Ricerca di Van Hiele

LA COMPRENSIONE

Interessato fin dall'inizio a trovare modi per sviluppare la comprensione nei suoi studenti, egli definì comprensione nel seguente modo.

Una persona dimostra comprensione se:

a) È in grado di agire in una situazione eventualmente non familiare;
b) Esegue in maniera competente cioè correttamente e adeguatamente gli atti richiesti dalla situazione;
c) Trova intenzionalmente, cioè deliberatamente e coscientemente, un metodo che risolva la situazione.

Se hanno compreso, gli studenti, capiscono ciò che stanno facendo, perché lo fanno e quando lo devono fare. Essi sono allora in grado di applicare la loro conoscenza per risolvere problemi.

LIVELLI DI PENSIERO

(Van Hiele introduce i livelli di pensiero, attraverso i quali passa lo studente, per .cercare di capire quello che avviene nella mente dello stesso studente)

I livelli di pensiero che si utilizzano per apprendere una determinata disciplina sono di natura induttiva:

a) A livello n-l vengono studiate certe versioni limitate degli oggetti. Alcune relazioni relative agli oggetti di studio vengono date esplicitamente dall'insegnante; comunque vi sono altre relazioni, forse accessibili agli studenti, che però non vengono date esplicitamente.

b) A livello n gli oggetti di studio sono le relazioni esplicitate al livello n-l così come vengono ampliate le versioni degli oggetti date al livello precedente.

Inoltre vengono esplicitate le relazioni che al livello precedente erano solamente implicite. In effetti gli oggetti al livello n consistono di estensione degli oggetti del livello n-l. Uno degli scopi per distinguere i livelli è quello di riconoscere gli ostacoli cui gli studenti si trovano di fronte. Se gli studenti si trovano al livello n-l e sono posti di fronte ad un problema che richiede un vocabolario concettuale o modi di pensare a livello n, allora saranno incapaci di progredire nel problema.

Il modello di Van Hiele propone 5 livelli di comprensione:

1. Visualizzazione
2. Analisi
3. Deduzione informale
4. Deduzione formale
5. Rigore

Il modello di Van Hiele sostiene questa sequenza gerarchica di livelli.

Venendo alla geometria e delineando i livelli di pensiero si ha:

Livello 0 (o livello di base, della **visualizzazione**).
Le figure geometriche in questo livello sono riconosciute per la loro forma come un tutto; non sono riconosciute per le loro parti o proprietà. Gli studenti possono dire triangolo, quadrato, cubo e così via ma non identificano esplicitamente le proprietà delle figure.

Livello 1 (o livello **dell'analisi**)
al livello 1 inizia l'analisi dei concetti geometrici; per esempio, attraverso l'osservazione e la sperimentazione, gli studenti iniziano a discernere le caratteristiche delle figure. Queste proprietà emergenti sono poi usate per concettualizzare classi di forme. Così le figure sono riconosciute come aventi parti anzi sono proprio riconosciute attraverso le loro parti. Le relazioni fra le proprietà comunque non possono ancora essere spiegate dagli studenti a questo livello. Le interrelazioni fra le figure non sono ancora messe in luce e le definizioni non sono ancora comprese. Quindi gli studenti sono in grado di analizzare proprietà delle figure.

Per esempio:
- i rettangoli hanno diagonali uguali,
- un rombo ha tutti i lati uguali.

Ma essi esplicitamente non mettono in relazione figure e proprietà.

Livello 2 (o della **deduzione informale**)
a questo livello gli studenti possono stabilire le interrelazioni di proprietà
- sia nelle figure (per esempio, se in un quadrilatero i lati opposti sono paralleli allora gli angoli opposti sono uguali)
- sia fra le figure (per esempio un quadrato è un rettangolo perché ha tutte le proprietà del rettangolo).

Quindi l'inclusione tra le classi è compresa. Le definizioni prendono significato. Le argomentazioni formali possono essere seguite e quindi date. Gli studenti sono in grado di mettere in relazioni le figure e le loro proprietà <u>ma non sono ancora in grado di organizzare sequenze logiche di affermazioni per giustificare le osservazioni.</u>

Livello 3 (o della **deduzione formale**)

gli studenti sono in grado di sviluppare successioni di affermazioni per dedurre un'affermazione dall'altra:
per esempio: dimostrare il postulato delle rette parallele implica che la somma degli angoli di un triangolo è 180°.

