I processi di pensiero algebrico si sviluppano attraverso l'equilibrio tra opposte polarità:

linguaggio naturale – scrittura simbolica: la traduzione tra i due linguaggi non è 1-1;

sintassi – semantica: il linguaggio naturale permette un ottimo controllo semantico che non viene mantenuto quando si passa ad un linguaggio simbolico dove prevalgono gli aspetti sintattici del linguaggio. In algebra la sintassi deve diventare il sostegno attivo di nuove forme di pensiero ma potrà farlo solo se essa riuscirà ad incorporare nelle sue forme i tratti semantici essenziali;

relazionale – procedurale: questa contrapposizione permette di cogliere il passaggio dai calcoli , dai tentativi numerici alla sintesi di tutto ciò in una formula

Uno dei principali problemi nell'apprendimento dell'algebra è dato da questioni di interpretazione:

a) gli studenti non sono in grado utilizzare il simbolismo algebrico per risolvere problemi, algebra come linguaggio straniero
b) gli studenti non hanno compreso il senso pieno di lettere e parametri
c) gli studenti hanno difficoltà a mettere in formula una situazione, processo di nominalizzazione

Alcune caratteristiche del linguaggio algebrico

possibilità di esprimere in sintesi, attraverso opportune codifiche, informazioni (o ipotesi) su situazioni di vario genere (matematiche o extramatematiche),

$\Rightarrow$

- porta ad evidenziare e dominare le relazioni tra le informazioni stesse favorendone l'elaborazione;
- risulta un efficace mezzo di informazione per chi è in grado di leggere ed interpretare le sue formule.

"il linguaggio algebrico svolge l'importante funzione di accrescere la possibilità di pensiero, di ragionamento, di conoscenza del singolo individuo e consente inoltre la comunicazione intenzionale, razionale del proprio pensiero." Arzarello e altri (1994),

Il linguaggio algebrico andrebbe insegnato analogamente alle lingue naturali: occorrerebbe

- insegnare grammatica e sintassi (nel nostro caso analisi dei termini, segni, convenzioni di scrittura per la generazione di espressioni, regole di trasformazione),
- insegnare a tradurre da un linguaggio ad un altro (leggere-interpretare formule in linguaggio algebrico e viceversa, esprimere in formule proposizioni del linguaggio ordinario)
- insegnare ad esprimere le proprie idee nel nuovo linguaggio (argomentare e dimostrare tramite formule e loro trasformazioni algebriche), affrontando nel corso degli anni questioni via via più complesse che richiedono una conoscenza ed uso del linguaggio algebrico sempre più approfonditi.

Nell'insegnamento questi aspetti dovrebbero intrecciarsi ed essere sviluppati in modo equilibrato, tuttavia nella prassi difficilmente si punta allo sviluppo contemporaneo di queste abilità e in generale si finisce con il privilegiare lo studio formale del linguaggio senza fare acquisire quelle **capacità interpretative ed espressive, legate essenzialmente alle attività di matematizzazione e risoluzione di problemi, che stanno alla base del "fare matematica**.

Da curare nell'insegnamento vi sono poi importanti aspetti, di tipo metacognitivo.

Espressione matematica	Senso algebrico	- Modo in cui l'oggetto ci è dato - Regola di calcolo per ottenere il denotato
	Denotazione	- Oggetto cui l'espressione si riferisce - Insieme numerico rappresentato dall'espressione (oltre che dal dominio)

Esempio: se consideriamo le due equazioni da risolvere in R:

1. $(x+5)^2=x$
2. $x^2+x+1=0$

- 1\. e 2. denotano $\varnothing$
- 1\. e 2. hanno sensi algebrici diversi, sono cioè due modi diversi per descrivere $\varnothing$

osservazione: un'espressione simbolica può essere impiegata in domini di conoscenza diversi per risolvere problemi, matematizzare situazioni, descrivere fenomeni. Tali domini possono essere matematici (analisi, geometria, aritmetica,…) e non matematici (biologia, chimica,…..). In tali domini una espressione oltre al senso algebrico assume un altro senso, detto <u>senso contestualizzato</u> ovvero il senso che l'espressione assume in un certo dominio di conoscenza.

