“Conoscenza intuitiva e conoscenza logica” Efraim Fischbein

Esempio 1:

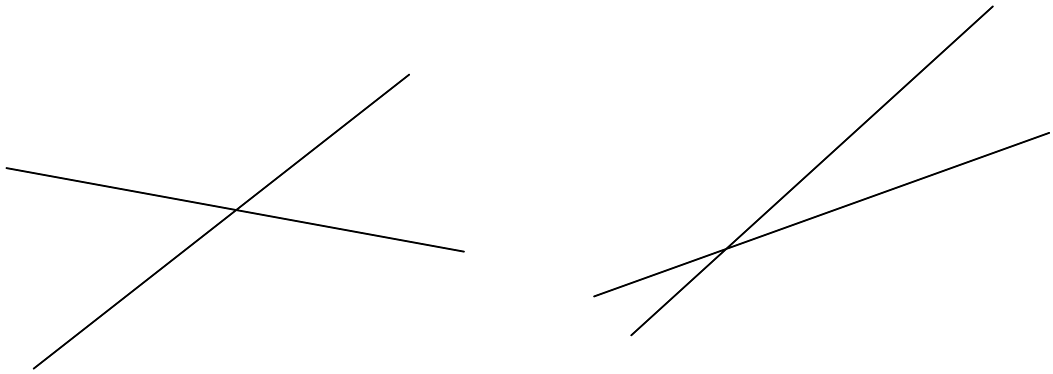
a) Un litro di succo di arancia costa 2 €. Quanto costeranno 3 litri di succo di frutta? Con quale operazione si arriva alla soluzione?
b) Un litro di succo di arancia costa 2 €. Quanto costeranno 0,75 litri di succo di frutta? Con quale operazione si arriva alla soluzione?

Alcune osservazioni:

- la soluzione del problema a) è semplice e diretta
- la soluzione del problema b) è meno semplice, viene spontaneo rispondere 2:0,75. Bisogna pensare un po’ prima di rispondere, la risposta non è diretta, c’è bisogno di una riflessione logica.

Diciamo che la risposta corretta nel primo esempio è ottenuta <u>intuitivamente</u>, mentre nel problema b) la risposta corretta è ottenuta solo indirettamente, con uno sforzo logico. Nel caso b) la risposta intuitiva è scorretta legata alla idea che “la moltiplicazione rende più grande e la divisione rende più piccolo”

Esempio 2:



è stato dimostrato che l'uguaglianza intuitiva di due angoli opposti formati da due rette che si intersecano non è assoluta. In generale gli studenti affermano che l'angolo con i lati (le braccia) più lunghi è maggiore.

Le intuizioni non sono assolute. Dipendono dal contesto, in questo caso dal contesto percettivo.

Nell'esempio 2 a) intuizione e affermazione dimostrata logicamente coincidono

Nell'esempio 2 b) intuizione e affermazione dimostrata logicamente sono in contraddizione

Le nozioni si presentano in due forme fondamentali:

Nozioni intuitive: nozioni direttamente accettabili in quanto auto evidenti.

Nozioni logicamente basate: nozioni accettabili indirettamente sulla base di una certa dimostrazione esplicita, logica.

Si possono individuare le seguenti situazioni:

a) affermazioni che vengono accettate senza dimostrazione, ma solo sulla base della loro autoevidenza

b) affermazioni che sembrano intuitivamente vere ma possono e devono essere dimostrate

c) affermazioni che non sono autoevidenti e che devono essere dimostrate per essere accettate

d) conflitto tra la reazione intuitiva ad una certa situazione e la nozione acquisita attraverso una analisi logica

Riprendiamo il problema b:

> Un litro di succo di arancia costa 2 €. Quanto costeranno 0,75 litri di succo di frutta? Con quale operazione si arriva alla soluzione?

<u>Prima risposta istintiva:</u> "con la divisione" considerando che "la divisione rendi più piccolo"

<u>Per arrivare alla risposta corretta</u> si può ad esempio ricorrere alla relazione di proporzionalità fra costo e quantità:

$$\frac{\text{quantità}1}{\text{quantità}2} = \frac{prezzo1}{prezzo2}$$

da cui si ottiene: $\frac{1}{0{,}75} = \frac{2}{x}$ $\qquad x = 2 \times 0{,}75$

l'operazione è la moltiplicazione.

