolyai (1802-1860)
Nikolai Ivanovic Lobacevskij (1793-1853)
…

Proposizioni equivalenti al postulato V

∗ Per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela ad una retta data (al-Haytham, Playfair)

∗ Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro

∗ Se una retta incontra una di due parallele incontra anche l’altra (Proclo)

– Gli angoli coniugati formati da due parallele con una trasversale sono supplementari (Tolomeo)

– Due rette parallele sono equidistanti

• Il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta

– Di un triangolo si può sempre costruire un triangolo simile di grandezza arbitraria (Wallis)

– Per tre punti non allineati passa sempre una sfera (Bolyai)

– Per un punto situato fra i lati di un angolo passa sempre una retta che interseca i due lati dell’angolo (Legendre, Lorenz)

• Se due rette r, s sono l’una perpendicolare e l’altra obliqua alla trasversale AB, i segmenti di perpendicolare calati dai punti di s su r sono minori di AB, dalla parte da cui AB forma con s un angolo acuto (Nasir ad-Din)

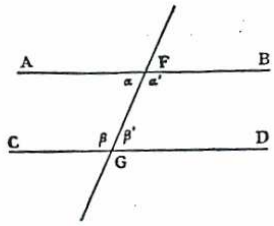
• La somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti (Saccheri)

Nota: Le prime tre proposizioni∗ sono direttamente equivalenti, le rimanenti sono equivalenti rispetto al complesso di assiomi di appartenenza, ordine e congruenza ad eccezione delle tre notate • che per l’equivalenza richiedono anche il postulato di Archimede.

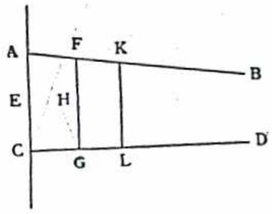
Nota: La verifica del quinto postulato non è possibile in uno spazio limitato, non si può escludere cioè che due rette che non si incontrano all’interno di un cerchio di raggio finito, per quanto grande, non si incontrino all’interno di un cerchio di raggio maggiore.

Posidonio (I sec. a.C): 'Rette parallele sono rette complanari ed equidistanti'

Tolomeo (2° sec. d.C)



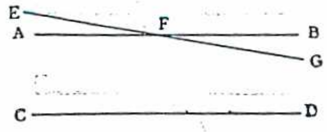
Paradosso riferito da Proclo



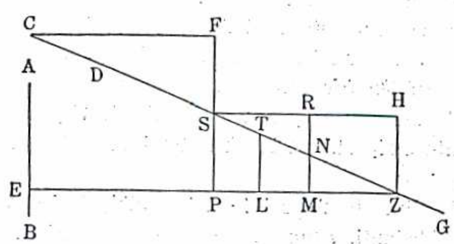
Proclo (V sec. d.C)

La dimostrazione di PROCLO riposa sulla seguente proposizione, che egli assume come evidente. *La distanza fra due punti situati su due rette che si tagliano può rendersi grande quanto si vuole, prolungando sufficientemente le due rette* (¹). Da questa deduce il lemma:

Una retta che incontra una di due parallele incontra necessariamente anche l' altra.



Agamis (VI sec. d.C.)



Gerolamo Saccheri (1667-1733)

(Gesuita, professore di matematica all’Università di Pavia):

Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia (1733)

Quest’opera rappresenta il tentativo più importante nelle ricerche sulla teoria delle parallele, poiché Saccheri fu il primo a considerare la possibilità di altre ipotesi oltre a quelle di Euclide e ad elaborarne numerose conseguenze.

