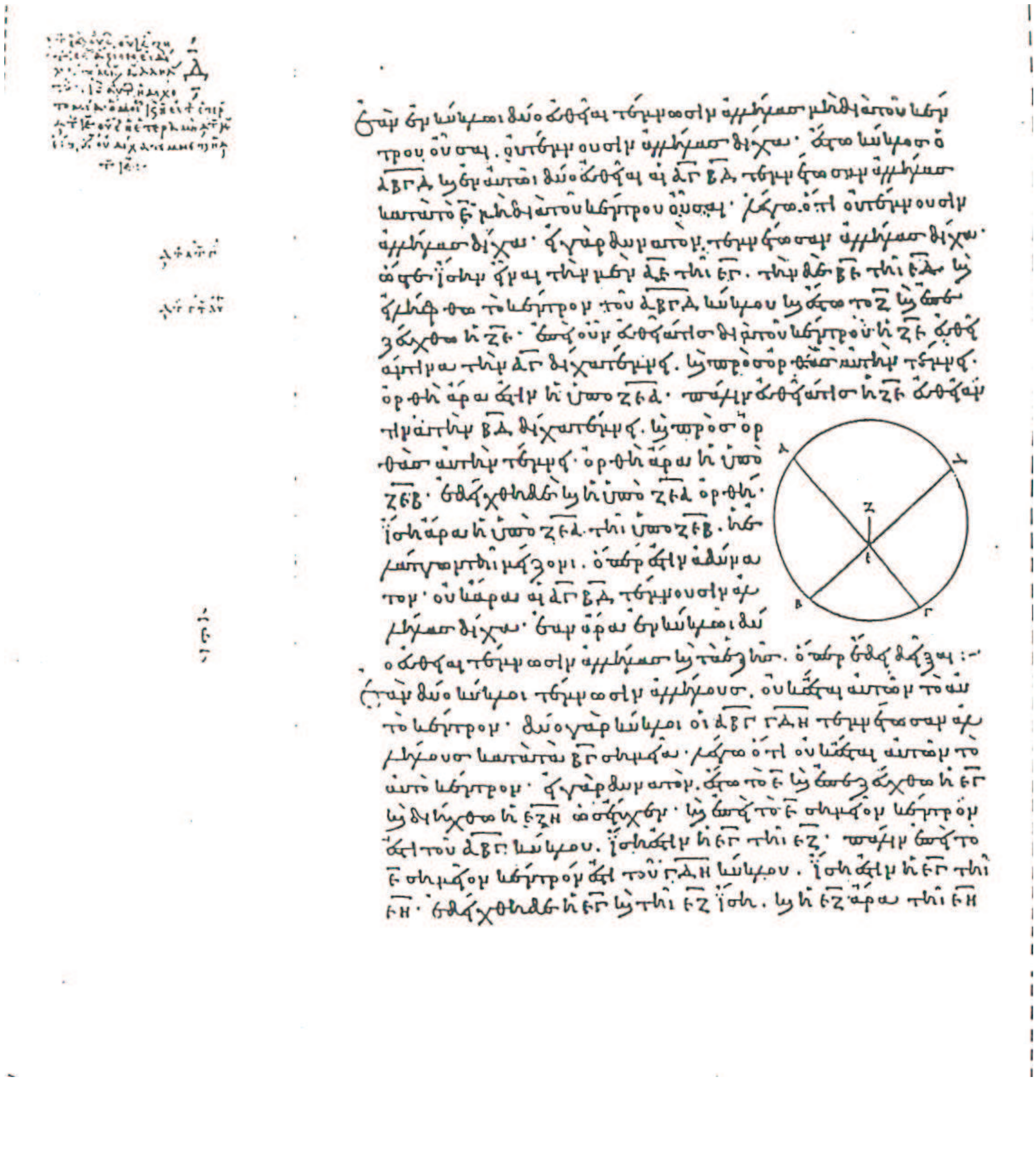
Gli *Elementi* di Euclide

(300 a.C.)



