



Università degli Studi di Perugia

DIPARTIMENTO DI FISICA E GEOLOGIA

Corso di Laurea Magistrale in Fisica (curriculum Fisica Teorica)

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**Prolungamento Analitico per la Costante d'Accoppiamento
Inversa della QCD**

Candidato:

Rocco Malaspina

Matricola 337309

Relatore:

prof. Simone Pacetti

*Alla mia famiglia,
per ricambiare in minima parte l'affetto
e la considerazione che hanno di me*

Ringraziamenti

Non sono una persona estremamente loquace, ma con queste poche righe vorrei ringraziare tutti i colleghi con cui ho condiviso questi anni e tutti professori, assistenti e tutor che ho incontrato durante il mio percorso di studi, durante il quale spero di essere diventato una persona migliore. Una doverosa menzione la devo al prof. Pacetti, che ha seguito in prima persona questo lavoro, per la sua disponibilità, per la chiarezza delle sue spiegazioni e per aver avuto un ruolo attivo nel rendere migliore questa tesi.

Indice

Introduzione	7
1 La Teoria delle Perturbazioni Analitica	11
1.1 Campo scalare reale	11
1.2 Causalità nelle QFT	15
1.3 Relazioni di dispersione	18
2 Applicazioni in QCD	21
2.1 Calcolo al primo ordine della costante d'accoppiamento analitica . .	21
2.2 Funzione di Adler	23
2.3 Decadimento inclusivo del leptone τ	25
3 La Costante D'Accoppiamento Inversa	27
3.1 Espansione perturbativa di ϵ_s e dipendenza dallo schema	28
3.2 Caso $\tau \gg 1$ ovvero $\mu \gg \Lambda$	32
4 Un modello per $\epsilon_{an}(t)$	39
4.1 Confinamento	39
4.2 Calcolo di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$	40
4.3 Calcolo di $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$	43
4.3.1 Caso $z \notin (0, 1]$	44
4.3.2 Caso $z \in (0, 1)$	53
4.4 Calcolo di R_τ	63
Conclusioni	65
A La serie e la funzione ipergeometrica di Gauss	67
B Una forma alternativa per $\int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y}\right)^p$	69

Introduzione

La Cromodinamica Quantistica (QCD) è la Teoria di Campo Quantistica (QFT) che descrive le interazioni forti. In quanto tale, possiede tre proprietà fondamentali:

- Invarianza di Lorentz;
- Rinormalizzabilità;
- Invarianza di *gauge*, in questo caso rispetto al gruppo $SU(3)_c$.

Come conseguenza della rinormalizzabilità, le Equazioni del Gruppo di Rinormalizzazione prevedono che i parametri che descrivono la teoria (ad esempio le masse e le costanti di accoppiamento) dipendono dalla scala energetica a cui un determinato processo fisico si verifica. Nell'ambito dell'Elettrodinamica Quantistica (QED), un classico esempio di questo fatto è la carica dell'elettrone $e \equiv e(\mu)$ (o equivalentemente la costante di struttura fine, α), la cui dipendenza dalla scala energetica è descritta dalla funzione β_{QED} :

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \beta_{\text{QED}}(e), \quad (1)$$

da cui, al primo ordine della Teoria delle Perturbazioni, si ottiene:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 + z_f \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu_0^2}{q^2}\right)}, \quad (2)$$

per un quadrimpulso q , con $q^2 = -t > 0$. Il fattore z_f è la somma dei quadrati delle cariche dei fermioni che partecipano al processo e μ_0 è una scala energetica presa come riferimento, per la quale si suppone nota $\alpha(\mu_0)$. Allo stesso modo si definisce la funzione β_{QCD} :

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta_{\text{QCD}}(g). \quad (3)$$

Ripetendo il calcolo nel caso della QCD, si ha:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 - \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \ln\left(\frac{\mu_0^2}{q^2}\right)}, \quad (4)$$

dove n_f è il numero di sapori dei quark che partecipano al processo. Le costanti d'accoppiamento date dalla (2) e dalla (4) non sono ben definite nell'intera regione $q^2 \in [0, \infty)$, perché presentano delle singolarità. Riferendoci al caso della QCD, la singolarità si trova in:

$$\Lambda^2 = \mu_0^2 \exp \left[-\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu_0^2)(11 - \frac{2}{3}n_f)} \right], \quad (5)$$

che rappresenta un polo semplice di $\alpha_s(q^2)$. Queste singolarità sono definite *ghost* e sono delle singolarità non fisiche che compaiono nell'espressione delle costanti di accoppiamento. Si potrebbe obiettare che l'espressione (4) è solo il primo termine nello sviluppo di $\alpha_s(q^2)$, dunque il ghost potrebbe essere solo un artefatto dell'approssimazione che si compie nel momento in cui ci si arresta al primo ordine nella Teoria Perturbativa. In realtà non è questo il caso: i termini al secondo ordine e a quelli successivi dello sviluppo di β_{QCD} hanno l'effetto di spostare, aumentare o modificare le singolarità non fisiche di $\alpha_s(q^2)$ ¹. Si possono dunque intraprendere tre strade per giustificare l'esistenza di queste singolarità^[5].

1. Esse sono una conseguenza della teoria e dunque non possono essere eliminate. Il risultato è che la teoria di campo in questione non funziona e non è adatta a descrivere la fisica.
2. La teoria in sé non è sufficiente e sono necessarie condizioni aggiuntive per riprodurre i risultati sperimentali.
3. La soluzione esatta della teoria esiste e non contiene i ghost, dunque descrive correttamente i processi fisici.

La Teoria delle Perturbazioni Analitica (APT), di cui si occupa questo lavoro, parte dall'assunto che il caso che si verifica è il terzo, ovvero che la teoria di campo sia sufficiente a descrivere la fisica e non preveda i ghost. In termini più rigorosi, la teoria assume che i propagatori, come funzioni del parametro q^2 , siano prolungabili analiticamente nel piano complesso con un taglio sull'asse reale della forma $T = (M_{tr}^2, \infty)$, dove M_{tr} è una soglia associata alla teoria, e con i poli associati solo agli stati fisici. Poiché nel caso della QCD (ed anche della QED) la rinormalizzazione della costante d'accoppiamento è legata alla funzione di polarizzazione del vuoto e dunque alla rinormalizzazione del propagatore del campo di gauge, anche α_s deve essere prolungabile analiticamente con il taglio sull'asse reale e senza ulteriori poli. In questo lavoro, verrà dunque presentato un modello per l'espressione prolungata analiticamente al piano complesso di $\epsilon_s(q^2) = \frac{1}{\alpha_s(q^2)}$ basato su considerazioni fisiche, in particolare il confinamento e la libertà asintotica. Il modello

¹Si veda Ref. [7], equazione (2.2), dove viene mostrato che al secondo ordine compare un taglio addizionale non fisico sull'intervallo $[0, \Lambda^2]$.

così ottenuto per $\epsilon_s(q^2)$ è stato poi utilizzato per ottenere un valore teorico di una grandezza sperimentalmente osservabile, il contributo adronico al decadimento inclusivo del leptone τ , R_τ . L'importanza di questa grandezza è duplice: da un lato è particolarmente rilevante nella fenomenologia delle interazioni forti; dall'altro, nel contesto della APT è calcolabile attraverso un integrale avente come cammino una circonferenza nel piano complesso. R_τ di conseguenza consente testare la forma analitica di $\epsilon_s(z)$ per valori complessi della variabile indipendente.

Capitolo 1

La Teoria delle Perturbazioni Analitica

Lo scopo della Teoria delle Perturbazioni Analitica è quello di ottenere per i correlatori di una teoria, e di conseguenza per le costanti di accoppiamento nei casi in cui siano direttamente deducibili dalle funzioni di Green, delle espressioni che abbiano le corrette proprietà di analiticità nel piano complesso, in virtù di principi fondamentali delle QFT. Per illustrare queste proprietà e quale sia la loro interpretazione fisica, è utile partire da un esempio semplice ma particolarmente esplicativo: quello del propagatore di un campo scalare reale¹.

1.1 Campo scalare reale

Si consideri la teoria di un campo scalare reale interagente (non è necessario specificare la forma del termine di interazione). Il suo propagatore di Feynman è definito da:

$$D_F(x - y) = \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle, \quad (1.1)$$

dove $|\Omega\rangle$ rappresenta lo stato di vuoto della teoria interagente. La relazione di completezza dello spazio di Fock della teoria assume la forma:

$$\mathbb{I} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_1}} \cdots \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_n}} |\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n\rangle \langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n|, \quad (1.2)$$

avendo inteso che gli stati sono normalizzati in modo tale che:

$$\langle \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n | \mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n \rangle = \frac{(2\pi)^{3n}}{n!} 2E_{\mathbf{p}_1} \cdots 2E_{\mathbf{p}_n} \sum_P [\delta^{(4)}(p_1 - q_{P_1}) \cdots \delta^{(4)}(p_n - q_{P_n})], \quad (1.3)$$

¹La trattazione di questa parte esemplificativa è ispirata da Ref. [6].

dove con P si indicano tutte le permutazioni sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Utilizzando la relazione di completezza tra i campi nella definizione del propagatore e assumendo $x^0 > y^0$ si ha (d'ora in avanti, per economia di notazione la somma su n rappresenterà anche l'integrale nello spazio delle fasi):

$$D_F(x - y) = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle. \quad (1.4)$$

Assumendo che, come si avrebbe nella teoria libera, valga:

$$\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0, \quad (1.5)$$

rimane:

$$D_F(x - y) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle, \quad (1.6)$$

usando l'invarianza per traslazioni si ha:

$$\phi(x) = e^{ix_\mu \hat{P}^\mu} \phi(0) e^{-ix_\mu \hat{P}^\mu} \quad (1.7)$$

e poiché:

$$\hat{P}^\mu |n\rangle = p_n^\mu |n\rangle, \quad (1.8)$$

$$\hat{P}^\mu |\Omega\rangle = 0, \quad (1.9)$$

allora:

$$\langle \Omega | \phi(x) | n \rangle = e^{-ip_n \cdot x} \langle \Omega | \phi(0) | n \rangle \quad (1.10)$$

e quindi, usando il fatto che l'operatore di campo è hermitiano, per il propagatore si ha:

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ip_n \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2 \\ &= \int d^4 q e^{-iq \cdot (x-y)} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(4)}(q - p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove nel secondo passaggio si è inserita, in ogni termine della somma, l'identità

$$1 = \int d^4 q \delta^{(4)}(q - p_n). \quad (1.12)$$

Si definisce la **densità spettrale**:

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(4)}(q - p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2. \quad (1.13)$$

Poiché la densità spettrale è uno scalare invariante di Lorentz, deve essere una funzione di q^2 . Inoltre, essendo:

$$p_n^\mu = \sum_{i=1}^n p_{n,i}^\mu \quad (1.14)$$

e poiché tutti i quadrimpulsi di uno stato di n particelle devono avere energia positiva, la densità spettrale deve essere nulla se $q^0 < 0$, cioè la sua espressione completa deve avere la forma:

$$\rho(q) \equiv \rho(q^2)\theta(q^0), \quad (1.15)$$

per cui si ha:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q^2)\theta(q^0)e^{-iq \cdot (x-y)}, \quad (1.16)$$

quindi rimuovendo l'ipotesi su x^0 ed y^0 :

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q^2)\theta(q^0) [\theta(x^0 - y^0)e^{-iq \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{-iq \cdot (y-x)}]. \quad (1.17)$$

Si osservi che nel caso della teoria libera si ha:

$$\begin{aligned} D_F^0(x-y) &= \langle 0 | T \phi_f(x) \phi_f(y) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} [\theta(x^0 - y^0)e^{-iq \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{-iq \cdot (y-x)}], \end{aligned} \quad (1.18)$$

dove:

$$q^\mu = (\sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q}) \quad (1.19)$$

e quindi, inserendo di nuovo l'identità

$$1 = \int d\sigma \delta(\sigma - q^2) \quad (1.20)$$

nell'espressione del propagatore della teoria completa, si ottiene:

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q^2)\theta(q^0) \int d\sigma \delta(q^2 - \sigma) \\ &\quad [\theta(x^0 - y^0)e^{-iq \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{-iq \cdot (y-x)}], \end{aligned} \quad (1.21)$$

per cui, osservando che la distribuzione $\delta(\sigma - q^2)$ ha l'effetto di “ammazzare” l'integrazione in q^0 imponendo negli esponenziali:

$$q^0 = \pm \sqrt{\sigma + \mathbf{q}^2} \quad (1.22)$$

e che la funzione $\theta(q^0)$ seleziona solo la radice positiva, si ha:

$$D_F(x - y) = \int d\sigma \rho(\sigma) D_F^0(x - y; \sigma), \quad (1.23)$$

dove la dipendenza da σ sta nel fatto che esso compare nell'espressione del propagatore libero in luogo di m^2 ; prendendo la trasformata di Fourier del propagatore interagente si ha quindi:

$$D_F(q^2) = \int d\sigma \rho(\sigma) \frac{i}{q^2 - \sigma + i\varepsilon}. \quad (1.24)$$

La (1.24) è detta **rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann** (Ref. [5]). È possibile riscrivere la (1.13) (e di conseguenza la (1.24)) esplicitando i termini della densità spettrale associati agli stati ad una particella; tra questi c'è lo stato associato alla particella scalare di massa m ed eventualmente altri termini associati a stati legati di massa invariante $m < m_b < 2m$; a partire dalla soglia $\sigma = (2m)^2$ invece si può accedere energeticamente al continuo di stati a due o più particelle. Supponendo non ci siano stati legati ad una particella, la densità spettrale assumerà la forma (esplicitando l'integrale nello spazio delle fasi):

$$\rho(q^2) = \rho_c(q^2)\theta(q^2 - 4m^2) + (2\pi)^3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} |\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle|^2 \delta^{(4)}(q - p), \quad (1.25)$$

dove ρ_c indica la densità spettrale del continuo. Sia $U_{\mathbf{p}}$ la trasformazione unitaria associata al *boost* di Lorentz che manda $|\mathbf{p}\rangle$ in $|\mathbf{0}\rangle$ (lo stato ad una particella che è in quiete nel sistema di riferimento scelto), cioè l'operatore unitario tale che:

$$U_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{0}\rangle, \quad (1.26)$$

si può scrivere:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle = \langle \Omega | U_{\mathbf{p}}^{-1} U_{\mathbf{p}} \phi(0) U_{\mathbf{p}}^{-1} U_{\mathbf{p}} | \mathbf{p} \rangle, \quad (1.27)$$

dunque, essendo il campo scalare e valutato nell'origine dello spazio-tempo di Minkowski, si ha:

$$U_{\mathbf{p}} \phi(0) U_{\mathbf{p}}^{-1} = \phi(0), \quad (1.28)$$

mentre ovviamente lo stato di vuoto deve essere invariante di Lorentz

$$U_{\mathbf{p}} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (1.29)$$

Ne consegue che il prodotto scalare $\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle$ è indipendente da $\mathbf{p}$ e si pone:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \mathbf{0} \rangle \equiv \sqrt{Z}, \quad (1.30)$$

da cui, con qualche passaggio immediato, si ottiene:

$$\rho(q^2) = \rho_c(q^2)\theta(q^2 - 4m^2) + Z\delta(q^2 - m^2). \quad (1.31)$$

Lo stato ad una particella dunque contribuisce alla densità spettrale con una distribuzione delta di Dirac centrata nella massa della particella. Inserendo la (1.31) nella (1.24) si ottiene:

$$D_F(q^2) = \frac{iZ}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \rho_c(\sigma) \frac{i}{q^2 - \sigma + i\varepsilon}. \quad (1.32)$$

Assumendo che la $\rho_c(\sigma)$ sia continua, la funzione $D_F(q^2)$ definita dalla (1.32) è evidentemente prolungabile analiticamente nel piano complesso con un polo sull'asse reale in corrispondenza di m^2 , un taglio sulla semiretta $[4m^2, \infty)$ e nessuna altra singolarità. Questa forma della rappresentazione di Källén-Lehmann, che descrive in modo preciso le proprietà di analiticità di $D_F(q^2)$ nel piano complesso, è stata derivata usando proprietà del tutto generali della teoria di campo (invarianza di Lorentz e per traslazioni, e definizioni delle varie quantità), senza usare la Teoria Perturbativa e anzi, senza nemmeno specificare una particolare forma di interazione. Eventuali altre singolarità nel propagatore sono fisicamente non accettabili. Si osservi che la (1.32) ha la forma di una relazione di dispersione.

1.2 Causalità nelle QFT

Come in fisica classica, anche nell'ambito delle QFT c'è uno stretto legame tra analiticità nel piano complesso, relazioni di dispersione e causalità. In Relatività Speciale, due eventi x ed y sono connessi causalmente se la loro separazione spazio-temporale è un vettore di tipo spazio, cioè tale che:

$$(x - y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \geq 0. \quad (1.33)$$

Il concetto di causalità si può estendere anche alle QFT; in particolare si vuole imporre che misure effettuate da due osservatori separati da una distanza di tipo spazio, non devono essere correlate. La condizione di causalità che si richiede è dunque la seguente: date due osservabili qualunque, i cui operatori associati sono $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, deve valere:

$$[\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(y)]|_{(x-y)^2 < 0} = 0. \quad (1.34)$$

Infatti, se i due operatori commutano, sono simultaneamente diagonalizzabili e quindi la misura di un'osservabile non influisce sulla misura dell'altra e viceversa.