Implicazioni:

- L'intuitività di una certa proprietà tende ad oscurare nella mente dello studente la sua importanza matematica
- Una proprietà apparentemente banale sembra eliminare la necessità e l'utilità di enunciarla esplicitamente, di dimostrarla o di definirla.
- **Esempi:** uguaglianza degli angoli alla base in un triangolo isoscele; proprietà associativa e commutativa dell'addizione e moltiplicazione

Conflitto tra evidenza intuitiva e stato formale:

esempio1:

campione: 71 studenti 14-15 anni

esercizio: Semplificare la seguente espressione: $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$

risultati:

- 1/3 del campione ha risposto correttamente
- 1/3 ha risolto nel modo seguente:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-2} = \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$$

- 1/3 ha commesso altri errori

Sembra che

- gli studenti che hanno considerato $(x-2)^2 = x^2 - 4$ hanno in mente formule sbagliate $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$ invece delle formule corrette. Perché intuitivamente sembra più sensato $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$ perchè quel *2ab* compare come “un fulmine a ciel sereno”;

- gli studenti prima di imparare le formule corrette avevano assunto intuitivamente che $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$. Intuitivamente sembra plausibile che l’esponente si distribuisca equamente ai due componenti dell’addizione.

Spesso la soluzione intuitiva è più forte della soluzione formale.

Immagine mentale: ciò che viene elaborato dall'allievo anche involontariamente a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che esterna). È condizionata da

- Esperienza personale
- Influenze culturali
- Stili personali

⇒ è un prodotto tipico dell'individuo

l'immagine mentale è interna dunque non espressa almeno inizialmente.

Modello mentale

1. *interpretazione statica*: Tutte le immagini mentali riferite allo stesso concetto costituiscono il relativo a quel concetto.

2. *interpretazione dinamica*: immagine limite di un processo che costituisce una successione di immagini quando non sono più richieste immagini nuove

Modello esterno: Traduzione attraverso un determinato linguaggio del modello interno

Concetto matematico

MODELLO DINAMICO

SOLLECITAZIONE 1

↓

IMMAGINE MENTALE 1

↓

SOLLECITAZIONE 2

↓

L'IMMAGINE MENTALE 1 NON E' ADEGUATA ALLA SOLLECITAZIONE 2: POSSIBILE CONFLITTO

↓

SI ADATTA L'IMMAGINE 1

IMMAGINE MENTALE 2

………

IMMAGINE N

↓

SOLLECITAZIONE N+1

↓

IMMAGINE MENTALE N E' ADEGUATA ALLA SOLLECITAZIONE N+1 NON SORGE ALCUN CONFLITTO, RESTA ACCETTATA L'IMMAGINE MENTALE N

↓

SOLLECITAZIONE N+2

↓

IMMAGINE MENTALE N E' ADEGUATA ALLA SOLLECITAZIONE N+2 NON SORGE ALCUN CONFLITTO, RESTA ACCETTATA L'IMMAGINE MENTALE N

IMMAGINE MENTALE N DIVENTA MODELLO MENTALE DEL CONCETTO MATEMATICO IN OGGETTO

Alcune osservazioni:

- quando una immagine risulta inadeguata rispetto ad un'altra relativa allo stesso concetto si crea un conflitto tra la vecchia immagine e la nuova soprattutto nel caso in cui la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto o ne dà una versione più comprensiva;
- è più facile rompere una immagine mentale piuttosto che un modello mentale
- non è detto che il modello corretto si formi al momento culturalmente giusto (dal pdv del sapere matematico o della esplicita volontà didattica dell'insegnante). Può succedere che si formi
    - un modello (stabile) intuitivamente ingenuo (esempio moltiplicazione)
    - oppure due modelli diversi per due concetti apparentemente diversi

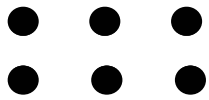
misconcezioni (concezioni erronee): idee errate che riguardano gli elementi teorici che sono alla base di teorie fisiche o nozioni di matematica. A volte tali concezioni erronee riguardano nozioni che non sono mai state oggetto di una discussione approfondita nella scuola, esse si formano nella mente dello studente in virtu' della propria esperienza personale, dell'interazione con l'ambiente, di assonanze linguistiche o del fatto che il linguaggio scientifico stesso utilizza termini del linguaggio comune, inducendo il neofita a metafore fuorvianti. Spesso tali concezioni erronee restano latenti ma non inerti perché rappresentano per lo studente il modo per dare significato a certi elementi basilari della teoria. Sono profondamente radicate, consentono di dare interpretazioni coerenti in ambiti ristretti della teoria.