Viene compreso:

- il ruolo dei termini non definiti, degli assiomi, dei postulati, delle definizioni, dei teoremi e delle dimostrazioni;
- l'interazione fra condizioni necessarie e condizioni sufficienti

L'insegnante può sviluppare a questo livello la distinzione fra un'affermazione e la sua inversa, però gli studenti non riconoscono la necessità del rigore ne capiscono l' esistenza di diversi sistemi deduttivi.

Livello 4 (o del **rigore**)
a questo livello lo studente può lavorare in una varietà di sistemi assiomatici cioè si possono studiare: le geometria non euclidee e i diversi sistemi possono essere comparati, la geometria nel sistema astratto.

Ciascun livello ha i suoi propri simboli linguistici e il suo proprio sistema di relazioni che connettono tali simboli. Per passare da un livello di pensiero all'altro Van Hiele specificò una sequenza di fasi che andava dall'istruzione diretta all'indipendenza dello studente dall' insegnante.

Le fasi sono:

1. Ricerca
2. Orientamento diretto
3. Esplicitazione
4. Libero orientamento

5. Integrazione

<u>Fase 1</u> (o della **<u>ricerca</u>**)
l'insegnate entra nel gioco della conversazione con gli studenti circa gli oggetti di studio, egli impara come gli studenti interpretano le parole e dà agli studenti una certa comprensione degli oggetti di studio; nascono domande ed osservazioni che utilizzano il vocabolario introdotto sugli oggetti.

<u>Fase 2</u> (o **<u>dell'orientamento diretto</u>**)
l'insegnante disegna attentamente una successione di attività che lo studente deve esplorare. Di conseguenza lo studente inizia a capire quale direzione lo studio sta prendendo e diviene familiare con gli oggetti caratteristici della disciplina. Le attività in questa fase devono consistere in compiti facili con una sola domanda diretta che richieda risposta specifica.

<u>Fase 3</u> (o **<u>dell'esplicitazione</u>**)
gli studenti, costruendo sulle esperienze precedenti, con un minimo aiuto dell'insegnate, raffinano il loro uso del vocabolario ed esprimono le loro opinioni sugli oggetti di studio. Durante questa fase iniziano a formare il sistema di relazioni che devono studiare. È essenziale che in questa fase sia lo studente a fare osservazioni esplicite piuttosto che ricevere spiegazioni dall' insegnante.

<u>Fase 4</u> (o del **<u>libero orientamento</u>**)
lo studente ora incontra compiti a più domande o che possono essere risolti in più modi. Gli studenti acquisiscono esperienze nel trovare la loro via nel risolvere compiti orientandosi nella ricerca. Molte delle relazioni tra gli oggetti di studio divengono esplicite allo studente.

Fase 5 (o **dell'integrazione**) lo studente ora rivede i metodi a sua disposizione e si forma una panoramica degli oggetti di studio. Gli oggetti e le relazioni sono unificate ed interiorizzate in un nuovo dominio di conoscenza. L 'insegnante aiuta questo processo fornendo indicazioni globali su ciò che gli studenti già conoscono facendo attenzione a non presentare idee nuove o discordanti.
Al termine della 5° Fase un nuovo livello di pensiero è raggiunto.

Coloro che in Russia si interessano dell' apprendimento della geometria ritengono che lo studio della geometria nella scuola sia impostato sin dall'inizio su basi errate: infatti prende quasi subito in oggetto il problema della misura passando oltre la fase qualitativa di trasformare operazioni spaziali in operazioni logiche. Lo sviluppo delle operazioni geometriche nello studente procede invece in senso inverso, cioè prima vengono le operazioni geometriche qualitative e poi quelle quantitative. Quindi occorre prima sviluppare le operazioni geometriche qualitative (studio della forma, posizioni reciproche delle figure, relazioni fra le figure, eccetera. ..) poi viene la misura.

