

# Insegnamento, apprendimento.



L'insegnante invia il messaggio; l'allievo lo riceve, lo fa (definitivamente) proprio: apprende.

*✎ Non esistono, molte ricette universalmente valide da proporre (da imporre) indiscriminatamente agli insegnanti*

*✎ Il lavoro dell'insegnante non potrà mai essere surrogato da regole fisse, esterne, regolato da manuali onnicomprensivi.*

**Un rapporto interpersonale non deve essere incanalato in percorsi studiati a tavolino, secondo schemi precostituiti, rigidi: ridurre la complessa e delicata attività dell'insegnante (e dell'allievo) all'applicazione di una fredda fila di precetti significherebbe banalizzarla**

**⇒ insegnamento e apprendimento lasciati al caso? (bravo insegnante o bravo studente ????????)**

**L'insegnamento e l'apprendimento** della matematica non sono il prodotto di un'attività "artistica", ma **sono il prodotto di un'attività razionale.** L'insegnante e l'allievo possono (devono) riflettere continuamente sul proprio operato, per rendersi conto delle eventuali difficoltà, per capirne le radici e dunque per migliorare la situazione. Per rendere sempre più vivo ed efficace l'inseparabile binomio insegnamento-apprendimento.

**Scopo del corso:** riflessioni su alcune questioni fondamentali della didattica della matematica.

## **Che cosa significa didattica?**

se è vero che il termine *didattica* si riferisce primariamente all'insegnamento, ha senso lo studio e la presentazione di una "**didattica in generale**", o sarebbe necessario fare esplicito riferimento alla **didattica specifica**, alla didattica della materia che si insegna?

Ci sono, insomma, regole, indicazioni, problemi, soluzioni comuni (valide per l'apprendimento di ogni materia, dunque per ogni insegnante), oppure le varie situazioni, le varie discipline necessitano di un approccio particolare (per cui si dovrà parlare di: didattica della matematica, didattica della lingua italiana, didattica delle scienze etc.)?

## **2 posizioni**

1) esiste *soltanto* una didattica generale, la quale si occupa dei meccanismi dell'apprendimento; le didattiche specifiche, le

didattiche disciplinari altro non sono che le applicazioni della didattica generale ai singoli casi concreti.

2) la didattica generale, in sé, è inconcepibile: si insegna *qualcosa* e dunque la didattica non può che essere la didattica di *qualcosa*.

**vi sono problematiche per così dire “a monte” delle didattiche specifiche, che non dipendono dalle singole discipline... Teorizzando (o generalizzando) queste problematiche, si crea una teoria della didattica che non dipende più esplicitamente o direttamente dalle discipline»**

 esistono le didattiche specifiche (disciplinari) ed esiste la didattica generale.

 Esistono questioni che, pur sorgendo da situazioni proprie della singola disciplina, sono generalizzabili e la cui importanza, una volta operata tale generalizzazione, è comune.

## **Didattica della matematica**

- 1. Divulgazione delle idee**
- 2. Epistemologia dell'apprendimento**

## **1. Divulgazione delle idee**

lo scopo centrale dell'azione e della ricerca didattica è il miglioramento dell'insegnamento. La logica sottintesa a tale interpretazione è:

*ad un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi.*

## **Esempio: introduzione serie numeriche**

### **Paradosso di Zenone: Achille e la tartaruga**

In una gara di corsa tra il veloce Achille e la tartaruga, Achille concede un tratto di vantaggio alla tartaruga; dopo la partenza, Achille impiega un certo tempo per coprire tale tratto; ma in quell'intervallo di tempo la tartaruga avanza; quindi Achille deve impiegare un ulteriore intervallo di tempo per coprire tale seconda distanza; ma in quell'intervallo di tempo la tartaruga percorre un terzo tratto, e così via... Il risultato, paradossale, è che il velocissimo Achille non raggiungerà mai la lenta tartaruga.

