LA GEOMETRIA ELLITTICA

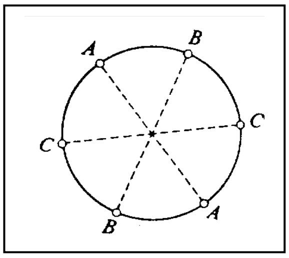
QUALCHE NOZIONE SULLA GEOMETRIA DI RIEMANN

Consideriamo un modello della geometria di Riemann, detto *modello sulla sfera.*
Sia k una sfera arbitraria sullo spazio euclideo. Conveniamo di identificare i punti diametralmente opposti sulla sfera, in altre parole consideriamo tali punti diametralmente opposti come un solo ente al quale assegniamo il nome di "punto" nella geometria che descriviamo. I cerchi massimi della sfera sono le "rette".

Diremo che il "punto " *A* è situato sulla "retta" *a* (o che la "retta" *a* passa per il "punto" *A*) se i due punti ordinari di *k* che costituiscono *A* sono situati sul cerchio massimo che rappresenta *a*. E' evidente che:

1) Per due "punti" qualunque passa una "retta"
2) Per due "punti" qualunque passa una sola "retta"
3) Si trovano su ciascuna "retta" almeno due "punti" (e anche un'infinità di "punti"); si trovano tre "punti" non situati sulla stessa "retta"

Dunque per l'insieme considerato dei "punti" e delle "rette" valgono gli assiomi d'associazione della geometria piana elementare (ovvero gli assiomi I, 1, I, 2, I, 3). Al contrario gli assiomi d'ordine formulati per la geometria elementare non possono essere applicati. Infatti, essi indicano come un punto ordinario può essere situato tra altri due punti ordinari su una retta ordinaria; ma la nozione "*tra*" non ha senso per i nostri "punti" convenzionali situati sulle nostre "rette" convenzionali. Per esempio, si considerino tre "punti "qualunque *A*, *B*, *C* su una" retta " (vale a dire tre coppie di punti diametralmente opposti su una circonferenza), è impossibile distinguerne uno in rapporto agli altri in merito alla reciproca disposizione.



Per introdurre la nozione d'ordine dei "punti" dobbiamo prendere in considerazione quattro "punti". Siano *A*, *B*, *C*, *D* quattro "punti" su una "retta"; supponiamo che siano numerati in ordine alfabetico (qualsiasi sia la loro disposizione sulla "retta"). Distinguiamo due casi differenti quanto alla disposizione dei "punti" *A*, *B*, *C*, *D*:

1. I primi due "punti" A e *B* separano gli altri due "punti" *C* e *D* (*C* e *D* separano allora *A* e *B*; fig. 1,a);
2. i primi due "punti" *A* e *B* non separano gli altri due "punti" *C* e *D* (*C* e *D* non separano allora *A* e *B*; fig. 1,b).

Analogamente, se *a, b, c, d* sono quattro "rette" passanti per un "punto" e numerate in ordine alfabetico, si distinguono due casi:

1. le "rette" *a, b* separano le "rette *c, d (c, d* separano allora *a, b* ; fig. 2,a);
2. le "rette" *a, b* non separano le "rette" *c, d* (*c, d* non separano allora *a, b* ; fig. 2,b). La nozione di "punti" separati e di "rette" separate sostituisce in una sistemazione assiomatica la relazione "*tra*", la relazione d'ordine diventa quindi una relazione quaternaria (una coppia separa l'altra) ed è soggetta ad una serie di assiomi che non elenchiamo.