Ms. d’Orville 301, Oxford, Bodleian Library (888 d.C.).

Si tratta del più antico esemplare degli *Elementi*.

Struttura degli *Elementi*

Gli *Elementi* abbracciano quasi totalmente il campo delle Matematiche elementari greche. Sono divisi in 13 libri di cui i primi I-IV e il VI sono dedicati alla geometria piana, il libro V alla teoria delle proporzioni, i libri VII, VIII e IX alla aritmetica, il libro X alla teoria degli irrazionali, i libri XI, XII e XIII alla geometria solida.

Libro I. Dopo tre serie di princìpi (**definizioni**, **postulati**, **assiomi**), che costituiscono una specie di introduzione generale a tutta l'opera, vengono esposte l'*uguaglianza* dei triangoli, la teoria delle *perpendicolari*, la teoria delle *parallele*, la teoria dell'*equivalenza* dei poligoni. Il libro I ruota attorno a due teoremi fondamentali: la prop. 32 (*somma degli angoli interni di un triangolo uguale a due retti*) e la prop. 47-48 (*teorema di Pitagora*) col quale si conclude.

Libro II. Assai più breve del primo. Vi vengono ripresi e condotti a termine alcuni procedimenti già iniziati nel libro precedente giungendo alla *quadratura di un poligono qualunque*, cioè alla costruzione di un quadrato equivalente ad un poligono dato. Si tratta di una sorta di *algebra geometrica*, che conduce, sotto forma di costruzione geometrica, alla soluzione delle più semplici equazioni di secondo grado: la teoria di tali equazioni viene completata nel VI libro.

Libro III. E' dedicato alla *teoria del cerchio*.

Libro IV. Si danno le costruzioni dei *poligoni regolari inscritti e circoscritti* (triangolo, quadrato, esagono, pentagono e pentadecagono).

LibroV. Contiene la *teoria generale delle grandezze e delle proporzioni.*

Libro VI. Contiene le applicazioni geometriche della teoria delle proporzioni: vengono cioè studiate le proprietà dei *poligoni simili* (segmento terzo, quarto proporzionale, sezione aurea di un segmento). Termina con la generalizzazione dei problemi di quadratura affrontati nel secondo libro: un poligono viene trasformato in un altro equivalente di forma assegnata.

Libri VII, **VIII**, **IX**. Sono i libri *aritmetici* degli elementi, dove aritmetica è da intendersi nel senso della *teoria dei numeri*: vengono trattati quasi esclusivamente i numeri interi e le loro proprietà (proporzione tra numeri interi, massimo comun divisore e minimo comune multiplo, decomposizione dei numeri interi in fattori primi, numeri notevoli, potenze, progressione geometrica). Le proprietà sono sempre studiate in generale, senza dare un solo esempio numerico.

Libro X. Più lungo e complesso, studia in modo minuzioso e raffinato le cosiddette *irrazionalità quadratiche*, ossia i numeri irrazionali che si ottengono mediante estrazioni di radici ripetute (*retta mediale* $\sqrt{a\sqrt{b}}$, *binomiale* $a+\sqrt{b}$, *apòtome* $a-\sqrt{b}$, *prima bimediale* $\sqrt{a\sqrt{b}}+\sqrt{c\sqrt{b}}$, *apòtome di bibediale* $\sqrt{a\sqrt{b}}-\sqrt{c\sqrt{b}}$, ...) Alcune di queste linee si ritrovano nello studio dei poliedri regolari nei libri seguenti.

Libri XI, XII, XIII. Vi sono svolti i principi della *stereometria*. Vi è applicato il metodo di *esaustione* per la determinazione di alcune aree piane e del volume della piramide. Termina con lo studio dei cinque poliedri regolari *(solidi platonici*): tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro.