«Se... consideriamo la retta come un continuo, e supponiamo che abbia lunghezza di 100 m il vantaggio concesso da Achille alla Tartaruga e posto che Achille vada 10 volte più veloce della Tartaruga, vediamo subito che il paradosso decade. Infatti, una volta che Achille avrà raggiunto la posizione di partenza della Tartaruga,

essa avrà percorso 10 m. Raggiunta questa seconda posizione, Achille avrà uno svantaggio di 1 m; la Tartaruga si sarà nuovamente spostata; ma, raggiunto quest'altro punto, Achille avrà uno svantaggio di 1/10 di m... Dunque, per raggiungere la Tartaruga, Achille dovrà percorrere una distanza:

$$d = 100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + \dots$$

... da cui:  $d = 111,1111\dots$  Questo è un numero ben determinato, e non è affatto infinito. Achille avrà già superato la Tartaruga, ad esempio, dopo 111,111112 m» (D'Amore & Matteuzzi, 1976, pp. 28-29).

Ecco dunque un semplice esempio di un'addizione con infiniti addendi che non potrà mai superare, per quanti addendi consideriamo, un numero finito!

## **Equivoco 1: converge perché il termine generale della serie è infinitesimo**

**(ma è una CN e non CS)**

**Lo possiamo convincere con la dimostrazione data da Nicola d'Oresme (1323 -1382),**

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

ovvero di raggruppare le frazioni entro parentesi contenenti rispettivamente 1, 2, 4, 8, ... frazioni. La somma delle frazioni situate in ciascuna parentesi è allora non minore di  $1/2$ ; ed è possibile in questo modo ottenere un *qualsiasi* numero di parentesi. Dunque la somma della serie esaminata è maggiore di ogni costante arbitrariamente scelta.

## un bel controesempio!

### Ma quante cose date per scontate

 l'introduzione (simpatica, elegante) di alcuni contenuti elementari relativi alle serie numeriche mediante citazioni di storia della matematica.

 abbiamo supposto che la reazione del nostro allievo sia stata proprio tale da portarlo ad accettare che una somma di infiniti addendi può essere limitata.

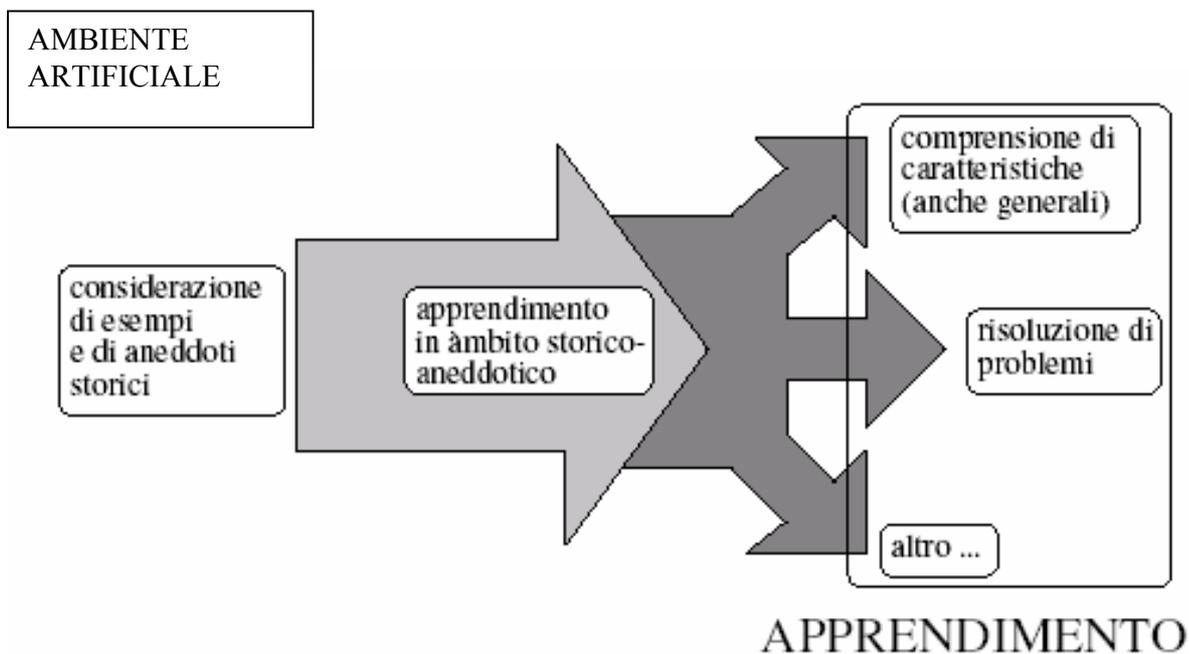
 abbiamo supposto che l'allievo sia stato tratto in inganno dall'esempio indicato ed abbia interpretato erroneamente una condizione necessaria come una condizione sufficiente (per la convergenza di una serie numerica).