Nell'ambito della teoria di un campo scalare reale $\phi(x)$, affinché non ci sia una violazione della causalità l'operatore di campo deve soddisfare:

$$[\phi(x), \phi(y)]|_{(x-y)^2 < 0} = 0. \quad (1.35)$$

Si noti che la (1.35) deve essere valida perché è una diretta conseguenza delle relazioni di quantizzazione canonica, che prevedono l'annullamento del commutatore dei campi a tempi uguali e dell'invarianza di Lorentz poiché, in virtù di quest'ultima, il commutatore dei campi su un intervallo space-like può sempre essere ricondotto a quello a tempi uguali. Cosa accade se si prova a calcolare il commutatore al primo membro della (1.35) ipotizzando una teoria il cui propagatore presenti un ghost, ad esempio un polo sul semiasse reale negativo? Un polo semplice nel propagatore, come visto in precedenza, corrisponde ad una delta di Dirac nell'espressione della densità spettrale. Dato dunque $k > 0$, stiamo assumendo per la densità spettrale una forma del tipo:

$$\rho(\sigma) = A\delta(\sigma + k^2) + \tilde{\rho}(\sigma), \quad (1.36)$$

dove $\tilde{\rho}$ non contiene ghost, cioè $\tilde{\rho}(\sigma) = 0$ se $\sigma < 0$. Consideriamo il valore di aspettazione sul vuoto del commutatore tra i campi:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle, \quad (1.37)$$

con x quadrivettore space-like. Usando la relazione di completezza (1.2), il valore di aspettazione del commutatore è:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \rho(q^2) \theta(q^0) (e^{-iq \cdot x} - e^{iq \cdot x}), \quad (1.38)$$

quindi:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle &= A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(q^2 + k^2) \theta(q^0) (e^{-iq \cdot x} - e^{iq \cdot x}) \\ &+ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \int d\sigma \delta(q^2 - \sigma) \tilde{\rho}(q^2) \theta(q^0) (e^{-iq \cdot x} - e^{iq \cdot x}). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Soffermandoci inizialmente sul termine che contiene $\tilde{\rho}$, con un po' di manipolazioni si ottiene:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \int d\sigma \delta(q^2 - \sigma) \tilde{\rho}(q^2) \theta(q^0) (e^{-iq \cdot x} - e^{iq \cdot x}) = \int d\sigma \tilde{\rho}(\sigma) C_0(x; \sigma), \quad (1.40)$$

dove:

$$C_0(x; \sigma) = [\phi_f(x), \phi_f(0)]|_{m^2=\sigma} \quad (1.41)$$

è il commutatore del campo libero, che è manifestamente invariante di Lorentz quindi per x space-like coincide con il commutatore a tempi uguali, il quale si annulla in virtù delle relazioni di quantizzazione canonica. Questo risultato è una verifica che, in assenza di ghost, la teoria non viola la causalità. Tornando alla (1.39), nella quale resta solo il termine con il ghost:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle = A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(q^2 + k^2) (e^{-iq \cdot x} - e^{iq \cdot x}), \quad (1.42)$$

l'argomento della delta è:

$$q^2 + k^2 = (q^0)^2 - \mathbf{q}^2 + k^2, \quad (1.43)$$

di conseguenza, affinché esso sia nullo deve valere:

$$\mathbf{q}^2 - k^2 \geq 0; \quad (1.44)$$

in tal caso si ottiene:

$$\delta(q^2 + k^2) \theta(q^0) = \theta(\mathbf{q}^2 - k^2) \frac{\delta(q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2 - k^2})}{2\sqrt{\mathbf{q}^2 - k^2}}, \quad (1.45)$$

per cui l'espressione del valore di aspettazione del commutatore assume la forma:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle = A \int_{|\mathbf{q}| > k} \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{q}^2 - k^2}} (e^{-iq \cdot x} - e^{iq \cdot x}), \quad (1.46)$$

con

$$q^\mu = (\sqrt{\mathbf{q}^2 - k^2}, \mathbf{q}). \quad (1.47)$$

È facile mostrare che la (1.46) **non è invariante di Lorentz**. Infatti, valutandola per un quadrivettore x tale che $x^0 = 0$, essa è evidentemente nulla. Se però si prende un generico quadrivettore avente $x^0 \equiv t \neq 0$, si ha:

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_k^\infty dq \frac{q^2}{\sqrt{q^2 - k^2}} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(e^{-it\sqrt{q^2 - k^2} + iqx \cos \theta} - e^{it\sqrt{q^2 - k^2} - iqx \cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi^2 x} \int_k^\infty dq q \frac{\sin(t\sqrt{q^2 - k^2})}{\sqrt{q^2 - k^2}} \sin(qx), \end{aligned} \quad (1.48)$$

che non è nullo. Questo risultato rompe l'invarianza di Lorentz e rende la teoria **non causale**. La rappresentazione di Källén-Lehmann nella forma (1.32), derivata a partire dalla densità spettrale (1.31), può essere quindi interpretata come un'estensione della definizione di causalità. È evidente che è necessario un formalismo che consenta di trattare i casi in cui i propagatori di una certa teoria presentino singolarità non fisiche, per riportarli ad espressioni della forma (1.32).

1.3 Relazioni di dispersione

La rappresentazione di Källén-Lehmann per il propagatore di un campo scalare, che discende da principi fisici del tutto generali delle QFT (invarianza di Lorentz, causalità), garantisce l'analiticità nel piano complesso del propagatore a meno delle singolarità che derivano dagli stati fisici dello spazio di Fock della teoria. Per scrivere in modo esplicito la rappresentazione di Källén-Lehmann è necessario avere la forma esplicita di $\rho_c(\sigma)$, che d'ora in poi verrà denominata semplicemente $\rho(\sigma)$. La definizione (1.13) ha però lo svantaggio di non essere direttamente applicabile per ottenere la forma della densità spettrale. In pratica, per ottenere le espressioni esplicite di $\rho(\sigma)$ nei casi fisicamente interessanti, si usano le **relazioni di dispersione** nel piano complesso. Partendo ancora dall'esempio del propagatore di un campo scalare, la rappresentazione assume la forma (1.32), che si può riscrivere cambiando segno alla variabile e definendola per un generico $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus (\{-m^2\} \cup (-\infty, -4m^2])$ nella forma:

$$\Delta(z) = iD_F(z) = \frac{Z}{z + m^2} + \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{z + \sigma}. \quad (1.49)$$

Assumendo che la funzione $\Delta(z)$ si comporti in modo tale che:

$$\Delta(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z}, \quad (1.50)$$

si intende calcolare l'integrale nel piano complesso:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} dw \frac{\Delta(w)}{w - z}, \quad (1.51)$$

con $z \in \mathcal{D}$ e dove il cammino di integrazione γ è dato in Figura 1.1 .

Poiché $\Delta(z)$ è reale sull'asse reale (dove è definita), per il Principio di Riflessione di Schwarz si ha:

$$\Delta(z^*) = \Delta^*(z). \quad (1.52)$$

Per le ipotesi fatte, i due integrali sull'arco infinito ed infinitesimo sono nulli; all'interno del cammino d'integrazione l'integranda ha due singolarità: $w_1 = -m^2$ e $w_2 = z$ i cui residui sono:

$$\text{Res} \left[\frac{\Delta(w)}{w - z}, w_1 \right] = -\frac{\text{Res} [\Delta(z), -m^2]}{z + m^2}, \quad (1.53)$$

$$\text{Res} \left[\frac{\Delta(w)}{w - z}, w_2 \right] = \Delta(z). \quad (1.54)$$

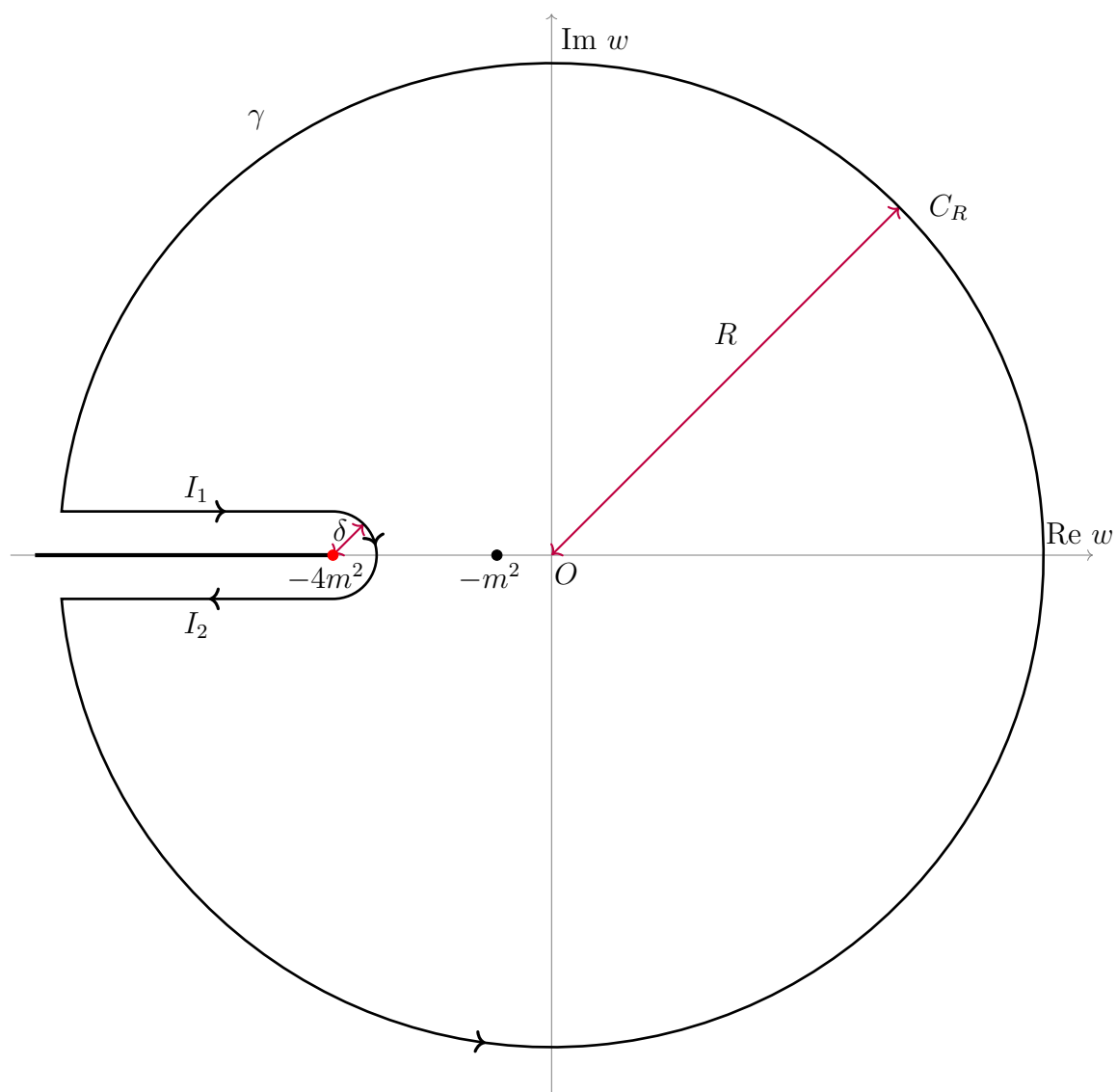


Figura 1.1: Rappresentazione della curva γ .

Definendo i limiti:

$$\eta_+(\sigma) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Delta(-\sigma + i\alpha), \quad \eta_-(\sigma) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Delta(-\sigma - i\alpha), \quad (1.55)$$

i due integrali sui tratti rettilinei I_1 ed I_2 della curva γ in Figura 1.1 danno un contributo pari a:

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \frac{\eta_+(\sigma) - \eta_-(\sigma)}{z + \sigma}, \quad (1.56)$$

per il Principio di Riflessione di Schwarz, la differenza a numeratore è:

$$\eta_+(\sigma) - \eta_-(\sigma) = -2i \operatorname{Im} \eta_-(\sigma), \quad (1.57)$$

per cui in definitiva si ha:

$$\Delta(z) = \frac{\operatorname{Res} [\Delta(z), -m^2]}{z + m^2} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \frac{\operatorname{Im} \eta_-(\sigma)}{z + \sigma}, \quad (1.58)$$

da cui, per confronto con la (1.49):

$$Z = \operatorname{Res} [\Delta(z), -m^2], \quad \rho(\sigma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} [\eta_-(\sigma)]. \quad (1.59)$$

Nel prosieguo, la densità spettrale verrà definita direttamente come:

$$\rho(\sigma) = \operatorname{Im} [\eta_-(\sigma)] \quad (1.60)$$

e quindi nelle formule resterà esplicito il fattore $1/\pi$. In alcune applicazioni, la condizione (1.50) non è rispettata dalla funzione di cui si vuole ottenere la relazione di dispersione. Nei casi in cui la funzione $\Delta(z)$ non diverga, ad esempio se è regolare all'infinito ma il limite è non nullo oppure se è un infinitesimo di ordine inferiore a $1/z$ e l'integrale di dispersione non converge, si può applicare quanto appena fatto alla funzione:

$$F(z) = \frac{\Delta(z) - \Delta(z_0)}{z - z_0} \quad (1.61)$$

dove z_0 è un qualunque punto dell'asse reale in cui la funzione Δ è definita. La funzione $F(z)$ ha le stesse singolarità di $\Delta(z)$ (infatti z_0 è una singolarità eliminabile di $F(z)$, che di conseguenza può essere estesa in modo analitico in tale punto), ma ha il corretto andamento asintotico. Ripetendo esattamente quanto fatto in precedenza si ottiene:

$$\Delta(z) = \Delta(z_0) + \frac{Z}{z + m^2} - \frac{Z}{z_0 + m^2} + \frac{z_0 - z}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{(\sigma + z)(\sigma + z_0)}, \quad (1.62)$$

dove ρ e Z sono definiti come in precedenza. La (1.62) è detta **relazione di dispersione sottratta in z_0** .

Capitolo 2

Applicazioni in QCD

I metodi applicati fino ad ora al caso del campo scalare reale, possono essere usati per ottenere le espressioni analitiche di osservabili fisiche della QCD, che sono direttamente legate ai propagatori. Due grandezze particolarmente rilevanti nelle applicazioni sono $\alpha_s(q^2)$ e la **funzione di Adler**¹:

$$D(q^2) = -q^2 \frac{d}{dq^2} [\Pi(-q^2)], \quad (2.1)$$

dove $\Pi(q^2)$ è la funzione adronica di polarizzazione del vuoto.

2.1 Calcolo al primo ordine della costante d'accoppiamento analitica

Utilizzando la Teoria Perturbativa al primo ordine, per α_s si ottiene l'espressione:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)}, \quad (2.2)$$

dove β_0 e Λ sono due parametri che dipendono dal numero di sapori dei quark n_f attraverso le note relazioni:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad \Lambda = \mu \exp\left[-\frac{1}{2\alpha_s(\mu^2)\beta_0}\right] \quad (2.3)$$

e μ è una scala energetica di riferimento, per la quale si suppone nota $\alpha_s(\mu)$. Proprio Λ^2 è il polo non fisico di α_s , che si vuole eliminare. Dalla forma (2.2), si

¹Definizione presa da Ref. [2], equazione (4).

ricava la densità spettrale:

$$\rho(\sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} [\alpha_s(-\sigma - i\varepsilon)] = \frac{4\pi^2}{\beta_0} \frac{1}{\pi^2 + \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right)} \theta(\sigma), \quad (2.4)$$

per cui l'espressione analitica, a meno del taglio sul semiasse reale negativo, di α_s è:

$$\alpha_{an}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho(\sigma)}{\sigma + t} = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{\pi^2 + \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right)} \frac{1}{\sigma + t}. \quad (2.5)$$

Con il cambiamento di variabile $x = \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right)$, si ha:

$$\alpha_{an}(t) = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\pi^2 + x^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-x}}. \quad (2.6)$$

Il risultato dell'integrale è noto e si ottiene con un'integrazione nel piano complesso del tipo:

$$H(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \oint_{C_L} dw \frac{1}{w - i\pi} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-w}}, \quad (2.7)$$

sul cammino C_L mostrato in Figura 2.1. I due tratti verticali danno contributo nullo nel limite $L \rightarrow \infty$, per cui restano solo i termini dovuti ai due tratti orizzontali. Si ottiene:

$$H(t) = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\pi^2 + x^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-x}} = 2i\pi \sum \text{Res} \left[\frac{1}{w - i\pi} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-w}} \right]; \quad (2.8)$$

questo risultato consente di ricavare² $\alpha_{an}(t)$:

$$\alpha_{an}(t) = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\pi^2 + x^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-x}} = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - t} + \frac{1}{\ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)} \right] \quad (2.9)$$

che, come si vede facilmente, non ha più la singolarità in $t = \Lambda^2$. Si ottiene inoltre:

$$\alpha_{an}(0) = \frac{4\pi}{\beta_0} \quad (2.10)$$

e si può mostrare che questo valore rimane inalterato anche considerando gli ordini successivi della Teoria Perturbativa: questa proprietà è detta **stabilità infrarossa**.

²Risultato presentato in Ref. [7], equazione (2.12), in cui il fattore 4π è inglobato nella definizione di β_0 .

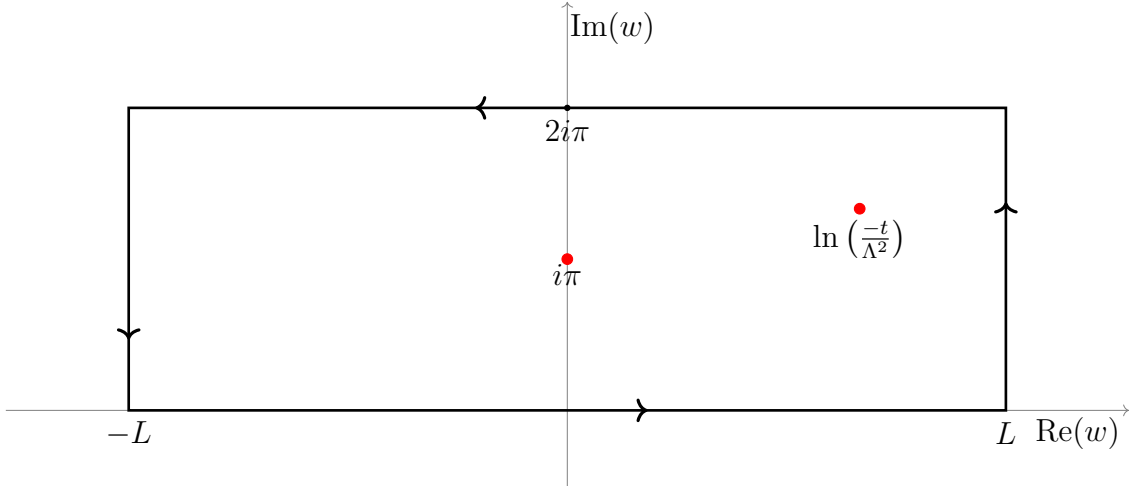


Figura 2.1: Rappresentazione del cammino di integrazione C_L . In rosso sono indicati i due poli dell'integranda interni a C_L .

