



A.D. 1308  
**unipg**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI PERUGIA

## Università degli Studi di Perugia

Dipartimento di Fisica e Geologia  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

*Curriculum di Fisica Teorica*

# Modello confinante per la costante di accoppiamento analitica della QCD

Applicazione dell'APT al calcolo dei contributi adronici nel decadimento inclusivo del leptone  $\tau$  e nel momento magnetico anomalo del muone.

Laureando:  
**Lorenzo Pierini**

Relatore:  
**Prof. Simone Pacetti**

**Anno Accademico 2022/2023**

*A mio Nonno*

*"Molti fisici sono soddisfatti dello stato delle cose. Dicono:  
"L'elettrodinamica quantistica è una buona teoria e non c'è bisogno di preoccuparcene ancora." Io devo dire che ne sono molto insoddisfatto, perché questa cosiddetta 'buona teoria' prevede di ignorare degli infiniti che appaiono nelle sue equazioni, e di ignorarli in un modo arbitrario. Questa non è più matematica rigorosa. La matematica sensata prevede di ignorare una quantità quando questa è piccola, non di ignorarla perché è infinitamente grande e non la vuoi!"*

*Paul Dirac*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Teoria delle Perturbazioni Analitica</b>	<b>8</b>
1.1 Running della costante di accoppiamento della QCD . . . . .	9
1.2 Caratteristiche generali dell'APT . . . . .	13
1.2.1 Rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann . . . . .	13
1.2.2 Causalità nelle QFT . . . . .	19
1.2.3 Relazioni di dispersione . . . . .	22
1.3 Teorema ottico e singolarità fisiche . . . . .	25
1.3.1 Regola di Cutkosky . . . . .	26
1.3.2 Discontinuità della parte immaginaria . . . . .	27
1.3.3 Teorema ottico nei diagrammi di Feynman . . . . .	29
<b>2 Applicazione dell'APT in QCD</b>	<b>33</b>
2.1 Costante di accoppiamento analitica $[\alpha_s]_{an}$ . . . . .	33
2.2 Funzione di Adler . . . . .	37
2.2.1 Regione spacelike vs timelike . . . . .	40
2.3 Decadimento inclusivo del leptone $\tau$ . . . . .	44
2.4 Momento magnetico anomalo del muone . . . . .	48
<b>3 Costante d'Accoppiamento Inversa <math>\epsilon_s</math> (CAI)</b>	<b>54</b>
3.1 Vuoto QCD . . . . .	55
3.2 Espansione perturbativa della CAI . . . . .	61
3.2.1 Ambiguità nella scelta dello schema e della scala . . . . .	61
3.2.2 Sviluppo perturbativo di $\epsilon_s$ . . . . .	61
3.3 Espressione analitica per la CAI . . . . .	67
3.3.1 Calcolo di $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$ . . . . .	68
3.3.2 Calcolo di $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$ . . . . .	69

<b>4</b>	<b>Modello Confinante</b>	<b>74</b>
4.1	Confinamento . . . . .	75
4.2	Calcolo di $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$ . . . . .	77
4.2.1	PARTE 1: Calcolo dell'integrale . . . . .	77
4.2.2	PARTE 2: Selezione del parametro $[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}$ . . . . .	84
4.2.3	Funzioni speciali . . . . .	90
4.3	Calcolo di $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$ . . . . .	95
4.3.1	PARTE 1: Calcolo dell'integrale . . . . .	95
4.3.2	PARTE 2: Selezione del parametro $[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}$ . . . . .	97
4.3.3	Tecnica di risoluzione per gli integrali $I_k(z)$ . . . . .	99
4.4	Modello confinante per la CAI . . . . .	101
4.4.1	Risultati ottenuti per $\epsilon_s$ . . . . .	101
4.4.2	Confronto con i dati sperimentali di $\alpha_s$ . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Fenomenologia</b>	<b>109</b>
5.1	Calcolo di $R_\tau$ . . . . .	109
5.2	Calcolo di $a_\mu^{\text{had}}$ . . . . .	111
5.2.1	Calcolo di $R(s)$ . . . . .	114
5.2.2	Calcolo di $\mathcal{R}(s)$ . . . . .	115
	<b>Conclusione</b>	<b>124</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>124</b>

# Introduzione

Alla base del Modello Standard si trovano le Teorie Quantistiche di Campo (QFT), le quali permettono di ottenere delle previsioni teoriche in accordo con i risultati ricavati da esperimenti di fisica delle particelle, che vanno ad indagare le interazioni fondamentali ossia: l'interazione forte, l'interazione debole e l'interazione elettromagnetica. La Cromodinamica Quantistica (QCD) è la QFT associata all'interazione forte e permette di inserire nella lagrangiana del modello standard il contributo dei quark e dei gluoni. A livello pratico, utilizzando la teoria perturbativa, si riesce a studiare la fisica delle tre interazioni andando a sviluppare le osservabili, in particolare le ampiezze di interazione, in serie di potenze delle costanti di accoppiamento. Nel fare questo si ottengono diversi diagrammi di Feynman corrispondenti a diversi ordini dello sviluppo, in particolare:

- I diagrammi all'ordine zero (*tree level*) presentano vertici di interazione e propagatori in modo da riprodurre l'accoppiamento tra i diversi campi che si trovano nel termine di interazione della lagrangiana della teoria considerata. Per la QCD questo termine di interazione contiene sia vertici fermionici (interazioni tra quark), sia vertici gluonici (interazioni tra bosoni mediatori, ossia i gluoni), sia vertici misti fermionici e bosonici;
- I diagrammi agli ordini perturbativi successivi, oltre alle informazioni precedenti, sono caratterizzati dalla presenza di *loop*, ossia curve chiuse all'interno delle quali è necessario considerare tutti i valori del quadrimpulso associato. Perciò, nella definizione delle ampiezze di interazione, ciascun loop comporta un'integrazione su tutti i possibili valori del quadrimpulso.

Tali integrali possono però divergere. Per questo è necessario rinormalizzare la teoria considerata.

La rinormalizzazione è una tecnica che permette di "rivestire" le quantità fisiche descrittive dell'interazione con opportune correzioni che vanno a riassorbire i contributi divergenti portati dagli ordini perturbativi superiori. Nel

fare questo si ridefiniscono i parametri della teoria considerata tra cui la costante di accoppiamento, la massa e i campi stessi. Prima di rinormalizzare però è necessario regolarizzare i vari parametri in modo da poter calcolare i vari integrali estrapolandone la parte divergente. Tra le varie possibilità, si considera la regolarizzazione dimensionale, che implica l'introduzione della dipendenza dalla scala energetica in cui si sta osservando l'interazione ed è possibile scrivere esplicitamente questa dipendenza. La scelta di tale scala fissa il punto di rinormalizzazione, ossia la scala energetica su cui si sta osservando il sistema. Così facendo i parametri della teoria diventano funzioni del punto di rinormalizzazione e diventa lecito chiedersi quale sia la relazione tra due quantità calcolate in punti di rinormalizzazione diversi, ossia a scale diverse. Tali evoluzioni vengono descritte dalle equazioni del gruppo di rinormalizzazione.

Il metodo del gruppo di rinormalizzazione ha reso possibile migliorare la comprensione delle proprietà della serie di potenze perturbativa della QCD, nella regione ultravioletta. Tuttavia questo metodo comporta l'introduzione di singolarità non fisiche, nella regione dell'infrarosso, per la *costante di accoppiamento dell'interazione forte* " $\alpha$ -strong ( $\alpha_s$ )". Il punto di rinormalizzazione in corrispondenza del quale si ha divergenza è detto *polo di Landau*, gioca un ruolo chiave fornendo il limite energetico oltre il quale non è possibile applicare l'approccio perturbativo. Mentre nella QED le singolarità si trovano a scale energetiche non osservabili sperimentalmente, per la QCD la scala di divergenza è nell'ordine dei MeV, accessibile sperimentalmente.

Si possono dunque intraprendere tre strade per giustificare l'esistenza di queste singolarità non fisiche, dette *ghost*:

1. Le singolarità sono una conseguenza della teoria e dunque non possono essere eliminate. Quindi la teoria di campo in questione non funziona;
2. La teoria in sé non è sufficiente e sono necessarie condizioni aggiuntive per riprodurre i risultati sperimentali;
3. La soluzione esatta della teoria esiste e non contiene le singolarità, dunque descrive correttamente i processi fisici.

La Teoria delle Perturbazioni Analitica (APT), di cui si occupa questo elaborato, parte dall'assunzione che si verifichi il terzo caso, ossia che la teoria di campo sia sufficiente a descrivere la fisica e non preveda i *ghost*. Essa rappresenta la fase successiva all'espansione perturbativa rinormalizzata. In particolare, questo approccio include, in aggiunta, l'analiticità che si basa sul principio di causalità e che viene implementata dalla rappresentazione di Källén-Lehmann. Questo approccio elimina le singolarità spurie della serie

di potenze perturbativa e migliora la stabilità di quest'ultima rispetto sia a correzioni di loop a ordini più alti che alla scelta dello schema di rinormalizzazione. In termini più rigorosi, la teoria assume che i propagatori, come funzioni del parametro di scala  $q^2$ , siano prolungabili analiticamente nel piano complesso con un taglio sull'asse reale della forma  $(M_{tr}^2, \infty)$ , dove  $M_{tr}$  è una soglia associata alla teoria, e con i poli associati solo agli stati fisici. Poichè nella QCD la rinormalizzazione della costante d'accoppiamento è legata alla funzione di polarizzazione del vuoto e dunque alla rinormalizzazione del propagatore del campo di gauge, anche  $\alpha_s$  deve essere prolungata analiticamente con il taglio sull'asse reale e senza ulteriori poli.

L'obiettivo di questo lavoro è proporre un modello confinante analitico per la costante di accoppiamento, in modo da poter calcolare il contributo adronico in osservabili significative per la QCD, tra cui: il caso del decadimento inclusivo del leptone  $\tau$  e il caso del momento magnetico anomalo del muone "g-2". Tuttavia, dopo aver reso analitica  $\alpha_s$  rimuovendo i poli non fisici, si ottiene un'espressione che non diverge per  $q^2 = 0$ , poichè assume un valore fisso e stabile a bassi  $q^2$ , non solo al primo ordine ma anche agli ordini successivi. Perciò si definirà una procedura per imporre il confinamento usando una funzione regolarizzatrice che garantisce la divergenza di  $\alpha_s$  per  $q^2 = 0$ . Infatti, l'APT garantisce l'analiticità di  $\alpha_s$  in tutto il piano complesso, a meno dei tagli fisici, estendendo la validità dell'espressione anche nella regione infrarossa, nella quale possiamo scegliere liberamente l'andamento della costante di accoppiamento a  $q^2$  nullo, imponendo il confinamento mancante nei risultati dell'APT.



# Capitolo 1

## Teoria delle Perturbazioni Analitica

Il metodo della Teoria Analitica delle Perturbazioni (APT) risolve il problema delle singolarità non fisiche (o *ghost*) sia della carica invariante della Cromodinamica Quantistica (QCD) sia degli elementi della matrice dei processi di interazione forte. Questa difficoltà (nota anche come problema dello zero di Mosca o del polo di Landau) è apparsa per la prima volta nell'Elettrodinamica Quantistica (QED) a metà degli anni '50 del secolo scorso e ha avuto un ruolo cruciale nello sviluppo della Teoria Quantistica dei Campi (QFT). Alla fine degli anni '50 Bogoliubov, Logunov e Shirkov [2] suggerirono di risolvere questo problema fondendo il metodo del gruppo di rinormalizzazione (RG) con la rappresentazione di Källén-Lehmann, che implica l'analiticità nella variabile complessa  $q^2$ .

In questo capitolo si illustreranno le caratteristiche generali dell'APT, in particolare, come il suo sviluppo, nell'ultimo decennio, ha portato alla risoluzione del problema delle singolarità non fisiche della teoria perturbativa. Inoltre, si ricaverà la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann, con la quale è possibile garantire l'analicità dei propagatori di una certa teoria, mantenendo le caratteristiche fisiche che la teoria perturbativa introduce, tra cui: l'invarianza di Lorentz e il concetto di causalità, che si estenderà, per le teorie di campo, direttamente dalla rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann. Si parlerà, quindi, di densità spettrale e di teorema ottico in modo da descrivere le singolarità fisiche che devono essere mantenute dall'APT e si proporrà un metodo per calcolare la densità spettrale tramite le relazioni di dispersione [11, 27]. A tale scopo, si lavorerà con la teoria di campo scalare, in modo da ottenere calcoli più semplici, comunque illustrativi delle prescrizioni dell'APT. Nei capitoli successivi si applicherà l'approccio analitico direttamente alla QCD.

## 1.1 Running della costante di accoppiamento della QCD

La QCD è la QFT che descrive le interazioni forti. In quanto tale, possiede tre proprietà fondamentali:

- Invarianza di Lorentz;
- Rinormalizzabilità;
- Invarianza di gauge, rispetto al gruppo  $SU(3)_c$  di colore.

