I NUMERI RAZIONALI

È stato dimostrato che i ragazzi hanno significative difficoltà ad apprendere e applicare i concetti legati ai numeri razionali.

Esempio: Il N.A.E.P. (National Assesment of Education Progress) ha dimostrato che i ragazzi hanno significative difficoltà ad apprendere e applicare i concetti legati ai numeri razionali. Per esempio si è scoperto che la maggior parte dei 13enni e dei 17enni era in grado di sommare frazioni con ugual denominatore , ma solo 1/3 dei 13enni e solo i 2/3 dei 17enni che era in grado di sommare frazioni era in grado di eseguire correttamente $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.
Altre ricerche hanno avvalorato una bassa capacità nei calcoli con le frazioni e nella risoluzione di problemi connessi.

Ciò sorprende vista l'enfasi che viene data nella scuola sia sulle abilità procedurali sia sugli algoritmi computazionali. Si può supporre che questi risultati scadenti siano una conseguenza diretta dell'enfasi posta sulle procedure piuttosto che sullo sviluppo accurato della comprensione dei concetti sottesi.
Molti dei punti di difficoltà nella scuola sono legati alle idee sui numeri razionali.

Katleen Hart scrive " Le frazioni sono usate in un numero notevole di questioni matematiche differenti e con svariati significati; è questa varietà di significati attribuiti alle frazioni che probabilmente rende ragione delle difficoltà che i ragazzi incontrano nel comprenderle".

Ripercorriamo il cammino delle frazioni:

1) Nascono nella scuola elementare, di solito in terza, come operatori su:
- grandezze: segmenti, rettangoli, quadrati, …..
- oggetti: torte, stecche di cioccolato, ……
- insiemi di oggetti
- numeri

questo modello primitivo comporta che:

- un oggetto venga diviso in un certo numero di parti uguali (almeno 2)
- di queste parti ne vengono considerate alcune (=almeno 1 ma non tutte)

dal pdv matematico significa che si considerano frazioni $\frac{a}{b}$ con $a \geq 1;\ a < b;\ b > 0$.

2) Successivamente (4 e 5 elementare) tale modello primitivo viene mandato in crisi dall'introduzione delle frazioni improprie (a>b), delle frazioni apparenti (a=kb), e della frazione nulla (a=0).

Le frazioni nate come operatori, diventano "rapporti", "divisioni", "risultato di una divisione" (quoziente), "numeri naturali", "numeri con la virgola"

3) Nella scuola media si ribadisce l'origine delle frazioni come operatori, ma nascono le frazioni negative (non ha senso considerarle come operatori), e i numeri razionali.

   - Che differenza c'e' tra frazioni e numeri razionali dato che si scrivono nello stesso modo?
   - $\frac{2}{3}$ devo pensarlo come frazione o come numero razionale?

4) Nella scuola media si introducono anche le operazioni sulle frazioni e sui numeri razionali denotandole con gli stessi simboli.
   - Si tratta di operazioni diverse o no?
   - Se no perché distinguere le frazioni dai numeri decimali?
   - Se sì, dove sta la diversità?

<u>L'analisi delle componenti del concetto di numero razionale suggerisce una ovvia ragione del perché la comprensione completa dei numeri razionali è un compito di apprendimento difficile.</u>

Le diverse interpretazioni in cui i numeri razionali si possono interpretare si chiamano subcostrutti:

1) parti di un intero
2) decimali
3) rapporto
4) divisione indicata
5) operatore
6) misura di quantità discrete o continue

Una comprensione completa dei numeri razionali richiede non solo la comprensione di ciascuno dei 6 subcostrutti separatamente, ma anche di come sono interrelati.

Analisi teoriche e ricerche empiriche suggeriscono che strutture cognitive diverse sono necessarie per trattare ciascuno dei 6 subcostrutti. Sono stati identificati stadi nel pensiero sui numeri razionali dei ragazzi per esaminare la graduale differenziazione e la progressiva integrazione dei subcostrutti.