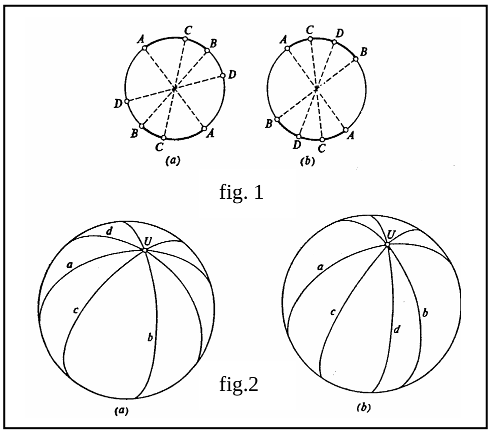


fig. 1

fig.2

Siano *A* e *B* due "punti " arbitrari di una "retta " *u*; tutti i "punti" della "retta " *u* , esclusi *A* e *B*, possono essere divisi in modo unico in due classi tali che due "punti " qualunque della stessa classe non separano *A* e *B* e due "punti " di classi differenti separano *A* e *B*. si dirà che i "punti" *A* e *B* definiscono sulla "retta" *u* due "segmenti"; i "punti "di una delle due classi di punti descritte saranno considerati come i punti interni di uno dei due "segmenti", e i "punti" dell'altra classe, come i punti interni all'altro "segmento" (nella fig. 1,a il "punto" *C* è un punto interno ad un "segmento ", il "punto" *D* è un punto interno all'altro "segmento"; nella fig. 1,b i due "punti" *C* e *D* sono due "punti" interni di uno stesso "segmento").

Si definiscono nozioni analoghe per le "rette" che passano per un "punto". Se *a* e *b* sono due "rette" passanti per un "punto" *U*, allora le due rette *a* e *b* possono essere divise in modo unico in due classi tali che due "rette" qualunque di una stessa classe non separano *a* e *b* e due "rette" qualunque di due classi differenti separano *a* e *b*. si dirà che le "rette" *a* e *b* determinano due "angoli" di vertice in *U* ; le "rette" dell'una delle due classi definite saranno considerate come delle "rette" interne ad uno dei due "angoli", e quelle dell'altra classe, come le "rette" interne all'altro "angolo".

Posto questo si definisce senza difficoltà un triangolo, gli angoli interni di un triangolo la regione interna di un triangolo o di un poligono, un poligono semplice, gli angoli interni di un poligono semplice ed altre nozioni della geometria elementare.

Si dirà infine che due "segmenti" sono congruenti se esiste un movimento della sfera *k* in sé, o una trasformazione inversa della sfera rispetto ad un piano diametrale qualunque (simmetria) tale che due "segmenti" si sovrappongano l'uno all'altro (vale a dire che gli estremi e i punti interni di uno si sovrappongano agli estremi e ai punti interni dell'altro).
Gli "angoli " congruenti e le figure congruenti saranno definite in modo analogo (una figura *M* in quanto insieme di "punti" e di "rette" è detta congruente ad una figura *M'* se è possibile stabilire tra i "punti" di queste due figure come pure tra le loro "rette" una corrispondenza biunivoca tale che tutti i "punti" e tutte le "rette" di *M* si sovrappongano ai "punti" e le "rette" di *M'* a seguito di un movimento di *k* in sé o di una sua simmetria).

Consideriamo:

1. Le relazioni di associazione dei "punti" e delle "rette",
2. Le relazioni d'ordine dei "punti" su una "retta" arbitraria, come pure quelle delle "rette" che passano per un "punto" arbitrario;
3. Le relazioni di congruenza dei "segmenti", degli angoli e delle altre figure.

Il sistema di teoremi che si appoggia su queste relazioni costituisce la *geometria riemanniana*; l'insieme di "punti e di "rette" definiti sopra e legati tramite le relazioni specifiche costituiscono il *piano riemanniano*. Tutti i teoremi della geometria riemanniana sono delle interpretazioni particolari dei teoremi della geometria d'Euclide.

Stabiliamo alcune proposizioni della geometria di Riemann. Tutti i tre assiomi d'associazione della geometria piana euclidea sono validi: in particolare, due punti qualunque determinano una ed una sola retta che li contiene. D'altra parte si ha una proposizione non vera nelle geometrie di Euclide e di Lobatchevski: <u>due rette qualunque ammettono sempre un punto in comune</u> (questo è ovvio perché due cerchi massimi di una sfera si tagliano in due punti diametralmente opposti). In altre parole, le rette parallele non esistono nel piano riemanniano. Dunque, il postulato dell'unicità della retta passante per un punto esterno alla retta ammesso nella geometria euclidea è negato nella geometria lobatchevskiana per l'esistenza di infinite rette di quel genere e in geometria riemanniana in quanto ogni retta è secante ad ogni altra retta.