La Lagrangiana generale della QCD sarà quindi rinormalizzata:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD}^{(Gen)} = & -\frac{1}{4}Z\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} + i\bar{\psi}_L Z_L \not{D}\psi_L + i\bar{\psi}_R Z_R \not{D}\psi_R + \\ & -\bar{\psi}_L M\psi_R - \bar{\psi}_R M^\dagger\psi_L + \theta\frac{g_3^2}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}_{\lambda\sigma} \quad , \end{aligned}$$

dove le costanti utilizzate per riscaldare i campi, la costante di accoppiamento ( $g_3$ ) e la massa sono:

- $Z \in \mathbb{R}$  per riscaldare  $g_3$  e il campo di gauge  $A_\mu^a$ , con  $a \in \{1, 2, \dots, 8\}$  componenti associate agli otto generatori del gruppo di simmetria di gauge di colore;
- $Z_L, Z_R, M$  matrici  $6 \times 6$  nello spazio dei sapori, con  $Z_L, Z_R$  hermitiane e  $M$  non hermitiana, per riscaldare i campi fermionici e la massa.

Come conseguenza della rinormalizzabilità, le Equazioni del Gruppo di Rinormalizzazione prevedono che i parametri che descrivono la teoria dipendano dalla scala energetica a cui un determinato processo fisico si verifica. Nella referenza [25] considerando la libertà asintotica delle ampiezze proprie e studiando la risposta che la funzione di Green di un diagramma connesso con  $N$  linee esterne dà cambiando la scala energetica:  $\{p\} \rightarrow \{\lambda p\}$  (dove  $p$  è il quadrimpulso associato alla trasformata di Fourier del diagramma), si ricava l'equazione seguente:

$$\left[ \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + N_F \left( \frac{3}{2} + \gamma_F \right) + N_B \left( 1 + \gamma_B \right) - \beta_{QCD} \frac{\partial}{\partial g_3} \right] \Gamma(\{p\}, g_3; \mu_R) = 0,$$

dove  $\Gamma(\{p\}, g_3; \mu_R) \equiv \Gamma^{(N_F, N_B)}(\{p\}, g_3(\mu_R); \mu_R)$  è l'ampiezza dei diagrammi *One Particle Irreducible* (OPI) con  $N$  linee esterne, in particolare  $N_F$  linee esterne fermioniche e  $N_B$  linee esterne bosoniche,  $\mu_R$  è la scala di rinormalizzazione e inoltre si hanno tre grandezze importanti per lo studio dell'evoluzione dei parametri rispetto alla scala che sono:

- la dimensione anomala fermionica:  $\gamma_F$ ;
- la dimensione anomala bosonica:  $\gamma_B$ ;
- la funzione  $\beta$  della QCD: descrive l'andamento della costante di accoppiamento  $g_3$  in funzione della scala energetica alla quale il sistema viene osservato.

Nell'ambito della QED la costante di accoppiamento è la carica dell'elettrone  $e \equiv e(\mu_R)$  (o equivalentemente la costante di struttura fine,  $\alpha_{QED} = e^2/4\pi$ ), la cui dipendenza dalla scala energetica è descritta dalla funzione  $\beta_{QED}$ :

$$\mu_R \frac{\partial e}{\partial \mu_R} = \beta_{QED}(e), \quad (1.1)$$

da cui, al primo ordine perturbativo della Teoria delle Perturbazioni, si ottiene:

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 + z_f \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu_0^2}{q^2}\right)}, \quad (1.2)$$

per un quadrimpulso  $q$ , con  $q^2 = -t > 0$  (regione cinematica nella quale  $q^2$  è di tipo tempo). Il fattore  $z_f$  è la somma dei quadrati delle cariche dei fermioni che partecipano al processo mentre  $\mu_0$  è il punto di sottrazione in corrispondenza del quale si ha massimo effetto schermo per le QED, ossia la scala energetica alla quale  $\alpha \approx 1/137$ . Questa dipendenza dalla scala energetica è conseguenza del fatto che il vuoto quantistico della QED è polarizzato. Infatti, considerando processi elettromagnetici, aumentando l'energia del fotone virtuale scambiato, diventano sempre più importanti i diagrammi di ordine superiore contenenti i loop. Perciò una carica elettrica inserita nel vuoto interagisce con esso elettromagneticamente in maniera analoga a quello che avviene in un esperimento di diffusione per misurare la carica di un bersaglio. All'aumentare dell'energia del proiettile diminuirà la distanza minima dal bersaglio e se la diffusione avviene in un dielettrico si vede una schermatura della carica sempre più grande all'aumentare della distanza. Il vuoto genera continuamente coppie  $e^+e^-$ , polarizzandosi in maniera da comportarsi come un mezzo dielettrico per la carica elettromagnetica. Di conseguenza, si ha un "effetto di schermatura" sulla carica al variare del momento trasferito  $q^2$  (e della distanza).

Allo stesso modo, in Cromodinamica Quantistica, per la costante di accoppiamento associata al gruppo di simmetria di gauge di colore,  $g_3 \equiv g_3(\mu_R)$  (con la quale si può definire la costante di struttura per la QCD:  $\alpha_s = g_3^2/4\pi$ ) si definisce la funzione  $\beta_{QCD}$ :

$$\mu_R \frac{\partial g_3}{\partial \mu_R} = \beta_{QCD}(g_3). \quad (1.3)$$

Ripetendo il calcolo al primo ordine perturbativo, nel caso della QCD, si ha:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \frac{\alpha(\mu_0^2)}{4\pi} (11 - \frac{2}{3}n_f) \ln(\frac{\mu_0^2}{q^2})}, \quad (1.4)$$

dove  $n_f$  è il numero dei sapori dei quark che partecipano al processo. A differenza della (1.2), a denominatore della (1.4) si trova il fattore  $(11 - \frac{2}{3}n_f)$ . In base al valore di  $n_f$  il segno della (1.3) cambia, passando da positivo a negativo. Questo comporta il fatto che il vuoto quantistico della QCD può causare sulla carica di colore un effetto:

- sia di schermatura:  
 $\beta_{QCD} > 0 \Rightarrow \frac{2}{3}n_f > 11 \Rightarrow n_f > 16.5 \quad n_f = 17, 18, \dots;$
- sia di antischermatura:  
 $\beta_{QCD} < 0 \Rightarrow \frac{2}{3}n_f < 11 \Rightarrow n_f < 16.5 \quad n_f = 1, 2, \dots, 16.$

Sperimentalmente  $n_f^{(exp)} = 6$ , quindi si ricade nel caso dell'antischermo. A livello fisico questo è dovuto al fatto che per la QCD, oltre ai loop fermionici tra quark ( $q$ ) e antiquark ( $\bar{q}$ ), analoghi a quelli della QED, si hanno anche loop bosonici tra gluoni ( $g$ ). Questi ultimi, infatti, pur essendo i mediatori dell'interazione forte, possiedono a loro volta carica di colore e perciò sono ammessi, dalla teoria, i vertici a quattro o a tre gluoni. Loop fermionici e loop bosonici contribuiscono in modo opposto nell'espansione perturbativa. Come per la QED, la polarizzazione del vuoto dovuta alla produzione di coppie fermioniche  $q\bar{q}$  produce un effetto di schermo, per il quale la carica di colore diminuisce all'aumentare della distanza. Il contributo di autointerazione tra gluoni, invece, causa l'antischermo e domina sull'effetto precedente. Perciò, considerando un quark immerso nel vuoto, all'aumentare di  $q^2$  la probabilità di radiazione gluonica aumenta, e sempre meno carica di colore sarà concentrata nel quark originale. Questa proprietà è detta *Libertà Asintotica*. Allo stesso tempo al diminuire della scala energetica (ossia all'aumentare della distanza tra due quark) la carica di colore aumenta sempre di più arrivando a divergere in regioni energetiche significativamente basse. La proprietà che descrive questa divergenza fisica per la carica di colore è detta *Confinamento* e sostanzialmente afferma che l'interazione di colore diventa troppo forte per  $q^2 \rightarrow 0$ , tanto da non poter più sviluppare perturbativamente la teoria. Perciò, a causa della diversa natura dell'interazione forte rispetto all'interazione elettromagnetica, si hanno andamenti fenomenologici opposti tra la costante di accoppiamento della QED e il suo corrispettivo in QCD. Nello studiare gli andamenti teorici delle costanti di accoppiamento, dati dalla (1.2) e dalla (1.4), ci si accorge che tali espressioni non sono ben definite

nell'intera regione  $q^2 \in [0, \infty)$ , poichè presentano delle singolarità. Solo che, mentre per la costante di accoppiamento della QED la singolarità si trova in corrispondenza di valori di  $q^2$  sufficientemente elevati, in modo da non essere accessibili sperimentalmente, per la QCD la singolarità si trova a valori bassi del quadrimpulso trasferito, impedendo di riprodurre l'andamento sperimentale nella regione infrarossa. A livello teorico, quindi, non si riesce a spiegare il confinamento caratteristico della costante di accoppiamento forte nella regione a basso  $q^2$ . Queste singolarità sono definite *ghost* e sono non fisiche poichè compaiono nell'espressione teorica delle costanti di accoppiamento senza avere un corrispettivo fenomenologico/fisico. Il ghost per la costante di accoppiamento della QCD è detto *Polo di Landau* e si trova in:

$$q^2 = \Lambda^2 = \mu_0^2 \exp \left[ -\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu_0^2)(11 - \frac{2}{3}n_f)} \right], \quad (1.5)$$

che rappresenta un polo semplice di  $\alpha_s(q^2)$ . Si potrebbe obiettare che l'espressione (1.4) è solo il primo termine nello sviluppo di  $\alpha_s(q^2)$ , dunque il ghost potrebbe essere solo un artefatto dell'approssimazione che si compie nel momento in cui si arresta al primo ordine nella Teoria Perturbativa. In realtà, nella referenza [1], si vede come i termini dello sviluppo di  $\beta_{QCD}$  al secondo ordine e a quelli successivi hanno l'effetto di spostare, aumentare o modificare le singolarità non fisiche di  $\alpha_s(q^2)$ . Infatti riscivendo la (1.4) in forma più compatta ed estendendola al secondo ordine perturbativo si ha:

$$\alpha_s^{(loop=1)}(q^2) = \frac{(\alpha_s)_0}{1 + (\alpha_s)_0 \beta_0 l} = \frac{1}{\beta_0 l}, \quad \text{con } \beta_0(n_f) = \frac{11 - 2n_f/3}{4\pi}$$

$$\alpha_s^{(loop=2)}(q^2) = \frac{1}{\beta_0 l} \left[ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln(l)}{l} \right] + O\left(\frac{\ln^2(l)}{l^3}\right), \quad \text{con } l = \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)$$

Perciò le divergenze continuano ad esserci anche al secondo ordine ed è possibile verificare che la stessa cosa vale per ordini successivi.

In questo contesto si inserisce la Teoria perturbativa Analitica, ossia si tenta di risolvere l'inconsistenza teorica delle singolarità ghost. Infatti, per  $q^2 = \Lambda^2$  la teoria perde valore in quanto le formule ottenute con lo sviluppo perturbativo non valgono più, essendo sviluppate per  $\alpha_s \rightarrow 0$  vicino al polo di Landau dove  $\alpha_s$  diverge. Il Confinamento, quindi, è fenomenologicamente prodotto ma non dimostrato teoricamente perchè le formule trovate nella regione di confinamento non sono più valide. In altre parole, non c'è una soluzione analitica per la QCD a bassa energia. Infatti  $\alpha_s(q^2)$  si misura nel regime perturbativo, ossia per  $q^2 > \Lambda^2$ . Perciò la Teoria Perturbativa Analitica parte dal presupposto che la soluzione esatta della teoria esiste e non contiene i

ghost, dunque descrive correttamente i processi fisici. Di conseguenza è possibile prolungare analiticamente i propagatori della teoria, in funzione della variabile  $q^2$ , nel piano complesso con un taglio sull'asse reale della forma  $(M_{tr}^2, \infty)$ , dove  $M_{tr}$  è una soglia associata alla teoria e con i poli associati solo agli stati fisici [11]. Poichè nella QCD la rinormalizzazione della costante d'accoppiamento è legata alla funzione di polarizzazione del vuoto e dunque alla rinormalizzazione del propagatore del campo di gauge, anche  $\alpha_s$  deve essere prolungata analiticamente con il taglio sull'asse reale e senza ulteriori poli.

## 1.2 Caratteristiche generali dell'APT

Lo scopo della Teoria delle Perturbazioni Analitica è quello di ottenere per i correlatori di una teoria, e di conseguenza per le costanti di accoppiamento (nei casi in cui siano direttamente deducibili dalle funzioni di Green), delle espressioni che abbiano le corrette proprietà di analiticità nel piano complesso, in virtù di principi fondamentali delle QFT. Per illustrare queste proprietà e quale sia la loro interpretazione fisica, è utile partire da un esempio semplice ma particolarmente esplicativo, ossia quello del propagatore del campo scalare reale.