2.2 Funzione di Adler

La funzione di Adler definita dalla (2.1) riveste particolare importanza nello studio della APT applicata alle interazioni forti, poiché può essere calcolata attraverso una rappresentazione in serie ma, in virtù dell'analiticità della funzione di polarizzazione del vuoto, compare nelle espressioni delle grandezze sperimentalmente osservabili che dipendono dal rapporto $R(s)$:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}, s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)}. \quad (2.11)$$

Infatti, si può dimostrare che³:

$$R(s) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\Pi(s + i\varepsilon) - \Pi(s - i\varepsilon)], \quad (2.12)$$

di conseguenza, usando la relazione di dispersione sottratta nell'origine, si ottiene:

$$\Pi(z) = z \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{s(s-z)}, \quad (2.13)$$

³Ref. [4], equazione (16).

quindi per la funzione di Adler è⁴:

$$D(z) = z \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+z)^2}. \quad (2.14)$$

La definizione precedente può essere invertita, e si ricava⁵:

$$R(s) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{s-i\varepsilon}^{s+i\varepsilon} dz \frac{D(-z)}{-z}, \quad (2.15)$$

dove l'integrazione è intesa su un qualsiasi cammino che colleghi i due punti e non passi sul taglio; questo perché l'integrale è indipendente dal percorso se si assume che $D(z)$ abbia le proprietà di analiticità imposte dalla APT. Usando la Teoria delle Perturbazioni e le EGR si ottiene per $D(q^2)$ uno sviluppo in serie di potenze della forma:

$$D(q^2) = \sum_{n=0}^\infty d_n a_s^n(q^2), \quad (2.16)$$

dove $a_s(q^2) = \alpha_s(q^2)/(4\pi)$. Questa forma di $D(z)$ contiene le singolarità della costante d'accoppiamento, tra cui i ghost se presenti. Partendo dallo sviluppo (2.16) si definisce la forma analitica di $D(z)$ ⁶:

$$D_{APT}(z) = \sum_{n=0}^\infty d_n A_n(z), \quad (2.17)$$

dove

$$A_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{s+z}, \quad \rho_n(\sigma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}[a_s^n(-\sigma - i\varepsilon)]. \quad (2.18)$$

Si osservi che lo sviluppo (2.17) non è una serie di potenze. La funzione $A_1(z)$ è la costante d'accoppiamento calcolata nella sezione precedente. Dallo sviluppo di $D_{APT}(z)$, si può ottenere lo sviluppo in serie per $R_{APT}(s)$, cioè:

$$R_{APT}(s) = \sum_{n=0}^\infty d_n \mathfrak{A}_n(s), \quad (2.19)$$

dove si sono definite le funzioni:

$$\mathfrak{A}_n(s) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{s-i\varepsilon}^{s+i\varepsilon} dz \frac{A_n(-z)}{-z} = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma}. \quad (2.20)$$

⁴Ref. [7], equazione (2.8).

⁵Ref. [2], equazione (8).

⁶Questa definizione e le successive sono tratte da Ref. [7].

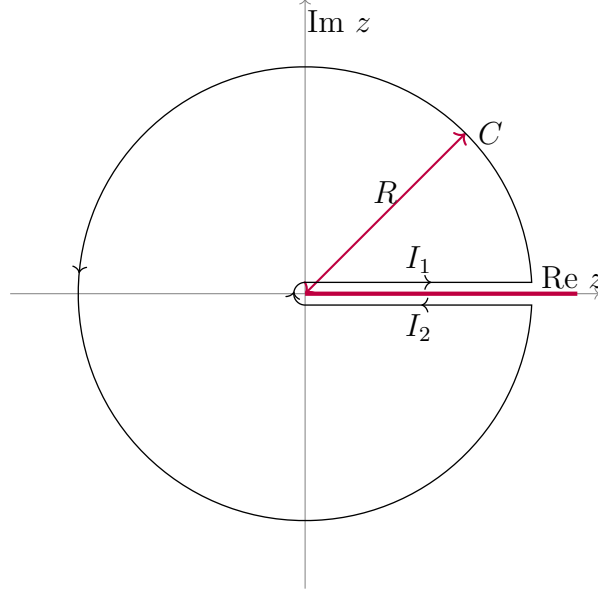


Figura 2.2: Rappresentazione della curva C , dove $R = 1$.

2.3 Decadimento inclusivo del leptone τ

Come detto in precedenza, la funzione di Adler compare nelle espressioni teoriche di diverse grandezze particolarmente rilevanti nello studio delle interazioni forti. Una di queste è il contributo adronico al decadimento inclusivo del leptone τ , ovvero la quantità:

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{adroni})}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)}, \quad (2.21)$$

per la quale si ottiene l'espressione (Ref. [3]):

$$R_\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) \text{Im} [\Pi(s)]. \quad (2.22)$$

Con la sostituzione $z = s/M_\tau^2$ ed integrando per parti, si ha anche:

$$R_\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz (1-z)^3 (1+z) \frac{d}{dz} \text{Im} [\Pi(M_\tau^2 z)]. \quad (2.23)$$

Si consideri dunque l'integrale nel piano complesso:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C dz (1-z)^3 (1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)] = 0 \quad (2.24)$$

nullo perché il cammino C , mostrato in Figura 2.2, non racchiude singolarità dell'integranda, se si suppongono valide per $\Pi(z)$ le proprietà di analiticità prescritte dalla APT (assenza di poli, taglio sul semiasse reale positivo). Considerando i contributi sui tratti rettilinei e sull'arco, si ha:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{I_1+I_2} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)] = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)], \quad (2.25)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} R_\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} \text{Im} [\Pi(M_\tau^2 z)] \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Utilizzando la definizione della funzione di Adler (2.1), si arriva al risultato:

$$R_\tau = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} (1-z)^3(1+z) D(-M_\tau^2 z). \quad (2.27)$$

Il motivo per cui la (2.27) è più utile rispetto alla (2.22) è che il suo cammino d'integrazione (la circonferenza nel piano complesso) non coinvolge la regione infrarossa dove la Teoria Perturbativa non è applicabile. Come osservato in precedenza, la forma (2.27) per R_τ è valida solo nell'ambito della APT perché discende dall'assenza di singolarità polari nelle espressioni di $\Pi(z)$ e $D(z)$.

Capitolo 3

La Costante D'Accoppiamento Inversa

Dopo aver illustrato i principi della APT ed alcune applicazioni nell'ambito della QCD, il passo successivo è quello di utilizzare i principi appena presentati per ottenere un'espressione analitica della Costante d'Accoppiamento Inversa (CAI):

$$\epsilon_s = \frac{1}{\alpha_s}. \quad (3.1)$$

Essa è interpretata fisicamente come una “costante dielettrica forte” del vuoto di QCD. Potrebbe dunque sorgere spontanea una domanda: perché utilizzare ϵ_s quando è possibile utilizzare direttamente α_s ? La risposta è che, evidentemente, dove α_s ha una singolarità polare, ϵ_s è regolare e viceversa. In virtù dell'ipotesi del confinamento, a bassi impulsi (che è la configurazione nella quale vengono effettuate molte misure riguardanti le interazioni forti) $\alpha_s \gg 1$, cioè si sta operando nel regime non perturbativo della teoria. Al contrario, ϵ_s a bassi impulsi deve essere piccola, dunque l'ipotesi del confinamento si impone attraverso:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \epsilon_s(q^2) = 0. \quad (3.2)$$

È più semplice di conseguenza richiedere la validità dell'ipotesi del confinamento su ϵ_s rispetto ad α_s : se infatti si vuole ottenere un'espressione nel piano complesso per la seconda, imporre la divergenza nell'origine non consente di ricavare una condizione direttamente sulla parte immaginaria (dunque sulla densità spettrale), ma solo sul modulo quadro di α_s . Invece, richiedere che ϵ_s sia infinitesima nell'origine equivale a imporre l'annullamento anche della parte immaginaria, dunque questa condizioni si ritrova direttamente nell'espressione della densità spettrale $\rho(\sigma)$, che deve annullarsi in $\sigma = 0$.

3.1 Espansione perturbativa di ϵ_s e dipendenza dallo schema

In QCD è noto che lo sviluppo perturbativo, troncato ad un generico ordine N , di una osservabile O :

$$O_N(\mu) = c_0 \alpha_s^p(\mu) + \cdots + c_N \alpha_s^{p+N}(\mu), \quad (3.3)$$

dipende dalla scelta dello schema di rinormalizzazione attraverso i coefficienti c_i , che, in generale, non sono *scheme-invariant*. Consideriamo il caso di α_s . Dalle Equazioni del Gruppo di Rinormalizzazione (EGR) è noto che:

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \beta_{QCD}(g), \quad (3.4)$$

di conseguenza si ha:

$$\mu \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} = \frac{1}{4\pi} 2g \beta_{QCD}(g). \quad (3.5)$$

Poiché

$$\beta_{QCD} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{(4\pi)^{2(k+1)}} g^{3+2k}, \quad (3.6)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} &= - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{(4\pi)^{2(k+1)}} g^{2(k+2)} = - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{(4\pi)^{2(k+1)}} (4\pi)^{k+2} \alpha_s^{k+2} \\ &= -4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{k+2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

da cui, ponendo

$$a_s = \frac{\alpha_s}{4\pi}, \quad (3.8)$$

si ottiene:

$$\frac{\partial a_s}{\partial \ln(\mu^2)} = - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k a_s^{k+2}. \quad (3.9)$$

In particolare, la dipendenza dallo schema di rinormalizzazione si trova nei coefficienti β_k per $k > 1$, (è noto che $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f$ e $\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f$ sono invarianti). A questo punto, usando la Costante d'Accoppiamento Inversa (CAI) $\epsilon_s = \frac{1}{\alpha_s}$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \ln(\mu^2)} \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right) = - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right)^{k+2}, \quad (3.10)$$

da cui, moltiplicando per $(4\pi\epsilon_s)^2$:

$$\frac{\partial}{\partial \ln(\mu^2)}(4\pi\epsilon_s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_s} \right)^k. \quad (3.11)$$

Definendo

$$e = \frac{\beta_0}{\beta_1}(4\pi\epsilon_s), \quad \tau = \frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right), \quad (3.12)$$

l'equazione assume la forma

$$\frac{de}{d\tau} = B(e) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{e^k}, \quad (3.13)$$

dove si ha:

$$c_k = \frac{\beta_0^{k-1} \beta_k}{\beta_1^k}. \quad (3.14)$$

Osserviamo che mentre μ varia in $(0, \infty)$, la variabile τ così definita può, in linea di principio, variare in tutto $\mathbb{R}$. Il parametro Λ per il momento non ha significato fisico, è stato inserito solo per ragioni dimensionali. La funzione $B(e)$, essendo la somma di tutti gli ordini perturbativi (ammettendo che la serie sia sommabile), è indipendente dallo schema. Ovviamente nella pratica è necessario arrestarsi ad un certo ordine perturbativo, quindi l'equazione (3.13) assumerà la forma:

$$\frac{de}{d\tau} = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{e^k} = \frac{e^N + c_1 e^{N-1} + \dots + c_{N-1} e + c_N}{e^N} \equiv B^{(N)}(e), \quad (3.15)$$

dove riappare la dipendenza dallo schema attraverso i coefficienti c_k . Supponendo che i β_k siano tutti positivi, saranno positivi anche tutti i c_k . Di conseguenza, se $B^{(N)}(e)$ ammette radici reali, esse sono tutte negative. La funzione $B^{(N)}$ inoltre ha un polo di ordine N in $e = 0$. Ovviamente, poiché le soluzioni fisicamente rilevanti sono quelle per cui $e(\tau) > 0$ ovunque, le condizioni iniziali interessanti hanno la forma:

$$e(\tau_0) = e_0 > 0, \quad (3.16)$$

dunque l'equazione (3.15), con la condizione iniziale (3.16), è risolta da:

$$\int_{e_0}^{e(\tau)} \frac{dx}{B^{(N)}(x)} = \int_{e_0}^{e(\tau)} dx \frac{x^N}{x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_{N-1} x + c_N} = \tau - \tau_0. \quad (3.17)$$

Scegliendo la coppia (τ_0, e_0) in modo tale che:

$$\tau_0 = \int_0^{e_0} dx \frac{x^N}{x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_{N-1} x + c_N} \quad (3.18)$$

e ciò è sempre possibile perché l'integrale è finito in virtù della continuità dell'integranda, la (3.17) assume la forma:

$$\int_0^{e(\tau)} dx \frac{x^N}{x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_{N-1} x + c_N} = \tau. \quad (3.19)$$

Alcune proprietà della soluzione $e(\tau)$ si possono ottenere senza svolgere l'integrale al primo membro della (3.19), che pure nel nostro caso è sicuramente risolvibile essendo l'integrale di una funzione razionale fratta. Si hanno i seguenti fatti.

- Essendo l'integranda della (3.19) una funzione liscia in $(0, \infty)$, l'integrale esiste finito per ogni $e(\tau) > 0$ e poiché:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^N}{x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_{N-1} x + c_N} = \infty, \quad (3.20)$$

la soluzione, che deve essere a sua volta una funzione liscia, assume tutti i possibili valori in $(0, \infty)$.

- Definendo, per ogni $e > 0$, la funzione

$$F(e) = \int_0^e dx \frac{x^N}{x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_{N-1} x + c_N}, \quad (3.21)$$

la soluzione sarà data da:

$$e(\tau) = F^{-1}(\tau). \quad (3.22)$$

Poiché $F(e)$ è una funzione strettamente crescente, la soluzione $e(\tau)$ sarà a sua volta una funzione strettamente crescente. Avendo osservato che $F(e)$ mappa $(0, \infty)$ in sé stesso, si conclude che l'insieme di definizione di $e(\tau)$ è a sua volta $(0, \infty)$.

- È interessante studiare l'andamento della soluzione per $\tau \gg 1$, ovvero il comportamento nel regime ultravioletto della CAI. In base a quanto detto in precedenza, vale:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} e(\tau) = +\infty, \quad (3.23)$$

di conseguenza, usando il Teorema di De L'Hôpital

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{e(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} e'(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{F'[e(\tau)]} = 1. \quad (3.24)$$

Abbiamo dunque ottenuto l'andamento per $\tau \rightarrow +\infty$ di $e(\tau)$, ovvero

$$e(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{\sim} \tau. \quad (3.25)$$

Definiamo ora:

$$f(\tau) = e(\tau) - \tau, \quad (3.26)$$

è evidente che

$$f'(\tau) = e'(\tau) - 1 = \frac{1}{e(\tau)} \left[c_1 + \frac{c_2}{e(\tau)} + \cdots + \frac{c_N}{e^{N-1}(\tau)} \right] \quad (3.27)$$

ed essendo $f(\tau)$ una funzione liscia, preso $\tau_0 > 0$ si può scrivere:

$$e(\tau) - \tau = f(\tau) = f(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} dx f'(x), \quad (3.28)$$

con

$$f(\tau_0) = e(\tau_0) - \tau_0. \quad (3.29)$$

Dalle equazioni (3.25) e (3.27), segue che

$$f'(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\tau}, \quad (3.30)$$

dunque

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f(\tau) = +\infty. \quad (3.31)$$

Usando ancora una volta il Teorema di De L'Hôpital

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{e(\tau) - \tau}{\ln \tau} = 1, \quad (3.32)$$

ovvero può essere posto:

$$e(\tau) = \tau + \ln \tau + R(\tau). \quad (3.33)$$

Ripetendo quanto appena fatto, è facile mostrare che per $R(\tau) = e(\tau) - \tau - \ln(\tau)$ vale:

$$R'(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c_2}{\tau^2}, \quad (3.34)$$

quindi $R(\tau)$ converge all'infinito e di conseguenza è trascurabile rispetto ai primi due termini. Abbiamo ottenuto che a partire dal secondo ordine perturbativo, per $\tau \gg 1$ vale

$$e(\tau) \simeq \tau + \ln \tau. \quad (3.35)$$

Questa espressione ha l'importante vantaggio di **non dipendere dallo schema di rinormalizzazione**, poiché in essa compaiono solo β_0 e β_1 che, come detto in precedenza, sono *scheme independent*.

Dalla (3.19) si può ottenere facilmente la soluzione $e(\tau)$ in forma implicita ad un generico ordine perturbativo. In generale, il metodo di risoluzione dell'integrale dipende dalla forma di

$$D(e) = e^N + c_1 e^{N-1} + \cdots + c_{N-1} e + c_N. \quad (3.36)$$

Per semplicità supporremo che $D(e)$ abbia esattamente N radici reali semplici, ovvero che ammetta N radici distinte

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_{N-1} < d_N < 0. \quad (3.37)$$

Usando la decomposizione in fratti semplici, poiché abbiamo supposto che $D(e)$ abbia solo zeri semplici, si ha:

$$\frac{e^N}{D(e)} = e \frac{e^{N-1}}{D(e)} = e \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{e - d_i} = \sum_{i=1}^N A_i \frac{e}{e - d_i}, \quad (3.38)$$

dove i coefficienti A_i si ottengono come la soluzione unica di un sistema lineare; tra le equazioni che costituiscono il sistema, c'è:

$$\sum_{i=1}^N A_i = 1. \quad (3.39)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \tau &= \sum_{i=1}^N A_i \int_0^{e(\tau)} \left(1 + \frac{d_i}{x - d_i} \right) dx = \sum_{i=1}^N A_i \left[e(\tau) + d_i \ln \left(1 - \frac{e(\tau)}{d_i} \right) \right] \\ &= e(\tau) + \sum_{i=1}^N A_i d_i \ln \left(1 - \frac{e(\tau)}{d_i} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

da invertire per ottenere la soluzione esatta ad un dato ordine perturbativo.

