SSIS VIII CICLO

CORSO DI

DIDATTICA DELLA FISICA CON LABORATORIO –
DIDATTICA INTRODUTTIVA AI CONCETTI DELLA FISICA CLASSICA

UNITÀ DIDATTICA

Specializzando: Dott. Mirco Andreotti

Classi di abilitazione: A049/A059

18 Gennaio 2007   A. A. 2006/2006

Indice

Indice 2
1. Testo del problema 3
2. Osservazioni preliminari 3
3. Analisi del testo 3
4. Prerequisiti 4
5. Punti fondamentali da fissare nello studio del moto circolare 5
6. Il moto circolare: velocità tangente all’orbita e accelerazione centripeta 6
   1. Velocità tangente all’orbita 6
   2. Accelerazione centripeta 7
   3. Accelerazione centripeta $a_c = v^2/R$ 8
   4. Forza centripeta: una forza che tira o che spinge? 10
   5. Forza centrifuga 10
7. Trattazione rigorosa del moto circolare con funzioni trigonometriche e derivate 11
8. Forza netta applicata al corpo in moto circolare 12
9. Velocità critica in un moto circolare piano 13
10. Risoluzione del problema 14
11. Trattazione del moto circolare nei libri di testo 15
12. Moto circolare su internet 18
13. Conclusioni 19
14. Bibliografia 20

1. Testo del problema

Una pallina è attaccata ad una estremità di una corda in moto circolare uniforme in un piano verticale. Supponi che la velocità v della pallina sia aumentata di un fattore 2.35 mentre il raggio del cerchio sia aumentato di un fattore 1.76. La massa della pallina di 145 g rimane invariata. Coma si rapporta la forza centripeta finale, F_{cf} , con la forza centripeta iniziale F_{ci} nel punto più alto della traiettoria?

2. Osservazioni preliminari

Lo scopo di questo esercizio è in primo luogo quello di eseguire un′attenta analisi del testo del problema, quindi applicare le conoscenze acquisite per la soluzione.
Già nella prima frase del problema si incontrano due informazioni che sono di fondamentale importanza per la ricerca della risoluzione del problema, cioè: *moto circolare uniforme* e *su un piano verticale.* La prima informa sul tipo di moto che si dovrà trattare, la seconda implica la presenza della forza di gravità e suggerisce quindi il problema della velocità critica nel caso appunto di un moto circolare in un piano verticale.
Questo è un esercizio con il quale si può mettere in pratica il concetto di considerare sempre la forza netta agente su un corpo.

3. Analisi del testo

Un′analisi più approfondita del testo del problema in esame ci porta a pensare ad altre ipotesi aggiuntive che risultano essere del tutto legittime nel momento in cui si cerca di immaginare una situazione che rispecchi esattamente la situazione descritta.
Il motivo che deve portare all′introduzione di ipotesi non indicate è il fatto che in un piano verticale si riesca a far muovere una pallina di moto circolare uniforme.
L′analisi più semplice delle forze che agiscono sulla pallina in una posizione arbitraria, diversa da quelle posizioni speciali come il punto più alto etc etc, porta a concludere che in generale lungo l′orbita circolare la pallina si viene a trovare sottoposta ad una forza tangenziale variabile. L′analisi più semplice infatti porta a considerare come forze agenti la tensione della corda e la forza di gravità.
In questa situazione una forza tangenziale netta non nulla implica un′accelerazione tangenziale non nulla, quindi una variazione del modulo della velocità. Dalle precedenti osservazioni sorge quindi una inevitabile domanda:

D1. Come può una pallina muoversi di moto circolare uniforme se in generale lungo la traiettoria la pallina è sottoposta ad una forza tangenziale?

La domanda è del tutto legittima e le risposte possono essere varie, più o meno corrette:

R1. il testo del problema è sbagliato perché non è possibile un moto circolare uniforme su un piano verticale se si considerano solo la forza di gravità e la tensione della corda

- ➔ *La risposta in sé è azzardata, nessuno nel problema ci dice di considerare solo queste due forze.*
- ➔ *Un problema si può considerare mal posto o non corretto nel momento in cui viene proposto una situazione che non è possibile realizzare nemmeno con ipotesi aggiuntive che non vengono esplicitamente indicate nel teso del problema, e questo non è il caso.*

R2. si può ipotizzare una forza aggiuntiva che si contrappone sempre alla forza tangenziale netta in modo da avere in ogni punto della traiettoria sempre una forza tangenziale nulla

➔ *osservazione: questa risposta è coerente con il testo del problema, inoltre questa forza che si contrappone alla forza tangenziale netta risulta dover essere nulla nel punto più alto della traiettoria, perché sia tensione della corda sia forza peso sono ortogonali all'orbita. Quindi nel momento in cui si risponde alla domanda posta, non interviene questa forza aggiuntiva e non interviene nemmeno nessuna altra forza tangenziale, in quanto in questo punto la forza di gravità contribuisce solo alla componente radiale della forza.*

R3. semplicemente non ci si preoccupa del fatto che lungo la traiettoria la forza di gravità in generale contribuisce tangenzialmente con una determinata componente, in quanto nel punto più alto non si ha nessuna componente tangenziale.