Esempio: n(n+1)

Geometria: area di un rettangolo di lai n e n+1

Teoria dei numeri: prodotto numeri consecutivi

Non c'è quindi corrispondenza 1-1 tra senso e denotazione

$\Downarrow$

è difficile per gli studenti afferrare l'invarianza della denotazione rispetto ai cambiamenti di senso.

Ad esempio

- le espressioni 4x+2 e2(2x+l) rappresentano procedimenti diversi ma denotano la stessa funzione ed ancora, più semplicemente,
- scritture 2; 4/2; 2,00 ;+2; 10/5; 41/2, hanno sensi diversi ma denotano tutte il numero due.

E' importantissimo da un punto di vista didattico abituare gli allievi alla pluralità di rappresentazioni di una stessa cosa (è ben noto lo stereotipo "lettere diverse rappresentano necessariamente oggetti diversi") ma occorre creare situazioni didattiche opportune che rendano consapevoli gli allievi di come la scelta del modo di denotare un oggetto influenzi 1e argomentazioni sull'oggetto stesso.

Ad esempio:

1. $n+n^2$ ……………………
2. se b è dispari , $b^2 - 1$ è divisibile per 8
3. la somma di due dispari consecutivi è divisibile per 4. Questa regolarità continua a rimanere se sommo due dispari qualsiasi?
4. $(p-1)*(q^2-1) / 8$ è pari se p e q sono primi dispari

Le trasformazioni algebriche consentono all'allievo di concepire "che una cosa può essere anche un'altra cosa" ossia si può vedere una stessa cosa da diversi punti di vista che forniscono chiavi di lettura diverse per interpretarne le proprietà.

Nominalizzazione
Gli alunni in generale non hanno problemi ad utilizzare una lettera per nominare un oggetto. Il problema è di assegnare nomi pertinenti ad entità in modo che risultino appropriati per lo scopo.

Due difficoltà:

- sviluppo di capacità di costruire tali nomi utilizzando espressioni simboliche che non risultino chiuse, ovvero che non danno come risultato immediato un numero
- specifica del processo di costruzione dei nomi da assegnare alle entità, spesso viene identificato il nome con l'entità (nome come designatore rigido)oppure vi è mancato coordinamento con lo scopo della messa in forma o tra i vari aspetti della messa in forma.

Esempio:
- 2n rappresenta un intero pari (con $n \in N_0$) e la proprietà inglobata è "essere multiplo di 2"

- k+1 rappresenta, se k è un intero pari un intero dispari e la proprietà inglobata è "essere il successore di un pari"
- 2n+1

ogni struttura sintattica mette in evidenza alcune proprietà dell'oggetto e ne nasconde altre

dare il nome ad un oggetto costituisce una forma di predicazione

Esprimere relazioni tra elementi di un problema

Orientare il processo di manipolazioni simbolica necessaria allo scopo

Esempio:

Utilizzando dei nomi ben scelti mostra che:
- se x e y sono numeri pari, il numero x+y è pari
- se x è pari e y è dispari, x+y è dispari
- se x e y sono dispari, x+y è ………

L'allievo può essere in grado di descrivere in linguaggio naturale le relazioni tra gli elementi in gioco ma può essere incapace di esprimere tali relazioni attraverso un uso appropriato delle variabili perché non possiede una buona rappresentazione del rapporto tra semantica e sintassi interna al codice algebrico.

L’attività di costruzione dell’espressione simbolica globale richiede la capacità di disambiguare alla luce del codice algebrico le relazioni tra gli oggetti in gioco nella soluzione del problema.
La mancanza di tale capacità può portare agli errori riportati nella tabella seguente:

Soluzione errata	Soluzione corretta
2h+2h	2h+2k
2h+2h+1	2h+2k+1
2h+1+2h+1	2h+1+2k+1

Manipolazione simbolica
La dimostrazione di una congettura richiede la necessità di intervenire sull’espressione algebrica per rendere evidenti certe proprietà che non lo sono nell’espressione di partenza.
Quando si esegue una manipolazione simbolica il significato è incorporato nell’espressione e lo studente procede nella manipolazione senza doversi preoccupare ad ogni passaggio di dover interpretare ciò che manipola.