3.2 Caso $\tau \gg 1$ ovvero $\mu \gg \Lambda$

Per ottenere una prima espressione analitica di ϵ_s nel piano complesso, utilizziamo l'approssimazione ultravioletta data dalla (3.35), come punto di partenza per ottenere la densità spettrale. Scrivendo l'espressione completa di ϵ_s a partire dalla (3.35), si ha:

$$\epsilon_s(\mu^2) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln \left(\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) \right). \quad (3.41)$$

Definendo:

$$K_0 = \frac{\beta_0}{4\pi}, \quad K_1 = \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0}, \quad (3.42)$$

per ottenere la densità spettrale della CAI è necessario calcolarne il valore sul bordo inferiore del taglio sul semiasse reale negativo. A tal proposito si definisce il logaritmo complesso, che è una funzione polidroma, come segue:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{con } \arg z \in (-\pi, \pi). \quad (3.43)$$

Usando la variabile complessa t , si pone

$$\epsilon_s(t) = \epsilon_s^{(0)}(t) + \epsilon_s^{(1)}(t), \quad (3.44)$$

con

$$\epsilon_s^{(0)}(t) = K_0 \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right), \quad (3.45)$$

$$\epsilon_s^{(1)}(t) = K_1 \ln \left(\frac{K_0}{K_1} \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right) \right). \quad (3.46)$$

Possiamo osservare quanto segue:

- $\epsilon_s^{(0)}(t)$ ha già le proprietà richieste, ovvero è analitica in tutto il piano complesso con un taglio sul semiasse reale negativo;
- $\epsilon_s^{(1)}(t)$ invece è analitica in tutto il piano complesso con il taglio sulla semiretta

$$T = (-\infty, \Lambda^2], \quad (3.47)$$

di conseguenza, utilizzando le prescrizioni della APT, deve essere rimossa la parte “indesiderata” del taglio, cioè quella sul semiasse reale positivo.

Per procedere al calcolo di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$, è necessario ottenere:

$$\rho^{(0)}(\sigma) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \text{Im} [\epsilon_s^{(0)}(-\sigma - i\alpha)]. \quad (3.48)$$

Si vede facilmente che:

$$\rho^{(0)}(\sigma) = -\pi K_0. \quad (3.49)$$

Poiché la (3.49) non ha un corretto andamento per $\sigma \rightarrow +\infty$, è necessario utilizzare la relazione di dispersione sottratta. Scegliendo come punto di sottrazione $t = \Lambda^2$ ed imponendo per comodità:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) = 0, \quad (3.50)$$

si ha:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = \frac{(\Lambda^2 - t)}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(0)}(\sigma)}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}. \quad (3.51)$$

L'integrale è di facile risoluzione e si ottiene:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = K_0 \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right), \quad (3.52)$$

cioè la stessa espressione della (3.45). Il risultato è mostrato in Figura 3.1.

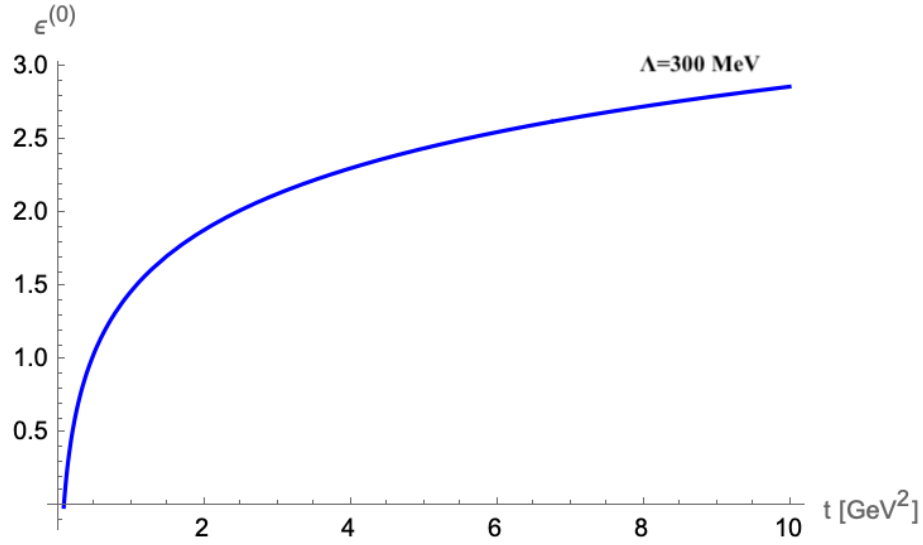


Figura 3.1: Grafico per $n_f = 5$ e $\Lambda = 300 \text{ MeV}$ di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$ dato dalla (3.52), che coincide con l'espressione che si ottiene direttamente dalla Teoria Perturbativa all'ordine più basso.

Allo stesso modo si calcola $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$. È necessario ottenere il limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \text{Im} [\epsilon_s^{(1)}(-\sigma - i\alpha)] = \begin{cases} -\pi K_1 & \text{per } -\Lambda^2 < \sigma < 0 \\ -K_1 \left[\pi + \arctan \left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)} \right) \right] & \text{per } 0 < \sigma < \Lambda^2 \\ -K_1 \arctan \left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)} \right) & \text{per } \sigma > \Lambda^2 \end{cases}, \quad (3.53)$$

da cui, per $\sigma > 0$ si ottiene la definizione di $\rho^{(1)}(\sigma)$:

$$\rho^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} -K_1 \left[\pi + \arctan \left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)} \right) \right] & \text{per } 0 < \sigma < \Lambda^2 \\ -K_1 \arctan \left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)} \right) & \text{per } \sigma > \Lambda^2 \end{cases}. \quad (3.54)$$

Si osservi che:

- essendo $\rho^{(1)}(\sigma) \underset{\sigma \rightarrow +\infty}{\sim} 1/\ln \sigma$, è necessario usare di nuovo la relazione di dispersione sottratta, sia dunque s il punto di sottrazione;
- $\rho^{(1)}$ è continua e derivabile in $\sigma = \Lambda^2$.

La relazione di dispersione sottratta assume di conseguenza la forma:

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) + \frac{s-t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)(\sigma+s)}. \quad (3.55)$$

Per ottenere l'espressione di $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ è conveniente calcolarne la derivata rispetto a t e possiamo farlo perché per costruzione è analitica nel suo dominio. Si ha:

$$\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)(\sigma+s)} - \frac{s-t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)^2(\sigma+s)}; \quad (3.56)$$

riducendo in fratti semplici:

$$\frac{1}{(\sigma+t)(\sigma+s)} = \frac{1}{s-t} \left[\frac{1}{(\sigma+t)} - \frac{1}{(\sigma+s)} \right], \quad (3.57)$$

$$\frac{s-t}{(\sigma+t)^2(\sigma+s)} = \frac{1}{t-s} \left[\frac{1}{(\sigma+t)} - \frac{1}{(\sigma+s)} \right] + \frac{1}{(\sigma+t)^2}, \quad (3.58)$$

si ottiene:

$$\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)^2}. \quad (3.59)$$

Integrando per parti:

$$\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)} \right]_0^\infty - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\frac{d\rho^{(1)}}{d\sigma}(\sigma)}{(\sigma+t)} \quad (3.60)$$

ed usando:

$$\rho^{(1)}(0) = -\pi K_1, \quad \frac{d\rho^{(1)}}{d\sigma}(\sigma) = \frac{\pi K_1}{\left(\ln^2\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right) + \pi^2\right)\sigma}, \quad (3.61)$$

nella (3.60) si ha:

$$\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt} = \frac{K_1}{t} - K_1 \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{\left(\ln^2\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right) + \pi^2\right)\sigma(\sigma+t)} \quad (3.62)$$

che, con il cambiamento di variabile:

$$x = \ln \left(\frac{\sigma}{\Lambda^2} \right), \quad (3.63)$$

diventa:

$$\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt} = \frac{K_1}{t} \left[1 - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + \pi^2} \frac{1}{1 + \frac{\Lambda^2}{t} e^x} \right]. \quad (3.64)$$

Questo integrale è stato calcolato in precedenza (equazione (2.9)), l'espressione di $\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt}$ è:

$$\frac{d\epsilon_{an}^{(1)}}{dt} = K_1 \left[\frac{1}{t \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right)} - \frac{\Lambda^2}{t(t - \Lambda^2)} \right]. \quad (3.65)$$

Osserviamo che, come deve essere per costruzione, la funzione ottenuta è analitica nel dominio di interesse, ovvero tutto il piano complesso con il taglio (dovuto alla funzione logaritmo) sul semiasse reale negativo; in particolare, $t = \Lambda^2$ non è una singolarità. Se scegliamo la correzione in modo tale che $\epsilon_{an}^{(1)}(\Lambda^2) = 0$, si ha:

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = K_1 \int_{\gamma(t)} dw \left[\frac{1}{w \ln \left(\frac{w}{\Lambda^2} \right)} - \frac{\Lambda^2}{w(w - \Lambda^2)} \right], \quad (3.66)$$

dove $\gamma(t)$ è una qualunque curva regolare appartenente al dominio di analiticità della funzione che collega Λ^2 e t . Ovviamente la definizione è ben posta perché l'integrale non dipende dalla curva scelta, dal momento che si tratta dell'integrale di una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso. Per calcolare l'integrale, è sufficiente cercare una funzione $G(w)$ analitica nello stesso dominio dell'integranda e tale che:

$$\frac{dG}{dw} = \frac{1}{w \ln \left(\frac{w}{\Lambda^2} \right)} - \frac{\Lambda^2}{w(w - \Lambda^2)}, \quad (3.67)$$

da cui si avrebbe (a definitiva conferma che l'integrale non dipende dalla scelta del percorso):

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = K_1 [G(t) - G(\Lambda^2)]. \quad (3.68)$$

Tale funzione è

$$G(w) = \ln \left(\frac{w}{w - \Lambda^2} \ln \left(\frac{w}{\Lambda^2} \right) \right) \quad (3.69)$$

e, poiché:

$$G(\Lambda^2) = 0, \quad (3.70)$$

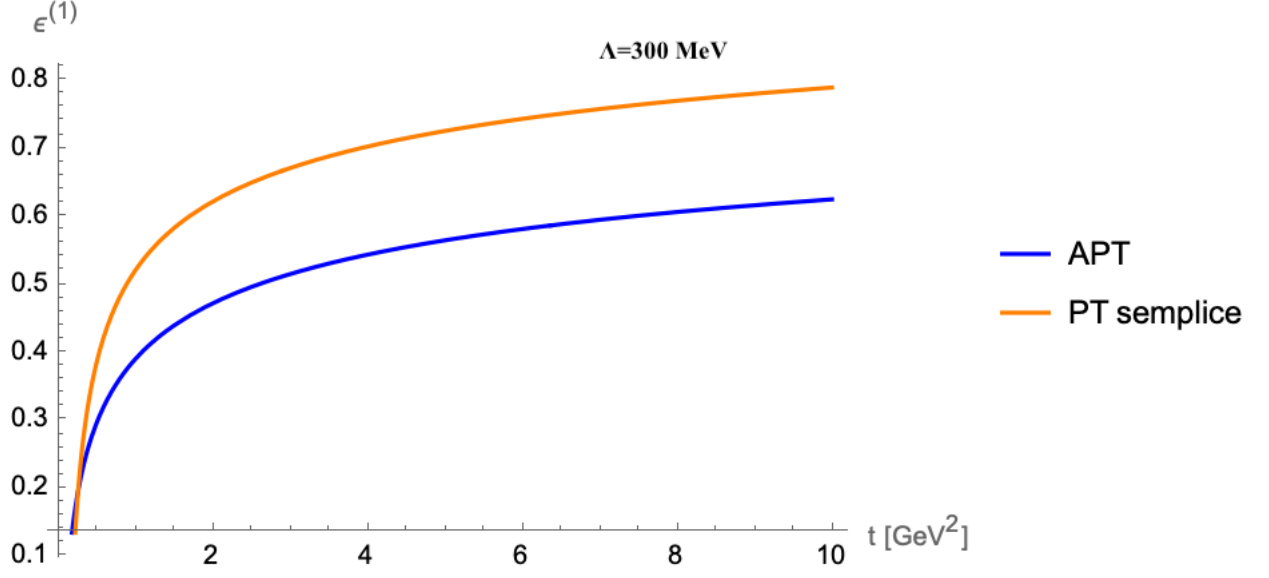


Figura 3.2: Grafici per $n_f = 5$ e $\Lambda = 300 \text{ MeV}$ di $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$, sia quella che si ottiene dalla APT (equazione (3.71)) che quella data dalla Teoria Perturbativa semplice (equazione (3.46)).

si ottiene:

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = K_1 G(t) = K_1 \ln \left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right) \right). \quad (3.71)$$

Il risultato è mostrato in Figura 3.2.

Mettendo insieme la (3.52) e la (3.71) si ha:

$$\epsilon_{an}(t) = \epsilon_{an}^{(0)}(t) + \epsilon_{an}^{(1)}(t) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln \left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \ln \left(\frac{t}{\Lambda^2} \right) \right). \quad (3.72)$$

Capitolo 4

Un modello per $\epsilon_{an}(t)$

4.1 Confinamento

Il punto debole del ragionamento seguito finora è che le espressioni (3.45) e (3.46) (e dunque le parti immaginarie usate come funzioni spettrali) sono ottenute nel limite ultravioletto, ma per ottenere la CAI analitica le densità spettrali sono integrate anche nella regione infrarossa dove, in effetti, l'approssimazione usata non è valida. L'idea è dunque quella di moltiplicare le espressioni (3.49) e (3.54) per una opportuna funzione $r(\sigma)$, scelta in base a considerazioni di carattere fisico, che “regolarizzi” l'andamento delle densità spettrali nella regione infrarossa. La condizione fisica con la quale si costruiscono le funzioni regolarizzatrici è il **confinamento**, cioè si richiede che $\epsilon_{an}(t)$ sia infinitesima nel limite $t \rightarrow 0$ ovvero:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} r(\sigma) = 0. \quad (4.1)$$

È ovvio altresì che la funzione regolarizzatrice non deve modificare l'andamento asintotico delle densità spettrali (che, a differenza di quello infrarosso, è corretto), per cui deve essere:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} r(\sigma) = 1. \quad (4.2)$$

In questo lavoro verranno usate delle funzioni regolarizzatrici della forma:

$$r_p(\sigma) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}\right)^p}, \quad (4.3)$$

che, per $p > 0$, rispettano evidentemente le condizioni (4.1) e (4.2). In particolare, verrà trattato il caso

$$0 < p < 1, \quad (4.4)$$

poiché si richiede che siano finiti gli integrali della forma:

$$\frac{1}{s} \int_0^s ds' \alpha_s(s'), \quad (4.5)$$

che appaiono nell'ambito della *soft gluon resummation* (Ref. [1]). Dal momento che stiamo ipotizzando $\alpha_s \underset{s \rightarrow 0^+}{\sim} s^{-p}$, deve valere la (4.4).

4.2 Calcolo di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$

Ripetiamo dunque il calcolo di $\epsilon_{an}(t)$ partendo dal termine zero, facendo uso della funzione regolarizzatrice (4.3). Utilizzando ancora una volta la relazione di dispersione sottratta in $s = \Lambda^2$, l'espressione da calcolare diventa dunque:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = \epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) - K_0 \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma})^p} \left[\frac{1}{\sigma + t} - \frac{1}{\sigma + \Lambda^2} \right]; \quad (4.6)$$

con il cambiamento di variabile $w = 1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}$ si ottiene:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = \epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) + K_0 \int_1^\infty dw \frac{1}{w^p} \left[\frac{t}{\Lambda^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2}(w-1)} - \frac{1}{w} \right]. \quad (4.7)$$

Poiché per $p > 0$ si ha:

$$\int_1^\infty \frac{dw}{w^{p+1}} = \frac{1}{p} \quad (4.8)$$

e supponendo per il momento $t \neq \Lambda^2$, la (4.7) diventa:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = \epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) - \frac{K_0}{p} + \frac{K_0 t}{\Lambda^2 - t} \int_1^\infty dw \frac{1}{w^p} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2 - t} w}. \quad (4.9)$$

Il valore dell'integrale è noto ed è:

$$\int_1^\infty dw \frac{1}{w^p} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2 - t} w} = \frac{\Lambda^2 - t}{pt} {}_2F_1 \left(1, p; 1 + p; \frac{t - \Lambda^2}{t} \right), \quad (4.10)$$

grazie ad esso si arriva al risultato:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = \epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) + \frac{K_0}{p} \left[{}_2F_1 \left(1, p; 1 + p; \frac{t - \Lambda^2}{t} \right) - 1 \right]. \quad (4.11)$$

La ${}_2F_1(a, b; c; z)$ è la **funzione ipergeometrica di Gauss**, ovvero il prolungamento analitico della **serie ipergeometrica di Gauss** (si veda l'appendice A). Poiché la funzione ipergeometrica, come funzione complessa di variabile complessa z (avendo fissato opportunamente a , b e c), ha un taglio sulla semiretta $[1, \infty)$, $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$ ha anch'essa un taglio, definito da:

$$\frac{t - \Lambda^2}{t} \in [1, \infty), \quad (4.12)$$

che equivale a:

$$t \in \mathbb{R}, t < 0, \quad (4.13)$$

ovvero il taglio di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$ è quello atteso, imposto attraverso la relazione di dispersione. Non resta che fissare il valore di $\epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2)$ e lo facciamo imponendo il confinamento:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \epsilon_{an}^{(0)}(x) = 0; \quad (4.14)$$

che è determinato dal comportamento della funzione ${}_2F_1(1, p; 1 + p; z)$ per

$$z = -x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow +\infty. \quad (4.15)$$