➔ *Questa situazione è interessante in quanto crea le premesse per poter analizzare il problema da un punto di vista più generale, problema ovviamente diverso da quello che viene posto. Questa nuova situazione può quindi condurre alla soluzione del problema di un moto circolare non uniforme, ma con singolari caratteristiche. Da questo ci si può anche porre il problema della velocità minima che la pallina deve avere affinchè compia indefinitamente un moto circolare senza mai fermarsi.*

4. Prerequisiti

Per poter affrontare un problema di questo tipo è necessario che gli studenti abbiano ben chiari i seguenti concetti e argomenti:

1. grandezze vettoriali
2. trigonometria e scomposizione di vettori in componenti
3. velocità e accelerazione
4. masse e forze

5. le 3 leggi del moto
6. diagrammi di corpo libero

In particolare si dovrà conoscere nei dettagli il moto circolare non solo nella forma semplice di moto circolare uniforme, ma anche nella forma di moto circolare vario. Nello studio del moto circolare si dovranno acquisire le caratteristiche fondamentali di questo moto. Sarebbe per esempio interessante affrontare prima problemi come quello descritto nella risposta R2 riportata sopra. Quindi gli argomenti da trattare sono:

1. moto circolare uniforme in un piano orizzontale
2. moto circolare vario in un piano orizzontale
3. moto circolare in un piano verticale

affrontati questi argomenti sarebbe opportuno porre quesiti in modo che facciano riferimento alle osservazioni date in precedenza in modo da poter abituare gli studenti ad analizzare il problema in modo da poter farsi una chiara idea del sistema che si sta considerando, senza necessariamente averne una analisi dettagliata in termini di equazioni, piuttosto un'analisi qualitativa in grado di spiegare che cosa succede e perché.

Per una trattazione rigorosa del moto circolare si dovranno poi conoscere i concetti di:

1. derivata rispetto al tempo di funzioni e vettori
2. studio del moto circolare con i versori tangente e normale

5. Punti fondamentali da fissare nello studio del moto circolare

Il moto circolare è un ottimo argomento per lo studio delle grandezze vettoriali come velocità e accelerazione che cambiano nel tempo. E' fondamentale, dallo studio del moto circolare, far comprendere agli studenti come l'accelerazione del corpo che si muove sulla circonferenza può essere scomposta in una componente tangenziale e in una componente centripeta e che proprio quest'ultima è la responsabile del particolare moto in questione. Bisogna quindi dimostrare e sottolineare che affinché il moto sia circolare l'accelerazione centripeta deve avere un ben preciso valore in ogni punto della circonferenza, valore che è univocamente determinato dalla velocità del corpo in quel particolare punto, cioè

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

La descrizione dell'accelerazione scomposta in tangenziale e radiale porta quindi alla dimostrazione di come il moto possa essere spiegato semplicemente spiegando quali sono gli effetti delle due componenti, cioè:

1. accelerazione tangenziale → parallela alla velocità → responsabile della variazione del modulo della velocità

2. accelerazione radiale → ortogonale alla velocità → responsabile della variazione di direzione della velocità

Questa trattazione può quindi essere generalizzata ed applicata ad un moto bidimensionale in generale, nel quale in ogni punto il corpo può essere visto come muoversi su un punto di una circonferenza con raggio determinato dalla relazione $r=v^2/a_c$. In questo caso il moto generale non è necessariamente un moto circolare, quindi r è indicato in minuscolo perché variabile da punto a punto dell'orbita e quindi deve essere distinto dal raggio R costante dell'orbita circolare.

6. Il moto circolare: velocità tangente all'orbita e accelerazione centripeta

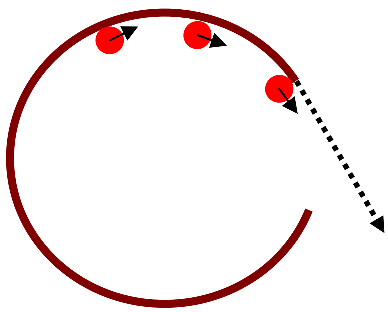
In questa sezione si vogliono affrontare alcune possibili trattazioni semplici del moto circolare al fine di evidenziarne le seguenti particolari caratteristiche:

1. velocità tangente all'orbita circolare
2. accelerazione centripeta sempre ortogonale alla velocità e diretta verso il centro
3. il moto è circolare se l'accelerazione centripeta ha modulo pari a $a_c=v^2/R$
4. forza centripeta: una forza che tira o che spinge?
5. forza centrifuga

con la trattazione rigorosa sarebbe immediato determinare le caratteristiche principali, ma di passare a tale trattazione bisogna tentare, per quanto possibile, di introdurre i concetti di base con dimostrazioni basate su ragionamenti intuitivi e con l'aiuto di una matematica di base.

1. Velocità tangente all'orbita

Per dimostrare che nel moto circolare (come poi in qualsiasi altro moto) la velocità è tangente all'orbita circolare basta immaginare una pallina che si muove all'interno di una guida circolare con un'apertura. Nel momento in cui la pallina arriva nell'apertura questa non seguirà più l'orbita circolare ma il suo moto diventerà rettilineo nella direzione individuata dalla tangente alla guida circolare nel punto dell'apertura. Questa situazione può essere rappresentata con la figura a lato.

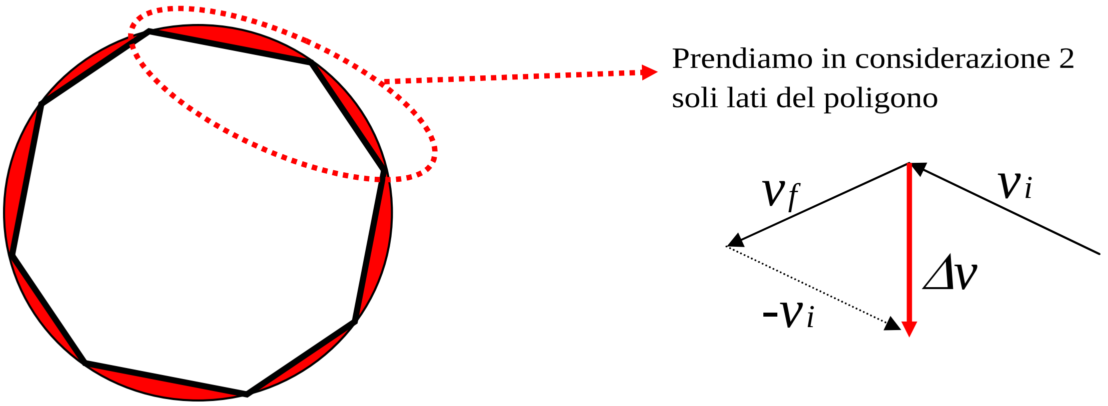


2. Accelerazione centripeta

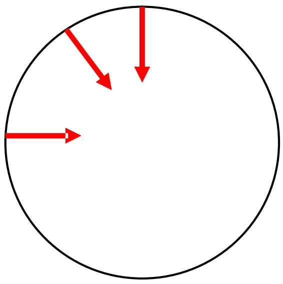
Illustriamo in questa sezione due possibili modi per dimostrare che l'accelerazione è centripeta e quindi ortogonale alla velocità, senza affrontare la trattazione rigorosa.