Un aspetto importante di tali studi è stato quello di osservare se o no i soggetti che agivano ad un dato stadio in un subcostrutto, agissero a livello paragonabile in compiti che coinvolgevano un altro subcostrutto. Sono state studiate anche le relazioni fra abilità specifiche e certe comprensioni basilari dei numeri razionali.
Analizziamo ora i diversi subcostrutti.

Parte di un intero e misura

L'interpretazione *parte di un intero* dei numeri razionali dipende direttamente dall'abilità di ripartire una quantità continua o un insieme discreto di oggetti in sottoparti uguali.
Questo subcostrutto è importante in sé e fondamentale per tutte le altre interpretazioni ed è considerato utile per stabilire il linguaggio adatto.

L'interpretazione parte di un intero è puntualmente introdotta molto presto nel curriculum scolastico: i bambini hanno una comprensione primitiva del processo di frazionamento: regioni geometriche, insiemi di oggetti discreti, retta di numeri sono i modelli più comunemente usati per rappresentare le frazioni nella scuola.

L'interpretazione che usa le regioni geometriche coinvolge una interpretazione della nozione di area. Si è riscontrato che esiste una relazione fra il concetto di area dello studente e la sua abilità ad imparare i concetti legati alle frazioni.

Il modello della retta numerica aggiunge un ulteriore attributo non presente nei modelli della regione geometrica o degli insiemi, in particolare quando viene utilizzato un segmento numerico di lunghezza maggiore dell'unità. Uno dei compiti richiedeva la localizzazione sul segmento numerico di frazioni. Tale segmento era lungo 1 o 2 unità e ciascun segmento unitario era suddiviso a sua volta da un numero di segmentini uguali pari a 0, 1 o 2 volte il denominatore. I risultati degli studi fatti indicano che per per gli studenti all'inizio era più facile associare la frazione a un punto quando la lunghezza era 1 ed il numero dei segmentini uguagliava il denominatore.
Lo studio suggerisce una difficoltà di percezione dell'unità di riferimento. Quando la lunghezza del segmento era 2 volte l'unità di misura quasi il 25% del campione usò l'intero segmento come unità; inoltre si osservò che 1/3 non veniva identificato come 2/6.

$\Rightarrow$ idea imprecisa e non flessibile di frazione

In un altro studio si è riscontrato che i ragazzi si comportano considerevolmente meglio con le quantità discrete rispetto a quelle continue. Una possibile spiegazione è che la soluzione dei compiti con quantità continue richiede uno schema mentale ben sviluppato, mentre per le quantità discrete i compiti possono essere risolti semplicemente attraverso una partizione. Poiché le strategie usate dagli studenti per le quantità discrete sono così marcatamente differenti da quelle utilizzate per le quantità continue è ragionevole assumere che le strutture cognitive associate alla risoluzione dei problemi sui numeri razionali relativamente al modello discreto sono diverse da quelle associate alla risoluzione di problemi relativi al modello continuo.

$\frac{a}{b}$ **si riferisce ad una parte frazionaria di una singola quantità**

Rapporti

Il rapporto è una relazione che porta con sé la nozione di grandezza relativa, perciò è più corretto usarlo come un indice comparativo piuttosto che come numero. Esprime cioè una relazione fra 2 quantità.

Divisioni indicate ed elementi di un campo quoziente

In tal caso il simbolo $\frac{a}{b}$ indica l'operazione di divisione indicata.

La considerazione di un numero razionale come divisione coinvolge almeno 2 livelli di sofisticazione:

1. 8/4 o 2/3 interpretati come divisione risultano nello stabilimento di una equivalenza fra 8/4 e 2 e fra 2/3 e 0,(6).
2. 8/4 e 2/3 come elementi di un campo quoziente (fuori dalla portata di uno studente delle medie)

Operatori

Tale subcostrutto impone sul numero razionale $\frac{a}{b}$ una interpretazione algebrica: $\frac{a}{b}$ è una funzione che

- trasforma una figura geometrica in un'altra simile $\frac{a}{b}$ volte più grande
- trasforma un insieme in un altro con $\frac{a}{b}$ volte elementi.