### 1.2.1 Rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann

Il punto di partenza della Teoria delle Perturbazioni Analitica è la *rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann*. Nella referenza [11] si ricava tale rappresentazione spettrale partendo dalla teoria di campo scalare reale interagente. In generale si sa che una QFT è costruita a partire da due elementi fondamentali:

- (a) Tutti i possibili stati quantici sono generati a partire da un unico stato di vuoto  $|0\rangle$  sul quale agisce l'operatore di campo libero  $\phi_0(x) = \phi_0(x_0, \vec{x})$ . Gli stati così formati generano lo spazio di Fock, che è uno spazio di Hilbert, ossia completo e con norma definita dal prodotto scalare. Lo sviluppo per il campo libero sarà:

$$\phi_0(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}} \left( a(\vec{p})_0 e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})_0 e^{ipx} \right), \quad (1.6)$$

con  $px = E_{\vec{p}}x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$  e  $E_{\vec{p}} = p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Gli operatori  $a^\dagger$  e  $a$  sono gli operatori di creazione e di distruzione, che agendo sul vuoto creano

o distruggono una particella. La regola di quantizzazione canonica è data dal commutatore calcolato a tempi uguali  $x_0 = y_0 = t$ :

$$[\phi_0(t, \vec{x}), \phi_0(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}); \quad (1.7)$$

- (b) Le osservabili fisiche, come il campo interagente  $\phi(x)$ , possono essere espresse tutte in funzione del campo libero. L'idea che sta alla base di questo è che tutte le osservabili possono essere ottenute dal campo libero accendendo e spegnendo adiabaticamente l'interazione per  $|x_0| \rightarrow \infty$ . Questa costruzione è chiaramente rilevante nei processi di diffusione, caratterizzati da particelle (pacchetti d'onda) ben separate nello spazio e nel tempo.

Il propagatore di Feynman per la teoria di campo scalare reale è definito da:

$$\Delta_F(x - y) = \langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle, \quad (1.8)$$

dove si ha:

- $|\Omega\rangle$  che rappresenta lo stato di vuoto della teoria interagente;
- $\langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle$  che rappresenta il valore di aspettazione sullo stato di vuoto per la teoria interagente del prodotto cronologicamente ordinato, che si definisce:

$$T\phi(x)\phi(y) = \theta(x_0 - y_0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y_0 - x_0)\phi(y)\phi(x),$$

con  $\theta(x)$  *funzione theta di Heaviside*, la quale assume i seguenti valori:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si noti che nel caso di campi Fermionici, il cambiamento dell'ordine tra due operatori di campo implica un cambiamento di segno, in quanto i campi fermionici anticommutano.

La relazione di completezza dello spazio di Fock della teoria assume la forma:

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1}} \cdots \frac{1}{2E_{\vec{p}_n}} |\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n\rangle \langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n|, \quad (1.9)$$

avendo considerato gli stati normalizzati in modo tale che:

$$\langle \vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n | \vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n \rangle = \frac{(2\pi)^{3n}}{n!} 2E_{\vec{p}_1} \cdots 2E_{\vec{p}_n} \sum_P [\delta^{(4)}(p_1 - q_{P_1}) \cdots \delta^{(4)}(p_n - q_{P_n})],$$

dove con  $P$  si indicano tutte le permutazioni sull'insieme  $\{1, \dots, n\}$ . Utilizzando la relazione di completezza (1.9) tra i due campi nella definizione del propagatore (1.8) e assumendo  $x_0 > y_0$  si ha:

$$\Delta_F(x-y) = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \langle \Omega | \phi(y) | \Omega \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle, \quad (1.10)$$

dove gli  $|n\rangle$  sono stati a multiparticelle con momento totale definito  $p_n$ , ossia sono autovettori dell'operatore impulso con autovalore associato  $p_n^\mu$ :

$$\hat{P}^\mu |n\rangle = p_n^\mu |n\rangle, \quad (1.11)$$

con relazione di completezza:  $\mathbb{1} = \sum_n |n\rangle \langle n|$ . Per economia di notazione  $\sum_n$  rappresenta sia la somma sul numero delle particelle, sia l'integrale nello spazio delle fasi associato. Assumendo che, come si avrebbe nella teoria libera, valga:

$$\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0,$$

la (1.10) diventa:

$$\Delta_F(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle. \quad (1.12)$$

Usando l'invarianza per traslazioni si ha:

$$\phi(x) = e^{ix_\mu \hat{P}^\mu} \phi(0) e^{-ix_\mu \hat{P}^\mu}$$

e utilizzando la (1.11) insieme a  $\hat{P}^\mu | \Omega \rangle = 0$ :

$$\langle \Omega | \phi(x) | n \rangle = e^{-ip_n x} \langle \Omega | \phi(0) | n \rangle.$$

Poichè l'operatore di campo è hermitiano, il propagatore diventa:

$$\Delta_F(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ip_n(x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2. \quad (1.13)$$

Inserendo, per ogni termine della somma, l'identità:

$$1 = \int d^4q \delta^{(4)}(q - p_n),$$

la (1.13) diventa:

$$\Delta_F(x-y) = \int d^4q e^{-iq(x-y)} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(4)}(q - p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2. \quad (1.14)$$



Si definisce la *densità spettrale*:

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{(4)}(q - p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2. \quad (1.15)$$

Essendo invariante di Lorentz, scalare e positiva deve essere una funzione di  $q^2$ . Inoltre,  $p_n = \sum_{i=1}^n p_{n,i}$  dove  $p_{n,i}$  è il quadrimomento della  $i$ -esima particella dello stato a  $n$  particelle  $|n\rangle$  e poichè ciascuna particella deve avere energia positiva ( $(p_{n,i})_0 > 0$  con  $p_{n,i}^2 > 0$ ), allora anche  $(p_n)_0 > 0$  e  $p_n^2 > 0$ . Quindi la densità spettrale  $\rho(q)$  deve essere nulla se  $q_0 < 0$ , cioè la sua espressione completa deve avere la forma:

$$\rho(q) \equiv \rho(q^2)\theta(q_0). \quad (1.16)$$

Di conseguenza la (1.14) diventa:

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \rho(q^2)\theta(q_0)e^{-iq(x-y)}. \quad (1.17)$$

Rilassando l'ipotesi  $x_0 > y_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta_F(x - y) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \rho(q^2)\theta(q_0) \\ &\cdot [\theta(x_0 - y_0)e^{-iq(x-y)} + \theta(y_0 - x_0)e^{-iq(y-x)}]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Il propagatore della teoria libera è dato da:

$$\begin{aligned} \Delta_F^0(x - y) &= \langle 0 | T \phi_0(x) \phi_0(y) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} [\theta(x_0 - y_0)e^{-iq(x-y)} + \theta(y_0 - x_0)e^{-iq(y-x)}], \end{aligned}$$

dove  $q = (\sqrt{m^2 + \vec{q}^2}, \vec{q})$ . Quindi, inserendo di nuovo l'identità:

$$1 = \int d\sigma \delta(\sigma - q^2)$$

nella (1.18), il propagatore della teoria interagente diventa:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x - y) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \rho(q^2)\theta(q_0) \int d\sigma \delta(q^2 - \sigma) \\ &\cdot [\theta(x_0 - y_0)e^{-iq(x-y)} + \theta(y_0 - x_0)e^{-iq(y-x)}]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Integrando in  $q_0$  e applicando la  $\delta(\sigma - q^2)$  si sostituisce:

$$q_0 = \pm \sqrt{\sigma + \vec{q}^2},$$

delle quali, la funzione  $\theta(q_0)$ , seleziona solo la radice positiva. Il propagatore (1.19) diventa:

$$\Delta_F(x-y) = \int d\sigma \rho(\sigma) \Delta_F^0(x-y; \sigma), \quad (1.20)$$

dove nel propagatore libero si è posto  $\sigma = m^2$ . Considerando la trasformata di Fourier del propagatore interagente (1.20) si ha:

$$\Delta_F(q^2) = \int d\sigma \rho(\sigma) \frac{i}{q^2 - \sigma + i\epsilon} \quad (1.21)$$

Questa è la *rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann* [11]. È possibile riscrivere la densità spettrale (1.15) esplicitando i termini associati agli stati ad una particella. Tra questi c'è lo stato associato alla particella scalare di massa  $m$  ed eventualmente altri termini associati a stati legati di massa invariante  $m < m_b < 2m$ . Al di sopra della soglia  $\sigma = (2m)^2$ , invece, si può accedere energeticamente al continuo di stati a due o più particelle. Supponendo che non ci siano stati intermedi ad una particella, la densità spettrale assumerà la forma (esplicitando l'integrale nello spazio delle fasi ad una particella):

$$\rho(q^2) = \rho_c(q^2) \theta(q^2 - 4m^2) + (2\pi)^3 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} |\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle|^2 \delta^{(4)}(q - p),$$

dove  $\rho_c$  indica la densità spettrale del continuo. Si consideri la trasformazione unitaria  $U_{\vec{p}}$  associata al *boost* di Lorentz che manda  $|\vec{p}\rangle$  in  $|\vec{0}\rangle$  (lo stato a singola particella che è in quiete nel sistema di riferimento scelto), ossia l'operatore unitario tale che:

$$U_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle = |\vec{0}\rangle,$$

si può scrivere:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | U_{\vec{p}}^{-1} U_{\vec{p}} \phi(0) U_{\vec{p}}^{-1} U_{\vec{p}} | \vec{p} \rangle,$$

nella quale possiamo osservare che:

- essendo il campo scalare e valutato nell'origine dello spazio-tempo di Minkowski, si ha

$$U_{\vec{p}} \phi(0) U_{\vec{p}}^{-1} = \phi(0);$$

- lo stato di vuoto deve essere invariante

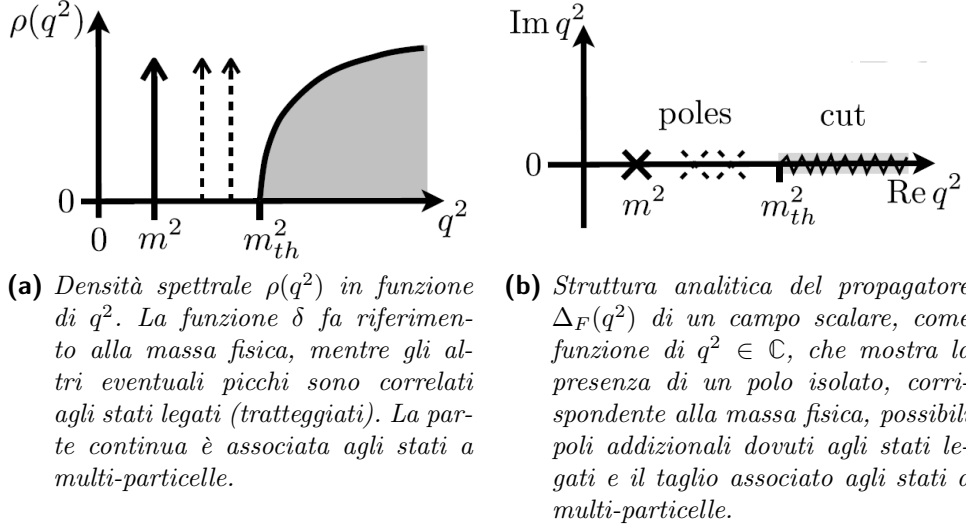
$$U_{\vec{p}} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle.$$

Quindi il prodotto scalare  $\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle$  è indipendente da  $\vec{p}$  e si pone:

$$\langle \Omega | \phi(0) | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | \phi(0) | \vec{0} \rangle \equiv \sqrt{Z},$$

da cui, con qualche passaggio, si ottiene:

$$\rho(q^2) = \rho_c(q^2)\theta(q^2 - 4m^2) + Z\delta(q^2 - m^2). \quad (1.22)$$



**Figura 1.1**

Dunque, lo stato ad una particella contribuisce alla densità spettrale con una distribuzione delta di Dirac centrata nella massa della particella. Inserendo la (1.22) nella (1.21) si ottiene:

$$\Delta_F(q^2) = \frac{iZ}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \rho_c(\sigma) \frac{i}{q^2 - \sigma + i\epsilon}. \quad (1.23)$$

Assumendo che  $\rho_c(\sigma)$  sia continua, la funzione  $\Delta_F(q^2)$  definita dalla (1.23) è prolungabile analiticamente nel piano complesso con un polo sull'asse reale in corrispondenza di  $m^2$ , un taglio sulla semiretta  $[4m^2, \infty)$  e nessuna altra singolarità.