<u>Modo 1</u>

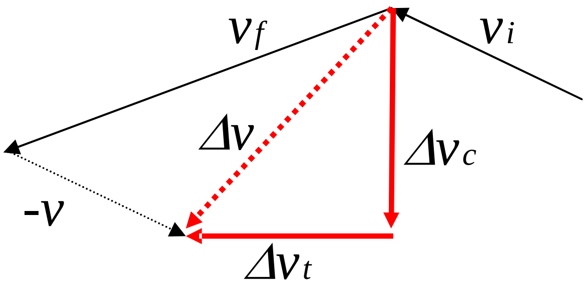
Si potrebbe introdurre il fatto che nel moto circolare si ha un'accelerazione centripeta ortogonale alla velocità, cioè radiale, e diretta verso il centro immaginando una pallina che rimbalza all'interno di una guida circolare come descritto nella seguente figura:



→ ad ogni vertice del poligono la pallina subisce un'accelerazione verso il centro.



Immaginiamo ora di aumentare sempre di più il numero di lati del poligono ($N \rightarrow \infty$, in questo modo si inizia ad introdurre il concetto di limite): il poligono si avvicinerà sempre di più alla circonferenza fino a diventare la circonferenza stessa. In ogni caso però la situazione illustrata nella figura precedente nella quale individuiamo Δv continua a verificarsi con continuità in ogni punto della circonferenza. Quindi possiamo concludere che una pallina che si muove di moto circolare uniforme è sempre soggetta ad una forza centripeta in ogni punto dell'orbita, come mostrato nella figura a lato.



Nel caso in cui il moto non sia uniforme oltre alla componente centripeta avremo anche una componente tangenziale dell'accelerazione:

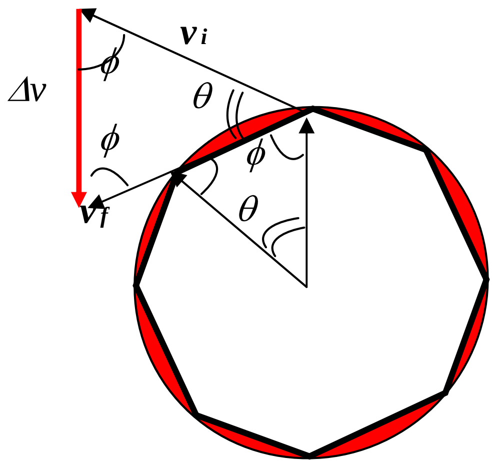
- la componente tangenziale sarà

responsabile della variazione del modulo della velocità

- la componente centripeta sarà responsabile della variazione della direzione della velocità affinché il corpo si muova di moto circolare

Modo 2

Un altro modo per comprendere che nel moto circolare uniforme l'accelerazione è ortogonale alla velocità è quello di calcolare l'angolo fra velocità *v* e variazione della velocità *Δv* al limite di variazioni infinitesime del moto. Partendo dalla situazione illustrata in figura possiamo calcolare con semplici passaggi (basta un po' di geometria elementare) l'angolo ϕ fra velocità e sua variazione al limite in cui il poligono diventa una circonferenza:



$$2\phi + \theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{N}$$

$$\Rightarrow \phi_N = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2N}$$

$$\Rightarrow \phi_N \xrightarrow{N\to\infty} \frac{\pi}{2}$$

Quindi al limite in cui il poligono diventa circonferenza, quindi il moto diventa circolare uniforme, si ottiene che:

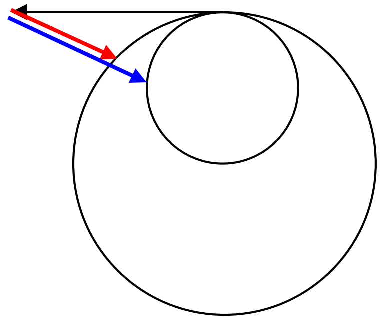
$$\vec{v} \perp \Delta\vec{v}$$

3. Accelerazione centripeta $a_c = v^2/R$

Affinché un corpo si muova di moto circolare (uniforme o vario) deve necessariamente essere soggetto ad una forza con componente centripeta proporzionale alla componente centripeta dell'accelerazione la quale in ogni punto dell'orbita ha modulo pari a v^2/R, dove *v* è la velocità del corpo in quel punto.
Facciamo alcune osservazioni:

1. che l'accelerazione centripeta debba aumentare all'aumentare della velocità (in quale modo ancora non ci interessa) è comprensibile se pensiamo che maggiore è la velocità → maggiore è la quantità di moto → maggiore è la

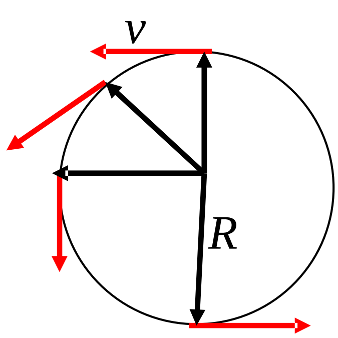
tendenza del corpo ad andare dritto. Per compensare ciò la forza centripeta, quindi l'accelerazione deve aumentare quando aumenta la velocità.