Problemi riscontrati:

A volte benché familiari con le parole tecniche, gli studenti hanno idee scorrette circa il loro significato:

esempi:

- nelle scuole superiori ,è stato trovato il fatto che alcuni studenti scambiano rombo e trapezio;
- nella scuola media inferiore molti studenti pensano a triangolo come triangolo equilatero con la base parallela alla linea di vista dello studente. In effetti molti di loro girano la pagina del

quaderno o l’oggetto fisico per metterlo nella posizione che potremmo chiamare "del testo scolastico";
– altri ancora pensano a triangolo anche se i lati sono curvi: essi sembrano focalizzare l’attenzione sui tre vertici e non sui tre segmenti retti.
– molti esitano a chiamare triangoli i triangoli scaleni specialmente quando un lato è molto più lungo dell' altezza.

Simili idee errate vi sono anche sui quadrilateri.

Gli studenti, almeno alcuni, usano proprietà fisiche per descrivere le figure, parlano di "questo è un triangolo perfetto" quando disegnano un triangolo equilatero. Altri parlano di triangoli alti o bassi o quasi isosceli e così via.

Possono comprendere un'idea eppure descriverla, a volte, con un vocabolario non tecnico,

ad esempio
- di due rette parallele dicono che sono entrambe dritte,
- di rette verticali come di rette che vanno in su.

Il linguaggio degli studenti indica come essi utilizzino indizi visivi per percepire le forme geometriche.

includono attributi irrilevanti come condizione necessaria per identificare forme

come ad esempio
- che tutti i lati siano congruenti.

Una larga porzione di studenti è influenzata dall' orientamento delle figure: lati opposti di un quadrilatero appaiono paralleli secondo un orientamento e non più secondo un altro orientamento.
rettangolo sia un parallelogramma o che un quadrato sia un rettangolo.

Dal modo in cui gli studenti rispondono alle domande od ai compiti a loro proposti è possibile analizzare i loro processi di pensiero utilizzando i livelli.

Gli esempi precedenti indicano una preponderanza del livello zero di pensiero nella scuola media inferiore. Anche quando analizzano proprietà delle figure (livello l) e sono in grado di verbalizzare le loro percezioni essi lasciano che l'immagine visiva di una forma geometrica influenzi la loro descrizione come ad esempio un parallelogramma ha entrambi i lati opposti uguali e paralleli, due lati sono più lunghi degli altri e non ha un angolo retto altrimenti sarebbe un rettangolo.

Uno studente che pure era a livello 3 definì un parallelogramma come un quadrilatero con i lati opposti paralleli ma senza angoli retti.

Utilizzano inoltre il ragionamento inverso nel senso che essi convertono le condizioni necessarie in condizioni sufficienti.

Lo schema di ragionamento sembra essere il seguente:

con quelle proprietà una figura deve essere di tipo X perché le figure di tipo X hanno quelle proprietà.

In una attività in classe la domanda era "Quale è la mai forma?" gli studenti ricevevano una serie di indizi e potevano continuare a chiederne finche non si sentivano sicuri dell'identificazione.

Primo indizio: *"ha quattro lati"*

Risposta: *“quadrato”*

Ragionamento: UN QUADRATO HA QUATTRO LATI, IO STO CERCANDO UNA FIGURA CON QUATTRO LATI, DEVE ESSERE UN QUADRATO.

Indizio: *“due lati paralleli”*
Risposta: *“parallelogramma”*

Indizio: *“quattro lati ed un angolo retto”*
Risposta: *“rettangolo”*

Riassumendo
bisogna ricordare che comprensione esplicita ed applicazione di varie regole logiche sfuggono a molti studenti.

Esempio: uno studente identificò in modo scorretto i trapezi tra le figure disegnate su un foglio, omettendo quelli isosceli.
Un trapezio aveva due angoli retti e lo studente sosteneva che non poteva essere un trapezio.

Ins.: E’ questa figura un trapezio?

Stud.: No

Ins.: Perché no? Cos’è un trapezio?

Stud. Un quadrilatero convesso con due lati paralleli

Ins.: Cosa vedi in questa figura?

Stud.: È un quadrilatero con due lati paralleli

Ins.: È un trapezio?

Stud.: No

Lo studente funzionava a livello 3 eppure stava in effetti pensando al livello visivo.

Osservazione: la teoria di Van Hiele si è rivelata interessante per la sistemazione della ricerca didattica in senso curriculare (segmento per segmento). Tale teoria costituisce in realtà una organizzazione didattica più che una teoria dell'apprendimento

Un altro punto di vista: i concetti figurali

Presupposto: la geometria è un dominio specifico della matematica e la natura dei suoi concetti pone problemi specifici di apprendimento/insegnamento.