Alcuni esempi

- Concetto di angolo nella geometria del piano
- Concetto di segmento
- Concetto di funzione
- Concetto di variabile
- Concetto di frazione
- Concetto di limite
    - funzioni costanti: in base ad una nozione dinamica di limite alcuni allievi per considerare $\lim_{x \to a} f(x) = b$ intendono come indispensabile il progressivo avvicinamento di y a b a fronte del progressivo avvicinamento di x ad a. Cio' rende impossibile la considerazione del limite di funzioni costanti
        - *"per le funzioni costanti non è necessario calcolare il limite, tutti i punti hanno la stessa ordinata"*
        - *"con il limite devo descrivere la variazione di y causata dalla variazione di x"*

modelli parassiti: quando l'insegnante propone un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto l'immagine si trasforma in modello intuitivo: c'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello del concetto che ci si aspetta all'interno del sapere matematico.

Esempio: avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra naturali “per schieramento” si forma il modello parassita che si può enunciare “La moltiplicazione accresce”.



2x3

Modelli e problem solving

Che cosa accade, quando uno studente si trova di fronte ad un problema?

si crea un modello mentale della situazione, “rappresenta” il testo.

Ipotesi: La corretta costruzione di tale modello mentale è molto importante per la risoluzione del problema assegnato; e sembra del tutto ovvio affermare che il fatto che un problema rifletta una situazione facilmente immaginabile in tutti i suoi dettagli (ad esempio, sia riferito ad oggetti familiari, di uso comune, che l’allievo può facilmente “pensare”) possa agevolare la costruzione del modello mentale e, dunque, renda più semplice la risoluzione.

ma le cose vanno veramente così?

Una recente ricerca di B. D’Amore, condotta al livello di scuola elementare ha messo pesantemente in discussione questa assunzione.

La ricerca

È stato proposto a tre gruppi di allievi di V elementare (10-11 anni) di risolvere uno stesso problema, nel testo del quale, però, era stata inserita, per ciascuno di tali gruppi, una diversa parola.

Il testo del problema è il seguente:

Il Sig. Piero è un negoziante. Egli acquista 625 *x* a 500 lire ciascuna e le vende tutte per un totale di 480 000 lire. Qual è il guadagno per ciascuna *x*?

Alla lettera *x* sono state sostituite, per i tre gruppi di allievi, le tre “parole”:

- *matite*
- *orettole*
- *przetqzyw*

La scelta di queste “parole” era così motivata: il contesto descritto dal problema è facilmente immaginabile, in tutti i suoi dettagli, quando alla *x* è sostituita la parola *matite*. Diversa, invece, viene ad essere la situazione con *orettole* (che cosa sono queste benedette *orettole*? Da quale negoziante, nella mia esperienza, ho potuto acquistare delle *orettole*?). Eppure *orettole* è una parola “credibile”, che “suona bene”.
Potrebbe esserci qualcosa che, in italiano, viene indicato da questa parola. La terza scelta, *przetqzyw*, sembra eludere ogni residua possibilità: *non* esiste alcun *przetqzyw*. O, comunque, non posso immaginarlo.

Ecco i risultati (nella categoria E sono state raggruppate le risposte esatte, a parte gli errori di calcolo; nella categoria N quelle non esatte; le percentuali sono arrotondate all’unità):

matite	E: 56%	N: 44%
orettole	E: 53%	N: 47%
przetqzyw	E: 59%	N: 41%

Queste percentuali a parte lievissime differenze, possono essere infatti considerate *le stesse*.

Dunque, la diversa "immaginabilità" dei dettagli delle situazioni rappresentate non ha influito in modo significativo sulle percentuali di successo nella risoluzione del problema.

Che cosa è accaduto, allora? Dobbiamo arguire che gli allievi *non* hanno fatto ricorso a modelli, che essi hanno rinunciato ad "immaginare" le situazioni descritte?

Sarebbe del tutto errato adottare sbrigativamente spiegazioni di questo genere. Riteniamo infatti che gli allievi *abbiano* fatto ricorso a modelli, indubbiamente; ma resta il fatto che la presenza di un elemento in parte o del tutto sconosciuto (*orettole*, *przetqzyw*) *non* li ha minimamente turbati. Non ha, insomma, modificato le loro strategie risolutive (e, quindi, le percentuali dei successi ottenuti). Possiamo notare che le situazioni descritte e immaginate, nei tre casi esaminati, avevano lo stesso grado di "complessità": si trattava, in tutti i tre casi, di una (innocua) situazione *concreta*, dell'acquisto di un "qualcosa" (non importa di "che cosa") da parte di un negoziante.