 Per superare questo eventuale problema, abbiamo quindi proposto un procedimento di Nicola d'Oresme.

 E abbiamo nuovamente supposto che la reazione del nostro allievo sia stata proprio quella da noi sperata (ipotizzata), ovvero tale da portarlo ad accettare definitivamente che la condizione in questione è necessaria ma non sufficiente.

## Problema: noi agiamo sull'insegnamento.

non possiamo essere certi, *a priori*, dell'effetto che il nostro (rinnovato, migliorato) insegnamento potrà avere sull'allievo; non possiamo sapere con sicurezza che certe sollecitazioni porteranno a ben determinate (ed auspicabili) reazioni nella mente dell'allievo, che sono plausibili, ma non obbligatorie. Perciò la sottintesa equazione: "migliore insegnamento" uguale (sempre!) a "migliore apprendimento" è, purtroppo, tutt'altro che scontata.



**Le capacità cognitive e procedurali restano spesso ancorate all'ambito nel quale si sono raggiunte non si sa trasferire la conoscenza ad altri ambiti se non in casi particolari**

**Limite:** nell'incertezza che permane a proposito degli effetti (sull'apprendimento) di certe scelte che noi insegnanti operiamo (con riferimento al nostro insegnamento). In particolare, tale incertezza riguarda il *transfer* cognitivo.

**Didattica A (=Ars). Si basa su**

- 1. Fiducia nello strumento**
- 2. Grado di convincimento operato dal proponente**
- 3. Consenso attorno alle proposte**

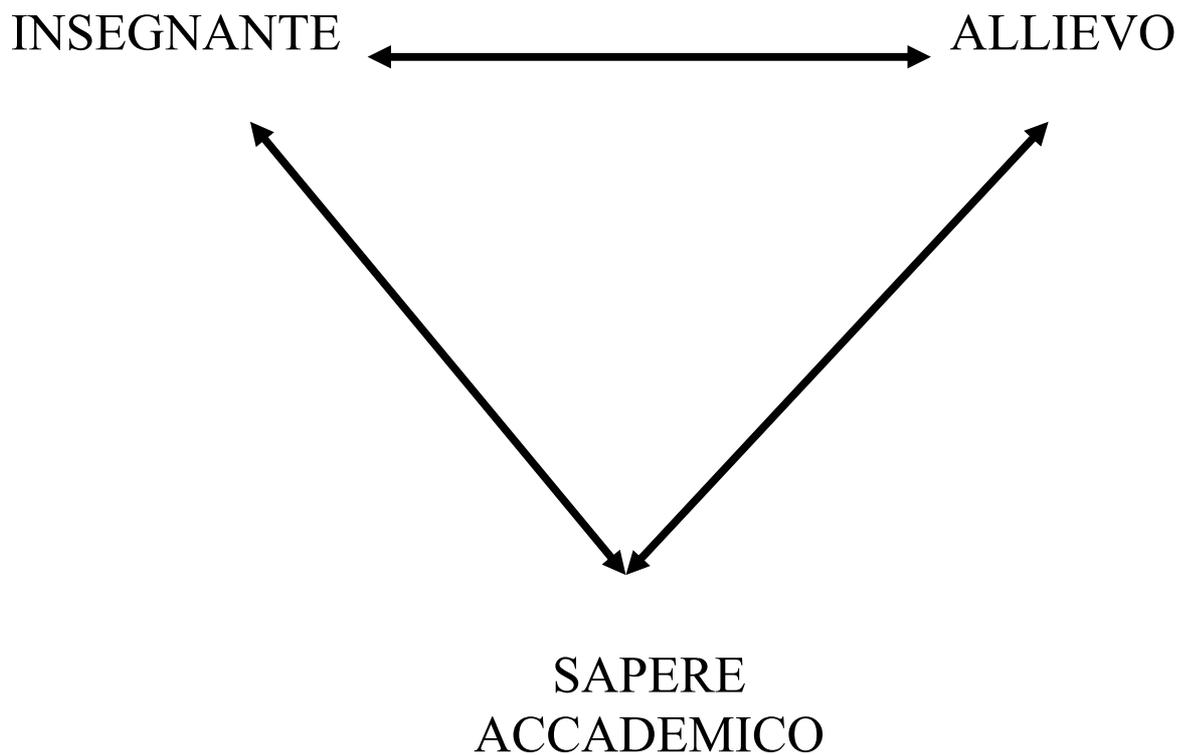
## **2. Epistemologia dell'apprendimento**

