L'ALGEBRA COME STRUMENTO DI PENSIERO

Diverse indagini hanno mostrato un apprendimento senza senso del linguaggio simbolico. Spesso gli allievi non sembrano conoscere il significato delle formule e inventano dei surrogati.

L'algebra non è e non deve essere presentata come una collezione di trucchi ma come uno strumento e un oggetto di pensiero.

Il pensiero algebrico

- è considerato astratto
- è inscindibile dal linguaggio formalizzato con cui si esprime e dalle sue manipolazioni
- ma non è solo questo

formalismo algebrico: sistema di segni e regole sintattiche che governano la costituzione e la trasformazione delle espressioni simboliche in algebra. Si organizza a partire da segni relativi alle 4 operazioni e al segno di =

Funzioni del linguaggio algebrico:

IDEOGRAFICA: segni che esprimono idee

- *stenografica:* idea più bassa che si può avere
- *sintesi* di idee dei segni:
    1. *designazione*: se p è un numero primo…….
    2. *individuazione*: p^2………permette di individuare proprietà dei segni stessi

3. *rinvio*: l'incognita x è sempre lei nel corso della storia o lungo una dimostrazione (rinvio da un punto all'altro della storia e di una dimostrazione)
4. *generalizzazione*: la variabile o parametro che indica qualcosa di generico e non di specifico

nel linguaggio naturale fare 1., 2., 3. è pesante.

TRASFORMATIVA: messa in formule $\Rightarrow$ manipolazioni sintattiche.

La funzione ideografica governa la messa in formule.

La funzione trasformativi è governata dal pensiero anticipatorio.

Processo-oggetto

Molti sostengono che nell'apprendimento dell'algebra l'allievo si trovi a ripercorrere il processo storico e che pertanto si imbatta in ostacoli e difficoltà testimoniate dalla storia dello sviluppo del pensiero algebrico (si veda ad esempio Harper, 1987 o Sfard 1992).

Come sottolineato da A. Sfard (1991), la costruzione dei concetti algebrici si sviluppa per successivi livelli di astrazione ma prevalentemente attraverso processi computazionali, pertanto ogni oggetto matematico viene a riassumere in se due aspetti complementari: quello di **processo** e quello di **oggetto**, come due facce di una stessa moneta.

1. Nel primo aspetto prevale il punto di vista operazionale che è dinamico e sequenziale,
2. nel secondo l'oggetto è visto come un'entità statica e fuori dal tempo e si considera da un punto di vista strutturale

Esempi:

- equazione vista come procedimento di codifica delle relazioni espresse da un problema ed alla equazione vista come oggetto di studio in se.
- 5+6 si può intendere come processo di calcolo o come il numero 11
- i numeri naturali rimandano a procedimenti di conteggio
- i razionali rimandano a procedimenti di misura

Lo sviluppo del pensiero algebrico, e più in generale della matematica, è caratterizzato da questo passaggio dal procedurale allo strutturale che è contraddistinto da tre momenti fondamentali:

1. la fase di *interiorizzazione* (si opera su oggetti matematici già familiari);
2. la fase di *condensazione* (le operazioni e i processi si vanno sintetizzando in unità più maneggevoli);
3. la fase di *reificazione* (vi è l'improvvisa abilità di vedere qualcosa di familiare in una nuova luce, come un tutt'uno).

Come esempio di ciclo procedurale-strutturale si pensi al passaggio dalla frazione come operatore su grandezze al concetto di numero razionale come classe di frazioni equivalenti (elemento del campo dei quozienti dell'anello degli interi).

L'apprendimento dell'algebra richiede nell'allievo il passaggio consapevole dal procedurale allo strutturale ma purtroppo tale passaggio è spesso ignorato nell'insegnamento perchè di fatto ignorato nei libri di testo su cui generalmente l'insegnamento si basa.

Ad esempio le espressioni algebriche vengono trattate come generalizzazioni di espressioni aritmetiche e si opera su esse senza mettere in luce le diversità nelle due situazioni.

- Un approccio operazionale alle espressioni significa considerare le espressioni come riferite ad un processo, ovvero come riferite ad una sequenza di operazioni;
- al contrario un approccio strutturale alle espressioni significa considerare le espressioni come oggetti e stabilire una relazione tra loro. Secondo Sfard è solo quando due espressioni sono considerate oggetti che diviene possibile pensare ad una relazione fra loro.

Dal punto di vista storico nell'evoluzione del pensiero algebrico c'è stato un costante sforzo di transizione da procedure computazionali a oggetti matematici.