Quando si opera su quantità continue (per esempio lunghezze) si può pensare a $\frac{a}{b}$ come ad un allungatore o riduttore. Ogni segmento di lunghezza l su cui opera $\frac{a}{b}$ è allungato di a volte e poi ridotto di un fattore b.

Un'interpretazione moltiplicatore –divisore è data da $\frac{a}{b}$ nel caso in cui operi su un insieme discreto; il numero razionale $\frac{a}{b}$ trasforma un insieme di n elementi in un insieme di n$\frac{a}{b}$ elementi.
L'interpretazione dei razionali come operatori risulta particolarmente utile nello studiare l'equivalenza di frazioni e l'operazione di moltiplicazione di frazioni.

In tale interpretazione il numero razionale $\frac{a}{b}$ è realizzato come una macchina che ad un input di lunghezza o cardinalità b produce un output di lunghezza o cardinalità a.
Il problema di trovare frazioni equivalenti ad una frazione data è quello di trovare una macchina che opera la stessa trasformazione input-output.

La moltiplicazione di frazioni coinvolge la composizione di macchine.

In conclusione: alla base c'e' il subcostrutto partizione di un intero da cui discendono rapporto, operatore, quoziente e misura. Il rapporto diventa basilare per l'equivalenza tra frazioni, l'operatore per la moltiplicazione, la misura per l'addizione.

Ogni frazione è una coppia ordinata (a, b) di numeri con b≠0.

Dove prendiamo a e b?

Dipende dal livello scolastico e dall'obiettivo che ci poniamo.

Nella scuola elementare: (a, b) $\in \mathbf{N}x\mathbf{N}_0$ dove $\mathbf{N}_0$ è l'insieme dei numeri naturali diversi da 0.
Se vogliamo usare le frazioni per costruire i numeri razionali possiamo ottenere solo i numeri razionali assoluti.

Nella scuola media e nel biennio delle superiori: (a, b) $\in \mathbf{Z}x\mathbf{Z}_0$.

Con questa scelta possiamo costruire il campo ordinato dei razionali. Se però accettiamo i denominatori negativi sorgono complicazioni legate all'introduzione dell'ordinamento; pertanto consideriamo (a, b) $\in \mathbf{Z}x\mathbf{Z}_0^+$.

Scriviamo la frazione (a, b) nella forma usuale $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}x\mathbf{Z}_0^+$.

Addizione:
tale operazione viene introdotta in una forma un po' complicata:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (*)$$

$\oplus$ è il simbolo per l'addizione tra frazioni (di seguito useremo +)
+ è il simbolo dell'addizione in **Z**.

Abbiamo cioè definito l'addizione tra frazioni usando l'addizione già nota e definita in Z.

$\oplus$

- è una operazione interna a $\mathbf{Z}x\mathbf{Z}_0^+$ perché il secondo membro di (*) è ancora un elemento di $\mathbf{Z}x\mathbf{Z}_0^+$;
- è commutativa
- è associativa
- $\exists$ l'elemento neutro $\frac{0}{1}$: infatti: $\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a+0\cdot b}{b}=\frac{a}{b}$

Ai ragazzi dà fastidio la definizione (*) e spesso ricorrono alla definizione più semplice

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \quad (**)$$

La definizione (**) è più semplice e in accordo con quanto avviene nella moltiplicazione. Presenta però degli inconvenienti:

nella pratica reale: mettendo insieme due mezze torte non ne otteniamo una ma due quarti

con la (**) la frazione $\frac{0}{1}$ non è più elemento neutro perché

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a}{b+1}$$

faremmo un passo indietro rispetto alla struttura additiva di Z.

