L'area di un trapezio isoscele è m^2 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Analizziamo questo enunciato, apparentemente chiaro e corretto.
Un suo attento esame, infatti fa sorgere qualche perplessità:

1. *L'area... è m^2 324...* Come va espressa l'area? Qual è il ruolo dell'unità di misura?
2. *Calcolare le basi...* Posso "calcolare" dei segmenti? Prima di procedere, ricordiamo alcune riflessioni suiconcetti, continuamente impiegati proprio nelle questioni di geometria elementare, di segmento, di misura, di superficie, di area, di volume.

Iniziamo dai segmenti.
Com'è noto, è necessario distinguere tra:

Segmento	*Figura geometrica (parte di retta)*
Estensione di un segmento (spesso non considerata)	*Ciò che hanno in comune più segmenti congruenti*
Misura di un segmento	*Rapporto tra il segmento dato e un segmento scelto come unità di misura (non necessario ricorrere alle loro estensioni)*

la misura è dunque un numero puro e va espressa:
$AB = 12$ (rispetto al metro)

È importante osservare che,

per i segmenti, congruenza ed equivalenza coincidono; ciò significa che il confronto di segmenti può avvenire anche senza considerare l'estensione.

Consideriamo ora **<u>le figure piane</u>**:

Figura piana	*Figura geometrica (parte di piano)*
Estensione superficiale (è fondamentale, nel caso delle figure piane)	*Ciò che hanno in comune piane più figure piane equivalenti (ma non necessariamente congruenti)*
Area (misura di una figura piana)	*Rapporto tra la figura data e una figura scelta come unità di misura (nel senso dell'equivalenza: quindi è il rapporto tra le loro estensioni superficiali)*

è un numero puro e va dunque espressa così:
Area(ABC) = 12 (rispetto al metro quadrato)

<u>Per le figure piane congruenza ed equivalenza non coincidono!</u>

Il confronto di figure piane non può avvenire senza considerare l'estensione.
Accenniamo infine, per amor di completezza, alle **<u>figure solide</u>**

Figura solida	*Figura geometrica (parte di spazio)*
Estensione spaziale (fondamentale, nel caso delle figure solide)	*Ciò che hanno in comune più figure solide equivalenti (ma non necessariamente congruenti)*
Volume (misura di una figura solida)	*Rapporto tra la figura data e una figura scelta come unità di misura (nel senso dell'equivalenza: quindi è il rapporto tra le loro estensioni spaziali)*

Attenzione: è un numero puro
e va dunque espresso così:
Volume(ABCDE) = 60 (rispetto al metro cubo)

Per le figure solide, come per quelle piane, congruenza ed equivalenza non coincidono. Il confronto di figure solide non può avvenire senza considerare l'estensione.

Alla luce delle considerazioni precedenti, possiamo cercare di "correggere" la traccia inizialmente proposta, che riportiamo nuovamente:

L'area di un trapezio isoscele è m^2 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Questo enunciato, adesso, *non* ci sembra sufficientemente rigoroso. Ricordiamo infatti le nostre iniziali perplessità:

1. *L'area... è m^2 324...* Qual è il ruolo dell'unità di misura? La risposta, ora, appare semplice: l'area è una misura e quindi è un numero puro (un rapporto di grandezze omogenee): il numero che la esprime *non* deve dunque essere preceduto o seguìto dall'unità di misura.

2. *Calcolare le basi...* Posso "calcolare" dei segmenti? Evidentemente no: i segmenti sono *figure geometriche*. Possono essere calcolati dei numeri (ovvero, ad esempio, le *misure* delle figure), ma non delle figure geometriche!

Ecco dunque la nostra traccia "riveduta e corretta" (essa fa sempre riferimento a misure: esprimiamo anche l'altezza in termini di misura):

L'area di un trapezio isoscele è 324 rispetto al m^2 *e la misura della sua altezza è 27 rispetto al m. Calcolare le misure delle basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.*

Bene, senza dubbio abbiamo fatto molti passi nella direzione di un linguaggio (pienamente?) "rigoroso".

Le considerazioni precedenti sono state infatti dettate da uno sviluppo attento e preciso della teoria, uno sviluppo che richiede evidentemente molta cautela e che coinvolge concetti anche piuttosto delicati.