Si è così arrivati a descrivere le proprietà di analiticità del propagatore  $\Delta_F(q^2)$  nel piano complesso tramite la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann (1.23), partendo da considerazioni del tutto generali della teoria di campo (come l'invarianza di Lorentz e per traslazioni) senza utilizzare la Teoria Perturbativa e anzi, senza nemmeno specificare una particolare forma di interazione. Infatti la (1.23) fornisce un'espressione generale per la funzione di

correlazione a due punti di una teoria di campo interagente come una somma pesata di propagatori liberi. Eventuali altre singolarità nel propagatore sono fisicamente non accettabili. Si osservi che la (1.23) ha la forma di una relazione di dispersione ([27] pag.127-140).

## 1.2.2 Causalità nelle QFT

In Relatività Ristretta si dà la seguente definizione di *causalità*:

**Causalità.** *Due punti dello spazio-tempo  $x = (x_0, \vec{x})$  e  $y = (y_0, \vec{y})$  sono connessi causalmente se la loro distanza è un vettore di tipo spazio, ovvero ha il quadrato non negativo:*

$$(x - y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 \geq 0.$$

Tale concetto può essere esteso alle QFT, dove è importante sottolineare il legame che sussiste tra analicità nel piano complesso, relazioni di dispersione e causalità. Perciò si impone che misure effettuate da due osservatori separati da una distanza *space-like* non devono essere correlate. La condizione di casualità che si richiederà è la seguente:

**Causalità QFT.** *Date due osservabili generiche, con operatori associati  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , deve valere:*

$$[\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(y)] \Big|_{(x-y)^2 < 0} = 0. \quad (1.24)$$

Infatti, se i due operatori commutano, sono simultaneamente diagonalizzabili e quindi la misura di una osservabile non influisce sulla misura dell'altra e viceversa. Considerando la teoria di campo scalare  $\phi(x)$ , presa già come riferimento nella sezione precedente per il calcolo della rappresentazione spettrale del propagatore, affinché non ci sia una violazione della causalità l'operatore di campo deve soddisfare la (1.24):

$$[\phi(x), \phi(y)] \Big|_{(x-y)^2 < 0} = 0. \quad (1.25)$$

La (1.25) è una diretta conseguenza:

- della relazione di quantizzazione canonica (1.7), che prevede l'annullamento del commutatore dei campi a tempi uguali;
- dell'invarianza di Lorentz poichè, in virtù di quest'ultima, il commutatore dei campi su un intervallo *space-like* può essere sempre ricondotto a quello a tempi uguali.

Quindi, affinché una teoria sia causale, deve godere dell'invarianza di Lorentz. Se l'invarianza di Lorentz viene meno la teoria è non causale. Perciò è interessante vedere cosa accade se si prova a calcolare il commutatore al primo membro della (1.25) ipotizzando una teoria il cui propagatore presenti un ghost, ad esempio un polo sul semiasse reale negativo, come il caso appena analizzato per la teoria di campo scalare reale. Un polo semplice nel propagatore corrisponde ad una delta di Dirac nell'espressione della densità (Figura 1.1). Assumendo che la densità spettrale abbia una forma generale del tipo:

$$\rho(\sigma) = A\delta(\sigma + k^2) + \tilde{\rho}(\sigma), \quad (1.26)$$

dove  $k > 0$ ,  $\tilde{\rho}$  non contiene ghost, cioè  $\tilde{\rho}(\sigma) = 0$  se  $\sigma < 0$ , considerando il valore di aspettazione sul vuoto del commutatore tra i campi:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle,$$

con  $x$  quadrivettore space-like e usando la relazione di completezza, per la teoria considerata (1.9), si ottiene:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q^2) \theta(q_0) (e^{-iqx} - e^{iqx}). \quad (1.27)$$

Quindi sostituendo la (1.26) nella (1.27) si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle &= A \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q^2 + k^2) \theta(q_0) (e^{-iqx} - e^{iqx}) + \\ &+ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \int d\sigma \delta(q^2 - \sigma) \tilde{\rho}(q^2) \theta(q_0) (e^{-iqx} - e^{iqx}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Considerando il secondo termine nel secondo membro della (1.28), ossia quello contenente la parte priva di ghost della densità spettrale  $\tilde{\rho}$ , si osserva:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \int d\sigma \delta(q^2 - \sigma) \tilde{\rho}(q^2) \theta(q_0) (e^{-iqx} - e^{iqx}) = \int d\sigma \tilde{\rho}(\sigma) C_0(x; \sigma),$$

dove:

$$C_0(x; \sigma) = [\phi_0(x), \phi_0(0)] \Big|_{m^2=\sigma} \quad (1.29)$$

è il commutatore del campo libero, che è manifestamente invariante di Lorentz. Quindi, per  $x$  space-like (1.29) coincide con il commutatore a tempi uguali, il quale si annulla in virtù delle relazioni di quantizzazione canonica (1.7). Questo risultato conferma che, in assenza di ghost, la teoria non viola

la causalità. Perciò nella (1.28) rimane da valutare il comportamento del primo termine al secondo membro, il quale contiene la parte di densità spettrale con i ghost. Si ha:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle = A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(q^2 + k^2) \theta(q_0) (e^{-iqx} - e^{iqx}), \quad (1.30)$$

dove l'argomento della delta è:

$$q^2 + k^2 = (q_0)^2 - (\vec{q})^2 + k^2,$$

nel quale, affinché si annulli, deve valere:

$$(\vec{q})^2 - k^2 \geq 0.$$

In tal caso si ottiene:

$$\delta(q^2 + k^2) = \theta((\vec{q})^2 - k^2) \frac{\delta(q_0 - \sqrt{(\vec{q})^2 - k^2})}{2\sqrt{(\vec{q})^2 - k^2}},$$

per cui la (1.30) diventa:

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle = A \int_{|\vec{q}| > k} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{(\vec{q})^2 - k^2}} (e^{-iqx} - e^{iqx}), \quad (1.31)$$

con

$$q^\mu = (\sqrt{(\vec{q})^2 - k^2}, \vec{q}).$$

E' facile mostrare che la (1.31) non è invariante di Lorentz! Infatti, valutandola per un quadrivettore  $x$  tale che  $x_0 = 0$ , essa è evidentemente nulla. Se però si prende un generico quadrivettore avente  $x_0 \equiv t \neq 0$ , si ha:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | [\phi(x), \phi(0)] | \Omega \rangle &= \{ \text{coordinate sferiche: } q \in [k, \infty], \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \} \\ &= \frac{A}{8\pi^2} \int_k^\infty dq \frac{q^2}{\sqrt{q^2 - k^2}} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( e^{-it\sqrt{q^2 - k^2} + iqx \cos \theta} - e^{it\sqrt{q^2 - k^2} - iqx \cos \theta} \right) \\ &= \left\{ \text{utilizzando la formula di Eulero per la funzione seno: } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right\} \\ &= \frac{A}{2i\pi^2 x} \int_k^\infty dq q \frac{\sin\left(t\sqrt{q^2 - k^2}\right)}{\sqrt{q^2 - k^2}} \sin(qx) \neq 0. \end{aligned}$$

Il risultato, essendo non nullo, sarà sempre diverso dal caso precedente; perciò rompe l'invarianza di Lorentz e rende la teoria non causale.

La rappresentazione di Källén-Lehmann nella forma (1.23), derivata a partire dalla densità spettrale (1.22), può essere quindi interpretata come un'estensione della definizione di causalità. Perciò è necessario un formalismo che consenta di trattare i casi in cui i propagatori di una certa teoria presentino singolarità non fisiche, per poterli esprimere nella forma (1.23).

### 1.2.3 Relazioni di dispersione

Come detto nella sezione precedente, è utile utilizzare la rappresentazione di Källén-Lehmann per estendere il concetto di causalità nelle teorie nelle quali il propagatore presenta dei ghost. Infatti essa garantisce l'analicità nel piano complesso del propagatore a meno delle singolarità che derivano dagli stati fisici dello spazio di Fock della teoria. Perciò è necessario esplicitare tale rappresentazione calcolando la forma specifica della densità spettrale  $\rho_c(\sigma)$ . La definizione (1.15), però, ha lo svantaggio di non essere direttamente applicabile. Da ciò, per ottenere le espressioni esplicite di  $\rho_c(\sigma)$  nei casi fisicamente interessanti, si usano le *relazioni di dispersione* nel piano complesso [27]. Considerando ancora il propagatore del campo scalare, la rappresentazione assume la forma (1.23), che si può scrivere cambiando segno alla variabile e definendola per un generico  $z \in \mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus (\{-m^2\} \cup (-\infty, -4m^2])$  nella forma:

$$\Delta(z) = i\Delta_F(z) = \frac{Z}{z + m^2} + \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \frac{\rho_c(\sigma)}{z + \sigma}. \quad (1.32)$$

Assumendo che la funzione  $\Delta(z)$  abbia il seguente andamento asintotico:

$$\Delta(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{z}, \quad (1.33)$$

si considera l'integrale nel piano complesso da calcolare:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_{\delta,R}} d\omega \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z}, \quad (1.34)$$

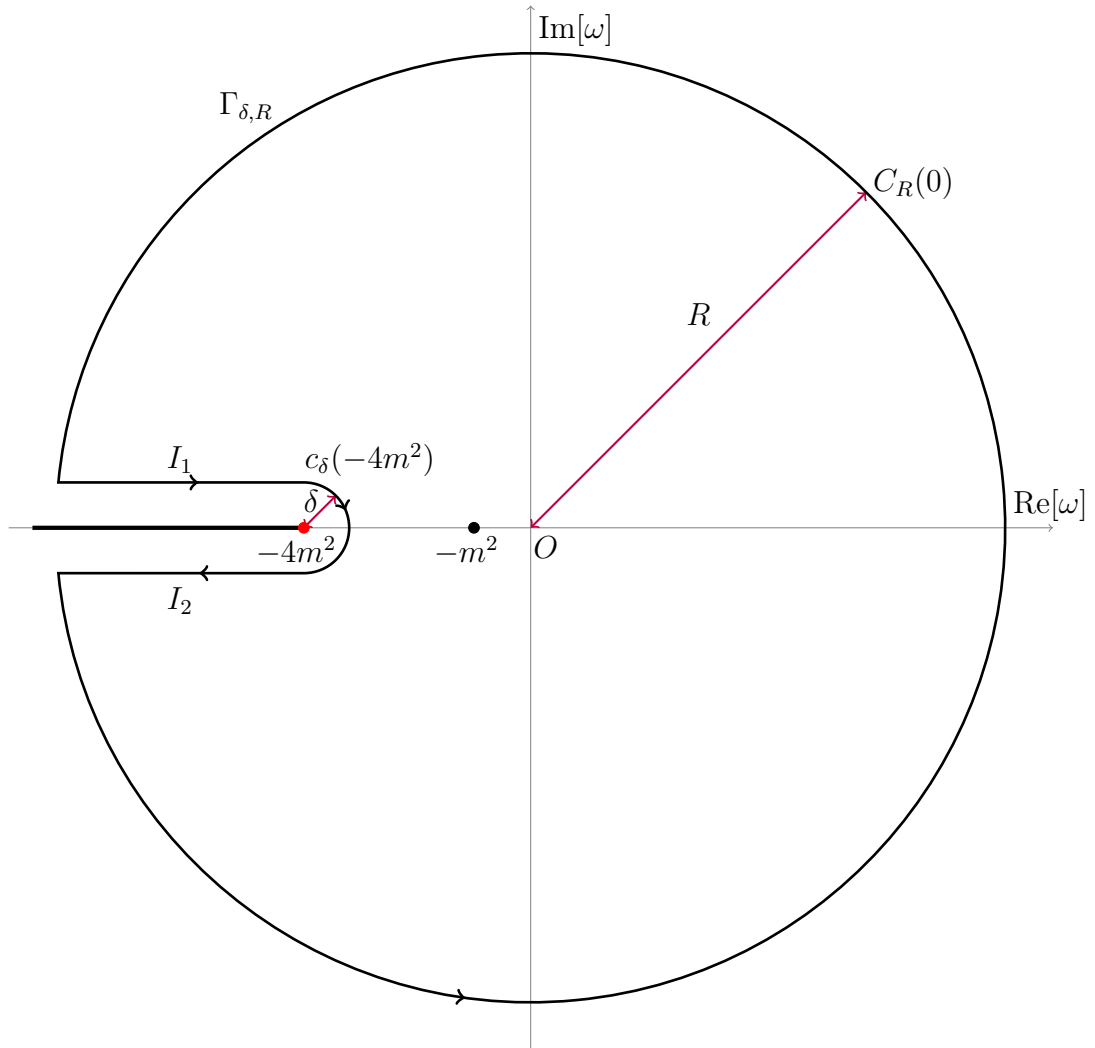
con  $z \in \mathcal{D}$  e  $\Gamma_{\delta,R}$  cammino d'integrazione rappresentato in figura 1.2 (con i limiti  $\delta \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ ).