La possibilità di immaginare una situazione *in tutti i suoi dettagli*

- non appare decisiva per l'impostazione della corretta risoluzione di un problema.
- non sembra agevolare lo studente nella ricerca della soluzione;
- talvolta, tale "immaginabilità" può addirittura costituire un ostacolo per la risoluzione

Nel caso della risoluzione di problemi, il fallimento può avvenire nelle fasi seguenti:

- *Lettura* del testo.
- *Comprensione* (traduzione) del testo.
- *Trasformazione* del testo in modelli (grafici etc.).
- *Applicazione* della tecnica risolutiva (aritmetica etc.).
- *Codificazione* della risposta.

Esempio: L'INFINITO
Infinito potenziale, infinito attuale

La genesi del concetto di infinito è lunga e delicata, in particolare, la considerazione dell'infinito in termini *potenziali* contrapposto all'infinito *attuale* è molto antica; ricordiamo la spiegazione di L. Geymonat:

«Si dice che una grandezza variabile costituisce un "infinito potenziale" quando, pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti… il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla invece di "infinito attuale" quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi; se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte a un infinito attuale, perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti».

L'efficacia intuitiva dell'infinito potenziale, concepito nei termini di una quantità che può essere progressivamente ed indefinitamente incrementata, può rendere preponderante il

ruolo di tale idea nei confronti del concetto, matematicamente più impegnativo, di infinito attuale.

Analisi di due situazioni:

1) introduzione, nella III classe del liceo scientifico (allievi di 16-17 anni) dell'insieme dei numeri primi, con riferimento alla dimostrazione di Euclide dell'infinità di tale insieme. Si noti che l'approccio di Euclide all'infinito è collegato alla visione aristotelica e dunque è impostato sull'infinito potenziale.

Il test è stato basato sulla dimostrazione data da Euclide dell'infinità dell'insieme dei numeri primi (proposizione XX del Libro IX degli *Elementi* euclide è riferita all'infinità in senso potenziale dell'insieme dei numeri primi)

Esistono [sempre] numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre

Dimostrazione: Supponiamo che $p_1 = 2 < p_2 = 3 < ... < p_r$ siano... numeri primi. Poniamo quindi $P = p_1*p_2*...*p_r+1$. O p è primo oppure se non è primo sia p un primo che divida P; allora p non può essere alcuno dei $p_1, p_2, ..., p_r$, altrimenti p dividerebbe la differenza $P - p_1*p_2*...*p_r = 1$, il che è impossibile. Dunque questo primo p è un altro primo, e $p_1, p_2, ..., p_r$ non sono tutti i numeri primi.

2) la sistemazione del concetto di infinito, nella V classe del liceo scientifico (allievi di 18-19 anni) con il concetto di limite.

È stato rilevato che:

- l'infinito potenziale è chiaramente accettato dagli allievi della III classe del liceo scientifico; ciò conferma che l'apprendimento del concetto di infinito, in questa fase del curriculum può essere utilmente collegato ad una concezione potenziale.
- l'introduzione del concetto di infinito nella scuola secondaria è comunque una fase assai delicata del curriculum matematico; l'apprendimento di questo concetto deve essere attentamente e continuamente controllato dall'insegnante.
- lo studio dell'Analisi matematica, nella V classe, *non* sembra infatti migliorare significativamente la comprensione del concetto di infinito: i risultati degli studenti della V classe non sono sostanzialmente migliori di quelli degli studenti di III; spesso le giustificazioni fornite non sono valide.
- non è stata riscontrata alcuna rilevante interpretazione dell'infinito in senso attuale.