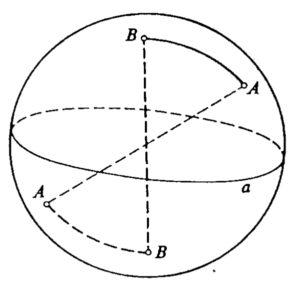


Fig. 3

C'è un altro fatto che differenzia la disposizione di rette nel piano riemanniano dalla disposizione di rette nel piano euclideo o lobatcheskiano: <u>nessuna retta divide il piano riemanniano in due parti.</u>
Questo significa che per ogni retta *a* e per due punti qualunque *A* e *B* non appartenenti alla retta, esiste un segmento che unisce *A* e *B* senza punti in comune con la retta *a* (fig. 3).

Il confronto di due segmenti o di due angoli e la misura di un segmento o di un angolo si realizzano facilmente nella geometria riemanniana.
Possiamo parallelamente enunciare e dimostrare dei teoremi sui rapporti fra le grandezze trigonometriche, analoghe in una certa misura ai teoremi noti della geometria di Euclide e di Lobatchevski.

E' interessante confrontare i teoremi sulla somma degli angoli interni di un triangolo nelle geometrie d'Euclide, di Lobatchevski e di Riemann: in Euclide la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti, in Lobatchevski è minore di due retti, in Riemann è maggiore di due retti. Per assicurarsi che l'ultima proposizione è vera, cioè che la somma degli angoli interni di un triangolo nel piano riemanniano è maggiore di due retti, è sufficiente ricordarsi che le rette del piano riemanniano sono i cerchi massimi di una sfera; ora, se ciascun triangolo sferico ha la somma degli angoli interni maggiore di due retti, sarà lo stesso per un triangolo situato nel piano di Riemann.

Le relazioni metriche della geometria di Riemann si esprimono tramite le formule della geometria sferica convenientemente interpretate (questo è perfettamente chiaro: in effetti, ciascuna figura M del piano riemanniano rappresenta una coppia di figure M_1 e M_2 situate su una sfera, simmetriche rispetto al centro e tali che ciascuna coppia di punti diametralmente opposti di M_1 e M_2 sia considerata come un punto unico della figura *M*; si conclude che ciascun rapporto metrico tra elementi della figura *M* coincide con il rapporto metrico sia tra gli elementi omologhi di M_1 sia tra quelli di M_2).

E' così che il lato *a* di un triangolo situato nel piano riemanniano si esprime in funzione dei due altri lati *b* e *c* del triangolo e dell'angolo opposto α per mezzo della formula*:*

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + sin\frac{b}{R}sin\frac{c}{R}\cos\alpha$$

poiché questa formula traduce la lunghezza del lato di un triangolo situato su una sfera di raggio *R*. Ricordiamo che il piano riemanniano si ottiene identificando i punti diametralmente opposti su questa stessa sfera (di raggio *R*). Si comprende che *R* deve figurare in tutte le altre formule metriche del piano riemanniano. E' evidente che questo numero caratterizza tanto il piano riemanniano che la sfera dalla quale abbiamo costruito il piano. E' altrettanto evidente che più *R* è grande, meno le figure situate nel piano riemanniano differiranno, per le loro proprietà, dalle figure euclidee. Si può considerare il numero *R* come la "misura della non-euclidità" del piano riemanniano. Il segmento di lunghezza *R* situato sul piano riemanniano è chiamato *raggio di curvatura* del piano.

Abbiamo già detto che i teoremi della geometria di Riemann non sono altro che i teoremi della geometria euclidea convenientemente interpretati. I teoremi della geometria di Riemann si deducono quindi dagli assiomi della geometria d'Euclide. È ovvio che i teoremi euclidei non possono essere applicati direttamente al caso riemanniano: la maggior parte di essi non ha niente in comune con gli enti che si chiamano "punti" e "rette" del piano riemanniano.