La cammino di integrazione avvolge due singolarità:  $\omega_1 = -m^2$  e  $\omega_2 = z$  i cui residui sono:

$$\begin{aligned} \text{Res}[\omega_1] &= \text{Res} \left[ \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z}, \omega_1 \right] = -\frac{\text{Res}[\Delta(z), -m^2]}{z + m^2}, \\ \text{Res}[\omega_2] &= \text{Res} \left[ \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z}, \omega_2 \right] = \Delta(z). \end{aligned}$$

Per il teorema dei residui (1.34) è uguale alla somma totale dei residui calcolati per le singolarità avvolte dal percorso, ovvero:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_{\delta,R}} d\omega \frac{\Delta(\omega)}{\omega - z} = \text{Res}[\omega_1] + \text{Res}[\omega_2]. \quad (1.35)$$



**Figura 1.2:** Percorso di integrazione per (1.34). Curva chiusa  $\Gamma_{\delta,R}$  definita:  
 $\Gamma_{\delta,R} = C_R(0) \cup I_1 \cup (-I_2) \cup (-c_\delta(-4m^2))$  dove:  
 $-C_R(0) = \{\omega : \omega = Re^{i\theta} \text{ con } \theta \in [0, \pi - \arcsin(\delta/R)) \cup (\pi + \arcsin(\delta/R), 2\pi]\}$ ;  
 $-c_\delta(-4m^2) = \{\omega : \omega = -4m^2 + \delta e^{i\theta} \text{ con } \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ ;  
 $-I_{1,2} = \{\omega : \omega = -\sigma \pm i\delta\}$



Sostituendo i valori dei residui e spezzando l'integrale su  $\Gamma$  negli integrali sui vari elementi della curva, si ottiene (sottintendendo per economia di formule l'integranda):

$$\frac{1}{2i\pi} \left[ \int_{C_R} + \int_{I_1} - \int_{c_\delta} - \int_{I_2} \right] = -\frac{\text{Res}[\Delta(z), -m^2]}{z + m^2} + \Delta(z). \quad (1.36)$$

Per le ipotesi fatte, i due integrali sull'arco infinito  $C_R$  ed infinitesimo  $c_\delta$  sono nulli. Per i contributi sui tratti  $I_{1,2}$  è possibile definire i limiti:

$$\eta_{\pm}(\sigma) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Delta(-\sigma \pm i\delta).$$

Il contributo degli integrali sui tratti rettilinei sarà dunque:

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \frac{\eta_+(\sigma) - \eta_-(\sigma)}{z + \sigma}. \quad (1.37)$$

Poichè  $\Delta(z)$  è reale sull'asse reale (dove è definita), per il principio di riflessione di Schwarz, si ha:

$$\Delta(z^*) = \Delta^*(z). \quad (1.38)$$

Quindi, la differenza a numeratore nella (1.37) è:

$$\eta_+(\sigma) - \eta_-(\sigma) = -2i\text{Im}[\eta_-(\sigma)].$$

In definitiva, sostituendo tutte le informazioni nella (1.35) si ha:

$$\Delta(z) = \frac{\text{Res}[\Delta(z), -m^2]}{z + m^2} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} d\sigma \frac{\text{Im}[\eta_-(\sigma)]}{z + \sigma}. \quad (1.39)$$

Dal confronto tra la forma esplicita del propagatore (1.39) e la forma generale (1.32) si ottengono le seguenti relazioni:

$$Z = \text{Res}[\Delta(z), -m^2], \quad \rho_c(\sigma) = \frac{1}{\pi} \text{Im}[\eta_-(\sigma)]. \quad (1.40)$$

Nelle prossime sezioni, la densità spettrale verrà definita dirattamente come:

$$\rho_c(\sigma) = \text{Im}[\eta_-(\sigma)] \quad (1.41)$$

e quindi nelle formule resterà esplicitato il fattore  $1/\pi$ .

In alcune applicazioni, la condizione (1.33) non è rispettata dalla funzione di cui si vuole ottenere la relazione di dispersione. Nei casi in cui  $\Delta(z)$  non diverga, ad esempio se è regolare all'infinito ma il limite è non nullo oppure

se è un infinitesimo di ordine inferiore a  $1/z$  e l'integrale di dispersione non converge, si può applicare quanto appena fatto alla funzione:

$$F(z) = \frac{\Delta(z) - \Delta(z_0)}{z - z_0},$$

dove  $z_0$  è un qualunque punto dell'asse reale in cui  $\Delta$  è definita. La funzione  $F(z)$  ha le stesse singolarità di  $\Delta(z)$  (infatti  $z_0$  è una singolarità eliminabile per  $F(z)$ , che di conseguenza può essere estesa in modo analitico in tale punto), ma ha il corretto andamento asintotico. Con la stessa procedura si ottiene in questo caso:

$$\Delta(z) = \Delta(z_0) + \frac{Z}{z + m^2} - \frac{Z}{z_0 + m^2} + \frac{z_0 - z}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho_c(\sigma)}{(\sigma + z)(\sigma + z_0)}, \quad (1.42)$$

dove  $\rho_c$  e  $Z$  sono definite come in precedenza dalle (1.40). La (1.42) è detta *relazione di dispersione sottratta in  $z_0$*  [27]. Il nome deriva dal fatto che, per ottenere un integrale convergente, si è dovuto sottrarre alla funzione  $\Delta(z)$  il valore, supposto noto, della funzione stessa in un punto opportuno  $z_0$ .

### 1.3 Teorema ottico e singolarità fisiche

Per concludere questo capitolo, è utile analizzare le singolarità fisiche che la teoria delle perturbazioni analitica non deve rimuovere. Il mantenimento di tali singolarità consente di estendere la teoria perturbativa all'APT, in modo da garantire che quest'ultima erediti la fisica della teoria quantistica di campo che si sta considerando. Nella figura 1.1 sono mostrate le singolarità e i tagli associati rispettivamente agli stati di singola particella e al continuo energetico di più particelle, ottenuto sopra un certo livello di soglia [11]. Tali singolarità e tali tagli sono legati a una discontinuità della parte immaginaria delle ampiezze dei diagrammi che si stanno considerando. Per questo è utile descrivere un metodo per ottenere la parte immaginaria di un'ampiezza in teoria perturbativa. Con le relazioni di dispersione si è visto come definire un propagatore generico conoscendone soltanto la parte immaginaria. Con il teorema ottico è possibile ottenere delle informazioni sulla parte immaginaria dell'ampiezza, legandola alla sezione d'urto totale di un dato processo. In particolare, si vedrà una breve applicazione illustrativa tratta dalla referenza [29] per la teoria  $\lambda\phi^4$ .

### 1.3.1 Regola di Cutkosky

Il teorema ottico è una diretta conseguenza dell'unitarietà della matrice di scattering  $S$ . Infatti, scrivendola come:  $S = \mathbb{1} + iT$ , dove  $T$  è la matrice di transizione, dall'unitarietà ( $S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}$ ), si ha che:

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T. \quad (1.43)$$

Grazie alla conservazione del quadrimomento nella transizione da uno stato iniziale  $|i\rangle$ , ad uno finale  $|f\rangle$ , è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \langle f|T|i\rangle &= (2\pi)^2 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{T}_{fi} \\ \langle f|T^\dagger|i\rangle &= (2\pi)^2 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{T}_{fi}^* \end{aligned} \quad (1.44)$$

e inserendo un insieme completo di stati intermedi  $|n\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle f|T^\dagger T|i\rangle &= \sum_n \langle f|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle = \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{T}_{nf}^* \mathcal{T}_{ni}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Inserendo le (1.44) e (1.45) nella (1.43) si ottiene la regola di Cutkosky [4, 29]:

$$2\text{Im}[\mathcal{T}_{fi}] \stackrel{\text{TI}}{=} -i(\mathcal{T}_{fi} - \mathcal{T}_{if}^*) = \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{T}_{nf}^* \mathcal{T}_{ni}, \quad (1.46)$$

dove la somma è estesa a tutti gli stati intermedi cinematicamente permessi ed include la somma sugli spin e l'integrazione sullo spazio delle fasi. La prima identità della (1.46) si ha imponendo l'invarianza sotto inversione temporale (TI), ossia scambiando lo stato finale con lo stato iniziale.

Calcolando gli elementi di matrice della (1.43) nel caso in cui lo stato finale e iniziale siano a due particelle, ovvero  $|i\rangle = |\vec{q}_1 \vec{q}_2\rangle$  e  $|f\rangle = |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle$ , si ottiene per il membro di destra (1.45):

$$\begin{aligned} \langle f|T^\dagger T|i\rangle &= \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T^\dagger T | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle \\ &= \sum_n \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 \vec{r}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | T^\dagger | \{ \vec{r}_i \} \rangle \langle \{ \vec{r}_i \} | T | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Esprimendo gli elementi della  $T$ -matrix come elementi di matrice invarianti  $\mathcal{T}$  moltiplicati per le funzioni delta legate alla conservazione del quadrimomento, si ottiene:

$$\begin{aligned} &-i[\mathcal{T}(\vec{q}_1 \vec{q}_2 \rightarrow \vec{p}_1 \vec{p}_2) - \mathcal{T}^*(\vec{p}_1 \vec{p}_2 \rightarrow \vec{q}_1 \vec{q}_2)] \\ &= \sum_n \left( \prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 \vec{r}_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) \mathcal{T}^*(\vec{p}_1 \vec{p}_2 \rightarrow \{ \vec{r}_i \}) \mathcal{T}(\vec{q}_1 \vec{q}_2 \rightarrow \{ \vec{r}_i \}) \cdot \\ &\cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \sum_i \vec{r}_i\right), \end{aligned}$$

$$2\text{Im} \left( \begin{array}{c} k_2 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k_1 \end{array} \right) = \sum_f \int d\Pi_f \left( \begin{array}{c} k_2 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k_1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} k_2 \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ k_1 \end{array} \right)$$

**Figura 1.3:** Regola di Cutkosky per un processo a 2 particelle con:  
 $\vec{k}_i \equiv \vec{q}_i$  ( $i = 1, 2$ ) e  $f \equiv n$ .

che diventa la (1.46) applicata al caso di stato iniziale e finale a due particelle [29]. La (1.46) è mostrata in figura 1.3. Per il caso specifico della diffusione in avanti, ponendo  $\vec{p}_i = \vec{q}_i$  si ottiene la forma usuale del teorema ottico, nel quale compare la sezione d'urto totale  $\sigma_{tot}$  del processo considerato, ovvero:

$$\text{Im}[\mathcal{T}(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \rightarrow \vec{q}_1, \vec{q}_2)] = 2E_{cm}p_{cm}\sigma_{tot}(\vec{q}_1, \vec{q}_2 \rightarrow \text{adroni}), \quad (1.47)$$

dove  $E_{cm}$  è l'energia totale del centro di massa e  $p_{cm}$  è il momento dell'una e dell'altra particella nel sistema di riferimento del centro di massa. Poiché la parte immaginaria dell'ampiezza della diffusione in avanti fornisce l'attenuazione dell'onda in avanti, quando il fascio incidente passa attraverso il bersaglio, è naturale che questa quantità sia proporzionale alla probabilità di diffusione, ovvero alla sezione d'urto.

### 1.3.2 Discontinuità della parte immaginaria

Considerando l'ampiezza  $\mathcal{T}_{fi}$  come una funzione della variabile di Mandelstam  $s$ , che è un numero complesso, si possono discuterne proprietà generali. Per prima cosa i diagrammi che contribuiscono in  $\mathcal{T}_{fi}$  nell'espansione perturbativa sono generalmente *reali* purché ci si dimentichi della prescrizione di Feynman di aggiungere  $+i\epsilon$  nei denominatori dei propagatori delle particelle coinvolte (si pensi, ad esempio, agli scalari). Questo avviene se nessuna delle particelle virtuali intermedie coinvolte nel diagramma va *on-shell*: infatti, essendo il denominatore del corrispondente propagatore sempre non nullo, si può tranquillamente assumere  $\epsilon \rightarrow 0$ , ossia che la parte immaginaria del diagramma corrispondente si annulli. Perciò l'ampiezza  $\mathcal{T}_{fi}(s)$  è una funzione reale di  $s$  per  $s < m_{th}^2$  reale, dove  $m_{th}^2$  è il valore di energia al quadrato di soglia per la produzione di stati a multiparticella *on-shell*. Essendo  $\mathcal{T}_{fi}$  reale sull'asse reale per  $s < m_{th}^2$ , dal principio di riflessione di Schwartz [27] si ottiene che:

$$\mathcal{T}_{fi}^*(s) = \mathcal{T}_{fi}(s^*), \quad (1.48)$$

ovvero:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\mathcal{T}_{fi}(s)] = \operatorname{Re}[\mathcal{T}_{fi}(s^*)] \\ \operatorname{Im}[\mathcal{T}_{fi}(s)] = -\operatorname{Im}[\mathcal{T}_{fi}(s^*)]. \end{cases} \quad (1.49)$$

Perciò, come conseguenza della continuazione fuori dall'asse reale,  $\mathcal{T}_{fi}(s)$  acquista una parte immaginaria: avvicinandosi all'asse reale  $s \in \mathbb{R}$  dall'alto con  $s + i\epsilon$  e  $\epsilon = 0^+$ , oppure dal basso con  $s - i\epsilon$ , l'equazione (1.48) implica che  $\mathcal{T}_{fi}(s)$  ha parti immaginarie opposte  $\operatorname{Im}[\mathcal{T}_{fi}(s + i\epsilon)] = -\operatorname{Im}[\mathcal{T}_{fi}(s - i\epsilon)]$  e quindi, attraversando l'asse reale si ha la discontinuità:

$$\operatorname{Disc}\mathcal{T}_{fi}(s) = \mathcal{T}_{fi}(s + i\epsilon) - \mathcal{T}_{fi}(s - i\epsilon) = 2i\operatorname{Im}[\mathcal{T}_{fi}(s + i\epsilon)],$$

che si annulla lungo l'asse reale con  $s < m_{th}^2$ . Di conseguenza, è possibile calcolare la parte immaginaria di  $\mathcal{T}_{fi}$  dalla sua discontinuità all'attraversamento dell'asse reale, che potrebbe essere più facile da determinare nei calcoli effettivi. Si noti che la presenza della discontinuità segnala la presenza di un taglio lungo l'asse reale per  $s > m_{th}^2$ , analogo a quello mostrato nella figura 1.1.