È necessario intervenire sulla struttura e sugli scopi della ricerca didattica, inserendo una *verifica empirica* che possa rendere evidenti gli effetti sull'apprendimento delle scelte del l'insegnante.

**Test+interviste**

# **Ruolo Apprendimento/Insegnamento Chevvalard**

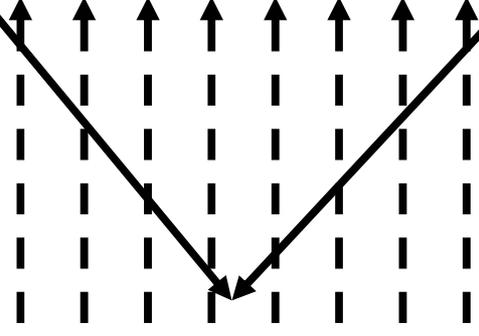
## **Sistema didattico minimo**



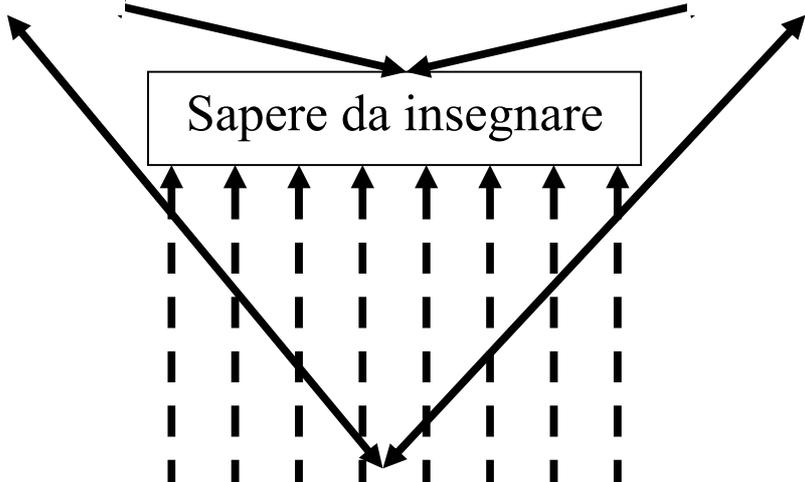
INSEGNANTE ← → ALLIEVO

Sapere da insegnare

Trasposizione  
didattica



SAPERE  
ACCADEMICO



È chiaro che l'insegnante si trova implicato in una serie di rapporti di estrema delicatezza:

- da un lato deve operare una trasposizione didattica dal sapere (quello che sorge dalla ricerca) al sapere insegnato (quello della pratica in aula) (Chevallard, 1985; 'Amore, 1999).
- dall'altro però deve tener conto del sistema didattico e dell'ambiente sociale e culturale, cioè della noosfera in cui si trova ad agire.