In questo caso, la rappresentazione integrale della funzione ipergeometrica è data da (equazione (A.6)):

$$g_p(x) = \frac{1}{p} {}_2F_1(1, p; 1 + p; -x) = \frac{1}{p} h_p(-x) = \int_0^1 dt \frac{t^{p-1}}{1 + xt}, \quad (4.16)$$

dove, poiché ci interessa calcolare il limite per x che diverge, è conveniente restringersi al caso $x > 1$. In questo modo infatti, è possibile dividere l'intervallo di integrazione in due parti:

$$g_p(x) = \int_0^{1/x} dt \frac{t^{p-1}}{1 + xt} + \int_{1/x}^1 dt \frac{t^{p-1}}{1 + xt} = g_p^{(1)}(x) + g_p^{(2)}(x). \quad (4.17)$$

Per calcolare il primo termine della (4.17) si fa la sostituzione $s = tx$; l'integrale diventa:

$$g_p^{(1)}(x) = \frac{1}{x^p} \int_0^1 ds \frac{s^{p-1}}{1 + s} \quad (4.18)$$

e, poiché $0 < s < 1$, utilizzando la serie geometrica si ha:

$$g_p^{(1)}(x) = \frac{1}{x^p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 s^{p+n-1} ds = \frac{1}{x^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + p}, \quad (4.19)$$

dove la serie al secondo membro è convergente, e poiché la somma della serie ha lo stesso segno del primo termine (quello con $n = 0$) si pone:

$$\chi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}, > 0 \quad (4.20)$$

da cui:

$$g_p^{(1)}(x) = \frac{\chi(p)}{x^p}. \quad (4.21)$$

Il secondo termine della (4.17) si ottiene in modo analogo (osservando che per $\frac{1}{x} < t < 1$, vale $tx > 1$ e dunque $\frac{1}{tx} < 1$):

$$g_p^{(2)}(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \int_{1/x}^1 dt t^{p-n-2} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n}}{p-n-1} - \frac{1}{x^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p-n-1} \quad (4.22)$$

e dunque l'andamento di $g_p^{(2)}(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ è:

$$g_p^{(2)}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\chi(1-p)}{x^p}, \quad (4.23)$$

per cui, tenendo conto delle (4.21) e (4.22), si ha:

$$g_p(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\chi(p) + \chi(1-p)}{x^p}, \quad (4.24)$$

ovvero

$$g_p(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (4.25)$$

Di conseguenza, affinché $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$ vada a zero per $t \rightarrow 0^+$, deve essere

$$0 = \epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) - \frac{K_0}{p} \iff \epsilon_{an}^{(0)}(\Lambda^2) = \frac{K_0}{p}, \quad (4.26)$$

per cui infine:

$$\epsilon_{an}^{(0)}(t) = \frac{K_0}{p} {}_2F_1 \left(1, p; 1+p; \frac{t - \Lambda^2}{t} \right). \quad (4.27)$$

L'andamento di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$ è mostrato in Figura 4.1 per vari valori del parametro p , in particolare $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

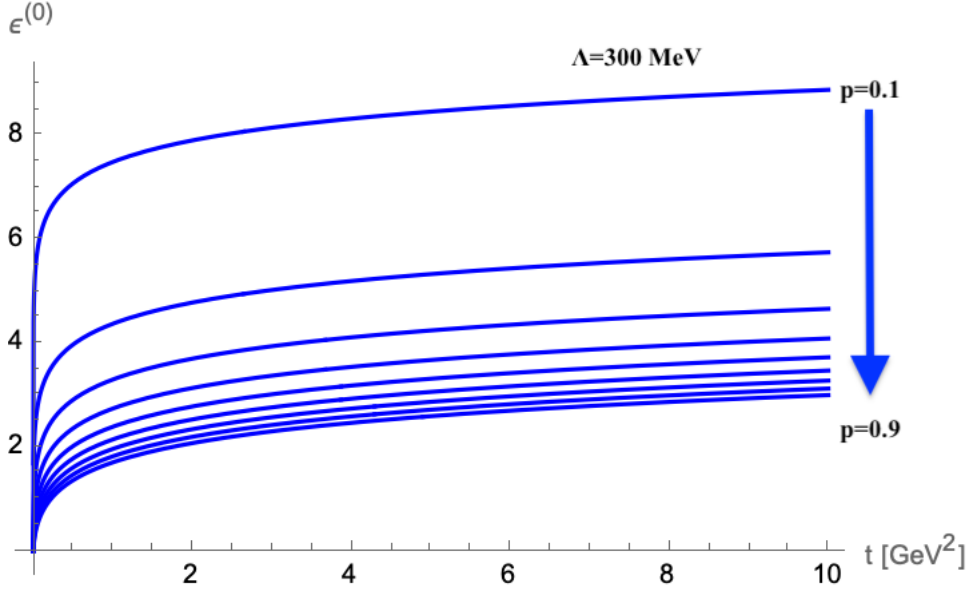


Figura 4.1: Grafici per $n_f = 5$ e $\Lambda = 300$ MeV di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$ data dalla (4.27), per $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

4.3 Calcolo di $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$

Avendo ottenuto il termine zero della CAI, passiamo al calcolo della correzione. Usando la relazione di dispersione sottratta in un generico $s > 0$, si ha:

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}\right)^p} \left[\frac{1}{\sigma + t} - \frac{1}{\sigma + s} \right]. \quad (4.28)$$

Per calcolare l'integrale, si usa l'espedito di definire:

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\sigma, \alpha) = \begin{cases} -K_1 \left[\pi + \arctan \left(\frac{\pi}{\ln \left(\frac{\alpha\sigma}{\Lambda^2} \right)} \right) \right] & \text{per } \alpha > 0, 0 < \sigma < \frac{\Lambda^2}{\alpha} \\ -K_1 \arctan \left(\frac{\pi}{\ln \left(\frac{\alpha\sigma}{\Lambda^2} \right)} \right) & \text{per } \alpha > 0, \sigma > \frac{\Lambda^2}{\alpha} \end{cases}, \quad (4.29)$$

da cui:

$$\tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}(\alpha, t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\tilde{\rho}^{(1)}(\alpha, \sigma)}{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}\right)^p} \left[\frac{1}{\sigma + t} - \frac{1}{\sigma + s} \right] \quad (4.30)$$

ed è evidente che

$$\tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}(1, t) = \epsilon_{an}^{(1)}(t). \quad (4.31)$$

Derivando la (4.30) rispetto ad α sotto il segno di integrale si ottiene:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\partial \tilde{\rho}^{(1)}}{\partial \alpha}(\alpha, \sigma) \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}\right)^p} \left[\frac{1}{\sigma + t} - \frac{1}{\sigma + s} \right], \quad (4.32)$$

ovvero

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \frac{K_1}{\alpha} \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{\Lambda^2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}\right)^p} \left[\frac{1}{\sigma + t} - \frac{1}{\sigma + s} \right]. \quad (4.33)$$

Con il cambiamento di variabile: $x = \frac{\alpha\sigma}{\Lambda^2}$, si ha:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \frac{K_1}{\alpha} \int_0^\infty dx \frac{\Lambda^2}{\alpha} \frac{1}{\pi^2 + \ln^2 x} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^p} \left[\frac{1}{\frac{\Lambda^2}{\alpha}x + t} - \frac{1}{\frac{\Lambda^2}{\alpha}x + s} \right], \quad (4.34)$$

da cui:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}}{\partial \alpha}(\alpha, t) = \frac{K_1}{\alpha} \int_0^\infty dx \frac{1}{\pi^2 + \ln^2 x} \left(\frac{x}{x + \alpha} \right)^p \left[\frac{1}{x + \alpha \frac{t}{\Lambda^2}} - \frac{1}{x + \alpha \frac{s}{\Lambda^2}} \right]. \quad (4.35)$$

L'integrale da calcolare ha la forma:

$$I(\alpha, z) = \int_0^\infty dx \frac{1}{\pi^2 + \ln^2 x} \left(\frac{x}{x + \alpha} \right)^p \frac{1}{x + \alpha z}. \quad (4.36)$$

4.3.1 Caso $z \notin (0, 1]$

Calcoliamo l'integrale $I(\alpha, z)$ inizialmente con un'ulteriore condizione su z , ovvero $z \notin (0, 1]$; il motivo di questa ipotesi aggiuntiva verrà spiegato nel seguito. È evidente che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}(\alpha, t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) \quad (4.37)$$

e l'idea è quella di ottenere la correzione alla CAI integrando la (4.35) nell'intervallo $[1, \infty)$, ovvero:

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) - K_1 \int_1^\infty d\alpha \frac{I\left(\alpha, \frac{t}{\Lambda^2}\right) - I\left(\alpha, \frac{s}{\Lambda^2}\right)}{\alpha}, \quad (4.38)$$

dunque nel prosieguo si supporrà $\alpha > 1$. Consideriamo l'integrale nel piano complesso:

$$T(\alpha, z) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \oint_{\Gamma(R, \delta, \omega)} dw \frac{1}{\ln w - i\pi} \left(\frac{w}{w + \alpha} \right)^p \frac{1}{w + \alpha z}, \quad (4.39)$$

dove il percorso d'integrazione, mostrato in Figura 4.2, dipende dai parametri δ , ω ed R . Si osservi che nell'integranda sono presenti due funzioni polidrome:

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w, \quad (4.40)$$

dove si definisce $\arg w \in (0, 2\pi)$ e

$$\left(\frac{w}{w + \alpha} \right)^p = \left| \frac{w}{w + \alpha} \right|^p e^{ip \arg \left(\frac{w}{w + \alpha} \right)}, \quad (4.41)$$

con $\arg \left(\frac{w}{w + \alpha} \right) \in (-\pi, \pi)$. I tagli che ne conseguono sono indicati nella Figura 4.2. Gli integrali sull'arco infinitesimo di raggio δ (prendendo $0 < p < 1$) e sull'arco infinito di raggio R tendono a zero. Restano gli integrali sui tratti rettilinei e quelli sui due archi infinitesimi di raggio ω . Questi ultimi non sono nulli perché la funzione $\frac{1}{\ln w - i\pi}$ ha un polo semplice in $w = -1$. Data una funzione meromorfa $g(z)$ avente un polo semplice in $z = z_0$ e dati $\bar{\theta} \in [0, 2\pi]$ e $\alpha > 0$, definendo il cammino di integrazione

$$\gamma_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} | z = z_0 + \epsilon e^{i\theta}, \text{ con } \theta \in (\bar{\theta}, \bar{\theta} + \alpha)\}, \quad (4.42)$$

vale:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} dz g(z) = i\alpha \text{Res}[g(z), z = z_0]. \quad (4.43)$$

Nel nostro caso questo risultato non è direttamente applicabile perché quella $w = -1$ è una singolarità non isolata della funzione integranda

$$f(\alpha, z, w) = \frac{1}{\ln w - i\pi} \left(\frac{w}{w + \alpha} \right)^p \frac{1}{w + \alpha z}, \quad (4.44)$$

definita in precedenza, che dunque non può essere trattata come una funzione meromorfa. Per ottenere gli integrali sui due archi infinitesimi γ_1 e γ_2 , si deve ridefinire opportunamente la funzione polidroma $\left(\frac{w}{w + \alpha} \right)^p$ in modo tale da:

- non modificare il valore della funzione stessa sulle curve γ_1 e γ_2 ;
- spostare il taglio su $T = (-\infty, -\alpha] \cup [0, \infty)$, in modo tale che $w = -1$ sia una singolarità isolata (un polo semplice) dell'integranda ridefinita, e quindi applicare la (4.43).

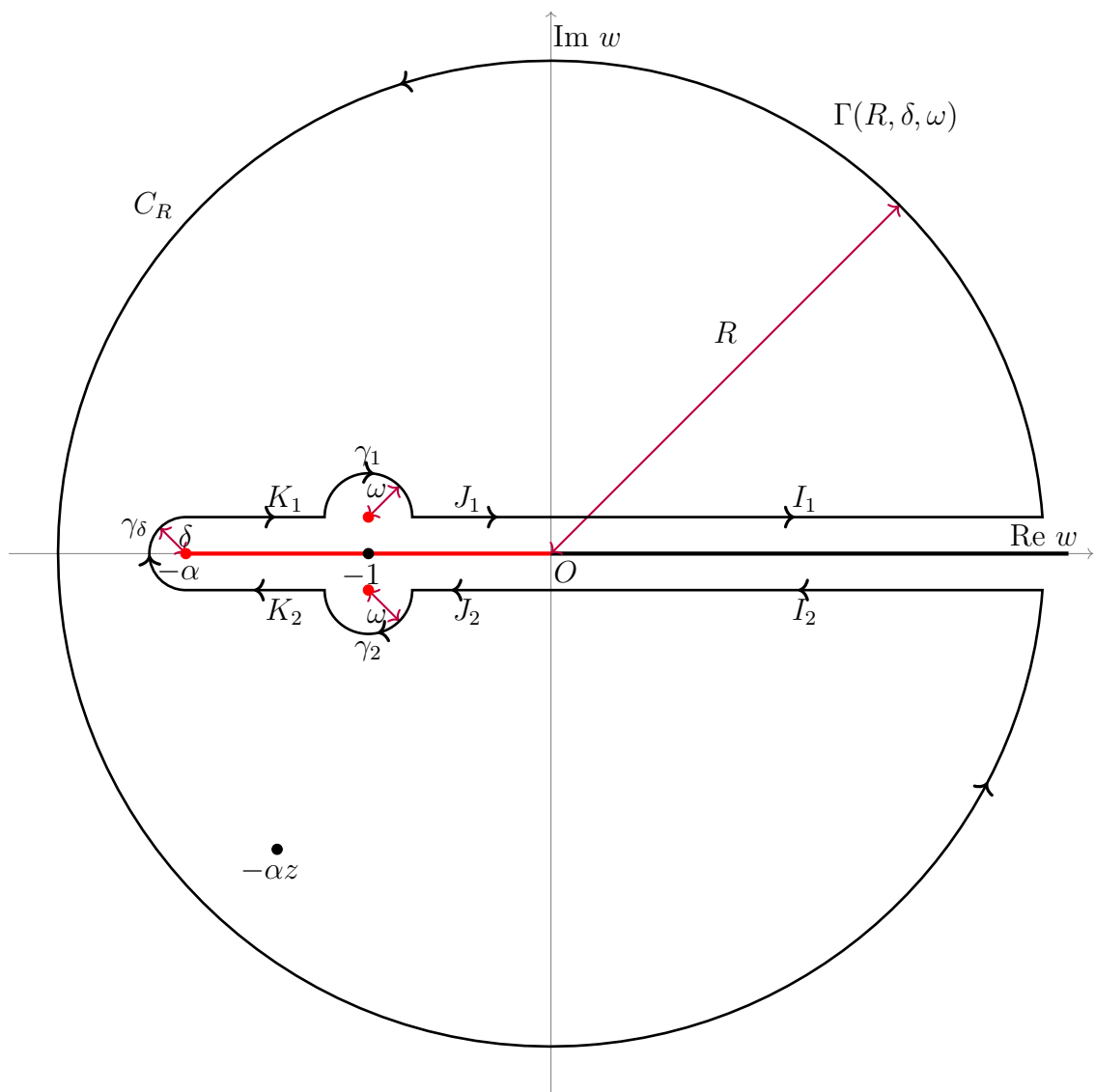


Figura 4.2: Rappresentazione della curva $\Gamma(R, \delta, \omega)$. Il taglio in nero è quello dovuto a $\ln w$, quello in rosso è dovuto a $\left(\frac{w}{w+\alpha}\right)^p$. Il punto $w = -1$ è un polo semplice della funzione $\frac{1}{\ln w - i\pi}$ che cade sul taglio della funzione $\left(\frac{w}{w+\alpha}\right)^p$.