moltiplicazione

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad (***)$$

$\otimes$

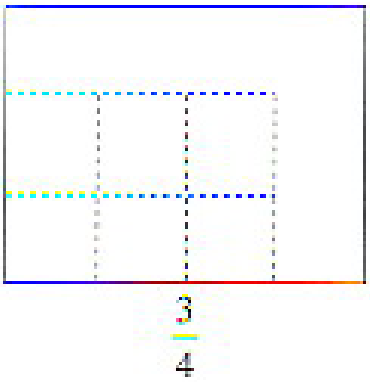
- indica la moltiplicazione tra frazioni mentre le due moltiplicazioni a secondo membro sonora numeri interi relativi.
- È interna a $\mathbf{Z}$x$\mathbf{Z}_0^+$
- Commutativa
- Associativa
- Distributiva rispetto all'addizione
- $\exists$ l'elemento neutro $\frac{1}{1}$: $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$

la definizione formale di moltiplicazione è semplice ma è difficile la sua interpretazione.

I modelli migliori forse sono quelli che fanno intervenire l'area.

Esempio: *3x4* può essere interpretato come l'area di un rettangolo con lati lunghi *3* e *4* rispettivamente. La sua area è 12 e possiamo pensare il rettangolo diviso in 12 quadretti

$\frac{2}{3} x \frac{3}{4}$ è l'area di un rettangolo di lati lunghi, rispettivamente, $\frac{2}{3} e \frac{3}{4}$. Quale sarà la sua area? Si riprende il rettangolo di prima costruendo i $\frac{2}{3}$ di un lato e i $\frac{3}{4}$ dell'altro e poi il rettangolo avente come area il prodotto:



Quindi $\frac{2}{3} x \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

Ordinamento:

Sia a, b $\mathbf{Z}$x$\mathbf{Z}_0^+$ $\quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$

la relazione è una relazione di ordine stretto e totale perché gode della proprietà

- antiriflessiva
- antisimmetrica
- transitiva
- tricotomia

nella scuola viene introdotta secondo 3 step:

1. confrontare frazioni con lo stesso denominatore: è maggiore quello con numeratore maggiore
2. confrontare frazioni con lo stesso numeratore: è maggiore quello con denominatore minore
3. confrontare frazioni aventi numeratore e denominatore diversi: è necessario trasformarle in frazioni equivalenti e applicare 1 (serve aver introdotto il concetto di frazioni equivalenti e scegliere il denominatore da assegnare alle frazioni, facile se le frazioni hanno numeratore e denominatori "piccoli", ma …..)

Alcuni concetti tradizionali da rivisitare nell'ambito dell'ordinamento tra frazioni:

Concetto di Successivo:

Definizione: Il numero *b* è successivo di *a* se

1. b>a
2. fra a e b non c'è nessun altro numero.

$\Rightarrow$ nel mondo delle frazioni , dei numeri decimali e dei numeri razionali nessun numero ha successivo perché non è mai verificata 2.

Concetto di numero pari:

Definizione: Un numero si dice pari se è divisibile per 2.

Molti insegnanti sono convinti che 0,6 è pari perché è divisibile per 2. Tutti i numeri decimali e tutte le frazioni sono divisibili per 2 e quindi sono pari??????
Questo concetto in un ambiente diverso da **N** perde di significato.
In Z ogni elemento ha opposto e in $\mathbf{Z}\mathrm{x}\mathbf{Z}_0^+$?

Consideriamo per esempio la frazione $\frac{3}{4}$:
La candidata naturale ad esserle opposta è $\frac{-3}{4}$. Se così fosse:

$$\frac{3}{4}+\frac{-3}{4}=\frac{0}{1}$$

Applicando (*) si ha:

$$\frac{3}{4}+\frac{-3}{4}=\frac{0}{16}\neq\frac{0}{1}$$

le frazioni $\frac{0}{16}$ e $\frac{0}{1}$ sono diverse perché sono diverse le coppie ordinate (0, 16) e (0, 1).

Quindi abbiamo ampliato Z con un insieme algebricamente più povero.

È lecito aspettarsi che ogni frazione con numeratore diverso da zero ammetta inversa Se così fosse dovrebbe risultare:

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{1}$$

Ma applicando (***) risulta:

$$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{12}{12}\neq\frac{1}{1}$$

Come risolvere tale situazione?