**Noosfera:** il luogo dei dibattiti di idee significative sull'insegnamento, le finalità della Scuola, gli scopi della formazione, le attese della società per quanto attiene Scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali);

la noosfera è l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla Scuola).

Quindi:

**trasposizione didattica** intesa come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione, del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone.

Uno dei compiti che ciascun insegnante deve quotidianamente affrontare per rendere possibile l'apprendimento, dunque, si identifica nella corretta ed efficace trasposizione didattica del sapere accademico relativo alla propria disciplina. Tale trasposizione consiste nel costruire le sue lezioni attingendo dalle fonti dei saperi, tenendo conto delle orientazioni fornite dalle istituzioni e dai

programmi per adattarli alla propria classe (livello degli allievi, obiettivi).

Si estrae un elemento di sapere dal suo contesto per ricontestualizzarlo nel contesto sempre unico della propria classe.

### **Esempio: il concetto di funzione**

«Dati due insiemi, diciamo  $X$  e  $Y$ , una funzione è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di  $X$  uno ed un solo elemento di  $Y$ . L'insieme  $X$  si chiama dominio della funzione» (Apostol, 1977, I, p. 62).

«Una funzione  $f$  è un insieme di coppie ordinate  $(x; y)$  in cui non ve ne siano due con lo stesso primo membro. Se  $f$  è una funzione, l'insieme di tutti gli elementi  $x$  che compaiono al primo membro delle coppie  $(x; y)$  in  $f$  è detto dominio di  $f$ » (Apostol, 1977, I, p. 66).

nella pratica spesso una funzione non viene introdotta soltanto facendo riferimento alle coppie ordinate  $(x; y)$ ; frequentemente viene privilegiato un approccio più intuitivo

«Come alternativa alla descrizione di una funzione  $f$  per mezzo della specificazione esplicita delle coppie che contiene, è normalmente preferibile descrivere il dominio di  $f$  e poi, a partire da ogni  $x$  del dominio, il modo con cui si ottiene il valore  $f(x)$ » (Apostol, 1977, I, p. 66).

## CONTRATTO DIDATTICO

### Esempio 1: Età del Capitano

Su una imbarcazione viaggiano il capitano, due marinai e ventitre pecore; quale è l'età del capitano?

risposta: 46 anni =  $23 \cdot 2$

### Esempio 2: episodio in seconda elementare [1]

Scenetra è una bambina di seconda elementare. Assieme a Tyrone fa parte di un gruppo di 6 alunni coinvolti in una sperimentazione. La meestra vuole riconoscere se la bambina è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici, in particolare se sa utilizzare una somma nota per trovare una somma incognita. Il suo compagno Tyrone nell'eseguire addizioni ha dimostrato di utilizzare tale strategia in modo spontaneo.

L'insegnante scrive una sotto l'altra, le due espressioni:

$$34+9=43$$

$$34+11=$$

Scenetra incolonna 34 e 11 ed esegue l'addizione.

*insegnante:* "Ma potevi utilizzare il risultato della prima espressione?"

*Scenetra:* "no" (risponde un po' turbata)

*Scenetra ritiene poco corretto ottenere il risultato utilizzando una scorciatoia al posto dell'algoritmo imparato a scuola.*

*insegnante*: "Secondo te, come avrebbe fatto Marva?"

*Scenetra*: "Avrebbe aggiunto 2 a 43."

Scenetra è in grado di collegare senza difficoltà somme note e incognite. Per verificare che la bambina utilizzi effettivamente la relazione fra le espressioni l'insegnante scrive una prima espressione scorretta

$$34+14=49$$

e aggiunge

$$32+15=$$

*insegnante*: "Come farebbe Marva?"

*Scenetra*: "48"

*insegnante*: "Quanto hai aggiunto e tolto? Come ha fatto Marva?"