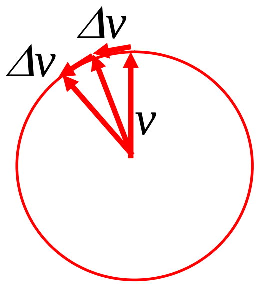


2. che l'accelerazione centripeta debba diminuire quando diminuisce il raggio è comprensibile se pensiamo che maggiore è il raggio → più *dolce* è la curva → per unità di cammino percorso sulla circonferenza la variazione rispetto alla tangente è minore → minore è la forza necessaria per imprimere questa variazione, vedi illustrazione nella figura a fianco.

Per calcolare il valore dell'accelerazione centripeta senza una trattazione rigorosa o senza introdurre delle approssimazioni possiamo tentare il seguente approccio, tenendo sempre presente però che è necessaria una dimostrazione rigorosa.

Immaginiamo un pallina che si muove di moto circolare uniforme con una certa velocità di modulo v. La pallina percorrerà la circonferenza in un tempo $\boldsymbol{T=2\pi R/v}$.
Come possiamo notare dalla figura, il <u>vettore velocità è un vettore ruotante come lo è il raggio vettore</u>, con l'unica differenza che la velocità è tangente alla circonferenza, mentre il raggio vettore è ortogonale. Quindi anche il vettore velocità può essere visto come un vettore che ruotando descrive una circonferenza, questa volta di raggio v.





Il vettore velocità ruota con la stessa velocità angolare del raggio vettore, cioè nello stesso tempo compiono lo stesso numero di giri, quindi per compiere una rotazione completa impiegherà lo stesso tempo T e percorrerà una circonferenza pari a $2\pi v$. Vogliamo ora valutare la variazione della velocità che sarà per un intervallo di tempo piccolo $\Delta v/\Delta t$.

Supponiamo Δt come la N-esima parte di T, cioè: $\Delta t = \frac{T}{N}$

nel tempo Δt la velocità subirà una variazione $\Delta v = \frac{2\pi v}{N}$, qui si fa l'approssimazione di considerare Δv talmente piccolo da poterlo uguagliare all'arco di circonferenza sotteso;

A questo punto, indipendentemente da come scegliamo N, avremo:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v / N}{T / N} = \frac{2\pi v}{T} = \frac{2\pi v}{2\pi R / v} = \frac{v^2}{R}$$

quindi l'accelerazione nel moto circolare uniforme è centripeta, come abbiamo dimostrato prima e ha modulo pari a:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Se la velocità cambia in modulo, questa relazione rimane sempre valida e affinché rimanga costante R deve di conseguenza cambiare l'accelerazione, ecco quindi che possiamo vedere un moto circolare vario in cui anche l'accelerazione centripeta varia, ma assume il valore che avrebbe se il corpo si muovesse di moto circolare uniforme con quella determinata velocità.

La dimostrazione qui riportata segue la linea di una dimostrazione tratta da un libro divulgativo in cui si riporta una lezione di Richard Feynman sul moto dei pianeti [Testo 1].

4. Forza centripeta: una forza che tira o che spinge?

Spesso nei libri di testo il moto circolare viene trattato immaginando una pallina legata ad una corda e con questo esempio spesso si conclude che la forza centripeta è una forza che tira la pallina verso il centro, pensando appunto alla corda che tira.

Nella situazione che abbiamo mostrato al punto 1 precedente, si è introdotto il moto circolare pensando ad una pallina che si muove di moto circolare all'interno di una guida circolare. In questo caso il vincolo guida spinge la pallina verso il centro.

La forza centripeta è diretta verso il centro, provoca una variazione della traiettoria rispetto al moto rettilineo verso il centro, quindi è una spinta verso il centro.

5. Forza centrifuga?

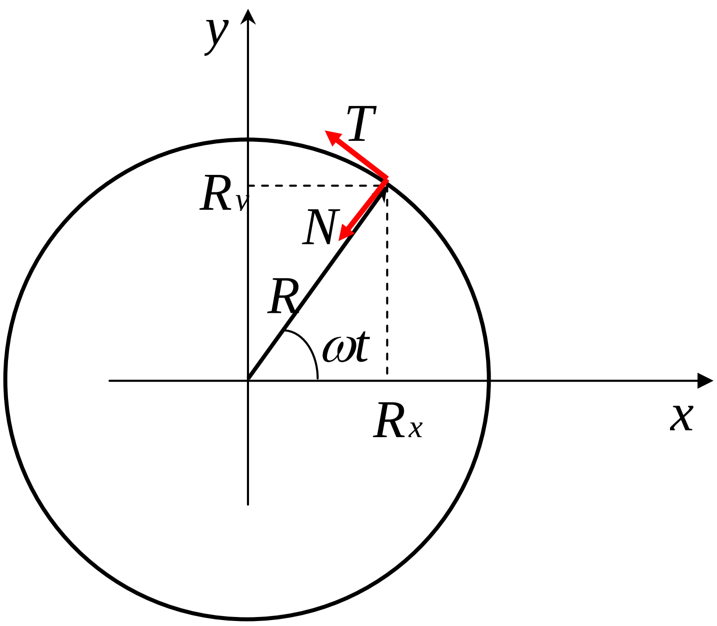
La forza centrifuga viene spesso confusa o introdotta in modo errato. La forza centrifuga è una forza apparente che viene introdotta quando si tratta il problema del moto circolare nel sistema di riferimento solidale con il corpo che si muove. Nel sistema di riferimento solidale con il corpo, questo ovviamente rimane fermo, quindi per contrastare la forza centripeta si deve introdurre una forza uguale e contraria per compensare il tutto, ecco da dove nasce la forza centrifuga.