Molti autori concordano nell'affermare che le primi origini dle pensiero algebrico sono individuabili nel momento in cui appare in cui apare lo sforzo di trattare un processo computazionale in modo generale.
Storicamente si possono individuare 3 stadi distinti:

1. **fase retorica:** (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d.C.) tutta a parole, senza simboli)

2. **fase sincopata:** (da Diofanto che l'iniziò alla fine del XVI sec) vede l'introduzione di abbreviazioni per le incognite ma i calcoli sono seguiti in lingua naturale. Diofanto introduce i simboli per l'incognita e le sue prime potenze ma poi usa un'algebra retorica)

3. **fase simbolica:** (introdotta da Viète, 1540-1603) in cui si usano lettere per tutte le quantità incognite e non. L'algebra

si usa sia per trovare l'incognita che per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così soluzioni generali.

Lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato
- Può spogliare di significato il linguaggio usato
- Può nascondere i significati dei termini
- Può nascondere i significati delle operazioni che agiscono sui termini

⇒ debolezza semantica; scollamento tra linguaggio simbolico e significato del contesto

ma la conquista delle lettere è essenziale per l'affermarsi del pensiero algebrico.

Solo con il passaggio alla fase simbolica l'algebra si sviluppa e acquisisce le sue tipiche funzioni (ideografica e trasformativa).

Esiste un grado diverso di astrazione secondo cui si possono utilizzare le lettere nei processi di risoluzione algebrici. Vediamo la gerarchia introdotta da Kuchemann negli anni 80 in Inghilterra.(CSMS)

Si individuano 6 livelli, crescenti in difficoltà, di interpretazione delle lettere:

1. **lettera valutata:** quando ad una lettera si assegna un valore numerico dall'esterno
    - gli allievi danno un valore specifico all'incognita
    - gli allievi devono trovare un valore all'incognita ma non hanno dovuto operare precedentemente con essa
2. **lettera non usata:** gli allievi ignorano la lettera o non le danno significato

3. **lettera usata come oggetto:** lettera intesa come segno stenografico per un oggetto o come oggetto
4. **lettera come incognita specifica:** la lettera intesa come un numero specifico ma sconosciuto sul quale si può operare (fare trasformazioni)
5. **lettera come numero generalizzato:** lettera vista come rappresentante di più valori invece di uno
6. **lettera come variabile**: la lettera è vista come rappresentante un dominio di valori non specificato e si coglie una qualche relazione fra i due insiemi di valori

Esaminiamo ora alcuni test del CSMS che evidenziano il significato dei sei livelli.
Accanto ad ogni test si evidenziano i dati percentuali che si riferiscono ad allievi inglesi di 14 anni (i test hanno 4 livelli di difficoltà).
I primi 3 livelli consentono agli allievi di operare su una lettera senza considerarla incognita specifica.

1) Lettera valutata
Danno un valore specifico all'incognita. Si parla di lettera valutata anche quando gli allievi devono trovare dell'incognita moa non devono operare precedentemente con essa.

1A) (liv. 1) Che cosa puoi dire di A se A+5=8
(A=3 92%)

1B) (liv. 2) Che cosa puoi dire di U se U=V+3 e V=1
(U=4 61%; U=2 14%)

1C) (liv. 2) Che cosa puoi dire di M se M=3N+1 e N=4
(M=13 32%; altri valori 14%)

1D) (liv. 3) Che cosa puoi dire di R se R=S+T ed R+S+T=30
(R=15 35% R=30-S-T 6% R=10 21%)

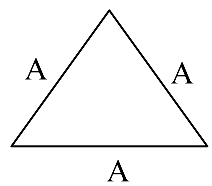
Si nota che 1D) non è un esempio di lettera valutata perché S e T non sono da valutare.

2) **Lettera non usata**
2A) (liv. 1) Se A+B=43, A+B+2 = ? (45 97%)
2B) (liv. 2) Se N-246=762, N-247=? (761 71%; 763 13%)
2C) (liv. 3) Se E+F=8, E+F+G=? (8+G 41%; 12 26%)

In 2A) e 2B) le lettere possono essere eliminate e si può procedere con i soli numeri. Non così nell'ultima domanda: E+F può essere eliminato ma G deve essere lasciato come incognita specifica. Si noti che alcuni lo valutano 4+4+4=12.