Saccheri fa uso di un particolare tipo di riduzione all’assurdo: la deduzione della proposizione da dimostrare dalla sua negazione. Questo tipo di ragionamento consiste nell’assumere come ipotesi la falsità della proposizione da dimostrare e nel far vedere che si arriva ugualmente alla conclusione che la proposizione è vera:

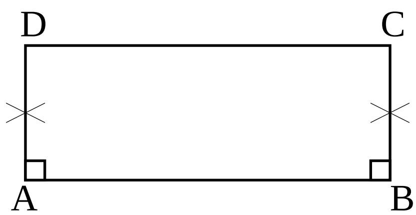
$$(- A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

La tecnica dimostrativa scelta, anche se egli non pone in dubbio la validità del postulato V, lo conduce a partire dalla negazione del postulato delle parallele e a dedurne di fatto tutta una serie di teoremi di geometria non euclidea.

La figura fondamentale da cui Saccheri parte è il ***quadrilatero birettangolo isoscele*** o ***quadrilatero di Saccheri***:

A = B = 1 retto

AD = BC



Saccheri dimostra (è immediato):

che *l’asse di AB* è asse di simmetria del quadrilatero e quindi *è asse anche di DC* e che *gli angoli in D e C sono uguali tra loro*.

Si presentano allora tre casi:

1) che gli angoli in C e D siano entrambi retti (***ipotesi dell'angolo retto***)
2) che gli angoli in C e D siano entrambi acuti (***ipotesi dell'angolo acuto***)
3) che gli angoli in C e D siano entrambi ottusi (***ipotesi dell'angolo ottuso***)

Saccheri ne deduce che la base superiore CD è allora rispettivamente:

$$\mathrm{CD} \begin{smallmatrix} = \\ > \\ < \end{smallmatrix} \mathrm{AB}$$

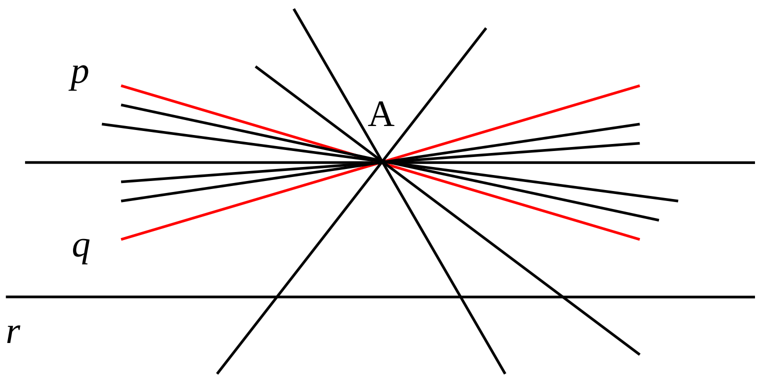
e dimostra che se una ipotesi si verifica in un quadrilatero si verifica in ogni altro quadrilatero.

Saccheri dimostra poi che nelle tre ipotesi la somma degli angoli interni di un triangolo è rispettivamente:

$$S(\Delta) \begin{smallmatrix} = \\ < \\ > \end{smallmatrix} 2 \text{ retti}$$

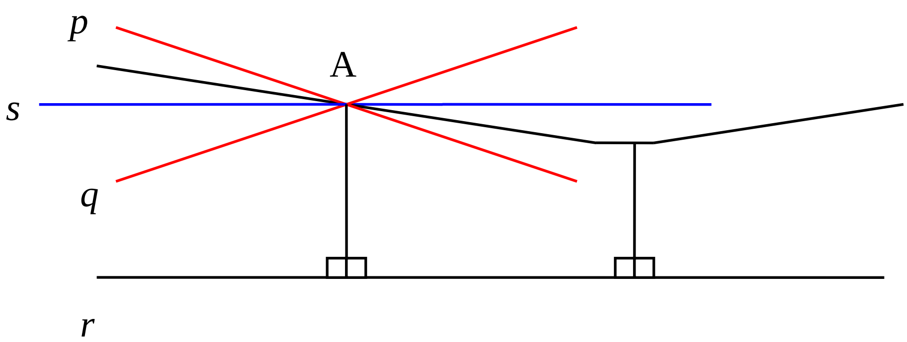
Dimostra poi che:

1) dall'***ipotesi dell'angolo retto*** segue il postulato V e dunque il sistema geometrico euclideo;
2) dall'***ipotesi dell'angolo ottuso***, ammesso il postulato di infinità della retta, segue il postulato V, e dunque i teoremi che ne dipendono, in particolare che: S(Δ) = 2 retti in ogni triangolo, in contrasto con quanto dimostrato sopra. Da qui la falsità dell'ipotesi dell'angolo ottuso.
3) nell'***ipotesi dell'angolo acuto*** valgono le seguenti proprietà delle rette:



se consideriamo in un piano un fascio di rette di centro A ed una retta *r* non appartenente al fascio, le rette per A si ripartiscono in due gruppi: uno costituito dalle infinite rette che intersecano *r* , l'altro dalle infinite rette che non intersecano *r*. Le rette non secanti sono tutte interne ad un angolo formato da due rette *p* e *q*, anch'esse non secanti *r*.

Ciascuna delle rette non secanti ($\neq$ *p*, *q*) ha con *r* una (e sola) perpendicolare comune: la retta *s* per la quale questa perpendicolare passa per A è la parallela nel senso di Euclide, le altre rette per A, non incidenti la *r*, hanno con *r* una perpendicolare comune in un punto diverso da A.



Nell'intento di arrivare ad un assurdo per dimostrare la falsità dell'ipotesi dell'angolo acuto Saccheri deduce una serie di teoremi che sono in realtà teoremi della geometria non euclidea. In particolare dimostra le proprietà delle *linee equidistanti*.

Alla fine Saccheri perviene alla confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto attraverso la:

prop. 33: *l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura della linea retta*.

Ciò che ripugna alla natura della retta sarebbe il fatto che due rette come la *r* e la *p* di figura avrebbero una perpendicolare comune in un punto comune all'infinto.

La pretesa dimostrazione di Saccheri è dunque fondata sull'estensione all'infinito di proprietà valide per figure a distanza finita.

Saccheri dà anche un'altra dimostrazione dell'assurdità dell'ipotesi dell'angolo acuto, utilizzando la proposizione che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta (proposizione che è equivalente al postulato V) ma l'ultimo anello del ragionamento contiene un errore.

L'opera di Saccheri ebbe una certa diffusione dopo la sua morte. Certamente la conosceva Johann Heinrich Lambert che trent'anni (1766) dopo sviluppò una teoria simile a quella di Saccheri.

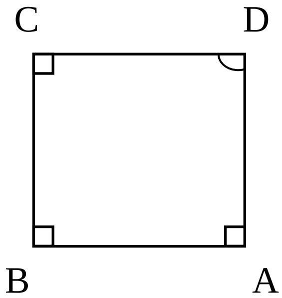
In seguito venne però dimenticata e restò ignota a Lobacevskij e a Bolyai, e solo Beltrami, nel 1889, la valorizzò di nuovo. Ma, seppure indiretamente, il filone di pensiero di Saccheri arrivò a Lobacevskij.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

J. H. Lambert scrisse nel 1766 una ***Theorie der parallelinien***, molto vicina alle idee di Saccheri, che fu però pubblicata postuma nel 1786.

Lambert considera un ***quadrilatero trirettangolo***:

A, B, C retti



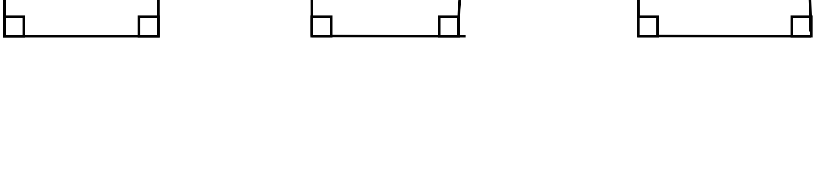
per quanto riguarda il 4° angolo, tre ipotesi sono da esaminare: quella dell'***angolo acuto***, quella dell'***angolo retto***, quella dell'***angolo ottuso***.