Nel caso di γ_1 , si pone:

$$\arg\left(\frac{w}{w+\alpha}\right) \in (0, 2\pi). \quad (4.45)$$

L'integranda così ridefinita, $f_1(\alpha, w, z)$, è tale che:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1} f(\alpha, z, w) dw = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1} f_1(\alpha, z, w) dw = -i\pi \text{Res}[f_1(\alpha, z, w), w = -1]. \quad (4.46)$$

Poiché $w = -1$ è un polo semplice di $f_1(\alpha, z, w)$:

$$\text{Res}[f_1(\alpha, z, w), w = -1] = \lim_{w \rightarrow -1} (w+1)f_1(\alpha, z, w) = \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^p \frac{e^{i\pi p}}{1-\alpha z}, \quad (4.47)$$

per cui

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_1} f(\alpha, z, w) dw = i\pi \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^p \frac{e^{i\pi p}}{\alpha z - 1}. \quad (4.48)$$

Per ottenere l'integrale su γ_2 , si ripete quanto appena fatto ponendo in questo caso:

$$\arg\left(\frac{w}{w+\alpha}\right) \in (-2\pi, 0) \quad (4.49)$$

e si ottiene

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_2} f(\alpha, z, w) dw = i\pi \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^p \frac{e^{-i\pi p}}{\alpha z - 1}. \quad (4.50)$$

Sommando i due integrali così ottenuti, si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left[\int_{\gamma_1} f(\alpha, z, w) + \int_{\gamma_2} f(\alpha, z, w) \right] = 2i\pi \cos(\pi p) \left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^p \frac{1}{\alpha z - 1}. \quad (4.51)$$

Consideriamo ora gli integrali sui tratti rettilinei I_1 ed I_2 , si hanno:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{I_1} dw f(\alpha, z, w) = \int_0^\infty dx \frac{1}{\ln x - i\pi} \left(\frac{x}{x+\alpha}\right)^p \frac{1}{x+\alpha z}, \quad (4.52)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{I_2} dw f(\alpha, z, w) = - \int_0^\infty dx \frac{1}{\ln x + i\pi} \left(\frac{x}{x+\alpha}\right)^p \frac{1}{x+\alpha z}, \quad (4.53)$$

mentre su J_1, J_2, K_1 e K_2 si hanno:

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ \omega \rightarrow 0^+}} \left[\int_{J_1} dw f(\alpha, z, w) + \int_{K_1} dw f(\alpha, z, w) \right] = e^{i\pi p} \mathcal{P} \int_{-\alpha}^0 \frac{dx}{\ln(-x)} \left(\frac{-x}{x+\alpha} \right)^p \frac{1}{x+\alpha z}, \quad (4.54)$$

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ \omega \rightarrow 0^+}} \left[\int_{J_2} dw f(\alpha, z, w) + \int_{K_2} dw f(\alpha, z, w) \right] = -e^{-i\pi p} \mathcal{P} \int_{-\alpha}^0 \frac{dx}{\ln(-x)} \left(\frac{-x}{x+\alpha} \right)^p \frac{1}{x+\alpha z}. \quad (4.55)$$

Il risultato complessivo, con il cambiamento di variabile $x' = -x$ negli integrali delle (4.54) e (4.55), è:

$$\begin{aligned} T(\alpha, z) &= 2i\pi I(\alpha, z) + 2i \sin(\pi p) \mathcal{P} \int_0^\alpha \frac{dx}{\ln x} \left(\frac{x}{\alpha-x} \right)^p \frac{1}{\alpha z - x} \\ &\quad + 2i\pi \cos(\pi p) \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p \frac{1}{\alpha z - 1}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

A questo punto si pone:

$$L(\alpha, z) = \mathcal{P} \int_0^\alpha \frac{dx}{\ln x} \left(\frac{x}{\alpha-x} \right)^p \frac{1}{\alpha z - x}, \quad (4.57)$$

da cui, con $y = \frac{x}{\alpha}$, si ha:

$$L(\alpha, z) = \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{\ln y + \ln \alpha} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \frac{1}{z-y}. \quad (4.58)$$

Non resta che calcolare $T(\alpha, z)$ usando il Teorema dei Residui. L'integranda ha un polo semplice interno al cammino di integrazione, $w = -\alpha z$, quindi:

$$\text{Res}[f(\alpha, z, w), w = -\alpha z] = \lim_{w \rightarrow -\alpha z} (w + \alpha z) f(\alpha, z, w) = \frac{1}{\ln(\alpha z)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^p, \quad (4.59)$$

facendo attenzione al fatto che il logaritmo è stato ora ridefinito con $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$. Mettendo tutto insieme, si ha:

$$2i\pi \left[\frac{1}{\ln(\alpha z)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^p + \frac{\cos(\pi p)}{1-\alpha z} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p \right] = 2i [\pi I(\alpha, z) + \sin(\pi p) L(\alpha, z)], \quad (4.60)$$

da cui si ottiene:

$$I(\alpha, z) = \frac{1}{\ln(\alpha z)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^p + \frac{\cos(\pi p)}{1-\alpha z} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p - \frac{\sin(\pi p)}{\pi} L(\alpha, z). \quad (4.61)$$

Dalla (4.61) si capisce il motivo dell'ulteriore restrizione su z : il primo ed il terzo termine sono singolari per $0 < z \leq 1$. Avendo ottenuto l'espressione di $I(\alpha, z)$, supponendo di fare la sottrazione in $s > \Lambda^2$, si definisce:

$$\bar{s} = \frac{s}{\Lambda^2} > 1, \quad (4.62)$$

l'espressione della correzione si ottiene a partire da:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}}{\partial \alpha}(\alpha, z) = \frac{K_1}{\alpha} I(\alpha, z), \quad (4.63)$$

da cui, ponendo:

$$g(z, \bar{s}) = \int_1^\infty \frac{I(\alpha, z) - I(\alpha, \bar{s})}{\alpha} d\alpha, \quad (4.64)$$

si avrà, dalla (4.38):

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) - K_1 g\left(\frac{t}{\Lambda^2}, \frac{s}{\Lambda^2}\right). \quad (4.65)$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \frac{I(\alpha, z) - I(\alpha, \bar{s})}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} \left(\frac{z}{z-1} \right)^p - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha \bar{s})} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p \\ &+ \frac{\cos(\pi p)}{\alpha(1-\alpha z)} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p - \frac{\cos(\pi p)}{\alpha(1-\alpha \bar{s})} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p \\ &- \frac{\sin(\pi p)}{\alpha \pi} L(\alpha, z) + \frac{\sin(\pi p)}{\alpha \pi} L(\alpha, \bar{s}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Il terzo ed il quarto termine sono facilmente integrabili nell'intervallo $[1, \infty)$. Per farlo si considera l'integrale nel piano complesso:

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \oint_{\Gamma_1(\delta, R)} dw \frac{1}{w(1-wz)} (w-1)^{-p} = 2i\pi \sum \text{Res} \left[\frac{1}{w(1-wz)} (w-1)^{-p} \right], \quad (4.67)$$

dove si prende $\arg(w-1) \in (0, 2\pi)$, il cammino d'integrazione è dato in Figura 4.3. Poiché gli integrali sull'arco infinito e su quello infinitesimo sono nulli e tenendo conto dei residui dell'integranda nei due poli semplici $w = 0$ e $w = \frac{1}{z}$, si ottiene:

$$(1 - e^{-2ip\pi}) \int_1^\infty d\alpha \frac{1}{\alpha(1-\alpha z)} (\alpha-1)^{-p} = 2i\pi \left[e^{-ip\pi} - \left(\frac{1-z}{z} \right)^{-p} \right], \quad (4.68)$$

da cui

$$\int_1^\infty d\alpha \frac{1}{\alpha(1-\alpha z)} (\alpha-1)^{-p} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \left[1 - \left(\frac{z}{z-1} \right)^p \right], \quad (4.69)$$

dove, nell'ultima formula, si prende $\arg\left(\frac{z}{z-1}\right) \in (-\pi, \pi)$.

Per trattare i primi due termini e gli ultimi due della (4.66), è conveniente utilizzare l'integrale appena calcolato. Si ha infatti:

$$\left(\frac{z}{z-1} \right)^p = 1 - \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_1^\infty dx \frac{1}{x(1-xz)} (x-1)^{-p}, \quad (4.70)$$

da cui, ponendo $y = \frac{1}{x}$ si ha:

$$\left(\frac{z}{z-1} \right)^p = 1 + \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{1}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p, \quad (4.71)$$

ovvero possiamo riscrivere la (4.66) come:

$$\begin{aligned} \frac{I(\alpha, z) - I(\alpha, \bar{s})}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha \bar{s})} + \frac{\cos(\pi p)}{\alpha(1-\alpha z)} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p \\ &\quad - \frac{\cos(\pi p)}{\alpha(1-\alpha \bar{s})} \left(\frac{1}{\alpha-1} \right)^p \\ &\quad + \frac{\sin(\pi p)}{\alpha\pi} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \left[\frac{1}{\ln(\alpha z)} - \frac{1}{\ln(\alpha y)} \right] \\ &\quad - \frac{\sin(\pi p)}{\alpha\pi} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{\bar{s}-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \left[\frac{1}{\ln(\alpha \bar{s})} - \frac{1}{\ln(\alpha y)} \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Partendo dal quinto termine (per il sesto il calcolo è identico), si ha:

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty d\alpha \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \left[\frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha y)} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a d\alpha \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \left[\frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha y)} \right], \end{aligned} \quad (4.73)$$

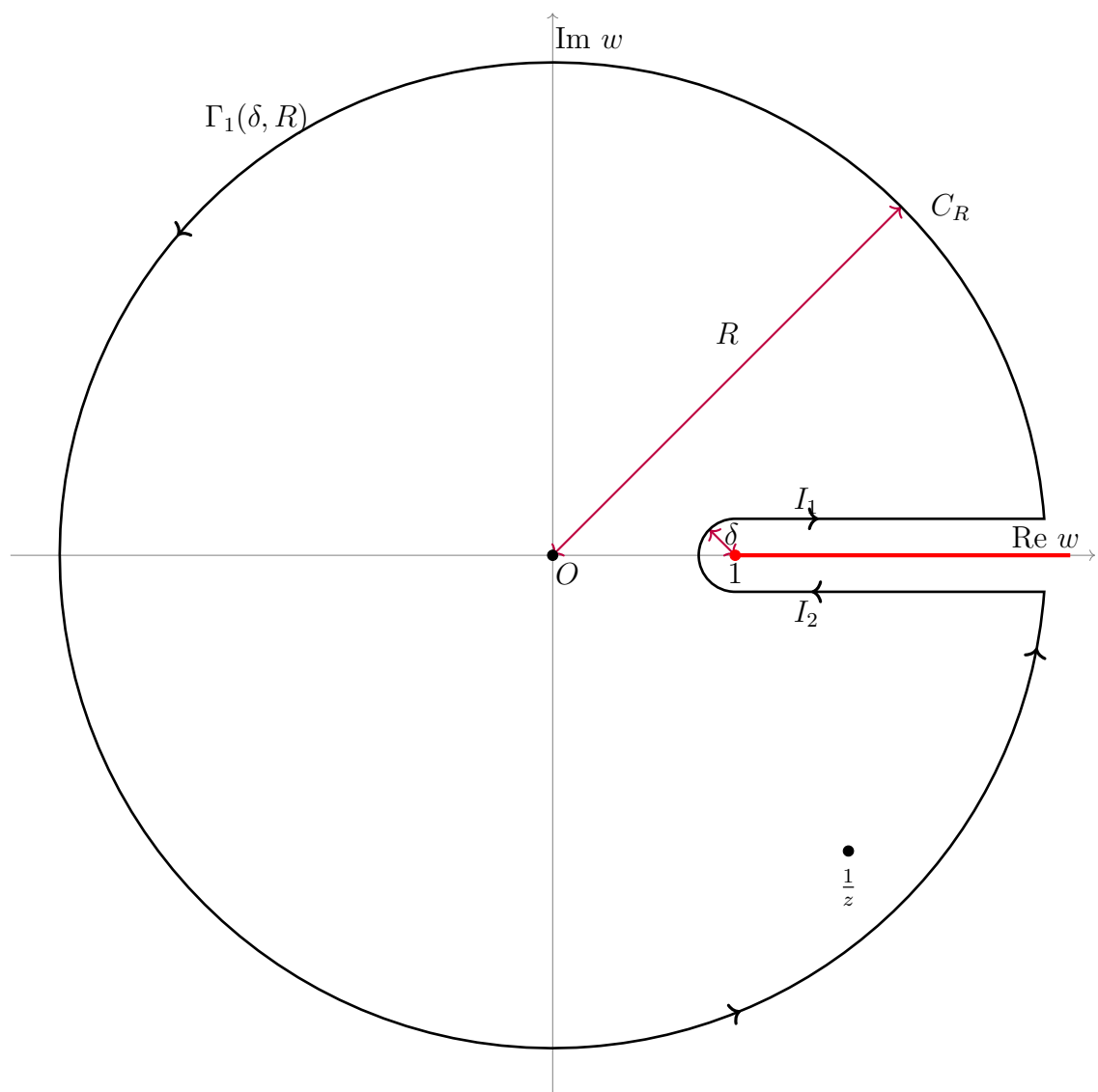


Figura 4.3: Cammino di integrazione della (4.67).

da cui, scambiando gli integrali ed osservando che:

$$\int_1^a \frac{d\alpha}{\alpha \ln(\alpha z)} = \ln(\ln(az)) - \ln(\ln z), \quad (4.74)$$

$$\mathcal{P} \int_1^a \frac{d\alpha}{\alpha \ln(\alpha y)} = \ln(|\ln(ay)|) - \ln(-\ln y), \quad (4.75)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dy}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \left[\ln \left(\frac{\ln(az)}{|\ln(ay)|} \right) - \ln(\ln z) + \ln(-\ln y) \right] \\ = \int_0^1 \frac{dy}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p [\ln(-\ln y) - \ln(\ln z)] \end{aligned} \quad (4.76)$$

e questo integrale converge. I primi due termini della (4.72) devono essere integrati insieme, perché:

$$\int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha \ln(\alpha z)} \quad (4.77)$$

è divergente. Si ha:

$$\int_1^\infty d\alpha \left[\frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha \bar{s})} \right] = \ln(\ln \bar{s}) - \ln(\ln z), \quad (4.78)$$

dunque, considerando tutti i termini:

$$\begin{aligned} g(z, \bar{s}) &= \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p \ln(\ln \bar{s}) - \left(\frac{z}{z-1} \right)^p \ln(\ln z) \\ &+ \frac{\pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left[\left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p - \left(\frac{z}{z-1} \right)^p \right] + \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \\ &- \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\bar{s}-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p, \end{aligned} \quad (4.79)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{an}^{(1)}(t) &= \epsilon_{an}^{(1)}(s) + K_1 \left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \right)^p \ln \left(\ln \frac{t}{\Lambda^2} \right) - K_1 \left(\frac{s}{s - \Lambda^2} \right)^p \ln \left(\ln \frac{s}{\Lambda^2} \right) \\
&+ K_1 \frac{\pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left[\left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \right)^p - \left(\frac{s}{s - \Lambda^2} \right)^p \right] \\
&- K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1 - y} \right)^p \\
&+ K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{s}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1 - y} \right)^p.
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Resta da determinare la costante $\epsilon_{an}^{(1)}(s)$.

4.3.2 Caso $z \in (0, 1)$

Per ottenere la correzione in questo caso, si adotta una strategia concettualmente analoga al caso precedente. In particolare, si osserva che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}(\alpha, t) = \epsilon_{an}^{(1)}(s) - K_1 \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma}\right)^p} \left[\frac{1}{\sigma + t} - \frac{1}{\sigma + s} \right]; \tag{4.81}$$

l'integrale al secondo membro è già stato calcolato nel caso di $\epsilon_{an}^{(0)}$, dunque si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tilde{\epsilon}_{an}^{(1)}(\alpha, t) &= \epsilon_{an}^{(1)}(s) + \frac{K_1}{p} \left[{}_2F_1 \left(1, p; 1 + p; \frac{t - \Lambda^2}{t} \right) \right. \\
&\quad \left. - {}_2F_1 \left(1, p; 1 + p; \frac{s - \Lambda^2}{s} \right) \right] \equiv B(t, s).
\end{aligned} \tag{4.82}$$

L'idea è quella di integrare la (4.35) nell'intervallo $[0, 1]$, si avrà quindi:

$$\epsilon_{an}^{(1)}(t) = B(t, s) + K_1 h \left(\frac{t}{\Lambda^2}, \frac{s}{\Lambda^2} \right), \tag{4.83}$$

dove

$$h(z, \bar{s}) = \int_0^1 d\alpha \frac{I(\alpha, z) - I(\alpha, \bar{s})}{\alpha}, \tag{4.84}$$

per cui in questo caso si supporrà $0 < \alpha < 1$. La funzione $I(\alpha, z)$ si ottiene, in modo analogo al caso precedente, con un'integrazione nel piano complesso della forma:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \oint_{\Gamma_2(R, \delta, \omega)} dw \frac{1}{\ln w - i\pi} \left(\frac{w}{w + \alpha} \right)^p \frac{1}{w + \alpha z}, \quad (4.85)$$

dove il percorso $\Gamma_2(R, \delta, \omega)$ è rappresentato in Figura 4.4.

Il polo $w = -\alpha z$ della funzione $\frac{1}{w + \alpha z}$ cade sul taglio di $\left(\frac{w}{w + \alpha} \right)^p$, cioè è una singolarità non isolata. Ripetendo la stessa procedura del caso precedente, ovvero scegliendo le due funzioni che abbiano in $w = -\alpha z$ un polo, che per definizione è isolato, e che assumano una sull'arco superiore e l'altra sull'arco inferiore lo stesso valore della funzione integranda, si ottiene:

$$I(\alpha, z) = \frac{\cos(\pi p)}{\ln(\alpha z)} \left(\frac{z}{1 - z} \right)^p + \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^p \frac{1}{1 - \alpha z} - \frac{\sin(\pi p)}{\pi} G(\alpha, z), \quad (4.86)$$

dove la funzione $G(\alpha, z)$ è definita da:

$$G(\alpha, z) = \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{\ln(\alpha y)} \frac{1}{z - y} \left(\frac{y}{1 - y} \right)^p, \quad (4.87)$$

con l'integranda che è singolare in $y = z$. Dobbiamo ora, come prima, sottrarre alla (4.86) il valore della stessa funzione valutata nel punto di sottrazione $\bar{s}$. Per fare ciò, bisogna fare attenzione al fatto che l'espressione (4.86) è stata ottenuta per $0 < z < 1$ mentre $\bar{s} > 1$, per cui bisogna calcolare l'espressione di $I(\alpha, \bar{s})$ per $\alpha < 1$ ma $\bar{s} > 1$. Quello che cambia in questo caso è che non c'è nessuna singolarità polare sui tagli, per cui sia $w = -1$ che $w = -\alpha z$ sono singolarità interne al cammino d'integrazione. Si ottiene:

$$\begin{aligned} I(\alpha, \bar{s}) &= \frac{1}{\ln(\alpha \bar{s})} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s} - 1} \right)^p + \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^p \frac{1}{1 - \alpha \bar{s}} \\ &\quad - \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{\ln(\alpha y)} \left(\frac{y}{1 - y} \right)^p \frac{1}{\bar{s} - y} \end{aligned} \quad (4.88)$$