È possibile tuttavia, fondare la geometria di Riemann su un sistema d'assiomi appositi, cioè su un certo numero di proposizioni (che definiscono le relazioni d'associazione, d'ordine e di congruenza delle figure sul piano riemanniano) tali che tutte le altre proposizioni di questa geometria si lasciano dedurre da questi assiomi. Un tale fondamento assiomatico della geometria di Riemann la rende un sistema geometrico astratto. Assegnando poi i nomi di "punti" e "rette" a degli oggetti arbitrari e indicando con le parole "situato su", "separa", "congruente" delle loro relazioni qualunque (supposto che le condizioni degli assiomi siano verificate), otteniamo dei modelli concreti della geometria astratta di Riemann. Ogni sistema di enti legati da relazioni che verificano le condizioni degli assiomi della geometria di Riemann può essere chiamato *piano riemanniano.* In questo modo, una sfera di coppie di punti diametralmente opposti non è che un piano riemanniano come un'infinità d'altri.

Qui non diamo la lista degli assiomi della geometria di Riemann, mostreremo invece le differenti proiezioni della geometria di Riemann costruendo un modello di questa geometria. Gli elementi di questo modello saranno analoghi, da un certo punto di vista, agli elementi del modello precedentemente costruito sulla sfera, per cui, senza far riferimento agli assiomi si intuisce che i due modelli realizzano una stessa geometria.

Questo nuovo modello sarà costruito, come il precedente, nello spazio euclideo.

Per iniziare, aggiungiamo all'insieme degli elementi dello spazio euclideo i *punti all'infinito*. Ricordiamo che:

1. a ciascuna retta *a* è associato un elemento nuovo chiamato *punto all'infinito della retta a*;
2. due rette parallele ammettono un punto comune all'infinito;
3. i punti all'infinito di rette non parallele sono distinti.

L'insieme di tutti i punti all'infinito di un piano arbitrario (cioè l'insieme dei punti all'infinito di tutte le rette del piano) sarà considerata come una nuova retta posta all'infinito. L'insieme di tutti i punti all’infinito dello spazio costituirà un nuovo piano all’infinito. Gli elementi che abbiamo appena definito sono introdotti in geometria proiettiva; così uno spazio (risp. un piano) arricchito d’elementi all’infinito nelle condizioni descritte si chiama *spazio proiettivo* (risp. *piano proiettivo*).

Come elementi del nostro nuovo modello, prendiamo i punti e le rette del piano proiettivo α. L’espressione “un punto è situato su una retta “ è intesa nel senso abituale del piano proiettivo. Si ha inoltre che:

1. tutti i tre gli assiomi d’associazione della geometria piana elementare sono verificati;
2. due rette qualunque sono concorrenti (eventualmente in un punto all’infinito).

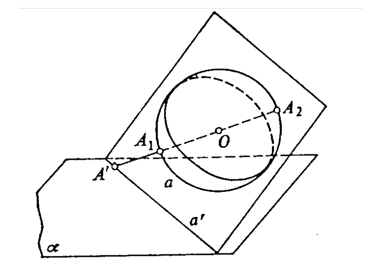


fig. 4

Si vede che le relazioni d’associazione applicate ai punti e alle rette del nuovo modello verificano le stesse condizioni fondamentali come nel modello sferico costruito precedentemente.

Definiamo ora le relazioni d’ordine e di congruenza nel nuovo modello. A questo scopo, si prenda una sfera qualunque *k* di centro *O* (fig. 4) e si supponga che il punto *O* non sia situato sul piano α. Si faccia passare per *O* una retta arbitraria che tagli il piano in un punto *A’*, che può essere anche un punto all’infinito, e la sfera *k* in due punti diametralmente opposti A_1 e A_2.La coppia di punti A_1 e A_2 sarà considerata come un punto unico del modello della geometria riemanniana sulla sfera *k* e si indicherà con la sola lettera A. diciamo che *A’* è una proiezione di *A* (o che *A* è una proiezione di *A’*). Sia *a* un cerchio massimo della sfera *k;* è evidente che ogni coppia dei suoi punti diametralmente opposti ammette come proiezione sul piano *α* un punto di una retta determinata *a’* (può essere la retta all’infinito). Diciamo che *a’* è una proiezione di *a* (o che *a* è una proiezione di *a’*). Facciamo corrispondere a ciascuna coppia di punti diametralmente opposti della sfera *k*, cioè a ogni punto del modello della geometria riemanniana su questa sfera, la sua proiezione sul piano α. A ciascun cerchio massimo della sfera *k* si faccia corrispondere la sua proiezione sul piano *α*; significa che a ciascuna retta del modello della geometria riemanniana sulla sfera *k* corrisponde una retta determinata su *α*. È ovvio che ciascuna di queste corrispondenze è biunivoca. È anche chiaro che se il punto *A* del modello della geometria riemanniana sulla sfera *k* è situato sulla retta *a* dello stesso modello, il punto *A*’ del piano *α* che corrisponde ad *A* è situato sulla retta *a’* che corrisponde ad *a*.