Una buona padronanza di manipolazione simbolica è legata:

- alla qualità e alla quantità di pensiero anticipativi che il soggetto è in grado di mettere in atto in relazione agli effetti prodotti da una certa trasformazione sintattica sulla forma dell’espressione;
- alla capacità di costruire un’immagine di possibile stato finale dell’espressione

L’approccio alla manipolazione simbolica si può effettuare in due modi diversi:

- decontestualizzato
- all’interno di una situazione problematicain cui la manipolazione consente di arrivare ad un obiettivo

didattica delle equazioni

approccio tradizionale

problemi riscontrati:

regole di gioco $\Rightarrow$ soluzione=processo terminato $\Rightarrow$ verifica

$\Rightarrow$ gap tra il concetto di equazione dell’insegnante e dello studente

prima introdurre concetto di funzione poi quello di equazione

- soluzione dell’equazione $2x+2=3x-8$
- significa cercare quel valore incognito in un dominio comune per cui le due funzioni $f(x)= 2x+2$, e $g(x)= 3x-8$ assumono lo stesso valore
- la si può trovare anche per via grafica cercando il punto di intersezione dei grafici delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$

SUL CONCETTO DI FUNZIONE

Vari aspetti:

- definizione
- rappresentazione
- concezione

Non è facile passare da un aspetto ad un altro.

Lo studente spesso manca dell'abilità necessaria per padroneggiare contemporaneamente aspetti diversi e la familiarità con un aspetto può interferire con lo sviluppo e l'apprendimento degli altri.

Molti studenti pur conoscendo a memoria la definizione di funzione preferiscono avvalersi di una loro idea intuitiva e spesso imprecisa.

Problema1: è legato all'uso del grafico per rappresentare una funzione. I grafici offrono un metodo semplice per spiegare crescenza, decrescenza, concavità, massimi e minimi, flessi
ma gli studenti

- vedono i grafici come qualcosa da cui possono trarre informazioni di tipo puntuale
- identifica una funzione con il suo grafico, cioè con una specifica rappresentazione semiotica

Problema2: la rappresentazione di una funzione in termini di espressione algebrica è vista spesso come unica rappresentazione.

Alcuni misconcetti:

- funzione legata al concetto di qualcosa che varia
- funzione che non può essere definita in modi differenti
- dominio non può essere costituito da insiemi disgiunti

Quadro teorico: processo – oggetto

Concezione strutturale: funzione come insieme di coppie ordinate

Concezione procedurale: metodo per ottenere un insieme a partire da un altro

- **Interiorizzazione:** lo studente ha appreso il concetto di variabile e sa trovare i valori della variabile dipendente data una formula

- **Condensazione:** la procedura che fa corrispondere valori a valori è vista globalmente

- **Reificazione:** funzione come entità in sé, incorpora il processo e unifica tutte le sue rappresentazioni.

Nella tradizione didattica ed educativa sono 4 le accezioni maggiormente usate:

1. la funzione f da A a B come un **sottoinsieme del prodotto cartesiano** AxB tale che:
   i. $\forall a \in A\ \exists b \in B$ tale che $(a, b) \in f$
   ii. se $(a, b) \in f$ e $(a, b') \in f$ allora $b=b'$

La prima condizione garantisce che la funzione f definita per ogni elemento del dominio; la seconda che ad ogni elemento del dominio corrisponde un solo elemento del codominio.
La storia suggerisce che la definizione di funzione data nel linguaggio insiemistico è il risultato di una lunga evoluzione di cui il movimento e la dinamicità sono stati non solo i punti di partenza, ma anche le caratteristiche salienti per tanto, tanto tempo. Richiedere a studenti di un biennio di scuola secondaria di partire dalla definizione data nel linguaggio insiemistico potrebbe essere azzardato. Inoltre la situazione relativa all'insegnamento -apprendimento del concetto di funzione è piuttosto paradossale: da una parte se ne riconosce l'importanza e l'aspetto fondante per la matematica; dall'altra, pur introducendo il concetto con il linguaggio insiemistico già nel primo anno di corso, con le funzioni si inizia a lavorare in modo sistematico solo nel quarto o quinto anno, con l'introduzione dell'analisi.

