Clausule del contratto didattico

Ogni problema ha una soluzione + Ogni soluzione richiede conti (clausula immagine della matematica + attese presupposte dell'insegnante)

Esempio (III elementare, II media): *Giovanna e Paola vanno a fare la spesa; Giovanna spende 10.000 lire e Paola spende 20.000 lire. Alla fine chi ha più soldi nel borsellino, Giovanna o Paola?*

Risoluzione tipo:

Nel borsellino rimangono più soldi a Giovanna
Questo problema si deve risolvere quindi probabilmente partivano dalla stessa somma

30-10=20
10x10=100
} e.g.f.

Esigenza della giustificazione formale (e.g.f.)

Prendiamo in considerazione la ricerca (Bagni, 1996), basata sul seguente test relativo alla risoluzione di disequazioni irrazionali quadratiche proposto ad allievi di due classi III liceo scientifico. In entrambe le classi, al momento del test, erano già state introdotte le disequazioni irrazionali quadratiche e per la loro risoluzione erano state proposte, dimostrate e applicate in numerosi esempi le regole usuali che qui ricordiamo:

$$\sqrt{A(x)} \le B(x) \Rightarrow \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \ge 0 \\ A(x) \le [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} \ge B(x) \Rightarrow \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ B(x) \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) \ge [B(x)]^2 \end{cases}$$

Determinare i valori di x appartenente a ***R*** *per i quali risulta:*

$\sqrt{x} \le 6 - x$	$\sqrt{x-1} \ge 1 - x$	$\sqrt{x} \le 1$
$\sqrt{x} \ge 0$	$\sqrt{x} \le -1$	$\sqrt{-x} \ge 0$

tempo accordato: 30 minuti;

uso di strumenti: non è stato consentito agli allievi l'uso di tavole numeriche né della calcolatrice scientifica.

Struttura del test:

a) e b) quesiti che richiedono l'uso delle regole risolutive tradizionali complete

c) quesito che si può risolvere senza l'uso delle regole risolutive tradizionali complete

d), e), f) quesiti che si risolvono senza l'uso delle regole risolutive tradizionali che anzi creano una sostanziale complicazione del procedimento risolutivo.

Risultati del test

	a	b	c	a)+b)+c)	d	e	f	d)+e)+f)
Risposte esatte	66%	58%	69%	76%	60%	60%	61%	63%
Risposte in parte esatte, incomplete	13%	15%	8%		2%	6%	2%	
Risposte errate	17%	19%	19%	24%	36%	19%	31%	37%
Risposte non date	6%	8%	4%		2%	15%	6%	
					58% dei casi vengono risolti usando le regole tradizionali, di cui il 36% esatto o parzialmente esatto			

<u>Considerazioni:</u>

- gli allievi sono mediamente preparati a risolvere disequazioni come quelle proposte in a), b), c) ovvero con l'uso di tecniche di risoluzione tradizionali
- molti allievi denunciano un certo disagio a risolvere esercizi apparentemente più semplici e che non richiedono l'uso delle regole tradizionali per essere risolti
- tali esercizi vengono spesso risolti applicando le regole ad es. b)

$$\sqrt{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 0 \geq 0 \\ x \geq 0^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

Per i quesiti d), e), f) su di un totale percentuale di risposte esatte o in parte esatte del 63% si ha che:
risposte esatte o quasi esatte (proc. tradizionale) 36%

risposte esatte o quasi esatte (proc. non tradizionale) 27%

Errori più frequenti nell'uso di procedimenti non tradizionali

$\sqrt{x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \Re$

Intervista:

"Non ho usato le formule e non pensavo di essere ugualmente obbligato a porre la condizione di realtà. Avrei fatto meglio a non fidarmi e ad applicare le formule"

$\sqrt{x} \leq -1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 1$

$\sqrt{-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varnothing$

$\sqrt{-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \Re$

Come interpretare i comportamenti degli allievi?

L'abilità tecnica conseguita nel risolvere con un ben determinato procedimento le disequazioni irrazionali quadratiche standard finisce per condizionare l'allievo i termini di

- sicurezza nel raggiungimento della risposta esatta e quindi nel soddisfacimento della richiesta dell'insegnante;
- sicurezza di avere una valutazione positiva perché si utilizza il metodo indicato dall'insegnante

Sembra dunque che molti allievi si sentano obbligati (dal contratto didattico) a percorrere SOLO ED ESATTAMENTE LA STRADA INDICATA DALL'INSEGNANTE evitando di affrontare autonomamente l'esercizio

(da Disequazioni irrazionali quadratiche: apprendimento e contratto didattico G.T. Bagni L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol. 198 n. 2 aprile 1996)

Delega formale

Problema (Alan Schoenfeld 1987a): *Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo di addestramento, quanti bus devono essere usati?*

Risultati:

- 45.000 allievi quindicenni
- 23% ha dato la risposta attesa 32

Esperienza ripetuta da D'Amore con i seguenti risultati:

- 31,3333333333
- 31,(3)
- 31,3
- pochi 31 (controllo semantico "gli autobus non si possono spezzare")
- pochi 32

"lo studente legge il testo, decide che l'operazione da effettuare è la divisione e che i numeri da utilizzare sono 1128 e 36. A quel punto scatta la clausula di delega formale : non tocca più allo studente ragionare e controllare. Egli lascia ogni controllo di tipo razionale, critico e di controllo all'algoritmo o alla macchina calcolatrice. Spesso lo studente non ha interesse per eventuali incoerenze interne alla propria risoluzione.