Un ragazzo potrebbe obiettare che se fa ruotare una pallina legata ad una corda con la mano, lui avverte sulla mano una forza diretta lungo la direzione della corda e verso l'esterno. Quindi potrebbe sembrare del tutto lecito introdurre questa forza centrifuga. L'interpretazione corretta di questa situazione invece è diversa, come si può ben capire dalla seguente argomentazione:

> la mano sente la pallina *tirare* semplicemente perché questa, per il principio d'inerzia, tende a mantenere il moto rettilineo che sarebbe impresso dalla velocità, la quale è tangenziale all'orbita circolare. La nostra mano funge quindi da vincolo per far variare la direzione della velocità e quindi avvertiamo la reazione vincolare che stiamo applicando noi alla pallina. Per il principio di azione e reazione noi applichiamo una forza al corpo, di conseguenza sentiamo la reazione del corpo sulla mano.

7. Trattazione rigorosa del moto circolare con funzioni trigonometriche e derivate

La trattazione rigorosa richiede il concetto di velocità vettoriale come derivata rispetto al tempo del raggio vettore e di accelerazione come derivata rispetto al tempo della velocità. È inoltre richiesta la conoscenza della scomposizione dei vettori in coordinate ortogonali per mezzo delle funzioni trigonometriche seno e coseno.



Per ottenere in modo chiaro e semplice i risultati mostrati sopra si dovranno quindi introdurre i versori *Tangente* e *Normale* e le determinarne le loro derivate per essere pronte all'uso durante il calcolo di velocità ed accelerazione.

$$\begin{cases} R_x = R\cos\omega t \\ R_y = R\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow R_x^2 + R_y^2 = R^2$$

equazione della circonferenza

Tralasciando tutti i passaggi, per un moto circolare vario si ottiene la seguente espressione per l'accelerazione:

$$\vec{a} = a_T \overline{T} + a_c \overline{N} \quad \text{con} \quad a_c = \frac{v^2}{R}$$

Quindi la trattazione matematica rigorosa ha condotto alla conclusione che affinché il moto sia circolare la componente centripeta dell'accelerazione deve essere sempre uguale a v^2/R.

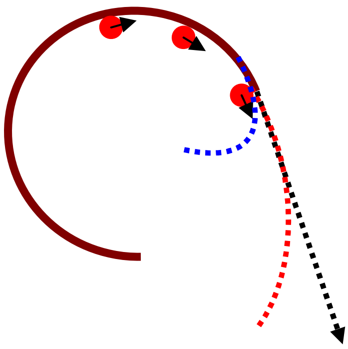
8. Forza netta applicata al corpo in moto circolare

Dopo gli studi dettagliati sul moto circolare eseguiti in precedenza si può passare alla trattazione di alcuni casi particolari al fine di evidenziare fenomeni che possono deviare un corpo dal moto circolare.

Come abbiamo gia visto sopra un corpo si muove di moto circolare solamente se l'accelerazione centripeta vale v^2/R, questo implica che deve esserci una componente centripeta della forza netta che agisce sul corpo e gli impone questa precisa accelerazione:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \Rightarrow F_c = m\frac{v^2}{R}$$

Cosa succede al corpo se la componente normale della forza (F_N) ha modulo maggiore o minore di F_c?



→ se $F_N > F_c$ allora la forza tenderà maggiormente a spingere il corpo verso il centro della circonferenza, facendolo quindi deviare all'interno dell'orbita circolare con una diminuzione del raggio di curvatura (vedi traiettoria blu in figura).

→ se $F_N < F_c$ allora la forza non è più sufficiente a far variare la posizione del corpo sull'orbita circolare, quindi il corpo tenderà ad allontanarsi verso l'esterno della circonferenza con un aumento del raggio di curvatura (vedi traiettoria rossa in figura).

→ il caso limite si verifica quando la forza si annulla, quindi il corpo inizierà a muoversi di moto rettilineo, tangente alla circonferenza nel punto in cui si è annullata la forza (vedi traiettoria nera in figura).

Matematicamente questi risultati saranno evidenziati in un'equazione dell'orbita diversa dalla circonferenza.

Di particolare interesse sono quelle situazioni in cui un corpo si muove di moto circolare e le singole forze agenti su questo sono variabili. Le forze potranno si variare ma affinché il

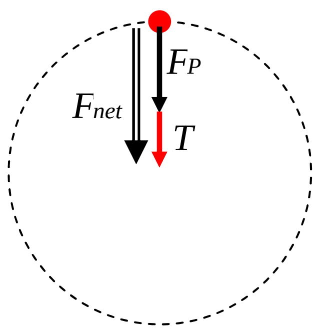
moto sia circolare, il sistema deve far si che la componente centripeta della risultante delle forze applicate abbia modulo pari a mv^2/R.
Una di queste situazioni potrebbe essere il moto circolare in un piano verticale, come l'esercizio in questione.

9. Velocità critica in un moto circolare piano

Intuitivamente pensando alla situazione reale di far ruotare una pallina legata ad una corda si realizza facilmente, e si può pure provare praticamente, che se alla pallina non diamo sufficiente velocità questa nel raggiungere il punto più altro dell'orbita tenderà a cadere verso il basso, uscendo quindi dall'orbita circolare.

Per velocità critica si intende quindi quella particolare velocità al di sotto della quale non è possibile mantenere la pallina in moto circolare.

Questo comportamento si può analizzare rigorosamente considerando i diagrammi di corpo libero, considerando cioè tutte le forze che agiscono sulla pallina nel momento in cui essa si trova nel punto più altro dell'orbita circolare.
In figura evidenziamo le forze che agiscono sulla pallina:



- → $F_P = mg$ forza peso
- → T = tensione della corda
- → $F_{net} = F_P + T$ forza netta agente sulla pallina

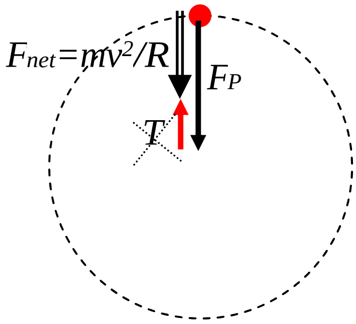
Come appreso in precedenza, affinché la pallina si muova di moto circolare la forza netta deve essere uguale a mv^2/R, quindi deve valere la seguente relazione:

$$F_P + T = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad mg + T = m\frac{v^2}{R}$$

La tensione T è una forza che si adatta in modo da mantenere il moto circolare, in quanto durante la rotazione la forza peso rimane costantemente rivolta verso il basso, quindi si verifica una sua variazione nella componente centripeta.
Ritornando al nostro caso di punto più alto della circonferenza, notiamo dalla relazione scritta che mg è una componente costante, quindi al variare della velocità sarà la tensione T che dovrà cambiare al fine di mantenere vera l'identità che ci assicura il moto circolare.