2. funzione come **scatola nera**, ossia come macchina input - output che agendo su uno o più ingressi genera una e una sola uscita;

3. relazione come **legame causa-effetto** tra i valori di due grandezze (aspetto dinamico) ovvero funzione come espressione variabile: si tratta di un approccio molto simile a quello di Newton, che pensava a grandezze variabili in funzione del tempo. Questo punto di vista porta a privilegiare, nella lettura di una funzione tabulata, i valori delle ordinate (della variabile dipendente); in altri termini la tabella viene letta in colonna (quella della variabile dipendente), perchè sono le variazioni della, variabile dipendente che danno un'idea delle caratteristiche della funzione. La variabile indipendente, infatti, può esserefatta variare a piacere nel dominio della funzione e non dà quindi informazioni significative (si può immaginare che

essa vari con un passo costante; fissata questa informazione, di essa ci si può anche dimenticare). È anche possibile, però,utilizzare un approccio ancora più dinamico educando gli studenti a prestare attenzione alla variazione delle variazioni della variabile dipendente; in altri termini, si studiano le variazioni delle differenze della colonna delle y. Sembra che gli studenti siano particolarmente sensibili alle variazionidelle differenze, nel senso che, scorrendo la colonna delle y in una tabella, identificano un cambiamento significativo quando varia la successione delle differenze dei valori della variabile dipendente. Naturalmente, in tale approccio èopportuno fare ampio uso dei grafici, pensandoli, però, non come insiemi dati di coppie di punti del piano cartesiano, ma come tracce di un punto in movimento.

4. funzione come **grafico** in un riferimento cartesiano

5. funzione come **espressione algebrica**

Assume un ruolo didattico importante

- fornire esempi di funzioni non rappresentabili algebricamente o rappresentabili non con un'unica formula

- sviluppare capacità di scegliere passare da un sistema di rappresentazione ad un altro ovvero di saper scegliere il sistema di rappresentazione più fruttuoso per la situazione problematica su cui si lavora

perché ciascun ambiente di rappresentazione non è equo rispetto a tutte le caratteristiche dell'oggetto da rappresentare ovvero "esistono caratteristiche *ben servite* dalla singola rappresentazione e caratteristiche *mal servite*. Inoltre esistono caratteristiche dominanti che interferiscono con altre caratteristiche meno evidenti.” (Cannizzaro, 2004)

Una ricerca (Bagni)

A studenti di III e di V liceo scientifico è stato proposto il seguente test:

Sono state assegnate le seguenti relazioni tra numeri reali; per ciascuna di esse è stato richiesto di disegnare (se possibile) il grafico cartesiano e di dire, giustificando la risposta, se si trattava di una funzione:

1. $R1$ è la relazione tra numeri reali che ad ogni x reale associa il reale $2x$.
2. $R2$ è la relazione tra numeri reali che ad ogni $x$reale associa il reale 1.
3. $R3$ è la relazione tra numeri reali che:
    - se *x è razionale*, allora a x associa 0;
    - se *x è irrazionale*, allora a x associa 1.
4. $R4$ è la relazione tra numeri reali che:
    - se il reale *x è razionale*, con $x = m/n$, m intero, n intero positivo, in modo che m/n sia ridotta ai minimi termini, allora a x associa $1/n$;
    - se *x è irrazionale*, allora a x associa 0.