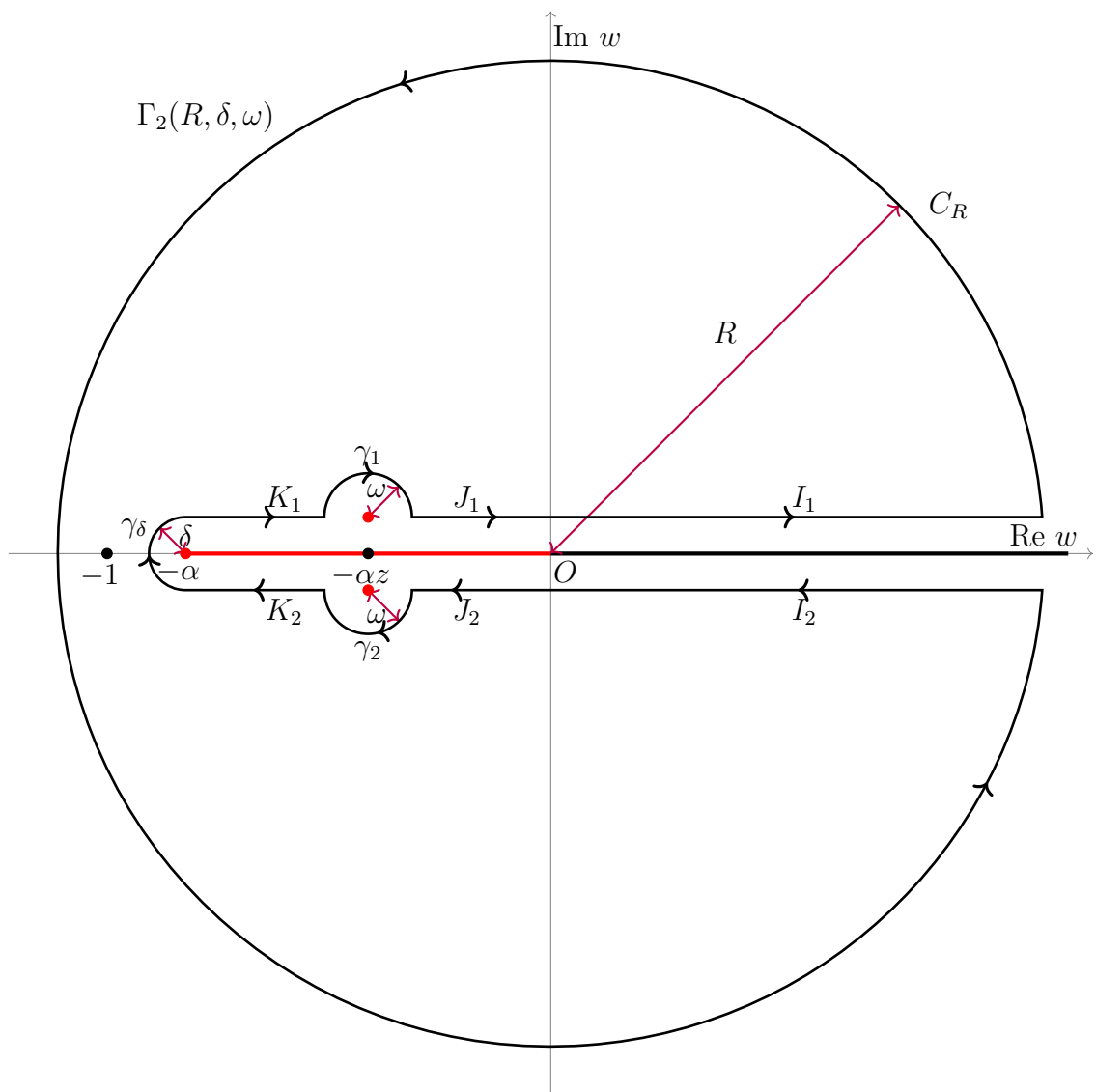


Figura 4.4: Rappresentazione della curva $\Gamma_2(R, \delta, \omega)$. Il taglio in nero è quello dovuto a $\ln w$, quello in rosso è dovuto a $\left(\frac{w}{w+\alpha}\right)^p$. Il punto $w = -\alpha z$ è un polo semplice della funzione $\frac{1}{w+\alpha z}$ che cade sul taglio della funzione $\left(\frac{w}{w+\alpha}\right)^p$.

e quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{I(\alpha, z) - I(\alpha, \bar{s})}{\alpha} &= \frac{\cos(\pi p)}{\alpha \ln(\alpha z)} \left(\frac{z}{1-z} \right)^p - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha \bar{s})} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p \\
&+ \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^p \frac{1}{\alpha(1-\alpha z)} - \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^p \frac{1}{\alpha(1-\alpha \bar{s})} \\
&- \frac{\sin(\pi p)}{\alpha \pi} \mathcal{P} \int_0^1 \frac{dy}{\ln(\alpha y)} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \frac{1}{z-y} \\
&+ \frac{\sin(\pi p)}{\alpha \pi} \int_0^1 \frac{dy}{\ln(\alpha y)} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \frac{1}{\bar{s}-y},
\end{aligned} \tag{4.89}$$

la quale deve essere integrata in α sull'intervallo $[0, 1]$. Partiamo osservando che, in modo analogo al caso precedente (percorso di integrazione in Figura 4.5), si ha:

$$\mathcal{P} \int_1^\infty dx \left(\frac{1}{x-1} \right)^p \frac{1}{x(1-xz)} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \left[1 - \cos(\pi p) \left(\frac{z}{1-z} \right)^p \right], \tag{4.90}$$

da cui, facendo il cambiamento di variabile $x = \frac{1}{\alpha}$, si ha:

$$\cos(\pi p) \left(\frac{z}{1-z} \right)^p = 1 + \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \mathcal{P} \int_0^1 dy \frac{1}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p, \tag{4.91}$$

con questa formula unitamente alla (4.71), si può riscrivere la (4.89) come:

$$\begin{aligned}
\frac{I(\alpha, z) - I(\alpha, \bar{s})}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha \bar{s})} + \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^p \frac{1}{\alpha(1-\alpha z)} \\
&- \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^p \frac{1}{\alpha(1-\alpha \bar{s})} \\
&+ \frac{\sin(\pi p)}{\alpha \pi} \mathcal{P} \int_0^1 dy \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \frac{1}{z-y} \left[\frac{1}{\ln(\alpha z)} - \frac{1}{\ln(\alpha y)} \right] \\
&- \frac{\sin(\pi p)}{\alpha \pi} \int_0^1 dy \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \frac{1}{\bar{s}-y} \left[\frac{1}{\ln(\alpha \bar{s})} - \frac{1}{\ln(\alpha y)} \right].
\end{aligned} \tag{4.92}$$

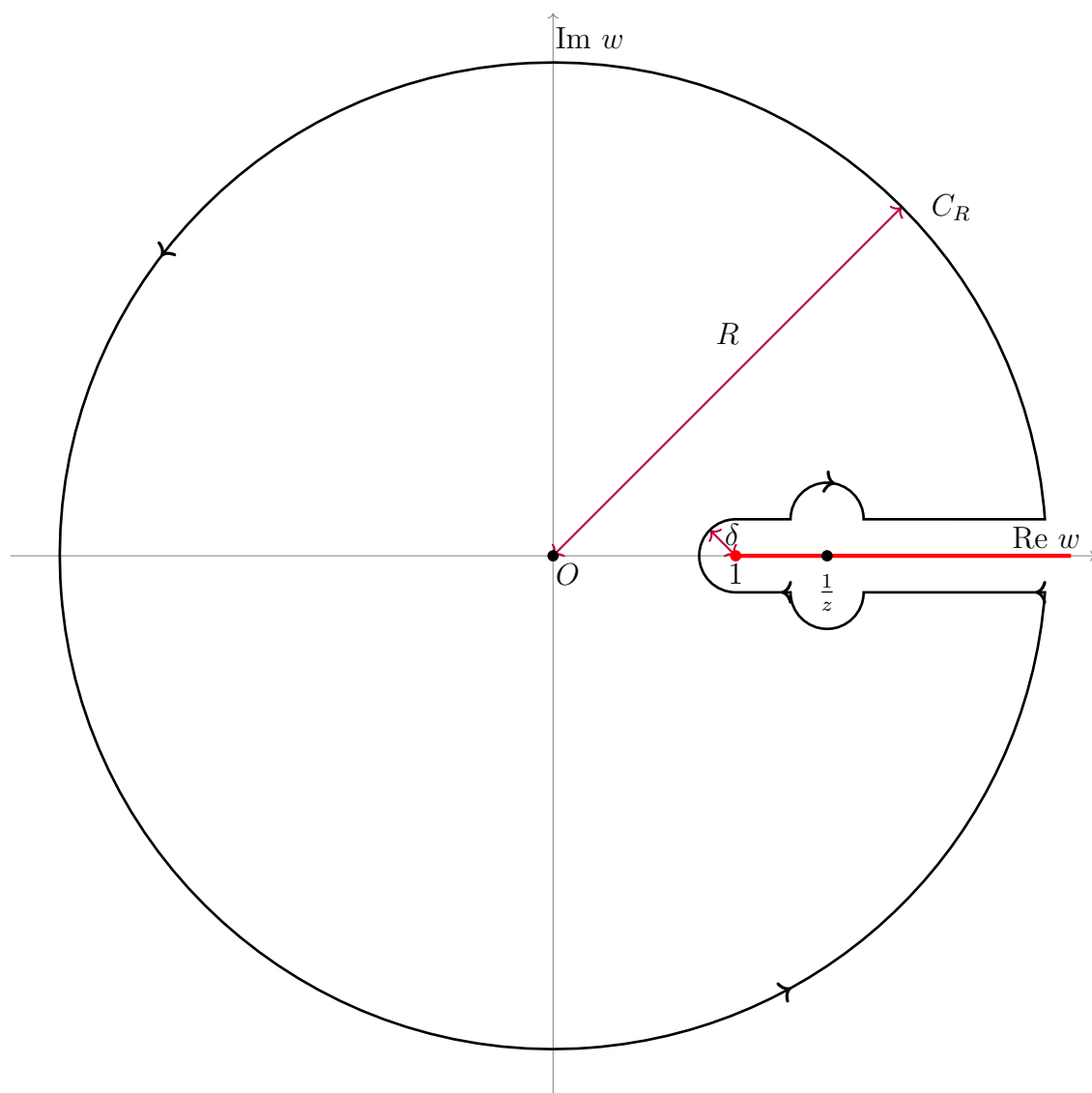


Figura 4.5: Cammino di integrazione per ottenere la (4.90).

Considerando il quinto (e analogamente il sesto) termine della (4.92), si ha:

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 d\alpha \left\{ \mathcal{P} \int_0^1 dy \frac{1}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \left[\frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha y)} \right] \right\} \\ &= \mathcal{P} \int_0^1 dy \frac{1}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p [\ln(-\ln z) - \ln(-\ln y)]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

I primi due termini della (4.72), come nel caso precedente, si integrano insieme perché singolarmente gli integrali sono divergenti, per cui si ha:

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 d\alpha \left[\frac{1}{\alpha \ln(\alpha z)} - \frac{1}{\alpha \ln(\alpha \bar{s})} \right] = \ln(-\ln z) - \ln(\ln \bar{s}). \quad (4.94)$$

Consideriamo ora il terzo e quarto termine della (4.72), si ha:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(1-\alpha)^p} \left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha z)} - \frac{1}{\alpha(1-\alpha \bar{s})} \right] = \int_0^1 \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^p} \frac{z}{1-\alpha z} \\ & - \mathcal{P} \int_0^1 \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^p} \frac{\bar{s}}{1-\alpha \bar{s}}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Questi due integrali possono essere calcolati con integrazioni nel piano complesso. Il primo, con la sostituzione $\alpha' = 1 - \alpha$, diventa:

$$z \int_0^1 \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^p} \frac{1}{1-\alpha z} = z \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^p} \frac{1}{1 + (\alpha - 1)z}, \quad (4.96)$$

la soluzione si ottiene integrando sul cammino mostrato in Figura 4.6. A tal proposito, si definisce la funzione polidroma $1/w^p$ con $\arg(w) \in (0, 2\pi)$ e si arriva al risultato (A.8), cioè:

$$\begin{aligned} z \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^p} \frac{1}{1 + (\alpha - 1)z} &= \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \left(\frac{z}{1-z} \right)^p - \frac{z}{1-z} \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^p} \frac{1}{1 + \frac{z}{1-z}\alpha} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \left(\frac{z}{1-z} \right)^p - \frac{1}{p} {}_2F_1 \left(1, p; 1+p; \frac{z-1}{z} \right). \end{aligned} \quad (4.97)$$

In modo analogo si calcola il secondo integrale (quello con $\bar{s}$), con la differenza che ora la singolarità polare $\frac{\bar{s}-1}{\bar{s}}$ si trova sul cammino d'integrazione $[0, 1]$ e di

conseguenza sul taglio di $1/w^p$, per cui si ottiene:

$$\mathcal{P} \int_0^1 \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^p} \frac{\bar{s}}{1-\alpha s} = \frac{\pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p - \frac{1}{p} {}_2F_1 \left(1, p; 1+p; \frac{\bar{s}-1}{\bar{s}} \right). \quad (4.98)$$

Dunque, considerando tutti i termini:

$$\begin{aligned} h(z, \bar{s}) &= \cos(\pi p) \left(\frac{z}{1-z} \right)^p \ln(-\ln z) - \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p \ln(\ln \bar{s}) \\ &+ \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \left(\frac{z}{1-z} \right)^p - \frac{1}{p} {}_2F_1 \left(1, p; 1+p; \frac{z-1}{z} \right) \\ &- \frac{\pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left(\frac{\bar{s}}{\bar{s}-1} \right)^p + \frac{1}{p} {}_2F_1 \left(1, p; 1+p; \frac{\bar{s}-1}{\bar{s}} \right) \\ &- \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \mathcal{P} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{z-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \\ &+ \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\bar{s}-y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p. \end{aligned} \quad (4.99)$$

In definitiva, per $0 < t < \Lambda^2$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{an}^{(1)}(t) &= \epsilon_{an}^{(1)}(s) + K_1 \cos(\pi p) \left(\frac{t}{\Lambda^2 - t} \right)^p \ln \left(-\ln \frac{t}{\Lambda^2} \right) \\ &- K_1 \left(\frac{s}{s - \Lambda^2} \right)^p \ln \left(\ln \frac{s}{\Lambda^2} \right) + \frac{K_1 \pi}{\sin(\pi p)} \left(\frac{t}{\Lambda^2 - t} \right)^p \\ &- \frac{K_1 \pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left(\frac{s}{s - \Lambda^2} \right)^p - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \mathcal{P} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \\ &+ K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{s}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p. \end{aligned} \quad (4.100)$$

A questo punto è possibile determinare la costante $\epsilon_{an}^{(1)}(s)$ che si ottiene, come nel caso del termine zero, imponendo il confinamento, ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \epsilon_{an}^{(1)}(x) = 0. \quad (4.101)$$

Quindi, tra le due espressioni calcolate, quella che interessa per ottenere la costante è la (4.100). In particolare, ricordando che:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} {}_2F_1 \left(1, p; 1+p; \frac{x - \Lambda^2}{x} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\Lambda^2 - x} \right)^p \ln \left(-\ln \frac{x}{\Lambda^2} \right) = 0, \quad (4.102)$$

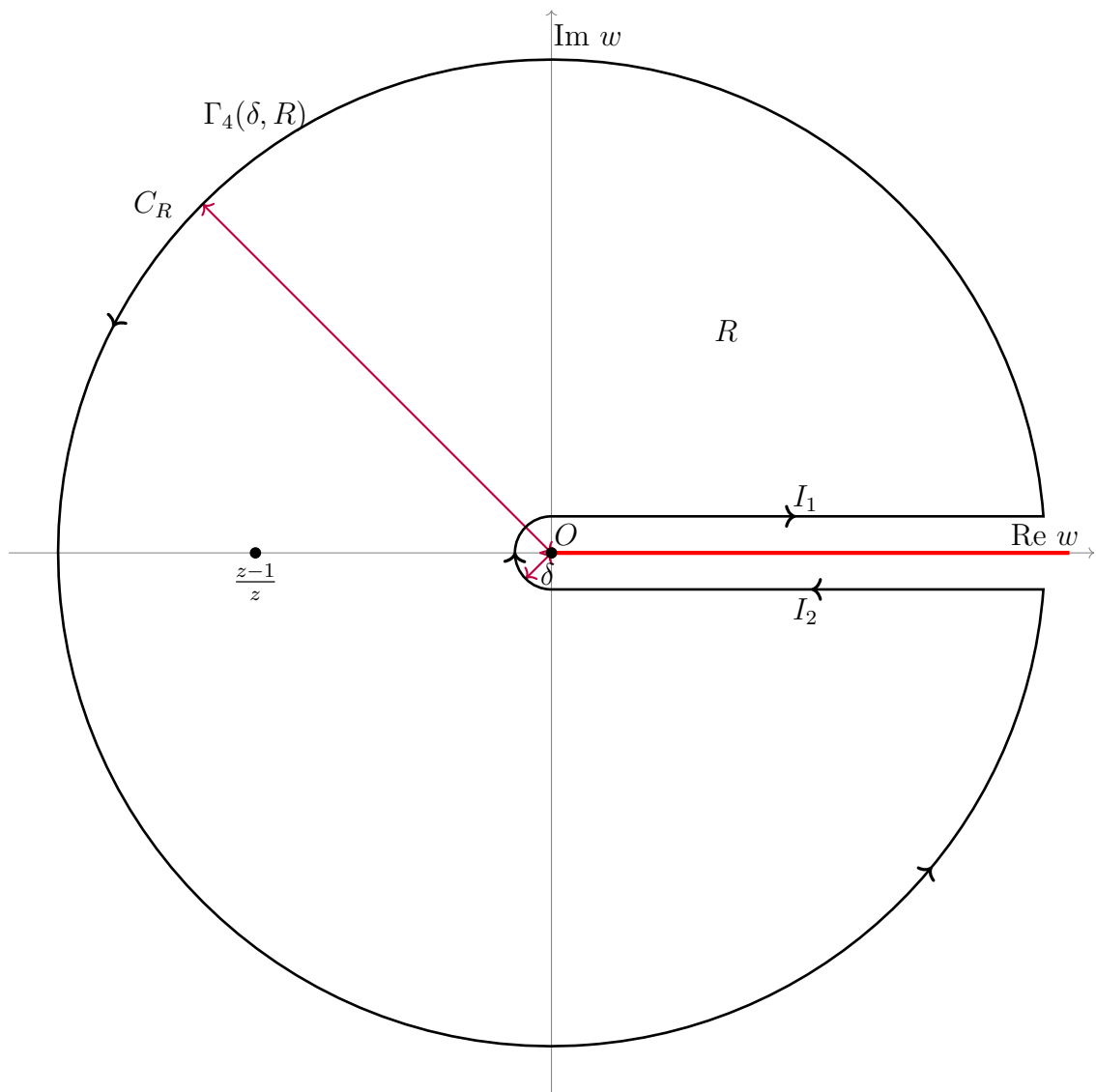


Figura 4.6: Cammino di integrazione per ottenere la (4.97).

si ha:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{an}^{(1)}(s) &= K_1 \left(\frac{s}{s - \Lambda^2} \right)^p \ln \left(\ln \frac{s}{\Lambda^2} \right) + K_1 \frac{\pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left(\frac{s}{s - \Lambda^2} \right)^p \\
&\quad - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \\
&\quad - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{s}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Le espressioni finali per $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ sono:

•

$$\begin{aligned}
\epsilon_{an}^{(1)}(t) &= K_1 \cos(\pi p) \left(\frac{t}{\Lambda^2 - t} \right)^p \ln \left(-\ln \frac{t}{\Lambda^2} \right) \\
&\quad + K_1 \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \left(\frac{t}{\Lambda^2 - t} \right)^p \\
&\quad - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \mathcal{P} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \\
&\quad - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p;
\end{aligned} \tag{4.104}$$

per $0 < t < \Lambda^2$.