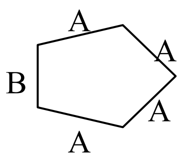
3) **Lettera come oggetto**
è il cosiddetto caso banane-mele: se prendo 6 banane e 5 mele, 6B+5Mè una scrittura puramente stenografica.

calcolare il perimetro delle figure seguenti:
3A)



(3A 94%)

3B)



(4°+B, 4°+1B 68%)

La lettera usata come oggetto permette la funzione stenografica del linguaggio algebrico ma inibisce quella ideografica e di sintesi. L'uso stenografico è rafforzato da certe abitudini didattiche che quindi causano ostacoli didattici alle funzioni ideografiche più elevate del linguaggio algebrico.

Esempio:
Le matite blu costano 5 pence l'una, quelle rosse 6 pence. Ne compro un po' di entrambi i colori spendendo 90 pence. Sia B il numero di matite blu e sia R il numero di matite rosse.Che cosa sai dire su B ed R?

($5B+6R=90$ 10%)

altre risposte:
(6, 10)   (12, 5); $B+R=90$; $6B+10R=90$ $12B+5R=90$)

4) **Lettera come incognita specifica**
Nell'esempio 1D) $R+S+T=30$ $R=S+T$ R è un'incognita specifica

4A) Aggiungi 4 a 3N ($4+3N$ 36%)
4B) Aggiungi 4 a N+5 ($N+9$ 68%; 9   20%)

5) Lettera come numero generalizzato

Che cosa puoi dire di C se $C+D=10$ e $C<D$?
($C<5$ 11%; $C=1, 2, 3, 4$ 19%; $C=10-D$ 4%; $C=4$ 39%)

6) **Lettera come variabile**
L'esempio sulle matite rosse e le matite blu porta alla relazione: $5B+6R=90$. Il problema viene compreso quando agli allievi è chiara una tabella di questo tipo:

B	0	6	12	18
R	15	10	5	0

Cioè quando viene scoperta una certa relazione funzionale tra le lettere.

Opposizione intreccio Aritmetica-Algebra

l'aritmetica costituisce un prerequisito che dà senso e portata al pensiero algebrico.

Aritmetica	**Algebra**
Orale: produce un discorso con dei ragionamenti	**Scritta:** elabora scritture che sono i vettori del calcolo (il ragionamento viene ridotto al calcolo)
Conosciuto → sconosciuto	Sconosciuto → conosciuto (si arriva a conoscere il valore dell'incognita)

Se dall'aritmetica nascono alcune misconcezioni l'aritmetica ha delle caratteristiche che costituiscono una buona propedeuticità all'apprendimento dell'algebra.

Non ignorare la continuità con l'aritmetica

Difficoltà e misconcezioni nell'apprendimento dell'algebra

Mancanza di referente numerico per la lettera: se l'allievo non vede le lettere come rappresentative di numeri allora l'operare su di esse perde totalmente di significato

Diverso significato che ha la giustapposizione di due numeri in aritmetica e in algebra (43=40+3   ab=a*b)

Non accettazione della mancanza di chiusura: l'aspetto procedurale può fungere da ostacolo a produrre una soluzione che non sia un numero

Dilemma nome-processo: l'allievo non distingue il nome della cosa e la cosa stessa ovvero il processo che genera il prodotto

Formula: stringa di simboli arbitrari, governati da regole arbitrarie. Sono pure etichette che significano solo se stesse.

Il segno di uguale

Nel quadro dei corsi di Specializzazione in "Educaci6n Matematica", dell'Università Distrettuale, a partire dall' anno 1996 si sono realizzati diversi lavori di tesi di specializzazione che mettono in evidenza le difficoltà che incontrano gli studenti dei gradi dal 4° al 7° della educazione di base (da 9 a 13 anni), in relazione con gli usi e le interpretazioni del segno uguale in contesti matematici.
In diversi studi realizzati con studenti dei primi anni di scolarità si mostra la tendenza ad interpretare il segno uguale come un "segnale" o un "ordine" di operare, nel quale usualmente l' espressione di sinistra è associata con la/le operazione/i da effettuare e quella di destra con il risultato di detta/e operazione/i; in questo senso, si associa a tale segno un carattere unidirezionale

(asimmetrico) e si assume che queste espressioni debbano essere scritte in un modo stabilito. In questi casi, l'uguale non è riconosciuto come un "simbolo relazionale" tra due espressioni.

Si considerino a titolo esplicativo i seguenti esempi:

1. Dire se le seguenti espressioni sono vere o false e giustifica la tua risposta:

a) 8 = 8
b) 15+5 = 13+7

2. Quale numero si deve mettere al posto dei puntini, affinché l'espressione di sinistra sia uguale a quella di destra?: 23+5 = ...+21.