In definitiva, per ottenere la parte immaginaria di un diagramma chiuso (*loop*), la regola di Cutkosky prevede i seguenti passi:

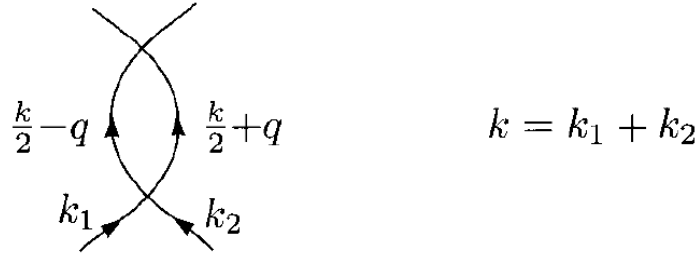
1. separare lo stato iniziale  $|i\rangle$  da quello finale  $|f\rangle$ , tagliando solo linee interne, in tutti i modi cinematicamente possibili e considerare le linee tagliate come particelle intermedie reali;
2. sommare su tutti gli spin delle particelle intermedie e integrare sul loro spazio delle fasi;
3. sommare su tutti i tagli possibili.

Quindi, utilizzando la relazione di dispersione per il propagatore di una teoria data, si richiede la conoscenza della parte immaginaria di quest'ultimo sopra il taglio fisico. Con la regola di Cutkosky è possibile calcolare la parte immaginaria utilizzando la discontinuità che essa ha attraverso il taglio. Così facendo è possibile calcolare i contributi fermionici e adronici alla funzione di polarizzazione del vuoto, come mostrato nella referenza [4].

Nel paragrafo successivo si riporta un esempio esplicativo per la teoria  $\lambda\phi^4$ , nel quale si mostra come negli integrali, corrispondenti ai loop nei diagrammi di Feynman, emergono le singolarità fisiche. Si considera inoltre l'applicazione effettiva della regola di Cutkosky.

### 1.3.3 Teorema ottico nei diagrammi di Feynman

Per verificare la (1.45) e l'applicazione della regola di Cutkosky è utile riportare un esempio esplicativo nel caso della teoria  $\lambda\phi^4$ . Si considera il diagramma all'ordine  $\lambda^2$  con un loop nel canale  $s$  (è facile verificare che i corrispondenti diagrammi nel canale  $t$  e  $u$  non hanno singolarità di tagliato per  $s$  al di sopra della soglia):



**Figura 1.4:** Diagramma all'ordine  $\lambda^2$  nel canale  $s$ , per la teoria  $\lambda\phi^4$ .

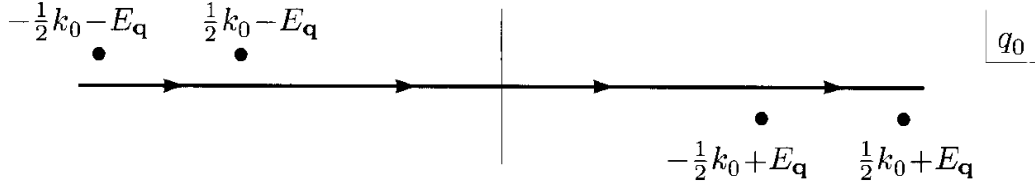
Il momento totale è  $k = k_1 + k_2$  e per semplicità si è scelto un percorso simmetrico per i momenti come mostrato nella figura 1.5. Il contributo all'ampiezza di questo diagramma di Feynman è:

$$i\mathcal{M} = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k/2 - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k/2 + q)^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.50)$$

Questo integrale può essere calcolato utilizzando la rotazione di Wick, che da un fattore  $i$  in più, così che sotto la soglia  $\mathcal{M}$  è puramente reale. Si vuole dimostrare che l'integrale (1.50) ha una discontinuità attraverso l'asse reale, nella regione fisica  $k_0 > 2m$ . È facile individuare questa discontinuità calcolando l'integrale per  $k_0 < 2m$ , per poi aumentare  $k_0$  con la continuazione analitica. Non è difficile calcolare l'integrale utilizzando la parametrizzazione di Feynman. Tuttavia, è utile un approccio meno diretto. Lavorando nel sistema di riferimento del centro di massa, dove  $k = (k_0, \vec{0})$ , si vede che l'integranda di (1.50) ha due poli nella variabile di integrazione  $q_0$  situati in:

$$q_0 = \frac{1}{2}k_0 \pm (E_{\vec{q}} - i\epsilon), \quad q_0 = -\frac{1}{2}k_0 \pm (E_{\vec{q}} - i\epsilon).$$

Chiudendo il percorso di integrazione verso il basso si calcolano i residui dei poli nel semipiano immaginario negativo. Di questi, solo il polo  $q_0 = -(1/2)k_0 + E_{\vec{q}}$  contribuirà alla discontinuità.



**Figura 1.5:** Asse reale nel piano complesso individuato da  $q_0$ .

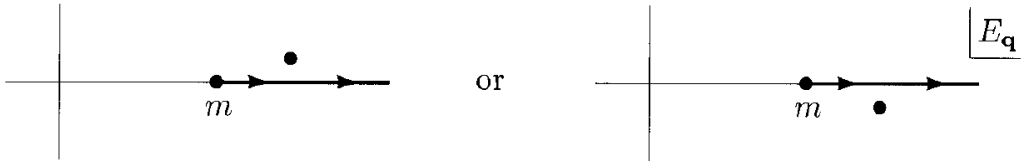
In particolare è utile notare che calcolare il residuo di questo polo equivale a sostituire

$$\frac{1}{(k/2 + q)^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((k/2 + q)^2 - m^2),$$

integrando in  $dq_0$ . Con il contributo di questo polo l'integrale (1.50) diventa:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{(k_0 - E_{\vec{q}})^2 - E_{\vec{q}}^2} \\ &= -2\pi i \frac{\lambda^2}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_m^\infty dE_{\vec{q}} E_{\vec{q}} |\vec{q}| \frac{1}{2E_{\vec{q}}} \frac{1}{k_0(k_0 - 2E_{\vec{q}})}. \end{aligned}$$

L'integrale nella seconda riga ha un polo in  $E_{\vec{q}} = k_0/2$ . Quando  $k_0 < 2m$ , questo polo non giace sul percorso di integrazione, così  $\mathcal{M}$  è manifestamente reale. Quando  $k_0 > 2m$ , tuttavia, il polo si trova appena sopra o sotto il percorso, a seconda che a  $k_0$  sia assegnata una piccola parte immaginaria positiva o negativa, come mostrato in figura 1.6.



**Figura 1.6:** Asse reale nel piano complesso individuato da  $E_{\vec{q}}$ .

Perciò l'integrale acquista una discontinuità tra  $k^2 + i\epsilon$  e  $k^2 - i\epsilon$ . Per calcolare tale discontinuità si applica il teorema di Sokhotski–Plemelj [27], ovvero sull'asse reale si ha:

$$\frac{1}{k_0 - 2E_{\vec{q}} \pm i\epsilon} = \text{Pr} \frac{1}{k_0 - 2E_{\vec{q}}} \mp i\pi \delta(k_0 - 2E_{\vec{q}}),$$

dove Pr denota il valore principale. Quindi la discontinuità è ottenuta rimpiazzando il polo con una funzione delta. Di conseguenza questo è equivalente

a sostituire direttamente l'intero propagatore con una funzione delta, come già visto:

$$\frac{1}{(k/2 - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((k/2 - q)^2 - m^2). \quad (1.51)$$

Perciò, ripartendo dall'integrale iniziale (1.50), indicando con  $p_1$  e  $p_2$  i momenti dei due propagatori e usando:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k),$$

dalla (1.51) è possibile calcolare la discontinuità dell'integrale sostituendo entrambi i propagatori con una funzione delta, ossia:

$$\frac{1}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p_i^2 - m^2), \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (1.52)$$

La discontinuità per  $\mathcal{M}$  ha origine solo dalla regione dove l'integrale in  $d^4 q$  soddisfa simultaneamente le due funzioni delta. Integrando le funzioni delta, i momenti  $p_i$  assumono valori on-shell e gli integrali in  $d^4 p_i$  vengono convertiti in integrali sullo spazio delle fasi relativistico associato. Così facendo, nella (1.50) rimangono solo: il fattore  $\lambda^2$ , il quadrato dell'ampiezza all'ordine fondamentale e il fattore di simmetria (1/2), il quale può essere reinterpretato come il fattore di simmetria nello stato finale per bosoni identici. Quindi, all'ordine  $\lambda^2$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{Disc}\mathcal{M} &= 2i\text{Im}[\mathcal{M}] \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} |\mathcal{M}(k)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k), \end{aligned} \quad (1.53)$$

che soddisfa esplicitamente la (1.46).

L'argomentazione precedente non fa uso del fatto che i due propagatori nel diagramma hanno masse uguali, né del fatto che questi propagatori sono collegati da un vertice semplice a un punto. Perciò, la stessa procedura può essere applicata a un diagramma arbitrario a un loop. Ogniqualevolta che nella regione di integrazione del quadrimomento libero del diagramma due propagatori possono andare simultaneamente on-shell, si può seguire la procedura di Cutkosky riportata sopra per calcolare una discontinuità non nulla di  $\mathcal{M}$ . Il valore di questa discontinuità è dato dalla sostituzione dell'(1.52) per ciascuno dei propagatori. Ad esempio, nei diagrammi di diffusione di Bhabha di ordine  $\alpha^2$  mostrati nella figura 1.7, è possibile calcolare le parti immaginarie tagliando i diagrammi come mostrato e mettendo i propagatori tagliati nei



$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & 2\text{Im} \left( \text{Diagram with wavy lines and a vertical dashed line} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram with wavy lines} \right|^2 \\
\text{(b)} \quad & 2\text{Im} \left( \text{Diagram with wavy lines and a circle, cut by a vertical dashed line} \right) = \int d\Pi \left| \text{Diagram with wavy lines and a semi-circle} \right|^2
\end{aligned}$$

**Figura 1.7:** Due contributi al teorema ottico per lo scattering Bhabha.

diagrammi. I propagatori non tagliati non contribuiscono alle discontinuità. Integrando sulle funzioni delta, come fatto sopra, otteniamo le relazioni indicate tra le parti immaginarie di questi diagrammi e i contributi alla sezione d'urto totale. Concludendo, Cutkosky ha dimostrato che questo metodo di calcolo delle discontinuità è completamente generale, quindi, utilizzando queste regole di taglio, è possibile dimostrare il teorema ottico (1.46) a tutti gli ordini nella teoria perturbativa.