Ci rendiamo facilmente conto che al di sotto di una certa velocità critica T deve cambiare di segno per mantenere il moto circolare, come mostrato in figura. Il cambiamento di segno implica che per mantenere la pallina sull'orbita circolare la corda dovrebbe imprimere una forza opposta alla forza peso. La corda è in estensibile e non può

imprimere nessuna forza verso l'esterno. Questo implica che per valori di *v* inferiori al valore critico l'unica forza agente sulla pallina è la forza peso che dovrebbe essere contrastata con una forza opposta per avere una forza netta pari a $F_c = mv^2/R$.
Questo implica che la forza peso è maggiore di F_c quindi il raggio di curvatura della traiettoria della pallina aumenterà.
Quindi il moto sarà circolare fintantoché



$$T \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{R} - g \geq 0 \quad \Rightarrow \quad v \geq \sqrt{gR}$$

$$v_{\text{critica}} = \sqrt{gR}$$

10. Risoluzione del problema

Riportiamo di seguito il testo del problema per comodità di lettura:

> Una pallina è attaccata ad una estremità di una corda in moto circolare uniforme in un piano verticale. Supponi che la velocità v della pallina sia aumentata di un fattore 2.35 mentre il raggio del cerchio sia aumentato di un fattore 1.76. La massa della pallina di 145 g rimane invariata. Coma si rapporta la forza centripeta finale, F_{cf} , con la forza centripeta iniziale F_{ci} nel punto più alto della traiettoria?

Da tutte le precedenti considerazioni sappiamo che se il moto è circolare, allora la forza centripeta deve essere pari a mv^2/R. Siccome velocità e raggio vengono aumentati di 2 fattori possiamo esprimere la velocità e il raggio finali in funzione dei valori iniziali e calcolare quindi le corrispondenti forze centripete. Dobbiamo però prima di concludere con i semplici calcoli verificare che effettivamente il moto circolare sia possibile in queste condizioni, nel senso di controllare se gli aumenti di velocità e di raggio rispettano ancora la relazione necessaria per avere il moto circolare. Abbiamo visto che una velocità inferiore alla velocità critica ($v^2 = gR$) non permette il verificarsi del moto circolare, quindi potrebbe essere che a seguito di in aumento di R non vi sia il sufficiente aumento della velocità per superare la criticità delle condizioni.

A questo punto ammettiamo che nella situazione iniziale il moto sia circolare, quindi vale:

$$v^2 \geq gR \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{gR} \geq 1$$

Affinché anche nella situazione finale il moto sia circolare deve essere verificata la seguente disuguaglianza:

$$v_F^2 \geq gR_F \quad \Rightarrow \quad \frac{2.35^2}{1.76}\frac{v^2}{gR} \geq 1$$

Dato che $v^2/gR \geq 1$ e il rapporto $2.35^2/1.76 > 1$ allora anche il loro prodotto è maggiore di 1, quindi il moto circolare si verifica anche nella situazione finale.

Se diversamente il rapporto $2.35^2/1.76$ fosse stato calcolato con fattori diversi e fosse risultato minore di 1, allora si sarebbe potuto concludere che per valutare la risposta si devono conoscere i valori numerici di raggio e velocità iniziali. Altrimenti se deve semplicemente esplicitare che affinché il moto sia circolare deve valere la disuguaglianza precedente.

Interessante dal punto di vista didattico è anche quello di valutare, a seguito di un aumento specificato del raggio, il valore minimo del fattore di incremento della velocità affinché rimanga valida la condizione per il moto circolare. Quindi dato un aumento del raggio di un fattore X_R, determinare il valore minimo del fattore della velocità X_v.
Deve quindi verificarsi la seguente condizione:

$$\frac{X_v^2 v^2}{gX_R R} \geq 1 \;\Rightarrow\; X_v \geq \frac{\sqrt{gX_R R}}{v}$$

Fatte le precedenti valutazioni si può procedere al calcolo del rapporto fra le forze centripete come segue:

$$\text{I)}\;\; v\,, R \qquad\qquad \Rightarrow \qquad F_{CI} = m\frac{v^2}{R}$$

$$\text{F)}\;\; v_F = 2.35v \;,\; R_F = 1.76R \quad \Rightarrow \; F_{CF} = m\frac{v_F^2}{R_F} = m\frac{2.35^2 v^2}{1.76R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_{CF}}{F_{CI}} = \frac{2.35^2}{1.76} = 3.14$$

11. Trattazione del moto circolare nei libri di testo

<u>Testo 1</u>

Nel primo testo, al quale si fa riferimento anche durante la spiegazione del moto circolare data nel paragrafo 7, viene riportata una lezione inedita tenuta da Feynman sul moto dei pianeti. È un libro con impronta divulgativa, anche se alcuni concetti, quali appunti quelli trattati anche in questa unità vengono introdotti e analizzati seguendo una via intuitiva e divulgativa, senza l'utilizzo del rigore matematico.