Effetto einstellung

Spesso, per consolidare l'abilità degli allievi nell'applicazione di un procedimento, si ritiene utile far ripetere molte volte lo stesso esercizio, ovvero esercizi molto simili, tali da presentare le stesse difficoltà e da essere risolti mediante lo stesso metodo.
Come visto nella ricerca sulla risoluzione delle disequazioni irrazionali parecchi studenti, abili nella risoluzione di disequazioni irrazionali mediante alcune "regole" sintetizzate da formule ben note, finiscono per applicare tali formule anche quando ciò non risulta necessario. Anzi: essi applicano le formule studiate nonostante ciò comporti un'evidente complicazione del procedimento risolutivo!
La ripetizione di esercizi può essere utile per migliorare alcune abilità tecniche (fattore che non è da sottovalutare), ma *non* serve per migliorare i risultati degli studenti nel *problem solving*.

Obbligo parassita

Esempio: (I superiore)
L'insegnante ha spiegato come si trova l'area del parallelogramma:

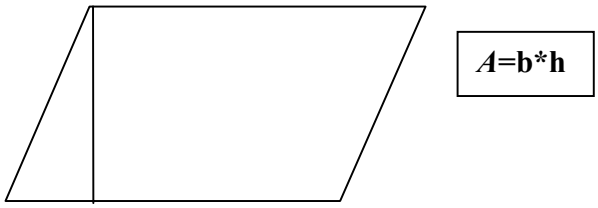

Figura 1

Si disegna il parallelogramma seguente:

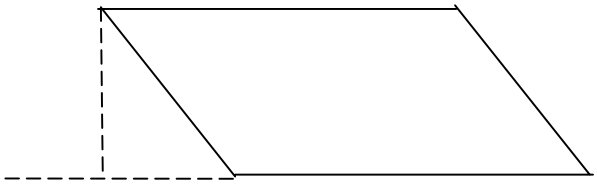

Figura 2

C’è una denuncia del rispecchio del modello. La convenzione implicita è che l’altezza del parallelogramma deve incontrare la base, altrimenti non si può calcolare l’area.

Obbligo parassita: l’insegnante chiede di calcolare l’area di trapezi come in figura 1 e non 2.

PROBLEM SOLVING

Alcune definizioni di **PROBLEMA:**

(Polya, 1983) «Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano»

Duncker (1945) «Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla»

Attività di risoluzione dei problemi come:

- strumento per favorire l'acquisizione di certi contenuti matematici
- esercizio intellettuale estremamente rilevante e caratterizzante del pensiero umano

Nella valutazione dei livelli dello sviluppo mentale dei un allievo distingueremo tra:

- Livello di *sviluppo effettivo*: livello di sviluppo delle funzioni mentali ottenuto da cicli evolutivi già completati.

- Livello di *sviluppo potenziale*: è il livello di sviluppo che potrà essere raggiunto in un futuro più o meno prossimo, evidenziabile dalla proposta di un problema che, pur superando il livello di sviluppo effettivo, può però essere affrontato con un aiuto esterno (ad esempio il suggerimento dell'insegnante).

Dunque, oltre al livello di sviluppo effettivo c' è una zona, ancora non "posseduta" dall'allievo, il cui controllo non è però del tutto impossibile, del tutto irraggiungibile: un problema concepito nell'ambito di questa zona, entro il livello che denominiamo di sviluppo prossimale, può essere affrontato (a volte con successo) grazie ad una… piccola spinta. La nostra esperienza scolastica ci conferma che è talora sufficiente un'indicazione, un suggerimento per "mettere in moto" alcuni allievi di fronte a problemi che, inizialmente, sembrano provocare un vero e proprio blocco nell'allievo, una situazione di incapacità ad impostare la risoluzione6.

Proprio in questo si evidenzia il ruolo del problem solving. Esso ha dunque un campo d'azione ben definito, che chiamiamo zona di sviluppo prossimale.

Secondo L.S. Vigotskij, la zona di sviluppo prossimale «è la distanza tra il livello di sviluppo così com'è determinato dal *problem solving* autonomo e il livello di sviluppo potenziale così com'è determinato attraverso il *problem solving* sotto la guida di un adulto o in collaborazione con i propri pari più capaci» (Vigotskij, 1987).