Per eliminare le due "anomalie" è necessario compattare in una sola classe tutte le frazioni che hanno il numeratore uguale e 0 e compattare in un'altra classe tutte le frazioni che hanno il numeratore uguale al denominatore.
Non si possono però compattare solo questi due tipi di frazioni e le altre no.

$\Rightarrow$ frazioni equivalenti

definizione: due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono equivalenti se $ad=bc$.
È una RDE in quanto gode delle proprietà:

- riflessiva
- simmetrica
- transitiva

Con questa RDE tutte le frazioni vengono compattate in classi ed ogni frazione sta in una e una sola classe.
Ogni classe è formata da una frazione e da tutte quelle equivalenti in base alla definizione data:

In generale si introducono con diversi esempi: colorare rettangoli, confrontare segmenti

$$0 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots\ldots \right\}$$

$$1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \ldots\ldots \right\}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\ldots \right\}$$

a ciascuna classe si dà il nome del *capostipite* ovvero della frazione con numeratore e denominatore primi fra loro, ma ogni frazione della classe si può prendere come rappresentante.

Z = insieme dei numeri relativi

$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_0^+$ = insieme delle frazioni

Q = insieme formato da classi di equivalenza

A cosa ci serve?
Se riusciamo a definire in **Q**:

- Una addizione con le usuali proprietà
- Una moltiplicazione con le solite proprietà
- Un ordinamento con le solite proprietà

$\Rightarrow$ **Q** è un insieme numerico che chiameremo **insieme dei numeri razionali**

In **Q** è possibile introdurre la operazione di addizione come in (*) solo che tale operazione deve essere definita tra le classi di frazioni equivalenti:

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{c}{d}\right]=\left[\frac{ad+bc}{bd}\right]$$

Questa operazione è:

- interna a Q
- associativa
- commutativa
- $\exists$ l'elemento neutro $\left[\frac{0}{1}\right]$ che indicheremo con 0
- ogni classe $\left[\frac{a}{b}\right]$ ha un opposta $\left[\frac{-a}{b}\right]$. Infatti $\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{-a}{b}\right]=\left[\frac{0}{b^2}\right]$=0 (classe neutra.

(**Q**, +) è un gruppo abeliano

In **Q** si introduce una moltiplicazione esattamente come nell'insieme delle frazioni:

$$\left[\frac{a}{b}\right]\times\left[\frac{c}{d}\right]=\left[\frac{ac}{bd}\right]$$

- interna a **Q**
- associativa
- commutativa
- $\exists$ l'elemento neutro $\left[\frac{1}{1}\right]$ che indicheremo con 1
- ogni classe $\left[\frac{a}{b}\right]$ con $a\neq 0$ ha un inversa ed è la classe $\left[\frac{b}{a}\right]$. Infatti $\left[\frac{a}{b}\right]\times\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{ab}{ba}\right]=\left[\frac{1}{1}\right]=1$ (classe neutra rispetto a x).

(**Q**, x) è un gruppo abeliano

(**Q**, +) e (**Q**, x) sono collegate tra loro dalla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla addizione.

(Q, +, x) è campo (corpo commutativo)

In **Q** è possibile introdurre un ordinamento con la definizione precedente applicata alle classi e non alle singole frazioni.

$$\left[\frac{a}{b}\right]<\left[\frac{c}{d}\right]\Leftrightarrow[ad]<[cb]$$

tale ordinamento è stretto e totale.

L'ordinamento ci consente di parlare di numeri positivi e negativi a seconda che siano maggiori o minori di 0.

Quando $\left[\frac{a}{b}\right]>0$?