Testo 2

Nel capitolo del moto circolare, prima della trattazione di questo, vengono forniti precisi e dettagliati elementi sui vettori e sulla connessione con le grandezze fisiche vettoriali. Vengono quindi introdotta la trigonometria.
Il moto circolare uniforme viene descritto in modo dettagliato sottolineando e dimostrando le principali caratteristiche, cioè velocità tangente, accelerazione centripeta, senza però al momento introdurre le forze in gioco, in quanto vengono poi trattate in seguito all'introduzione dei principi di Newton.
Per quanto riguarda il moto circolare vario si studia solo un esempio. Alla fine dell'unità sul moto circolare si accenna ad applicazioni del moto circolare nella vita pratica con appunto la centrifuga e qui si commette l'imprecisione di dire che per esempio nello scolainsalata, l'insalata è soggetta ad una forza che la schiaccia alle pareti.
Più avanti nel testo si trattano i principi della dinamica e si riprende il moto circolare per spiegarne la forza centripeta in modo corretto, preciso e dettagliato evidenziando appunto appunto che il moto circolare si verifica a causa della forza centripeta che si contrappone alla tendenza di qualsiasi corpo di mantenere lo stato di moto rettilineo.
Vengono inoltre evidenziate le evoluzioni storiche delle varie formulazioni di Newton e Huygens, rendendo quindi consapevole il lettore di come le teorie si siano formate migliorate ed evolute e anche abbandonate. Con Huygens si parla della forza centrifuga e ne viene fornita una dettagliata spiegazione.
Altri dettagli storici e riferimenti alle applicazioni pratiche vengono riportati incuriosendo il lettore.

Testo 3

All'inizio del testo vengono fornite vari elementi di base quali vettori e forze. I primi sono spiegati in modo corretto anche se non ci si dilunga molto. L'introduzione delle forze segue la stessa linea introduttiva forse in maniera un po' prematura, nel senso che viene introdotta questa grandezza fisica riferita a esperienze di tutti i giorni. Si parla dunque di corrispondenza fra massa e peso senza ovviamente darne il significato della corrispondenza, in quanto non si è ancora parlato di dinamica.

Nella prima unità il moto circolare viene introdotto con gli esempi che risultano familiari, anche se ad un certo punto si parla di elettroni che ruotano attorno al nucleo, esempio, tra l'altro non corretto, che si potrebbe evitare. Sempre in questa introduzione si informa il lettore che la velocità è tangente alla circonferenza, senza darne nessuna spiegazione.
Nella trattazione della velocità non si fa nessun riferimento al fatto che la velocità è tangente, caratteristica del moto che viene del tutto ignorata anche nel successivo paragrafo, nel quale si introduce l'accelerazione centripeta. Il fatto che velocità sia

tangente non viene nemmeno menzionato nel testo (a parte nell'introduzione), eppure questa caratteristica appare anche in un disegno.
Alla fine dell'unità si introduce l'accelerazione centripeta vedendola come una strana presenza, in quanto essendo il moto uniforme sembra strana la presenza di un'accelerazione. Quindi si accenna che l'accelerazione è diretta verso il centro, da cui il nome di centripeta, e si esprime la sua espressione in funzione della velocità e del raggio. Nessuna dimostrazione viene data riguardo la perpendicolarità dell'accelerazione e tanto meno della sua dipendenza da velocità e raggio.

Nella seconda unità dedicata al moto circolare si parla di velocità angolare e sua relazione con la velocità, chiamata velocità v, come se v fosse il nome standard per chiamare la velocità. Si conclude con la relazione fra accelerazione centripeta e velocità angolare.

Successivamente nel testo si incontra l'unità didattica che tratta la dinamica, nella quale si richiedono come prerequisiti di sapere che nel moto circolare la velocità è tangente e l'accelerazione è centripeta. Certo sono informazioni date in precedenza, ma le parole tangente e centripeta compaiono solo un paio di volte e senza nessuna spiegazione.

Si introducono quindi la forza centripeta e centrifuga, la prima come causa del moto circolare e per seconda ne viene sottolineata la sua caratteristica di essere fittizia. Viene sottolineato correttamente il fatto che la forza centrifuga deve essere introdotta da un osservatore solidale con il sistema di riferimento in rotazione. Non viene però spiegato come questo osservatore può accorgersi del fatto che in gioco ci sono delle forze, la cui risultante è nulla, quando potrebbe anche spiegare il problema dicendo che nessuna forza è in gioco in quanto l'oggetto in rotazione per lui è fermo.

<u>Testo 4</u>

Il testo in questione è un improntato per un corso universitario di fisica 1, è comunque degno di nota in quanto ogni argomento è trattato in modo preciso e dettagliato, accompagnato da esempi e figure che rendono più semplici l'acquisizione anche dei concetti più complessi. Oltretutto in molti casi si cerca di introdurre gli argomenti senza quel rigore matematico che sarebbe necessario, vedi ad esempio il caso nel moto circolare. Introdotti quindi i concetti base di ogni argomento si passa all'uso degli strumenti matematici per la trattazione rigorosa. Nel moto circolare non viene fornita una dimostrazione intuitiva del fatto che la forza sia perpendicolare all'orbita, anche se nel seguito si sviluppano alcuni esempi in cui si mostra come il raggio di curvatura possa variare a seguito di variazioni della forza centripeta. Rimane comunque un testo a livello universitario e comunque una relazione più completa può essere preparata solo nel caso in cui il testo venga esaminato più approfonditamente.

12. Moto circolare su internet

Cercando con google moto circolare si ottengono ovviamente un numero esagerato di link. Cercheremo fare una breve analisi di quelli che sembrano più significativi e di quelli che attirerebbero di più l'attenzione, come per esempio il moto circolare spiegato su wikipedia.

Link 1 http://it.wikipedia.org/wiki/Moto_circolare

Nell'enciclopedia online wikipedia il moto circolare viene riportato con gli strumenti matematici rigorosi, in generale vengono riportate le caratteristiche fondamentali in modo corretto. I prerequisiti non vengono trattati in questo capitolo ma sono presenti i link agli argomenti correlati. Essendo una enciclopedia alla quale tutti possono contribuire, i contenuti risultano utili nel momento in cui si abbia già una certa base di conoscenza.