Siano *A’, B’, C’, D’* quattro punti di un piano *α* situati su una stessa retta *u’* del piano, e *A, B, C, D* quattro punti che a loro corrispondono sul modello della geometria riemanniana sulla sfera *k*, situati su una stessa retta *u* di questo modello (*u* e *u’* si corrispondono). Diciamo che:

1. i punti *A’, B’* separano i punti *C’, D’* sulla retta *u’* del piano α se *A, B* separano *C, D* sulla retta *u*;
2. i punti *A’, B’* non separano i punti *C’, D’* sulla retta *u’* del piano α se *A, B* non separano *C, D* sulla retta *u*.

Allo stesso modo, date quattro rette *a’, b’, c’, d’* del piano *α* che passano per un punto *U’* e quattro rette *a, b, c, d,* che a loro corrispondono sulla sfera *k* e che passano per un punto *U* del modello sferico, si dirà che:

1. le rette *a’, b’* separano le rette *c’, d’* sul piano *α* se *a, b* separano *c, d;*
2. le rette *a’, b’* non separano le rette *c’, d’* sul piano *α*, se *a, b* non separano *c, d*.

Si definisce in questo modo la relazione d’ordine dei punti su una retta arbitraria del piano *α*, come pure per le rette del piano *α* che passano per un punto di questo piano.

Diremo infine che due figure del piano *α* sono *congruenti* se le loro proiezioni lo sono sulla sfera *k.*

Abbiamo dunque definito le relazioni d’associazione, d’ordine e di congruenza per gli elementi del nuovo modello in modo che questi e gli elementi che a loro corrispondono sul modello della geometria riemanniana costruito sulla sfera *k* siano legati dalle stesse relazioni. Ciò significa che tutte le proposizioni relative all’associazione, all’ordine e alla congruenza degli elementi del modello della geometria riemanniana sulla sfera *k* restano vere per gli elementi del nuovo modello costruito sul piano proiettivo; inversamente, ogni proposizione sull’associazione, ordine e congruenza degli elementi del nuovo modello è vera per il modello della geometria riemanniana sulla sfera *k*. I due modelli realizzano quindi, in due modi differenti, una stessa geometria, che è quella di Riemann.

Si può osservare che il modello della geometria riemanniana sul piano proiettivo è più suggestivo di quello sulla sfera per illustrare le relazioni d'associazione e ordine degli elementi, mentre il modello costruito sulla sfera è più suggestivo per dimostrare la congruenza delle figure, in quanto le figure congruenti sul piano proiettivo non sono sovrapponibili nel senso abituale.

Si può costruire un modello a tre dimensioni della geometria di Riemann identificando i punti diametralmente opposti su una sfera tridimensionale in uno spazio euclideo a quattro dimensioni oppure costruire un modello di geometria tridimensionale riemanniana mediante lo spazio proiettivo.

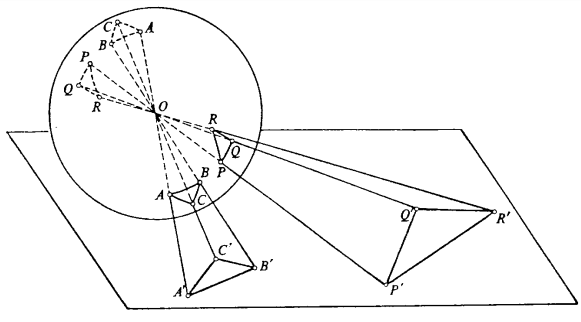


fig. 5

Bibliografia

N. Efimov, *Géométrie supérieure*, Moscou, MIR, 2ème éd., 1985.