Tuttavia ogni insegnante deve essere consapevole delle reali difficoltà che l'uso di questo linguaggio "rigoroso" comporta per l'allievo, difficoltà che si sovrappongono, spesso pesantemente, a quelle che la risoluzione di un problema già comporta (si veda: D'Amore & Plazzi, 1990).

Osservazione

1. **Grandezze di primo genere** (esempi: segmenti, angoli piani, …): la relazione di equivalenza coincide con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono anche congruenti).

2. **Grandezze di secondo genere** (esempi: poligoni, prismi, …): la relazione di equivalenza coincide con quella di equiscomponibilità ma non con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono equiscomponibili, ma esistono coppie di grandezze equivalenti non congruenti).

3. **Grandezze di terzo genere** (esempi: figure piane aventi contorni mistilinei, poliedri, …): la relazione di equivalenza non coincide con quella di equiscomponibilità (esistono coppie di grandezze equivalenti non equiscomponibili).

Definizione: Sia A un insieme e sia ~ una relazione che gode di queste proprietà:

proprietà riflessiva: x~x

proprietà simmetrica: x~y ⇒ y~x

proprietà transitiva: x~y e y~z ⇒ x~z

Allora l'insieme A viene ripartito in tanti sottoinsiemi disgiunti che sono composti di elementi equivalenti; ognuno di questi insiemi si chiama **classe di equivalenza**. Si dice anche che si è operata una **partizione** nell'insieme A.
Viceversa se è data una partizione di A è subito assegnata la RDE corrispondente: due elementi sono equivalenti se appartengono alla stessa classe.

L'introduzione di una RDE in un insieme consente di definire una operazione definita sugli insiemi: il passaggio all'insieme quoziente.

A={Luigi, Franco, Giovanni, Mario}

RDE: "essere alti uguali"

Si sa che:
- Luigi è alto come Giovanni
- Franco è alto come Mario

	Luigi	Franco	Giovanni	Mario
Luigi	X		X	
Franco		X		X
Giovanni	X		X	
Mario		X		X

Dalla rappresentazione in tabella si può notare come il dominio venga suddiviso in sottoinsiemi disgiunti tra loro, al cui interno gli elementi sono in relazione.

[Luigi]= $\{$Luigi, Giovanni$\}$

[Franco]= $\{$Franco, Mario$\}$

A/RDE= $\{$[Franco], [Luigi]$\}$ = insieme quoziente

Esempi:

insieme	Relazione	Classe
Allievi di una scuola	Frequentare la stessa classe	
Rette nel piano	Essere parallele	
Carte da gioco	Avere lo stesso seme	
Allievi di una scuola	Praticare lo stesso sport	
Elettori	Votare lo stesso partito	
Mammiferi	Stesso numero di zampe	
Poligoni	Stesso numero di lati	
Gruppi musicali	Stesso numero di elementi	
Versi poetici	Stesso numero di sillabe	
Poligoni	equiscomponibilità	

Esempio: A= $\{$giocatori di calcio di serie A$\}$

RDE: "giocare nella stessa squadra"

I giocatori in base a tale relazione si trovano raggruppati in sottoinsiemi (le classi di equivalenza) tutti disgiunti tra loro, in quanto un giocatore non può giocare in due squadre contemporaneamente e la cui unione ricopre l'insieme A. Le classi di equivalenza sono le squadre di calcio comunemente intese.

1. Le classi sono disgiunte
2. All’interno di una classe tutti gli elementi sono in relazione tra loro

$\Rightarrow$ È conveniente scegliere un rappresentante che si sostituirà, per determinati compiti, alla classe intera

Con le squadre di calcio: in campo il capitano rappresenta l’intera squadra, cioè la classe di equivalenza.

Trasposizione didattica

Contratto didattico: definizione e implicazioni nell’insegnamento/apprendimento

Clausule del contratto didattico

Problem solving e zona di sviluppo prossimale

Immagini mentali e modelli mentali

Le funzioni del linguaggio algebrico

Possibili interpretazioni delle lettere

Misconcezioni nell’apprendimento dell’algebra

Segno, senso e denotazione in algebra: implicazioni didattiche

L’organizzazione didattica di Van Hiele