Un'interpretazione di tali risultati può essere collegata al diverso ruolo della componente astratta nelle concezioni potenziale e attuale dell'infinito.
L'infinito potenziale, infatti, si basa su di un modello piuttosto semplice: l'allievo può immaginare, senza particolari difficoltà, la ripetizione di un atto concreto. Ad esempio, non sono richieste capacità particolari per immaginare l'atto di aggiungere un elemento ad un insieme (l'allievo può pensare di inserire una nuova pallina in un sacchetto con altre palline) o l'atto di muovere un passo in avanti su di una strada. Né sono richieste capacità particolari per immaginare l'indefinita ripetizione di tale atto (a parte qualche difficoltà "pratica", come le dimensioni del sacchetto o la lunghezza della strada, le quali però non sempre sembrano turbare l'allievo):

basta pensare di rifare la stessa cosa tante, tante volte, senza fermarsi mai. Ecco naturalmente "immaginato" l'infinito (potenziale).
A quale modello, invece, si fa riferimento per dar corpo al concetto di infinito in senso attuale? Com'è possibile (nelle parole sopra citate di L. Geymonat) riferirsi «ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi»? La situazione è molto meno semplice: la considerazione degli (infiniti) punti di un segmento (Geymonat, 1970, I, p. 58), ad esempio, è causa di grossi guai, come il conflitto tra la nozione di insieme *infinito* e di insieme *illimitato*

Ostacoli e apprendimento

classificazione di G. Brousseau:

1) *Ostacoli di origine ontogenetica*. Si tratta di ostacoli che dipendono dai limiti neuro-fisiologici dell'allievo. Ogni insegnante sa che di fronte a sé non vengono a trovarsi studenti "ideali", pressoché perfetti, bensì ragazzi in carne ed ossa, talvolta limitati, insicuri: queste caratteristiche possono influenzare (negativamente) il rendimento scolastico (Pontecorvo, 1981).
2) *Ostacoli di origine didattica*. Dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante: dunque proprio l'insegnante può operare in termini decisivi per limitare l'influenza di que sto genere di ostacoli.
3) *Ostacoli di natura epistemologica*. Dipendono dalla natura della disciplina (e sono, dunque, inevitabili). Inutile illudersi: alcuni contenuti matematici *non* sono banali, *non* sono immediatamente comprensibili. Se, da un lato, è assurdo che l'allievo "rinunci in partenza", che finisca per trincerarsi dietro ad un "io non ce la farò mai a capire questa roba" d'altro canto è sciocco e

controproducente presentare tutta la matematica come un elementare e divertente giochetto. *Non è così*. La matematica è bella, certo; e vale davvero la pena di impegnarsi a fondo per comprendere la sua eleganza. Ma non sempre la matematica è "facile".

La visualizzazione

Due definizioni:

1. ***Sémiosis (semiotica)*** = acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni

2. ***Noésis (noetica)***= l'acquisizione concettuale di un oggetto,

La rappresentazione di un oggetto matematico può non essere semplice, in quanto, come nota R. Duval,

> «gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione... come sono gli oggetti comunemente detti 'reali' o 'fisici'»;

$$\Downarrow$$

> «le diverse rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico sono assolutamente necessarie».

la varietà dei possibili registri rappresentativi è utile e indispensabile per l'apprendimento.

«Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall'esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione.

la *sémiosis* è inseparabile dalla *noésis*» (Duval).

OGGETTIVA INACCESSIBILITA' ALLA PERCEZIONE

NECESSITA' DI RAPPRESENTANTI SEMIOTICI

ATTIVITA' MATEMATICA

- **SUGLI OGGETTI**
- **SUI RAPPRESENTANTI $\Rightarrow$ PARADOSSO COGNITIVO**

Possibili rappresentazioni di un oggetto matematico:

- le rappresentazioni grafiche
- le figure geometriche
- la scrittura algebrica
- la lingua

Esempi:
- registro figurale e registro algebrico (retta)
- registro decimale e registro figurale (rappresentazione dei numeri sulla retta)

Le caratteristiche della semiotica sono:

- Rappresentazione (in un dato registro)
- Trattamento (trasformazione di una rappresentazione nello stesso registro semiotico)
- Conversione (trasformazione di registro)

La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di usare più registri di rappresentazione semiotiche degli stessi concetti ovvero

Costruzione di conoscenza in matematica **=** **unione di 3 azioni sui concetti:**

1. Rappresentare i concetti in un dato registro
2. Trattare le rappresentazioni ottenute all'interno di un dato registro
3. Convertire le rappresentazioni da un registro ad un altro

Alcuni siti

http://www.irre.lazio.it/istituto/pagina1.htm

http://www.liceo-vallisneri.lu.it/testi.htm

http://www.fardiconto.it/

http://www.matematicamente.it/

http://www.syllogismos.it/

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/arzarello/