## Capitolo 2

# Applicazione dell'APT in QCD

Nel capitolo precedente si è ricavata la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann a partire dalla teoria di campo scalare reale interagente. La stessa procedura può essere usata per ottenere le espressioni analitiche di osservabili fisiche della QCD, che sono direttamente legate ai propagatori. Questo capitolo è dedicato all'applicazione della APT alla QCD. In particolare, si mostrerà come effettivamente il suo sviluppo nell'ultimo decennio ha portato alla risoluzione del problema delle singolarità non fisiche e soprattutto all'espansione funzionale non di potenze per le osservabili della QCD. Quest'ultima possiede una stabilità sorprendente rispetto alla serie di potenze perturbativa, sia rispetto alla correzioni di ordine superiore a loop, sia rispetto alla scelta dello schema di rinormalizzazione. Le due grandezze particolarmente rilevanti nelle applicazioni sono: la costante di accoppiamento della QCD ( $\alpha_s(q^2)$ ) e la funzione di Adler ( $D(q^2)$ ) [12]. Quest'ultima compare nelle espressioni teoriche di diverse grandezze cruciali nello studio delle interazioni forti, tra cui nel contributo adronico inclusivo del decadimento del leptone  $\tau$  ( $R_\tau$ ) [4] e nel contributo adronico al momento magnetico anomalo del muone " $g-2$ " ( $a_\mu^{\text{had}}$ ) [1]. In questo capitolo si introdurranno le seguenti grandezze per poi calcolarle in dettaglio con il modello confinante proposto nella parte originale del lavoro di tesi.

### 2.1 Costante di accoppiamento analitica $[\alpha_s]_{an}$

Come già riportato nella prima sezione del capitolo 1, nella referenza [1] si calcolano le espressioni per  $\alpha_s(q^2)$  al primo e al secondo ordine perturbativo. Fermendosi al primo ordine si ottiene la (1.4), ossia, riscrivendola in forma

più compatta:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)}, \quad (2.1)$$

con:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad \Lambda = \mu_0 \exp\left[-\frac{1}{2\alpha_s(\mu_0^2)\beta_0}\right],$$

(dove il numero dei sapori dei quark  $n_f$  e il punto di rinormalizzazione  $\mu_0$  sono stati già definiti nel capitolo precedente). Il polo di Landau  $\Lambda^2$  è il ghost non fisico che si vuole eliminare. Per questo, utilizzando i metodi dell'APT definiti in precedenza, si vuole definire una forma analitica per la costante di accoppiamento  $\alpha_s$ . A tal fine, ricordando la definizione (1.41), dalla (2.1) si ricava la densità spettrale (Ref. [12]):

$$\rho_c(\sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}[\alpha_s(-\sigma - i\epsilon)] = \frac{4\pi^2}{\beta_0} \frac{1}{\pi^2 + \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right)} \theta(\sigma). \quad (2.2)$$

In accordo con le referenze [13, 14], la connessione tra la costante di accoppiamento analitica  $\alpha_s^{an}(q^2)$  e la densità spettrale (2.2) è data dalla rappresentazione spettrale (1.39):

$$[\alpha_s(q^2)]_{an} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho_c(\sigma)}{\sigma + q^2} = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_0^\infty \frac{1}{\pi^2 + \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right)} \frac{1}{\sigma + q^2}, \quad (2.3)$$

che, con il cambiamento di variabile  $x = \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right)$  diventa:

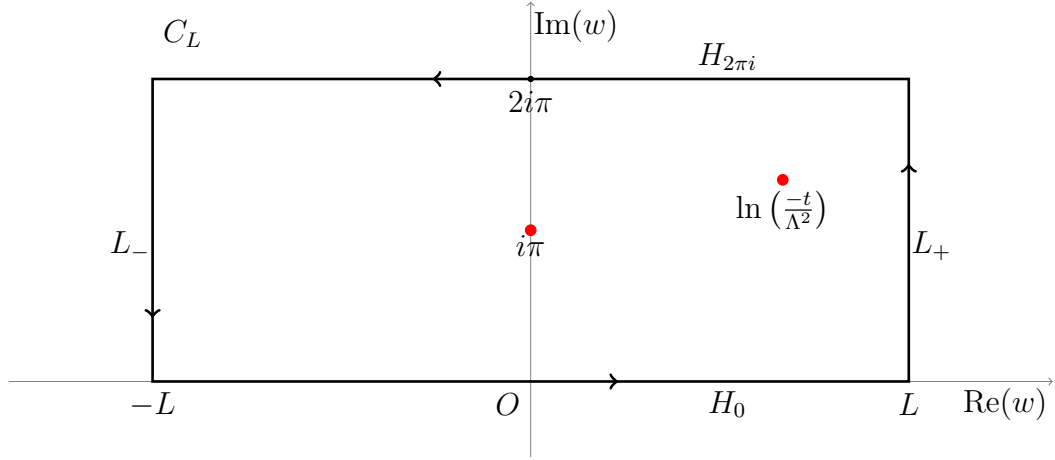
$$[\alpha_s(q^2)]_{an} = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\pi^2 + x^2} \frac{1}{1 + \frac{q^2}{\Lambda^2} e^{-x}}. \quad (2.4)$$

L'integrale ha risultato noto che si ottiene con un'integrazione nel piano complesso del tipo:

$$J(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \oint_{C_L} dw \frac{1}{w - i\pi} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-x}}, \quad (2.5)$$

lungo il cammino di integrazioni  $C_L$  mostrato in figura 2.1. Spezzando l'integrale lungo i vari tratti di  $C_L$  si ottiene (per economia di notazione sottintendiamo l'integranda nei vari integrali):

$$J(t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \int_{H_0} + \int_{L_+} - \int_{H_{2\pi i}} - \int_{L_-} \right].$$



**Figura 2.1:** Percorso di integrazione per (2.5). Rettangolo  $C_L$  definito:

$$\begin{aligned}
 C_L &= H_0 \cup L_+ \cup (-H_{2\pi i}) \cup (-L_-) \text{ dove:} \\
 -L_{\pm} &= \{w : w = \pm L + iy \text{ con } y \in [0, 2\pi]\}; \\
 -H_0 &= \{w : w = x \text{ con } x \in [-L, +L]\}; \\
 -H_{2\pi i} &= \{w : w = x + 2\pi i \text{ con } x \in [-L, L]\}.
 \end{aligned}$$

I due tratti verticali danno contributo nullo nel limite  $L \rightarrow \infty$ . Per cui restano solo i due contributi dovuti ai tratti orizzontali  $H_{0,2\pi i}$ . Per il teorema dei residui si ha:

$$J(t) = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\pi^2 + x^2} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-x}} = 2i\pi \sum \text{Res} \left[ \frac{1}{w - i\pi} \frac{1}{1 + \frac{t}{\Lambda^2} e^{-w}} \right].$$

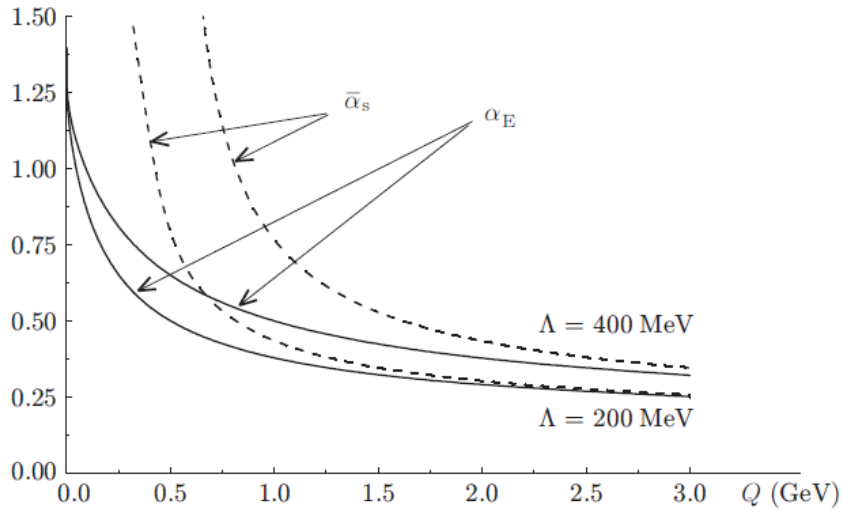
Dal calcolo si ottiene (Ref. [13]):

$$[\alpha_s(q^2)]_{an} = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - q^2} \right], \quad (2.6)$$

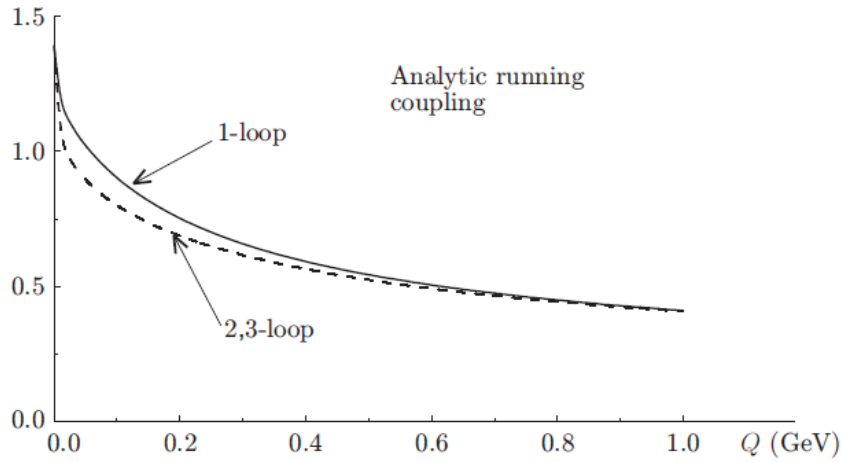
che, come si vede facilmente, non ha piÙ la singolarità in  $q^2 = \Lambda^2$ . Inoltre si ricava il valore:

$$[\alpha_s(0)]_{an} = \frac{4\pi}{\beta_0},$$

che rimane inalterato anche agli ordini successivi della Teoria Perturbativa. Questa proprietà è detta *stabilità infrarossa* [1].



(a) Rappresentazione della costante di accoppiamento analitica  $[\alpha_s(q^2)]_{an}$ , indicata con  $\alpha_E(Q^2)$  nella referenza [1].



(b) Stabilità infrarossa a ordini superiori della costante di accoppiamento analitica.

**Figura 2.2:** Caratteristiche e confronto dell'andamento della costante di accoppiamento perturbativa e della costante di accoppiamento analitica, con relativa proprietà di stabilità infrarossa (Ref. [1]).

Nella figura 2.2(a) si mostra il comportamento della (2.6) per  $\Lambda = 200$  MeV e  $\Lambda = 400$  MeV. Per confronto, le corrispettive curve perturbative sono presenti nel grafico. La stabilità infrarossa, caratteristica delle espressioni dell'APT è visualizzabile in figura 2.2(b), dove vengono mostrate le funzioni a un loop e a due loop per  $[\alpha_s]_{an}$ . La funzione analitica a tre loop, praticamente coincide con quella a due loop (con un'accuratezza di 1-2%).

## 2.2 Funzione di Adler

La funzione di Adler riveste particolare importanza nello studio dell'APT applicata all'interazione forte. È definita come:

$$D(q^2) = -q^2 \frac{d}{dq^2} [\Pi(-q^2)], \quad (2.7)$$

dove  $\Pi(q^2)$  è la funzione adronica di polarizzazione del vuoto definita, a sua volta, in termini del tensore adronico di polarizzazione del vuoto [25, 26]:

$$i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q^2) = i\delta^{ab}(g_{\alpha\beta}q^2 - g_{\alpha\beta}q^2)\Pi(q^2),$$

con  $\alpha, \beta$  indici fermionici e  $a, b$  indici bosonici. In virtù dell'analicità di  $\Pi(q^2)$ ,  $D(q^2)$  può essere calcolata attraverso una rappresentazione in serie non di potenze ma di funzioni, generalizzata al caso analitico (come mostrato in Ref.[12]). Tramite la funzione di polarizzazione del vuoto, la funzione di Adler compare nelle espressioni delle grandezze sperimentalmente osservabili che dipendono da  $R(s)$ , detta funzione di Drell:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}, s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)},$$

corrispondente al rapporto tra la sezione d'urto adronica inclusiva del processo  $e^+e^-$ -annichilazione e quella leptonica dello stesso [15], dove  $s = q^2$  e  $q$  è timelike. Si può dimostrare che (Ref. [12, 15]):

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} [\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)].$$

Usando la relazione di dispersione sottratta nell'origine ( $z_0 = 0$ ) per  $\Pi(s)$  si ricava:

$$\Pi(z) = z \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{s(s-z)} \quad (2.8)$$

e sostituendo la (2.8) nella definizione (2.7) si ottiene la relazione di dispersione per la funzione di Adler:

$$D(z) = z \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+z)^2}. \quad (2.9)$$

Invertendo la definizione (2.9) si ottiene l'espressione di  $R(s)$  in termini di  $D(z)$ , cioè:

$$R(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} D(-z), \quad (2.10)$$

dove il percorso di integrazione è una qualsiasi curva che va da  $z = s - i\epsilon$  a  $z = s + i\epsilon$  e giace sulla regione di analiticità della funzione  $D(z)$ . Questo perchè l'integrale è indipendente dal percorso se si assume che  $D(z)$  abbia le proprietà di analiticità imposte dalla APT.