Osserviamo che

- Le funzioni $R1$ e $R2$, hanno come diagramma cartesiano una retta,
- la funzione $R3$ e la funzione $R4$ hanno grafici il cui disegno risulta difficoltoso (o impossibile),
- La $R3$ è la *funzione di Dirichlet*, introdotta, per ogni x reale, come la funzione caratteristica dell'insieme dei reali irrazionali. La funzione di Dirichlet è discontinua per ogni x reale. Una valutazione intuitiva della discontinuità della funzione di Dirichlet non è direttamente ricollegabile all'esame del suo diagramma cartesiano: il grafico di tale funzione, a causa delle "frequentissime" discontinuità, non può essere disegnato (se non per un numero finito di punti; esso potrebbe essere immaginato come un "fittissimo susseguirsi di punti", sull'asse delle x e sulla retta di equazione $y = 1$).
- La $R4$ è la *funzione di Gelbaum (*è ben definita: infatti se x è un razionale, con $x = m/n$, m intero, n intero positivo, in modo che m/n sia ridotta ai minimi termini, allora gli interi m, n sono univocamente determinati. Lo studio di quest'ultima funzione elude ogni interpretazione basata sull'esame del diagramma: è impossibile visualizzare con qualche precisione l'andamento del grafico di una funzione come questa; non può neppure essere immaginata un'approssimata rappresentazione come quella della funzione di Dirichlet.

Ecco i risultati dei test, suddivisi per le due classi:

Classe III

	Disegnano corrett il grafico	Risp che si tratta di funzione	Risp. che Non. *non* si tratta di funzione	Non risp
A1	69 (92%)	71 (95%)	1 (1%)	3 (4%)
A2	61 (81%)	54 (72%)	19 (25%)	2 (3%)
A3	0 (0%)	34 (46%)	31 (41%)	10 (13%)
A4	0 (0%)	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

Per quanto riguarda la situazione nella III classe, le incertezze relative ai quesiti 3 e 4 sono spesso collegate alla difficoltà (o all'impossibilità) di tracciare il diagramma cartesiano.
alcuni allievi hanno espresso disagio nei confronti di esempi di relazioni inusuali nella pratica didattica (ed hanno affermato: «Non ho capito l'esercizio » oppure: «Non avevo mai incontrato una funzione del genere, non sapevo neanche se era possibile farla»); ma la netta maggioranza di coloro i quali hanno negato alle funzioni di Dirichlet e di Gelbaum la qualifica di funzione ha evidenziato l'impossibilità di tracciare il loro grafico: questa giustificazione è presente nelle risposte di ben 19 studenti tra i 31 che non hanno considerato una funzione la funzione di Dirichlet e di 22 studenti (si tratta spesso degli stessi) tra i 40 che non hanno considerato una funzione la funzione di Gelbaum.

Dunque il concetto di funzione appare frequentemente collegato al diagramma cartesiano della relazione esaminata; negli allievi, questa stretta connessione è spesso preponderante sulla stessa valutazione delle caratteristiche proprie di una funzione, viene addirittura a determinare la discriminante principale che consente di accettare una relazione come una funzione.

Classe V

	Disegnano corrett il grafico	Risp che si tratta di funzione	Risp. che Non. *non* si tratta di funzione	Non risp
A1	66 (100%)	65 (98%)	0 (0%)	1 (2%)
A2	65 (98%)	58 (88%)	5 (7%)	3 (5%)
A3	0 (0%)	39 (59%)	18 (27%)	9 (14%)
A4	0 (0%)	19 (29%)	22 (33%)	25 (38%)

Una notevole percentuale di allievi di V ha ancora tentato un'interpretazione di tali funzioni con riferimento ai loro diagrammi cartesiani: ben 15 studenti tra i 18 che non hanno considerato una funzione la funzione di Dirichlet e 16 studenti (spesso gli stessi) tra i 22 che non hanno considerato una funzione la funzione di Gelbaum hanno sottolineato l'impossibilità di tracciare i rispettivi grafici.

Uno studente ha affermato: «Il grafico della quarta relazione non esiste, dunque non ho potuto applicare la regola secondo la quale una funzione ha un grafico che può essere intersecato in un solo punto da una retta verticale. Il professore ci ha insegnato a fare sempre questo controllo».
L' allievo sembra identificare completamente una corrispondenza con la sua visualizzazione nel piano cartesiano e ciò non contribuisce di certo ad eliminare le difficoltà collegate alla considerazione di funzioni "non disegnabili" (eppure teoricamente importanti) come quelle di Dirichlet e di Gelbaum.
«È l'oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili... La distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la comprensione della matematica» (Duval).