*Scenetra*: "Lei ha tolto 2 e poi aggiunto 1"

⇒ le strategie spontaneamente utilizzate da Scenetra all'inizio non erano dovute a mancanza di competenze ma alla convinzione che forme abbreviate di soluzione non avevano la stessa legittimità dell'algoritmo standard, almeno in un contesto scolastico. Tale convinzione inibisce a priori la possibilità di utilizzare conoscenze e abilità seppure disponibili [Zan]

l'alunno interpreta la situazione che gli viene presentata, le domande che gli vengono poste, le informazioni che gli vengono fornite, i vincoli che gli vengono imposti, in funzione di ciò che l'insegnante

riproduce coscientemente o no, in modo ripetitivo nella sua pratica di insegnamento.

«*contratto didattico*» *l'insieme dei comportamenti specifici del maestro che sono attesi dall'alunno e l'insieme dei comportamenti dell'alunno che sono attesi dal maestro*" (Brousseau, 1980, pp.127-128).

Le attese reciproche di insegnante e alunno rispetto al sapere "regolano" il processo di insegnamento/apprendimento di un sapere. Le azioni ripetute, possono diventare "regole stabili", e possono generare una *riduzione del senso del sapere* che può essere all'origine di difficoltà e/o errori in altri contesti e in tempi diversi del percorso di apprendimento degli alunni. [Polo, 2000]

Le azioni ripetute, possono diventate "regole stabili"

Le seguenti *Regole implicite* del contratto didattico relativo al sapere "PROBLEMA DI MATEMATICA" determinano, abitualmente, il suo funzionamento nella pratica scolastica

- La soluzione esiste (ed è unica) e si devono utilizzare.....
  - poche occasioni di incontro con problemi la cui soluzione non esiste o con più di una soluzione
  - esempio**: un giardiniere deve recintare un'aiuola triangolare. Misura i lati e trova 10m, 12m, 24m. Sapendo che la rete costa 5€ al metro quanto spende?
  - ⇒ stimolare la lettura critica del testo
- Il testo fornisce un "contesto" che induce una strategia privilegiata non sempre coincidente con la più economica o con la

più pertinente. Tale strategia (spesso data o considerata implicitamente come unica) utilizza un sapere quasi sempre identificabile a priori

- tra i saperi che potenzialmente forniscono la soluzione ha più probabilità di essere utilizzato quello che nella sequenzializzazione del programma o del libro di testo appare “più vicino”.
- Assenza di controllo/verifica della coerenza tra dati e soluzione trovata

Il modello teorico dell'insieme delle attese reciproche I-A rispetto ad un sapere S prende il nome di *Contratto Didattico relativo ad un sapere S*.

#### DEFINIZIONE

**Contratto Didattico è l'insieme dei comportamenti e delle attese reciproche dell'insegnante e dell'alunno nei confronti del sapere. Esso determina - quasi sempre in modo implicito - rispetto ad un sapere insegnato, ciò che ciascun elemento - insegnante , alunno - ha la responsabilità di gestire e di cui sarà responsabile rispetto all'altro.**

**Il contratto didattico va differenziato dal contratto pedagogico (o formativo) perché**

- **il contratto didattico è specifico del sapere**

- **esiste un contratto didattico per ogni sapere**
- **l'apprendimento di S necessita di continue rotture del contratto didattico**
- **Il contratto didattico è implicito (non è totalmente esplicitabile)**

Questa prerogativa differenzia il *Contratto didattico* dal *Contratto pedagogico (o formativo)* che invece identifica *l'insieme delle negoziazioni esplicite* di diritti e doveri reciproci dell'insegnante e dell'alunno al livello dell'interazione Insegnante-Alunno anche indipendentemente dal sapere.

**Nella pratica :**

**Il contratto pedagogico:** esplicito, unico, I-A

Più contratti didattici "funzionano" contemporaneamente. Ciascuno è relativo allo statuto di diversi saperi presenti in una stessa attività.  
Diverse relazioni didattiche I-A-S

l'apprendimento di S necessita di continue rotture del contratto didattico

che si può superare

attraverso la realizzazione

del processo di devoluzione

## DEFINIZIONE

La **devoluzione** è il processo attraverso il quale l'insegnante fa accettare (implicitamente) all'alunno la responsabilità di una situazione di apprendimento o di un problema e accetta egli stesso le conseguenze di questo transfert.