Avendo constatato che l'ipotesi dell'angolo retto equivale al V postulato, dopo aver ridotto all'assurdo quella dell'angolo ottuso, Lambert, come Saccheri prima di lui, affronta l'ipotesi dell'angolo acuto.

Questa supposizione conduce Lambert ad un sistema geometrico complicato, in cui le rette hanno lo stesso comportamento apparentemente paradossale che nell'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri, ma in cui Lambert non incontra alcuna contraddizione. A differenza di Saccheri, non commette errori che possano condurlo a scartare l'ipotesi dell'angolo acuto e quindi a credere di aver dimostrato il postulato V, è al contrario convinto che tutti i tentativi in questa direzione risulterebbero vani. Lambert deduce dall'ipotesi dell'angolo acuto una serie di conseguenze sottolineandone l'analogia con la geometria sferica:

«Io sono anche incline a pensare che la terza ipotesi (dell'anglo acuto) è valida su una qualche sfera immaginaria. Ci deve essere ben una ragione per la quale è così difficile rifiutarla nel piano, contrariamente a quello che si può facilmente fare nel caso della seconda ipotesi (dell'angolo ottuso)»

Lambert intuì la soluzione vera del problema spingendosi oltre quelli che l'avevano preceduto.



Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Pubblicò diversi tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele in successive edizioni dei suoi Eléments de Géométrie tra il 1794 e il 1833.

Sappiamo che post. V $\Rightarrow$ prop. I, 32 : $S(\Delta) = 2$ retti $\forall \Delta$

Legendre dimostra dapprima la proposizione inversa:

$$S(\Delta) = 2 \text{ retti } \forall \Delta \Rightarrow \text{post. } V$$

poi fa 3 ipotesi incompatibili:

1°) $S(\Delta) > 2$ retti in ogni triangolo

2°) $S(\Delta) = 2$ retti "

3°) $S(\Delta) < 2$ retti "

Riduce con ragionamento ineccepibile all'assurdo la 1ª; se avesse potuto farlo anche con la 3ª, avrebbe dimostrato il post. V!

Risultati positivi delle ricerche di Legendre:

Prop. I. Se la somma degli angoli interni di un qualunque triangolo è uguale a 2 retti, il postulato V vale.

Prop. II. In ogni triangolo la somma degli angoli interni è $\leq$ 2 angoli retti : $S(\Delta) \leq 2$ retti

Prop. III. Se la somma degli angoli interni è = 2 retti in un triangolo, è = 2 retti in ogni triangolo

---

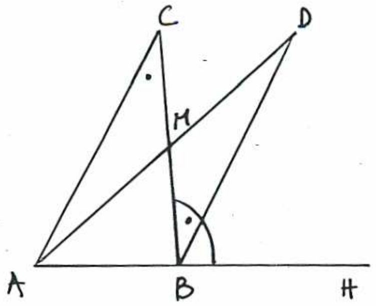
Definiamo deficit o difetto di un triangolo :

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta)$$

allora dalla definizione e per la prop. II :

$$0 \leq D(\Delta) \leq \pi$$

prop. I,16



$$\overset{\triangle}{AMC} = \overset{\triangle}{DMB} \Rightarrow A\hat{C}M = D\hat{B}M$$

$$C\hat{B}H > A\hat{C}B = D\hat{B}C$$

prop. I,16 $\Rightarrow$ prop. I,17 :

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A = A\hat{B}C + C\hat{B}D <$$
$$< A\hat{B}C + C\hat{B}H = 2 \text{ retti}$$

Corollario (Legendre)

La somma degli angoli di un triangolo è sempre $\leq$ 2 retti

segue da:

È possibile costruire un triangolo che abbia la stessa somma S degli angoli interni di un triangolo dato, ed un angolo $\leq$ della metà di un angolo del triangolo dato.