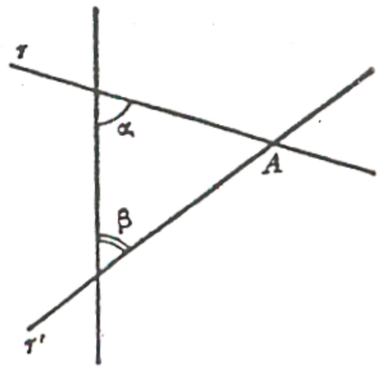
DEFINIZIONI
(TERMINI, δροι)

I. Punto è ciò che non ha parti.
II. Linea è lunghezza senza larghezza.
III. Estremi di una linea sono punti.
IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).
V. Superficie e ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. Estremi di una superficie sono linee.
VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).
VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee
su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.
IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette l'angolo si chiama rettilineo.
X. Quando una, retta inna1zata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui e innalzata.
XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.
XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.
XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.
XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea, [cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente a1la figura, sono uguali fra loro.
XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.
XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.
XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio. **XIX.** Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.
XX. Delle figure tri1atere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.
XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate

illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

POSTULATI (αἰτήματα)

I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qua1siasi punto ad ogni altro punto.
II. E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.
III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio)
IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.
V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e da1la stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti)



NOZIONI COMUNI (χοιναὶ ἔννοιαι)

I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.
II. E se cose uguali sono add1zionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.
[IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.]
[V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.]
[VI. E meta di una stessa cosa sono uguali fra loro].

La teoria euclidea delle parallele - Origine delle geometrie non-euclidee

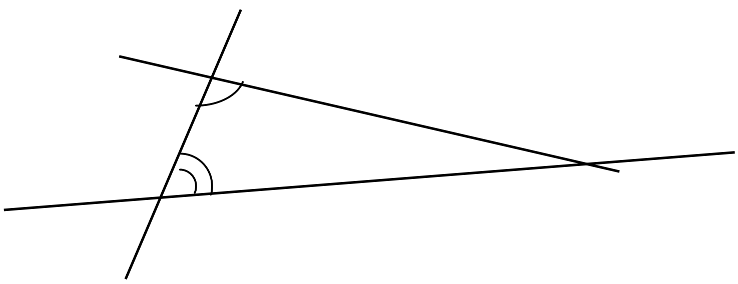
Maria Teresa Borgato

Alle origini della geometria non euclidea sta la questione del postulato V e la teoria delle parallele.

Gli *Elementi* di Euclide, opera in tredici libri composta attorno al 300 a. C., si fonda su tre principi fondamentali, le *definizioni*, i *postulati* e gli *assiomi*. Mentre gli assiomi sono principi comuni a tutte le scienze, i postulati si riferiscono esclusivamente agli enti della geometria e sono cinque. L'ultimo, il quinto, non ha le medesime caratteristiche degli altri quattro, di cui i primi tre codificano ad un livello razionale ed astratto l'uso della riga e del compasso, ed il quarto stabilisce l'uguaglianza di tutti gli angoli retti. In particolare, il primo richiede che dati comunque due punti si possa condurre la linea retta (terminata) che li congiunge; il secondo (*postulato di infinità* della retta) che ogni linea retta terminata (segmento) si possa prolungare da entrambi i lati quanto si vuole, il terzo che con qualunque centro e qualunque raggio possa tracciarsi un cerchio.

Il ***Postulato V*** recita:

Se una retta, venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte (=*coniugati*) minori di due retti (= *la cui somma è minore di due retti)* le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.



La geometria era per i Greci, e tale rimarrà fino alla fine del '700, il linguaggio interpretativo della realtà, la corretta astrazione delle proprietà dello spazio fisico e delle figure in questo spazio.

Fino dai più antichi commentatori del testo euclideo il postulato V non fu ritenuto e abbastanza evidente da essere accettato senza dimostrazione. Essi cercarono dunque di dimostrarlo, spesso modificando la definizione stessa di rette parallele data da Euclide (come di due rette complanari che prolungate illimitatamente non si incontrano) sostituendola con quella di *linee equidistanti*.

Le notizie su questi primi tentativi si ricavano dal *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide* di Proclo (VI sec. d. C.).

Esaminiamo innanzi tutto la *teoria delle parallele* esposta da Euclide del Libro I degli Elementi.