•

$$\begin{aligned}
\epsilon_{an}^{(1)}(t) &= K_1 \left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \right)^p \ln \left(\ln \frac{t}{\Lambda^2} \right) + K_1 \frac{\pi \cos(\pi p)}{\sin(\pi p)} \left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \right)^p \\
&\quad - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p \\
&\quad - K_1 \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p;
\end{aligned} \tag{4.105}$$

per $t \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, \Lambda^2]$.

Poiché la costante arbitraria $\epsilon_{an}^{(1)}(s)$ è stata fissata, dalle due espressioni scompare la dipendenza dal punto di sottrazione s . In Figura 4.7 è rappresentata l'espressione di $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ per alcuni valori del parametro p , cioè $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. In Figura 4.8 sono rappresentati, per $p = 0.7$, $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$, $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ e la loro somma.

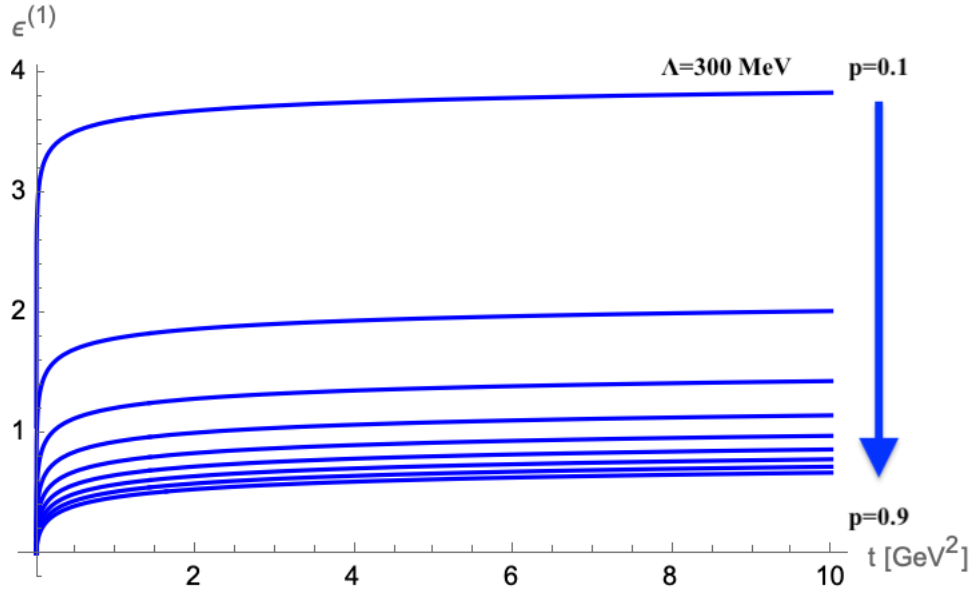


Figura 4.7: Grafici per $n_f = 5$ e $\Lambda = 300$ MeV di $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ data dalle (4.104) e (4.105), per $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

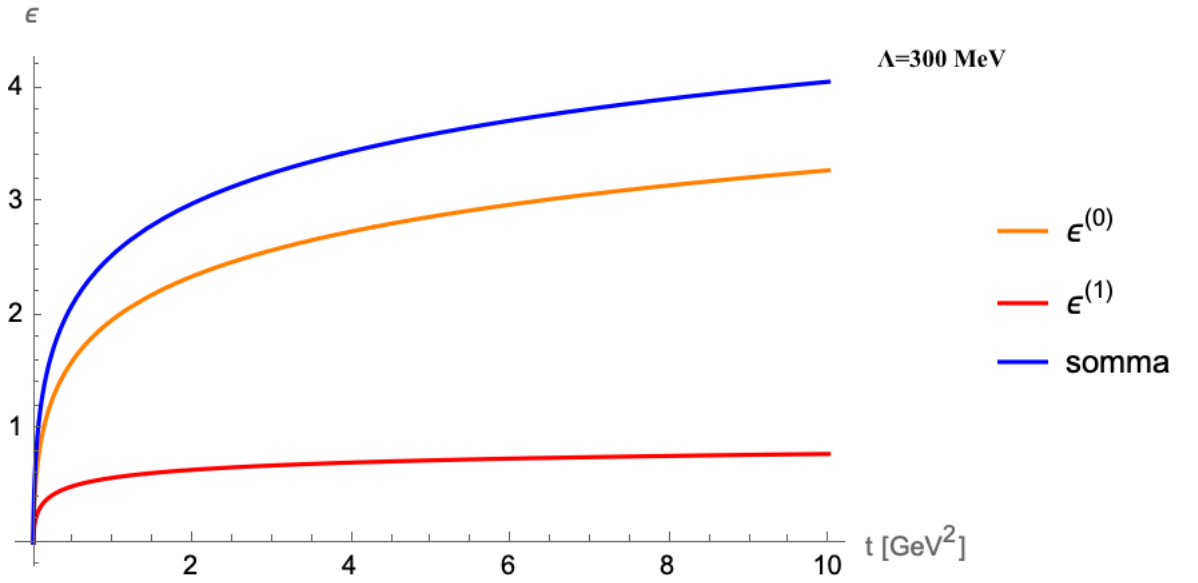


Figura 4.8: Grafici per $n_f = 5$, $\Lambda = 300$ MeV e $p = 0.7$ di $\epsilon_{an}^{(0)}(t)$, $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ e della loro somma.

4.4 Calcolo di R_τ

Per testare il modello di $\epsilon_{an}(t)$, verrà calcolata la grandezza R_τ , definita dalla (2.21), che nel contesto della APT è ottenibile attraverso l'integrale (2.27), il cui cammino d'integrazione è una circonferenza nel piano complesso. In questo modo, come detto in precedenza, si può verificare se la struttura nel piano complesso di $\epsilon_{an}(t)$ è in grado di produrre risultati ragionevoli per grandezze sperimentalmente osservabili. Nell'integrand compare la funzione di Adler $D(z)$, la cui definizione è data dalla (2.1), che si ottiene attraverso la rappresentazione in serie (2.17). Arrestando la serie a $n = 1$, la funzione di Adler è data da:

$$D(z) = N_c \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \right] = N_c \left[1 + \frac{1}{\pi \epsilon_s} \right], \quad (4.106)$$

dove $N_c = 3$ è il numero dei colori. Si è dunque sostituito la (4.106) nella (2.27) per ottenere R_τ come funzione di Λ , mentre per il parametro p sono stati utilizzati i valori $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$. Il risultato sperimentale per R_τ è

$$R_\tau = 3.522 \pm 0.035, \quad (4.107)$$

i risultati ottenuti dall'integrazione (2.27) sono rappresentati in Figura 4.9.

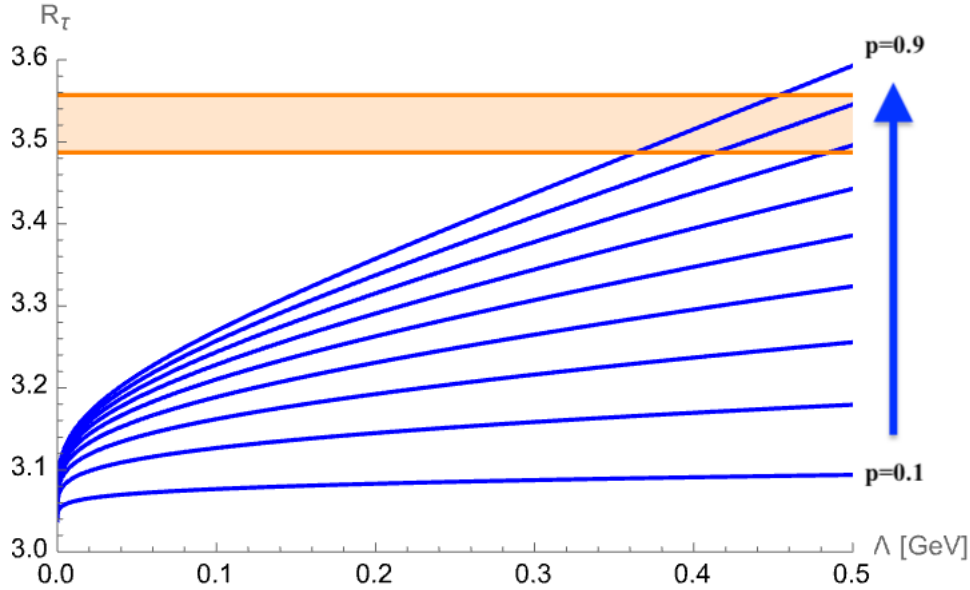


Figura 4.9: Grafici di R_τ in funzione di Λ , per $n_f = 5$ e $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

Conclusioni

Abbiamo formulato un modello analitico nel piano complesso della CAI di QCD, $\epsilon_s = 1/\alpha_s$. L'analiticità è una diretta conseguenza della causalità, espressa nell'ambito di una Teoria di Campo attraverso la forma di Källén-Lehmann dei propagatori. Poiché per la QCD la rinormalizzazione della costante d'accoppiamento è collegata a quella del campo di gauge, anch'essa deve soddisfare la suddetta rappresentazione, che ha la forma di una relazione di dispersione. Le proprietà fisiche imposte su ϵ_s sono la libertà asintotica ed il confinamento. La necessità di imporre quest'ultima condizione è il motivo per il quale il modello è stato proposto in termini di ϵ_s in luogo di α_s . Per la prima infatti, il confinamento si impone in maniera più naturale attraverso $\epsilon_{an}(0) = 0$, ha una diretta conseguenza sulla parte immaginaria lungo il taglio, che è il punto di partenza per applicare le relazioni di dispersione. Per α_s invece, il confinamento si impone richiedendone la divergenza nell'origine del piano complesso e questa condizione non permette di dedurre direttamente un andamento per la parte immaginaria che potrebbe anche essere finita. Il comportamento infrarosso scelto per $\epsilon_{an}(t)$ è di tipo potenza, $\epsilon_{an}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^p$, governato da un parametro $0 \leq p < 1$ che definisce la velocità di azzeramento della CAI nell'origine. Infine, è stato effettuato una verifica dell'espressione ottenuta utilizzando la CAI per calcolare una grandezza sperimentale caratteristica delle interazioni forti, il rapporto R_τ . Infatti, in virtù dell'analiticità della funzione di polarizzazione del vuoto, è possibile ricavare questa osservabile attraverso un integrale avente come percorso una circonferenza nel piano complesso. Per valori fisicamente accettabili di Λ (350-400 GeV), la previsione di R_τ cade all'interno dell'intervallo sperimentale per $p \gtrsim 0.8$. Oltre ad R_τ , il modello esposto permette di ottenere le previsioni teoriche di altre grandezze fisiche di interesse nell'ambito delle interazioni forti, in particolare tutte quelle che dipendono dal rapporto $R(s)$, le cosiddette *R-related quantities* (Ref [4]). In particolare, tra queste ci sono il momento magnetico anomalo del muone e la correzione adronica alla costante di struttura fine α . Queste osservabili sono accomunate dal fatto che nelle loro espressioni compare l'integrale di $R(s)$ nella regione infrarossa, nella quale non si può applicare la teoria perturbativa.

Appendice A

La serie e la funzione ipergeometrica di Gauss

La serie ipergeometrica di Gauss è una particolare serie di potenze, avente la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{A.1})$$

dove, per ogni $a \notin \mathbb{Z}_0^-$, si definisce il **simbolo di Pochhammer**, anche detto fattoriale crescente:

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n = 0 \\ a(a+1) \dots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} & \text{per } n > 0 \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

Denominando $\mathfrak{g}_n$ i coefficienti della serie di potenze (A.1), si vede immediatamente che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{g}_{n+1}}{\mathfrak{g}_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} = 1, \quad (\text{A.3})$$

dunque la serie ha raggio di convergenza $R = 1$. Si può dimostrare che la (A.1) ammette un prolungamento analitico nel piano complesso con un taglio sulla semiretta

$$T = [1, \infty), \quad (\text{A.4})$$

dato da:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a}, \quad (\text{A.5})$$

se $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$. Un caso particolare è dato da:

$$h_p(z) = {}_2F_1(1, p; 1+p; z) = p \int_0^1 dt \frac{t^{p-1}}{1-tz}, \quad (\text{A.6})$$

la rappresentazione integrale è valida per $p > 0$. Di conseguenza, un integrale della forma

$$\int_1^\infty \frac{dw}{w^p} \frac{1}{1 + \alpha w}, \quad (\text{A.7})$$

si riconduce a quello che definisce h_p attraverso un cambiamento di variabile. Infatti, ponendo $w = 1/t$ si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2} \frac{t^p}{1 + \frac{\alpha}{t}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 dt \frac{t^{p-1}}{1 + \frac{t}{\alpha}} = \frac{1}{p\alpha} h_p \left(-\frac{1}{\alpha} \right). \quad (\text{A.8})$$

Appendice B

Una forma alternativa per

$$\int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p$$

Nell'espressione della correzione $\epsilon_{an}^{(1)}(t)$ data dalle (4.104) ed (4.105), rimane un termine scritto sotto forma di integrale. Nel caso $|t| > \Lambda^2$ e dunque riferendoci all'equazione (4.105), si può ottenere una rappresentazione in serie di:

$$\int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p. \quad (\text{B.1})$$

Nel caso considerato infatti, poiché il dominio di integrazione è l'intervallo $[0, 1]$, per la variabile integrata y si può scrivere:

$$y \leq 1 < \frac{|t|}{\Lambda^2} \implies \left| \frac{y\Lambda^2}{t} \right| < 1, \quad (\text{B.2})$$

quindi, utilizzando la serie geometrica, si ha:

$$\frac{1}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda^2}{t} \right)^{l+1}. \quad (\text{B.3})$$

Inoltre, per $0 \leq y < 1$, vale:

$$(1-y)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-p}{k} (-y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p)_k}{k!} y^k. \quad (\text{B.4})$$

Sostituendo i due sviluppi appena ottenuti nella (B.1), si ottiene:

$$\int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(p)_k}{k!} \left(\frac{\Lambda^2}{t} \right)^{l+1} \int_0^1 dy \ln(-\ln y) y^{p+k+l}, \quad (\text{B.5})$$

da cui, con un cambiamento di variabile $t = -\ln y$, si ha:

$$\int_0^1 dy \ln(-\ln y) y^{p+k+l} = \int_0^{\infty} dt \ln t e^{-(p+k+l+1)t}. \quad (\text{B.6})$$

Quest'ultimo integrale è noto, e risulta essere:

$$\int_0^{\infty} dt \ln t e^{-(p+k+l+1)t} = -\frac{\gamma + \ln(p+k+l+1)}{p+k+l+1}, \quad (\text{B.7})$$

dove $\gamma \approx 0.5772$ è la costante di Eulero-Mascheroni. Di conseguenza, definendo:

$$a_l = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p)_k}{k!} \frac{\gamma + \ln(p+k+l+1)}{p+k+l+1}, \quad (\text{B.8})$$

si ottiene:

$$\int_0^1 dy \frac{\ln(-\ln y)}{\frac{t}{\Lambda^2} - y} \left(\frac{y}{1-y} \right)^p = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{\Lambda^2}{t} \right)^{l+1}. \quad (\text{B.9})$$

La scrittura (B.9) è ben definita poiché la serie (B.8), che definisce a_l , è convergente per ogni l .

Bibliografia

- [1] GRAU, A., PACETTI, S., PANCHERI, G., AND SRIVASTAVA, Y.N. Bloch-Nordsieck resummation for QCD processes. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 126 (2004), 84–93.
- [2] MILTON, K.A., AND SOLOVTSOV, I.L. Analytic perturbation theory in QCD and Schwinger’s connection between the β -function and the spectral density. *Physical Review D* 55 (1997), 5295–5298.
- [3] MILTON, K.A., SOLOVTSOV, I. L., AND SOLOVTSOVA, O. P. Analytic perturbation theory and inclusive τ decay. *Physics Letters B* 415 (1997), 104–110.
- [4] MILTON, K.A., SOLOVTSOV, I. L., AND SOLOVTSOVA, O. P. An analytic method of describing R -related quantities in QCD. *Modern Physics Letter A* 21, 17 (2006), 1355–1368.
- [5] REDMOND, P.J. Elimination of Ghosts in Propagators. *Physical Review* 112, 4 (1958), 1404–1408.
- [6] SERONE, M. Notes on Quantum Field Theory. <https://userswww.pd.infn.it/~feruglio/Serone.pdf>. [Online; Last Update: December 13, 2018].
- [7] SHIRKOV, D.V., AND SOLOVTSOV, I.L. Ten years of the Analytic Perturbation Theory in QCD. *Theoretical and Mathematical Physics* 150 (2007), 132–152.