Dim. Riferendoci alla figura di sopra:

$$S(ABC) = S(ABD) \quad \text{e} \quad S(ABC) = S(ACD)$$

inoltre

$$\text{o}: \quad C\hat{A}D \leq C\hat{A}B/2 \qquad \text{o}: \quad D\hat{A}B \leq C\hat{A}B/2$$

Siano α, β, γ gli angoli di $\overset{\triangle}{ABC}$. Ripetendo la costruzione n volte si costruisce un triangolo in cui la somma degli angoli è

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma$$

e

$$\alpha' \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

Sia ora $\varepsilon > 0$. Esiste un triangolo d'angoli α', β', γ' tali che:

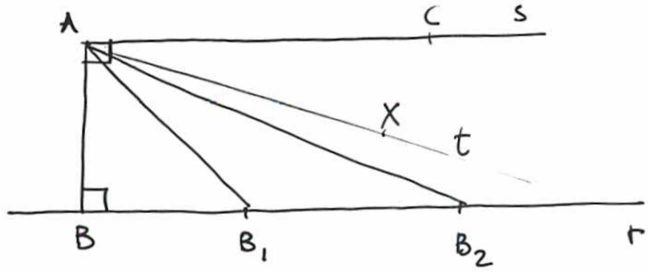
$$\alpha' + \beta' + \gamma' < 2 \text{ retti} + \alpha' < 2 \text{ retti} + \varepsilon$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$: $\quad \alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' < 2 \text{ retti} + \varepsilon$

dall'arbitrarietà di ε: $\quad \alpha + \beta + \gamma \leq 2 \text{ retti}$

$\boxtimes$

Dimostrazione della
Prop. I di Legendre



- Sia A esterno ad r
- Da A si mandi la $\perp$ alla r e sia B il piede
- Si mandi la $\perp$ in A alla AB

$s // r$ (segue dalla proposizione I, 28 degli Elementi)

Bisogna dimostrare che ogni altra retta per A incontra r

Sia B_1 sulla r tale che: $B_1B = AB$
allora si ha: $B\hat{A}B = B\hat{B_1}A = \pi/4$

Sia B_2 sulla retta r (da parte opposta di B rispetto a B_1) tale che: $B_1B_2 = AB_1$
allora si ha $B_1\hat{B_2}A = B_1\hat{A}B_2 = \pi/8$

....

Definito per induzione B_n
tale che: $B_nB_{n-1} = AB_{n-1}$
risulta allora $B_{n-1}\hat{B_n}A = B_n\hat{A}B_{n-1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$
$= \frac{\pi}{2^{n+1}}$

Sia ora t una qualunque semiretta interna all'angolo $B\hat{A}C$ e sia X un suo punto diverso da A. Sia inoltre
$$\alpha = B\hat{A}X = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

Risulta allora $B\hat{A}B_n = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > \alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$

non appena $\frac{\pi}{2^n} < \varepsilon$

ossia $\forall n$: $2^n > \frac{\varepsilon}{\pi}$

l'asserto segue allora dall'assioma di Pasch

Prop. III di Legendre

Se risulta $S(\Delta) = 2$ retti in corrispondenza ad un triangolo Δ, allora:

$$S(\Delta) = 2 \text{ retti} \quad \text{in ogni triangolo}$$

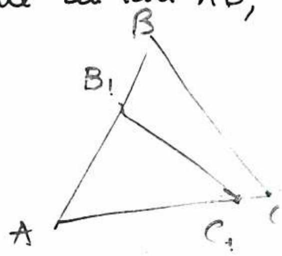
La dimostrazione si basa sui lemmi:

I. Se un Δ ABC è decomposto in due triangoli da una trasversale BP, il <u>deficit</u> (o <u>difetto</u>) * del triangolo ABC è uguale alla somma dei difetti dei triangoli ABP e BPC:

$$D(A\hat{B}C) = D(A\hat{B}P) + D(P\hat{B}C)$$

II. Siano ABC e AB_1C_1 due triangoli aventi il vertice A in comune e tali che i vertici B_1 e C_1 del secondo triangolo appartengano rispettivamente ai lati AB, BC del primo. Allora

$$D(A\hat{B_1}C_1) \leq D(A\hat{B}C)$$



III. Se due triangoli rettangoli ABC e A'B'C' sono tali per cui i cateti A'C' e B'C del secondo triangolo non superano rispettivamente i cateti AC, BC del primo, e se la somma degli angoli interni del primo è:

$$S(A\hat{B}C) = 2 \text{ retti}$$

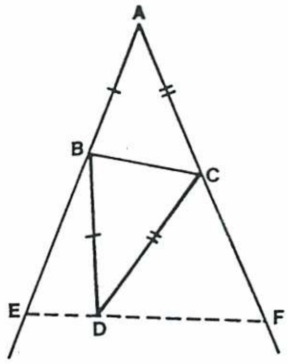
allora anche $S(A'\hat{B'}C') = 2$ retti

---

* $D(A\hat{B}C) = \pi - S(A\hat{B}C)$

Esempio di errata dimostrazione (Legendre)

Legendre suppone l'esistenza di un triangolo con defecit positivo e presume di trovare una contraddizione.



Sia ABC tale che:

$$D(ABC) = \pi - S(ABC) = \delta > 0$$

si rifletta il triangolo ABC rispetto alla retta BC, cioè si costruisca il triangolo BDC simmetrico di ABC, per cui:

$$D\hat{B}C = A\hat{B}C \quad , \quad AB = DB$$

Si consideri una retta per D che intersechi i prolungamenti dei lati AB, AC rispettivamente nei punti E ed F.

Poiché il defecit è additivo:

$$D(AEF) \geq 2\delta$$

Ripetendo la costruzione, cioè riflettendo AEF rispetto ad un lato, si ottiene un triangolo con defecit $\geq 4\delta$

Dopo n passaggi si ottiene un triangolo Δ_n tale che:

$$D(\Delta_n) \geq 2^n \delta > \pi$$

per n abbastanza grande. Assurdo.

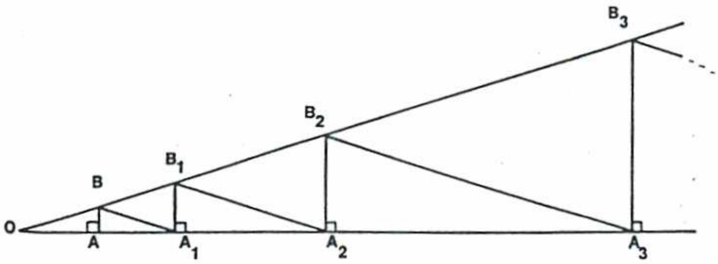
Nota: Legendre ha introdotto una proposizione equivalente al postulato V: "per ogni punto interno ad un angolo si può condurre una retta che interseca entrambi i lati dell'angolo".

Esempio di dimostrazione errata (Legendre)

Sia OAB un triangolo con deficit positivo:

$$D(OAB) = \varepsilon > 0$$

Non è restrittivo supporre l'angolo in A retto e l'angolo in O acuto.



Consideriamo il punto A_1 sul lato OA dell'angolo OAB tale che:

$$AA_1 = OA$$

Congiungiamo B con A_1 e per A_1 mandiamo la perpendicolare ad OA che incontri OB in B_1.
Sia poi A_2 su OA oltre A_1 tale che:

$$A_1A_2 = OA_1$$

e B_2 l'intersezione di OB con la perpendicolare in A_2 alla OA. E così via.
Risulta allora:

$$D(OA_1B_1) \geq 2\varepsilon$$
$$D(OA_2B_2) \geq 4\varepsilon$$
$$\cdots\cdots$$
$$D(OA_nB_n) \geq 2^n\varepsilon > \pi \quad \text{per } n \text{ abbastanza grande.}$$

Assurdo.

Nota. Nella dimostrazione è stata usata la proposizione equivalente al postulato V:
"ogni perpendicolare ad un lato di un angolo incontra l'altro lato".