Per opinione comune degli storici, la teoria delle parallele è opera personale di Euclide, si trova infatti in Aristotele (*Primi Analitici*, II, 16, 65a) un passo che illustra l'errore logico detto *petizione di principio*, in cui si assume implicitamente ciò che si deve dimostrare, ed è portato l'esempio della teoria delle parallele.[1] Poiché questo errore in Euclide non c'è, e non ci furono matematici di rilievo tra Aristotele ed Euclide, se ne deduce che la sistemazione rigorosa della teoria delle parallele è dovuta ad Euclide. L'attribuzione personale ad Euclide della teoria delle parallele è poi confortata dal particolare sviluppo che essa ha nel Libro I, come vedremo.

Facenti parte, o comunque collegati alla teoria delle parallele sono i seguenti principi e teoremi:

Teoria delle parallele euclidea (Euclide, *Elementi*, libro I)

Definizione 23. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti. (= *Si dicono parallele due rette complanari che non hanno punti in comune*).

Postulato V. Se una retta, venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte (=*coniugati*) minori di due retti (= *la cui somma è minore di due retti)* le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Proposizione 16 In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti (=*non adiacenti*).

Proposizione 17. In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

[1] «Il pretendere ... che venga concesso quanto si è fissato da principio come oggetto della prova, consiste anzitutto ... nel non dimostare quanto ci si è proposto. ...Tutto ciò può essere compiuto con un'immediata richiesta che venga concesso l'oggetto in questione; può altresì accedere, tuttavia, che si passi a certi altri oggetti, naturalmente costitutiti per venir provati mediante l'oggetto in questione, e si dimostri poi attraverso di essi tale oggetto inizialmente fissato. Il caso si presenta, ad esempio, quando A venga provato mediante B, B sia provato mediante C, e C d'altro canto sia naturalmente costituito per venir provato mediante A. In realtà, quando si compiono tali deduzioni, è necessario che A, come tale, venga provato mediante se stesso. ***Ed è proprio questo l'errore commesso da coloro che ritengono di tracciare delle rette parallele: essi infatti non si accorgono di assumere delle premesse tali da non poter essere dimostrate, a meno che le rette non si suppongano come parallele***. Di conseguenza coloro che argomentano così non fanno altro che dire, riguardo ad un qualsiasi oggetto, che è, se è...» (*Primi Analitici*, II, 16, 65 a)

Proposizione 27. Se una retta che viene a cadere su altre due rette, forma gli angoli alterni uguali tra loro, le due rette sono parallele.

Proposizione 28. Se una retta che cade su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto che è dalla stessa parte (=*corrispondente*), oppure angoli interni, dalla stessa parte (=*conuigati)* la cui somma è uguale a due retti, le rette sono parallele tra loro.

Proposizione 29. Una retta che cada su due rette parallele forma gli angoli alterni uguali tra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.

Proposizione 30. Rette parallele ad una stessa retta sono parallele tra loro.

Proposizione 31. Condurre per un punto dato una retta parallela ad una retta data.

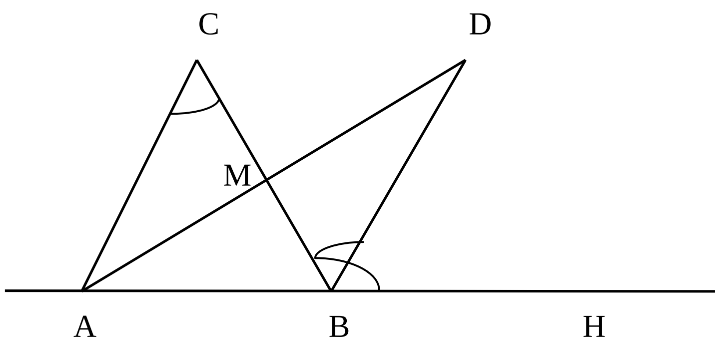
Proposizione 32. In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.

Proposizione 33. Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono anch'esse uguali e parallele.