Deve essere:

$$\left[\frac{a}{b}\right] > \left[\frac{0}{1}\right] \Leftrightarrow [a \times 1] > [b \times 0] \Leftrightarrow [a] > [0]$$

La RDO è compatibile con l'addizione:

se $\left[\frac{a}{b}\right] > \left[\frac{c}{d}\right] \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{e}{f}\right] > \left[\frac{c}{d}\right] + \left[\frac{e}{f}\right]$

La RDO è compatibile con la moltiplicazione:

$$\left[\frac{a}{b}\right] > \left[\frac{c}{d}\right] \text{e} \left[\frac{e}{f}\right] > 0 \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] \times \left[\frac{e}{f}\right] > \left[\frac{c}{d}\right] \times \left[\frac{e}{f}\right]$$

(Q, +, x) è un campo ordinato

Q è denso: dati due numeri razionali a e b esiste un numero razionale c compreso tra a e b cioè tale che a<c<b o b<c<a. Basta considerare $\frac{a+b}{2}$.
È per questo motivo che non ha senso parlare di successivo in **Q**

Q è archimedeo, cioè, dati a > 0 e b in **Q**, esiste un numero naturale *n* tale che *n*a > b.

Tutte le definizioni date in Q sono ben poste ovvero NON dipendono dal rappresentante scelto.

Le definizioni date in **Q** sono state date per classi di frazioni equivalenti, ma noi abbiamo sempre usato un rappresentante della classe.

Può sorgere il sospetto che prendendo rappresentanti diversi dello stesso numero si ottengano risultati diversi.

Esempio: Prendiamo come rappresentanti di 2 numeri due capostipiti: $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{9}$.

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{9}=\frac{55}{36}$$

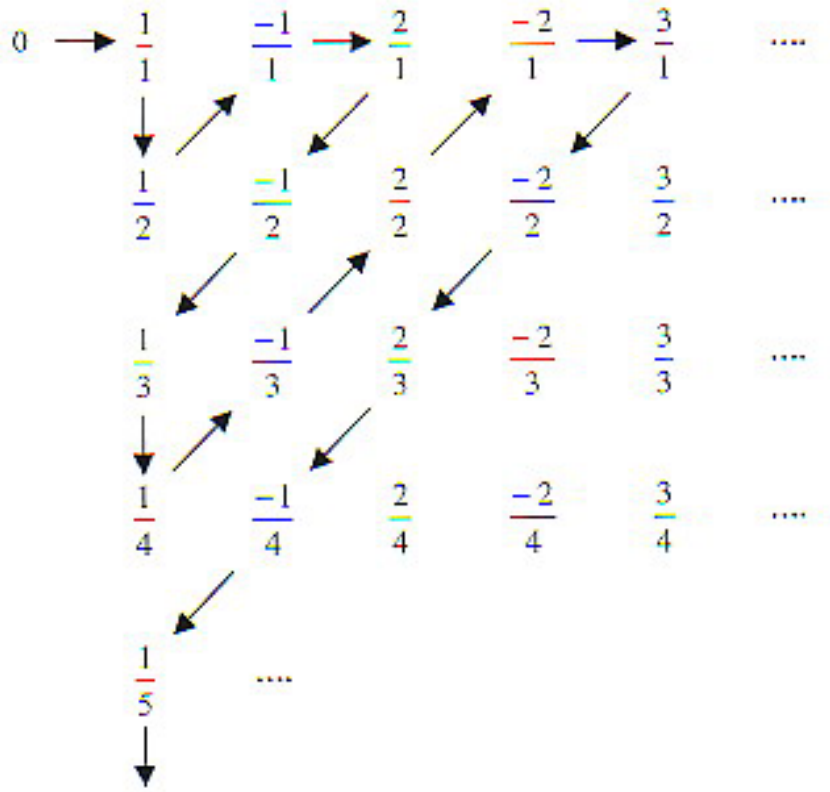
prendiamo altri due rappresentanti: $\frac{6}{8}$ e $\frac{14}{18}$

$$\frac{6}{8}+\frac{14}{18}=\frac{220}{144}$$

se i risultati ottenuti fossero rappresentanti di classi diverse la definizione data di somma in **Q** sarebbe "mal posta". Ma sono rappresentanti della stessa classe.

Quanti sono i numeri razionali?

Esattamente quanti sono i numeri naturali e i numeri interi relativi. La dimostrazione è dovuta a Cantor (1845-1918)



le frazioni vengono visitate tutte seguendo le frecce scartando le frazioni che rappresentano un numero razionale che si è già incontrato:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$