Link 2 http://www.arrigoamadori.com/lezioni/TutorialFisica/MotoCircolUnif/MotoCircolUnif.htm

In questa pagina web viene riportata una trattazione classica del moto circolare, classica nel senso che non vengono presentati ulteriori argomenti correlati per un tentativo di proporre spiegazioni alternative e aggiuntive.

Link 3 http://ww2.unime.it/weblab/ita/fkw/shm/shm_ita.htm

In questa pagina web non si presenta nessuna trattazione, ma viene proposta una simpatica applet animata in cui si mostra la relazione fra il moto armonico e il moto circolare.

Link 4 http://www.phy6.org/stargaze/Icircul.htm

In questa pagina si determina il valore dell'accelerazione centripeta considerando un tratto di moto circolare come composizione di due moti rettilinei che conducono il corpo sul un punto della circonferenza. Anche questa dimostrazione deve utilizzare un'approssimazione, ovviamente, inoltre questa scomposizione potrebbe confondere le idee sulla natura del moto circolare.

Per quanto riguarda la trattazione di problemi di moto circolare in un piano verticale, quindi di problemi simili a quello trattato in questa unità, non è stato possibile con una rapida ricerca trovare argomenti correlati cercando con combinazione di parole come: fisica, dinamica, moto circolare, piano verticale, velocità critica. Facendo una ricerca con le parole: dinamica, fisica, giro della morte allora si trovano vari documenti pertinenti con l'argomento.

Link 5 http://www.arrigoamadori.com/lezioni/TutorialFisica/Esercitazione3/Esercitazione3.htm

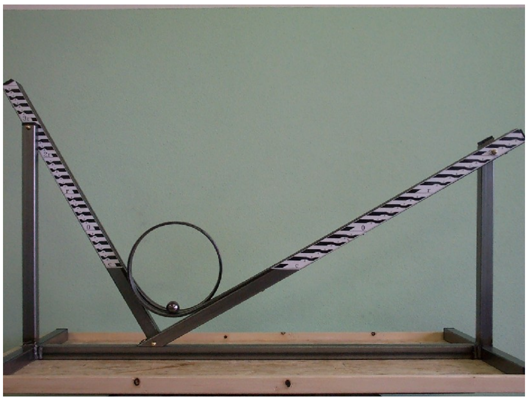
In questo documento la dinamica del giro della morte viene spiegata con la forza centrifuga che deve opporsi alla forza peso. Quindi una spiegazione che matematicamente torna, ma che concettualmente è completamente sbagliata.

Link 6 http://www.phy6.org/stargaze/Iframes4.htm

In questo documento il giro della morte, quindi il moto circolare in un piano verticale viene spiegato correttamente, mettendo appunto in evidenza la funzione della forza centripeta e il concetto che il corpo tenderebbe a muoversi di moto rettilineo uniforme, fenomeno che spesso viene confuso e giustificato con la forza centrifuga.

Link 7 http://www.itiseuganeo.it/sperimentando/2003/S2003_do.htm

Questo è un documento redatto da studenti di un istituto tecnico a seguito di un problema proposto dal loro professore che li ha interessati particolarmente, al punto da realizzare un apparato sperimentale, mostrato in figura, presentato ad una mostra. L'apparato è stato interamente costruito dai ragazzi con il supporto dell'officina meccanica dell'istituto.



Nella relazione illustrativa gli studenti spiegano il fenomeno con la seguente osservazione: "*Come già dicevamo prima, la biglia per poter fare il giro della morte deve avere una velocità che le consenta di contrastare l'accelerazione di gravità e la spinta della guida nel punto critico, quindi il valore minimo di velocità che deve avere la biglia è pari a quello per contrastare la sola accelerazione di gravità (l'influsso della guida è allora trascurabile). Se nella formula della velocità nel moto circolare poniamo a=g essa diventa:* $v^2 = g \times r$". Viene trascurata una ulteriore precisazione quando si definisce trascurabile l'influsso della guida, in realtà andrebbe precisato che nel momento in cui la velocità è quella critica, allora la guida non ha nessuna influenza. Nella realtà quello che succederà sarà che l'esatta velocità critica non si potrà mai verificare, ma ci si potrà solo avvicinare, quindi l'effetto anche se c'è è trascurabile. Fatto molto positivo è quello che non si parli di forza centrifuga.

13. Conclusioni

I concetti principali devrebbero essere introdotti, spiegati e dimostrati, per quanto possibile, in modi anche intuitivi, purchè si seguano sempre le leggi fondamentali, quindi senza mai creare misconcetti per la semplificazione.
Dopo l'introduzione intuitiva si può passare alla trattazione matematicamente rigorosa, mettendo in risalto la potenza, l'utilità e il significato degli strumenti matematici che si usano.
I libri di testo devono sempre essere ben analizzati al fine di valutarne la validità dei concetti trattati e di evidenziarne le scorrettezze che vengono eventualmente presentate.

Le informazioni che si trovano su internet hanno sempre bisogno di un'analisi più approfondita e non devono mai essere prese come verità assolute. Spesso infatti capita di trovare scorrettezze. Altri risultati possono comunque essere utili sia come spunto per attività didattiche sia per un'analisi corretta da parte degli studenti.

14. Bibliografia

Testo 1

Titolo: "Il moto dei pianeti intorno al sole. Una lezione inedita di Richard Feynman"
Autori : D. L. Goodstein, J. R. Goodstein
Editore : Zanichelli
Collana : Le Ellissi

Testo 2

Titolo : "L'evoluzione della fisica" corso di fisica per il liceo scientifico
Autori: G. P. Parodi, M. Ostili, G. Mochi Onori
Editore: Paravia
Scuola : liceo scientifico e liceo classico tecnologico

Testo 3

Titolo : "Fisica per moduli" modulo 1
Autori: Giuseppe Ruffo
Editore: Zanichelli
Scuola: Istituto tecnico

Testo 4

Titolo:"Fisica 1 meccanica onde termodinamica"
Autore: Eugene Hecht
Editore: Zanichelli
Testo universitario