Le proposizioni fino alla I,28 non fanno uso del postulato V. Euclide cerca di ritardare il più possibile l'introduzione di tale postulato, enunciando anche proposizioni, come la I,16 (dell'angolo esterno) che si ritroveranno come corollario di altre più generali (prop. I,32).

Facciamo alcune osservazioni.

La dimostrazione della prop. I,16 fa uso del trasporto di segmenti (I,2 e I,3), dell'esistenza del punto medio di un segmento (I,10), dell'assioma VIII (il tutto è maggiore della parte):



Detto M il punto medio di CB, prolungato AM di un segmento uguale a MD (I,15 e I,4) dalla congruenza dei triangoli AMC e DMB segue ACM = DBM e dunque, per l'assioma VIII, CBH > ACB = DBC.

Dalla prop. I,16 segue subito la I,17: ABC + CBH = 2 retti > ABC + BCA, e viceversa.

Le proposizioni I,27 e I,28 esprimono condizioni *sufficienti* per il parallelismo: se è verificata una di certe relazioni angolari (angoli alterni interni uguali, corrispondenti uguali, coniugati supplementari) le rette sono parallele.

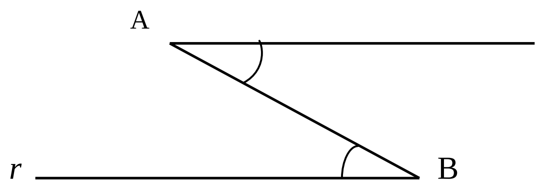
Che la proposizione I,27 implichi la I,28 è banale: le condizioni angolari sono equivalenti.

La prop. I,27 segue dalla I,16 immediatamente: se due rette che formano angoli alterni interni uguali si incontrassero, si avrebbe un triangolo in cui l'angolo esterno è uguale ad un angolo interno non adiacente. Vale anche il viceversa: la prop. I,16 e la prop. I,27 sono direttamente equivalenti, sono di fatto una la *contronominale* dell'altra:

(Prop. I,16:) $\boldsymbol{A \rightarrow B}$**;** $\leftrightarrow$ **(Prop. I,27:)** $\boldsymbol{-B \rightarrow -A}$

A : "due rette tagliate da una trasversale si incontrano"
B : "l'angolo esterno è maggiore dell'angolo interno non adiacente"
-*B*: "angoli alterni interni sono uguali"
-*A*: "le due rette non si incontrano".

La prop. I,27 permette di dimostrare l'esistenza della parallela per un punto esterno ad una retta data (prop. I,31: che dunque non dipende dal postulato V) mediante la sua costruzione (congiunto A con un punto qualunque B della retta *r* basta costruire un angolo in A congruente all'angolo in B):



Nella successiva proposizione I,29 Euclide si propone di invertire le prop. I,27 e I,28 e di dimostrare la necessità delle relazioni angolari per il parallelismo, e che quindi la parallela costruita è l'unica possibile.

Ma non ci riesce, sulla base dei soli primi quattro postulati e delle precedenti proposizioni. D'altra parte la proposizione I,29 è necessaria per lo sviluppo successivo della teoria: su di essa in particolare si basa l'importantissimo teorema della somma degli angoli interni di un triangolo (prop. I,32).

Dunque Euclide introduce il postulato V che è equivalente, anzi è la contronominale della prop. I, 29:

(Prop. 29:) $\boldsymbol{A \rightarrow B}$**;** $\leftrightarrow$ **(Post. V:)** $\boldsymbol{-B \rightarrow -A}$

A : “le rette sono parallele”
B : “somma degli angoli coniugati = 2 retti”

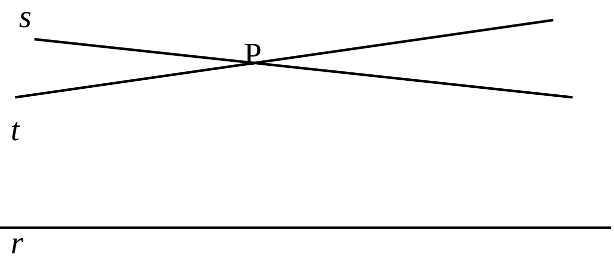
Non potendo dimostrarla, Eucide ha posto la prop. I,29 come assioma.
Osserviamo anche che la proposizione:

U*: *Per un punto esterno ad una retta passa una sola parallela ad una retta data
(Assioma di Playfair)

è equivalente al postulato V (rispetto al sistema formato dai primi postulati e dalle prime 28 proposizioni di Euclide). Infatti:

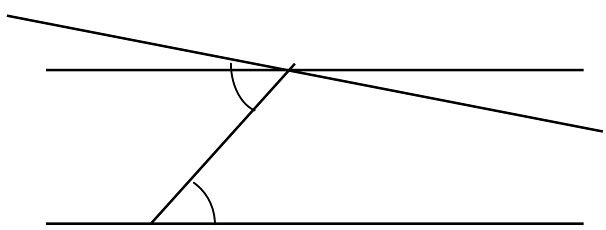
$$\left.\begin{array}{l}\text{post. V} \to \text{prop. 29}\\ \text{prop. 27}\end{array}\right\} \to \text{prop. 30 (}\textit{transitività del parallelismo}\text{)} \to U$$

L’ultima implicazione segue subito per assurdo: siano *r* un a retta, P un punto esterno, *s* e *t* due rette parallele ad *r* per P, allora *s* e *t* sarebbero parallele tra di loro, pur avendo in comune il punto P:



E viceversa: $U \to$ post. V.

Infatti se due rette che sono tagliate da una trasversale formando angoli coniugati la cui somma è minore di due retti non si incontrassero, si potrebbe costruire una seconda parallela:



Che poi le due rette si incontrino dalla parte in cui la somma degli angoli coniugati è minore di due retti segue dal teorema dell’angolo esterno.

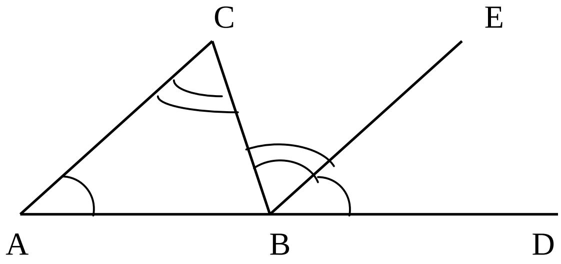
Nella catena di implicazioni si è dimostrata equivalente al postulato V anche la prop. I,30 cioè la proprietà transitiva del parallelismo:

$$\textbf{post. V} \leftrightarrow \boldsymbol{U} \leftrightarrow \boldsymbol{T}$$

La proposizione *U*, va anche sotto il nome di *assioma di Playfair* dal fisico e matematico scozzese John Playfair che nel 1795 pose alla base della sua teoria delle parallele la proposizione “due linee rette che si tagliano non possono essere parallele alla medesima retta” (la proposizione era tuttavia ben nota fin dall’antichità).

Tra le diverse formulazioni equivalenti del postulato V è la più diffusa nel secolo XX.

Dalla prop. 29 segue subito l’importantissimo teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo (prop. 32).



Conduciamo per B la parallela BE alla AC (prop. I,31), sarà (prop. I,29): DBE = CAB; CBE = ACB, e dunque (assioma II): CBE + DBE = CBD = ACB + BAC, e:

ACB + BAC + CBA = CBD + CBA = 2 retti.

La prop. I,33 segue facilmente dal primo criterio di congruenza dei triangoli (I, 4) e dalle prop. I,27 e I,29. Dalla prop. 33 si deduce l’equidistanza di due rette parallele.

Poiché la I,28 segue dalla I,17 immediatamente, completare lo schema euclideo riassunto nella tabella seguente:

Prop. I,17	***A* => *B***	**diretta**
Post. V		
Prop. I,28		
Prop. I,29		

***A* = due rette tagliate da una trasversale si incontrano**

***B* = gli angoli coniugati hanno somma minore di due retti**