Nello studio realizzato da Moros et al. (1997) con 119 studenti del 5° grado (10-11 anni), in 3 diverse scuole di educazione di base, si riporta che nel primo item, 10 studenti rispondono che la espressione 8=8 è falsa e 10 giustificano così:

- Perchè davanti all'uguale ci deve essere o un segno più o un segno meno (4 studenti) .
- Non dà nessun risultato (3 studenti)
- Deve esserci un più davanti dell'uguale, sarebbe vero se fosse 8+0=8 (2 studenti)
- Uno non dice 8=8, ma 4+4=8 (1 studente)

La parola "falso" è stata usata dagli studenti nel senso di "non è consueto" o"non si usa", dato che secondo loro in aritmetica "davanti al segno uguale deve sempre esserci un'operazione tra due numeri".
Nella parte (b) di questo item, 56 studenti considerarono che detta uguaglianza era falsa, fornendo argomenti come:

- Perchè 15+5=20 e invece hanno scritto 13 (35 studenti)
- Non c 'è un risultato (2 studenti)
- Perchè il segno uguale va come ultimo (1 studente)
- Perchè 15+5=13+7=40 (1 studente)

Nell'ultimo item, 100 studenti risposero che il numero mancante era 28 e 80 di essi commentarono la espressione come segue:
23+5 = **28** +21 = 49

si "rinforza" implicitamente l'interpretazione del segno uguale come "ordine di operare" più che come uguaglianza in quanto relazione di equivalenza (che comporta le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva); riconoscendo inoltre che questa tendenza di vedere l'uguale come un ordine di operare non sparisce nel lavoro in algebra (Rojas et al., 1997) **e, in alcuni casi, costituisce una causa di errori** (oltre a quelli che sono soliti generare l'uso dei simboli letterali per indicare numeri).

Per esempio, rispetto all'esercizio "somma 3 con 2a, vari studenti di 7° ed anche di 8° grado (12-14 anni) rispondono: 2+ 3a =5 ["ignorano" il numero a, o non gli riconoscono carattere operatorio] , o 2+ 3a = 5a [indotti dalla necessità di "chiudere" l'operazione].
Ora, nel contesto delle equazioni, un lavoro "adeguato" da parte degli studenti non sempre riflette un riconoscimento di proprietà implicite nella uguaglianza come relazione di equivalenza. Il seguente protocollo (Carlos, 14 anni) evidenzia il non riconoscimento (o il non uso) della proprietà simmetrica, pur all'interno di un certo qual dominio nel lavoro con espressioni algebriche:

R: Se 5=X possiamo affermare che X=5?
C: Credo di sì
R: Come 10 giustificheresti?

C: Vediamo, ...se 5=X posso portare la X alla sinistra e 5 all'altro lato e ottengo -X=-5 e siccome posso moltiplicare per (-1) in entrambi i lati, arrivo a X=5.

In espressioni algebriche, il segno uguale comporta interpretazioni differenti.
Così, per esempio, in $x^2-1 = (x+ 1)(x-l)$, questo segno si riferisce a un'uguaglianza per qualsiasi valore di x, mentre in $x^2-1= 0$, ci si riferisce a un 'uguaglianza valida solo per 2 valori. In tal senso, risulta importante poter contare su attività svolte in aritmetica fin dalla scuola primaria che, in particolare, permettano di riconoscere che un'espressione aritmetica può essere una uguaglianza per differenti valori numerici (a volte infiniti) e che rendano possibile il riconoscimento del segno uguale come rappresentante di una relazione di equivalenza.
→ Promuovere attività che possono contribuire alla pianificazione di compiti in questa direzione e ne suggeriscono alcuni orientati a costruire strategie additive (trovare la somma di numeri dati o diverse coppie di numeri la cui somma, differenza, prodotto o quoziente sia un numero dato), altri che comportano il paragone tra espressioni numeriche, o trovare numeri o operazioni che facciano sì che una coppia di espressioni siano uguali, Per esempio:

- Trova per lo meno tre coppie di numeri la cui somma sia 12 e per lo meno altre tre il cui prodotto sia 12,
- Paragona le seguenti espressioni e dì se sono uguali o diverse: 5+23 e 18; 38-18 e 6+14,14+12 e 7+6, 8x3 e 12x2; 3:2 e 12:8
- In ciascun caso trova operazioni o numeri che facciano sì che ogni coppia di espressioni siano uguali: 8*3 e 13□2 ; 9+? e ?+ 11 " 40: 5 e 4x ?