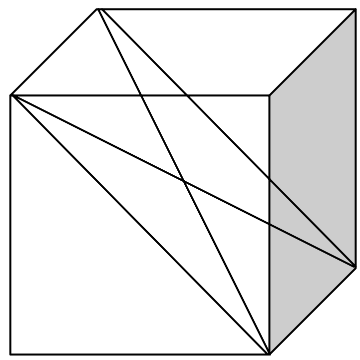
"In ogni caso, per me è impossibile condurre un ragionamento geometrico in termini puramente logici, senza avere continuamente davanti agli occhi la figura alla quale ci si riferisce" (Klein)

La frase di Klein sembra cogliere molto bene la peculiarità del pensiero geometrico attraverso la caratterizzazione degli oggetti di tale ragionamento.
I concetti geometrici non possono ridursi a puri concetti ma partecipano di una componente figurale che deriva dal loro legame con la realtà e caratterizza il loro essere concetti spaziali. Fischbein

Ciò che sta alla base dei nostri ragionamenti geometrici non è riducibile né a un puro concetto né ad una sua immagine, che possiamo evocare nella nostra mente ma ad una fusione di queste due componenti (Mariotti, 1992).

Esempio:
pensiamo ad un cubo e consideriamo due delle sue diagonali, i segmenti che congiungono due vertici opposti, e domandiamoci se sono tra loro perpendicolari.

A prima vista sembra che si tratti di un problema piuttosto semplice, ma nonostante la semplicità della figura -chi non conosce il cubo? -la domanda può creare perplessità e non è raro ottenere una risposta errata.
La perpendicolarità o meno delle diagonali non sembra essere immediatamente verificabile solo immaginando il cubo ma richiede un semplice ragionamento che leghi le due diagonali considerandole come diagonali di un rettangolo che ha , come lati, due lati del cubo e le diagonali di due facce opposte.



La relazione non dipende dal cubo considerato e deriva logicamente dalla definizione di cubo.
⇒ alla conclusione non si arriva separando la figura e le condizioni logiche ma attraverso un processo unitario che considera una figura perfettamente controllata dalle proprietà geometriche che la determinano.

In teoria ci dovrebbe essere una completa fusione tra componente concettuale e figurale ma spesso tale armonia si rompe e spesso l'armonia diventa conflitto.

Problema della classificazione: es. quadrilateri

- Quadrato come particolare rettangolo
- Rettangolo come particolare parallelogramma

In generale gli allievi trovano difficoltà ad accettare che un quadrato sia anche un rettangolo o un parallelogramma

L'aspetto concettuale

deve rispettare le condizioni imposte dalla geometria ed è quindi determinato da una definizione, stabilita all'interno di una particolare sistemazione teorica della geometria

Può entrare in conflitto

Aspetto figurale

Dal pdv figurale quadrati, rettangoli e parallelogrammi sono così diversi!!!!! Che risulta difficile assimilare le varie categorie in una sola classe.

La sistemazione della geometria, e della matematica in generale, nell'ambito dei sistemi formali sembra aver allontanato il dibattito dal tema della natura dei concetti che sono alla base del ragionamento geometrico. II problema sembra essersi posto nei termini di economia e coerenza di un assiomatica piuttosto che di significato o di rispetto dell'intuizione.

Le difficoltà incontrate dagli allievi e spesso sottolineate dagli insegnanti ci convincono che, quando il problema della geometria si pone in termini educativi, una discussione approfondita sulla natura dei concetti geometrici e sulle dinamiche mentali che caratterizzano il ragionare in geometria si rende necessaria.

La teoria dei concetti figurali offre un quadro di riferimento per un'analisi del ragionamento geometrico.
Secondo tale interpretazione, **i concetti geometrici, intesi come elementi del pensiero geometrico, partecipano di una doppia natura che è allo stesso tempo figurale e concettuale**; il ragionamento geometrico è, dunque, caratterizzato dall'interazione di due componenti, la componente figurale e la componente concettuale dei concetti geometrici. Il processo di interazione tra le due componenti ha dinamiche sue proprie: in linea di principio, dovrebbe esserci completa armonia tra le due componenti, in realtà questa viene spesso a rompersi, determinando conflitti ed errori.