⇒ *Il problem solving genera apprendimento*.

Grazie a delle attività di *problem solving*, infatti, l'allievo può superare significativamente il livello di sviluppo effettivo per addentrarsi nella zona di sviluppo prossimale: quindi, debitamente

consolidato, questo processo porta ad innalzare il livello di sviluppo effettivo.

La risoluzione di un problema è spesso frutto di una attività intuitiva e come tale non sempre è razionalmente motivata. Per questo motivo assume una grande importanza l'attività di riflessione sulle proprie intuizioni e sui metodi utilizzati per la risoluzione del problema. Tale attività prende il nome di **metacognizione**.

Con **processi metacognitivi** si intendono almeno 2 attività:

1) analisi esplicite sulle proprie conoscenze
2) e sul loro uso, il che comporta: analisi sui procedimenti seguiti nel risolvere problemi.

Molta acquisizione di nuove cognizioni passa attraverso la consapevolezza raggiunta dal soggetto che apprende, se riflette sul proprio bagaglio culturale. Se l'insegnante assiste l'allievo in tale attività contribuisce a fargli superare la soglia di sviluppo effettivo e quindi ogni attività metacognitiva appartiene alla zona di sviluppo prossimale.

Le riflessioni personali esplicite sono fatte, rispetto alla risoluzione:

- **in corso d'opera:** mentre lo studente risolve il problema si interroga su quello che sta facendo, sia analizzando i singoli passi (analisi locale) sia analizzando il complesso della propria strategia (analisi globale)
- **preliminari:** per una analisi logica della situazione problematica

- **successive:** analisi personali, analisi assistite dal docente, analisi collettiva di tutte le soluzioni proposte

Problema scolastico vs Problema reale

I bambini,e non solo loro, "vedono" il problema scolastico come qualcosa di completamente svincolato dal problema reale.
Esiste una netta frattura tra problemi reali e problemi scolastici sia a livello di caratteristiche strutturali che a livello di processi risolutivi.

Problema scolastico	Problema reale
È espresso attraverso un testo	
È formulato da una persona che non ne sarà il solutore	È in generale espresso dal solutore
Sono elencati i dati essenziali	La selezione dei dati è a carico del solutore
Dati → esplicitazione obiettivo alla fine sottoforma di domanda	Esplicitazione obiettivo da raggiungere → selezione dei dati
Problemi già risolti almeno dall'insegnante	Problemi che non sono già stati risolti
La soluzione esiste (ed è unica) e si determina in pochi minuti	Non si sa se c'è una soluzione e non si sa in quanto tempo si riuscirà a trovarla
Non sono accettate interazioni con la realtà	C'è una continua interazione con la realtà
È chiaramente contestualizzato: si dovranno usare conoscenze di matematica e addirittura quelle acquisite più di recente	Non si sa a priori in quale ambito vanno cercate le risorse per risolvere il problema.
Dati numerici "belli"	Dati numerici "brutti"

Gli studenti devono essere in grado di risolvere sia problemi reali sia problemi teorici.

Problema vs Esercizio

Si parla di:

- **Esercizio** quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento.

- **Problema** quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore, alcune di esse possono essere in via di esplicitazione, la risoluzione richiede un atto creativo da parte del solutore

	Problema	**Esercizio**
Nell'insegnamento	- Strumento di acquisizione di conoscenza - Oggetto di insegnamento	- Strumento per consolidare conoscenze e abilità - Strumento per verificare conoscenze e abilità
Privilegia	Processi	Prodotti
L'insegnante	- Sceglie i problemi - Segue i processi	- Sceglie gli esercizi - Corregge e valuta i prodotti
Il soggetto ha un ruolo	Produttivo	Esecutivo

	Esercizi anticipati: si tratta di attività di problem solving matematico scolastico, nella quale un esercizio in genere proposto in una classe viene proposto in una classe inferiore. In tal modo l'esercizio diventa un problema.

BIBLIOGRAFIA

B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica* ,Pitagora Bologna
B. Jannamorelli, *Allievo, Insegnante, Sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica* Atti del 4 seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 1999 Edizioni Qualevita
B. Jannamorelli, A. Strizzi, *Insegnamento/Apprendimento della Matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza,* Atti del 1 seminario Internazionale di Didattica della Matematica Sulmona 1993, Edizioni Qualevita
E. Fischbein, *Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività matematica*, Pitagora
G.T. Bagni, *Appunti di didattica della matematica*
R. Zan *Problemi e convinzioni*, Pitagora Bologna

Alcune riviste di didattica della matematica

L'nsegnamento della matematica e delle scienze integrate Centro U. Morin

La matematica e la sua didattica Pitagora

L'educazione matematica