Nella referenza [1] si mostra come è possibile estendere la serie di potenze perturbativa della funzione di Adler, andandone a costruire una sviluppo analitico funzionale. Usando la Teoria delle Perturbazioni (pt) e le equazioni del gruppo di rinormalizzazione (RG) si ottiene, per  $D(q^2)$ , uno sviluppo in serie di potenze della forma:

$$D_{PT}(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n a_s^n(q^2), \quad (\text{PT=pt+RG}), \quad (2.11)$$

con  $a_s(q^2) = \alpha_s(q^2)/(4\pi)$ . La rappresentazione (2.11) per  $D(q^2)$  contiene le singolarità della costante di accoppiamento, ossia i ghost, se presenti. Per definire la forma analitica di  $D(q^2)$ , quindi, si parte dallo sviluppo (2.11), e lo si estende a una serie non più di potenze, ma di funzioni analitiche come segue:

$$D_{APT}(q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathcal{A}_n(q^2), \quad (2.12)$$

dove, appunto, le funzioni  $\mathcal{A}_n$  soddisfano la rappresentazione di Källén-Lehmann ovvero:

$$\mathcal{A}_n(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma + q^2}, \quad (2.13)$$

con la densità spettrale definita dalla (2.2):

$$\rho_n(\sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}[\alpha_s^n(-\sigma - i\epsilon)].$$

Perciò, confrontando lo sviluppo (2.12) con la serie di potenze (2.11), le (2.13) corrispondono alle costanti di accoppiamento analitiche calcolate nei vari ordini perturbativi e funzionali. In particolare  $\mathcal{A}_1(z)$  è la costante di accoppiamento, calcolata nella sezione precedente (Eq. (2.6)), al primo ordine perturbativo. Dallo sviluppo funzionale di  $D_{APT}(q^2)$  si può ricavare lo sviluppo per  $R_{APT}(s)$ , cioè:

$$R_{APT}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathfrak{A}_n(s), \quad (2.14)$$

dove le funzioni  $\mathfrak{A}_n$  sono:

$$\mathfrak{A}_n(s) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} dz \frac{\mathcal{A}_n(-z)}{-z} = \{\text{Ref. [1]}\} = \frac{1}{\pi} \int_s^{\infty} d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma}. \quad (2.15)$$

Modello	Tipo di approssimazione	Proprietà		
		UV	IR	Analiticità
pt	Doppio set di potenze in $\alpha_s$ e $\ln(q^2/\mu_R^2)$	-	-	+
PT=pt+RG	Serie di potenze nella costante di accoppiamento $\alpha_s(q^2)$	+	-	+
APT=PT+Analiticità	Serie funzionale non di potenze in $\mathcal{A}_n(q^2)$ per $D(q^2)$ e in $\mathfrak{A}_n(s)$ per $R(s)$	+	+	+

**Tabella 2.1:** Proprietà delle varie approssimazioni in base al modello teorico considerato (Ref. [1]).

Nella tabella 2.1 si riassumono le varie proprietà e i diversi risultati in base al modello preso in considerazione. Si nota che la teoria perturbativa da sola ammette l'analiticità delle soluzioni per la funzione  $D(q^2)$ . La teoria perturbativa insieme al gruppo di rinormalizzazione, toglie l'analiticità a causa dei ghost presenti in  $\alpha_s(q^2)$  nel regime IR. Mentre con l'APT si recupera l'analiticità e si riesce ad estendere il modello anche nella regione IR. Considerando le (2.9),(2.12) e (2.10),(2.14), nella referenza [12] si ottengono le seguenti espressioni per  $D(q^2)$  e  $R(s)$ :

$$\begin{aligned} D(q^2) &\propto [1 + d_1 \alpha^{eff}(q^2)], \\ R(s) &\propto [1 + r_1 \alpha^{eff}(s)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove  $d_1$  e  $r_1$  sono i primi coefficienti delle espansioni perturbative. L'apice "eff" si riferisce alla somma di tutti i restanti termini nell'espansione perturbativa di  $[\alpha_s(q^2, s)]_{an}$ .

E' utile osservare come le (2.13) e di conseguenza le (2.15) sono necessarie per l'analisi delle osservabili, e che queste godono di relazioni di ricorrenza utili per calcolarle gli ordini successivi:

$$\frac{1}{k} \frac{d\mathcal{A}_k(q^2)}{d\ln(q^2)} = - \sum_{n \geq 1} \beta_{n-1} \mathcal{A}_{k+n}(q^2), \quad \frac{1}{k} \frac{d\mathfrak{A}_k(s)}{d\ln(s)} = - \sum_{n \geq 1} \beta_{n-1} \mathfrak{A}_{k+n}(s). \quad (2.17)$$

Ad un loop le formule dell'APT hanno forme semplici ed eleganti. Utilizzando le definizioni iterative (2.17) si ottengono:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(1)}(l) &= \frac{1}{\beta_0^2} \left( \frac{1}{l^2} - \frac{e^l}{(e^l - 1)^2} \right), & \mathfrak{A}_2^{(1)}(L) &= \frac{1}{\beta_0^2} \frac{1}{L^2 + \pi^2}, \\ \mathcal{A}_3^{(1)}(l) &= \frac{1}{\beta_0^3} \left( \frac{1}{l^3} - \frac{1}{2} \frac{e^l + e^{2l}}{(e^l - 1)^3} \right), & \mathfrak{A}_3^{(1)}(L) &= \frac{1}{\beta_0^3} \frac{L}{(L^2 + \pi^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$



con:

$$l = \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right), \quad L = \ln\left(\frac{s}{\Lambda^2}\right).$$

Il livello a due loop è tecnicamente più complicato. Il punto è che, in questo caso, la soluzione esatta per  $\alpha_s$  è espressa in termini della funzione speciale di Lambert [3], che porta a espressioni esplicite ingombranti per  $\mathcal{A}_k$  e  $\mathfrak{A}_k$ . Tuttavia, tutte le funzioni APT obbediscono alle seguenti importanti proprietà a qualsiasi livello a loop:

- Le singolarità non fisiche sono assenti e non vengono introdotti parametri aggiuntivi;
- Le funzioni a loop superiori, (2.18) ecc., non sono uguali alle potenze successive di  $\alpha_s$  discostandosi dalla (2.6). Esse oscillano in prossimità di  $|q^2| \sim \Lambda^2$  e svaniscono nel limite IR. Allo stesso tempo, queste funzioni tendono alle potenze di  $\alpha_s$  nella zona asintotica UV;
- Gli sviluppi delle osservabili in potenze di  $\alpha_s(q^2)$  sono sostituite dalle espansioni sugli insiemi di  $\{\mathcal{A}_k(q^2)\}$  e  $\{\mathfrak{A}_k(s)\}$ . Le ultime espansioni mostrano una convergenza più rapida rispetto a quelle del caso perturbativo.

In sintesi, lo studio della funzione di Adler mostra nuovamente l'efficacia dell'APT, con la quale si riesce ad ottenere uno sviluppo funzionale, non di potenze, che garantisce l'analiticità della teoria.

### 2.2.1 Regione spacelike vs timelike

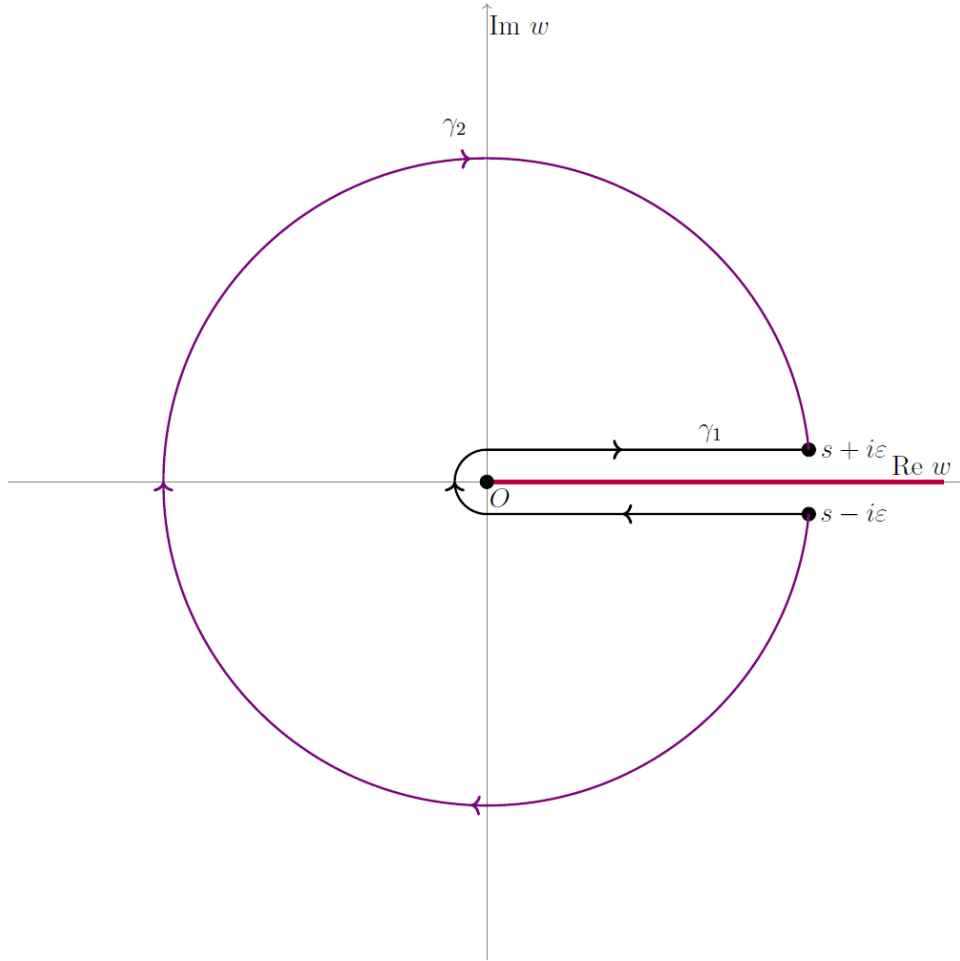
In questo paragrafo si cerca di contestualizzare la differenza principale tra le funzioni definite in regime spacelike e quelle definite in regime timelike. Con queste due notazioni si indica il tipo di variabile  $q^2$ , dalla quale dipendono le grandezze che si stanno definendo nella teoria (i.e. la funzione di Adler, la funzione di Drell, la funzione di polarizzazione...). Essendo un'invariante di Lorentz il momento trasferito al quadrato, in base a come è definito, può essere:

- una variabile timelike: se  $s = q^2 > 0$ ;
- una variabile spacelike: se  $t = q^2 < 0$ .

Si nota che con la variabile complessa  $t$  si rappresentano i quadrimpulsi al quadrato di tipo spacelike, in cui i valori fisici sono specchiati sul semiasse reale negativo. Con la variabile  $s$  si fa riferimento ai quadrimpulsi al quadrato

di tipo timelike, e in questo caso i valori rilevanti a livello fisico si trovano sul semiasse reale positivo. I simboli  $s > 0$  e  $t < 0$  fanno riferimento alle variabili di Mandelstam, dove  $s$  rappresenta il quadrato dell'energia nel sistema del centro di massa e  $t$  il quadrato della quantità di impulso trasferito durante l'urto, nel processo considerato. Infatti, nel limite ultrarelativistico:  $s \sim 2p_1p_2 \sim 2p_3p_4$  e  $t \sim -2p_1p_3 \sim -2p_2p_4$ , con  $p_1, p_2$  quadrimpulsi incidenti e  $p_3, p_4$  quadrimpulsi uscenti. I due regimi "Lorentziani" individuano, quindi, due spazi differenti nei quali definire le osservabili considerate. In particolare, per la costante di accoppiamento  $\alpha_s$  distinguiamo quella Euclidea (definita nello spazio dei quadrimpulsi spacelike) da quella Minkowskiana (definita nello spazio dei quadrimpulsi timelike). È noto che utilizzando gli strumenti forniti dallo studio della rinormalizzazione (RG) nella QCD, si può ottenere per  $\alpha_s$  solamente l'espressione perturbativa nella regione Euclidea dello spazio degli impulsi, che ad esempio all'ordine a un loop ha la forma (2.1), dove  $q^2 = -t > 0$  è l'opposto del quadrato del quadrimpulso. Dalle referenze emerge che questo è fatto principalmente per evitare problemi con le divergenze infrarosse dei diagrammi di Feynman causate dalle masse al denominatore dei propagatori. Tuttavia ci sono processi e osservabili in cui interviene l'interazione forte che sono caratterizzati da quadrimpulsi necessariamente timelike (i.e. la produzione di adroni da una coppia  $e^+e^-$ ), dunque è necessario definire  $\alpha_s$  in tale regione timelike (o Minkowskiana).

Utilizzando l'APT, se sono garantite le condizioni di analiticità della funzione adronica di polarizzazione del vuoto  $\Pi(q^2)$ , si può ottenere una costante d'accoppiamento Minkowskiana per mezzo di una "continuazione analitica" dell'espressione valida nella regione Euclidea. Le virgolette stanno a significare che non si tratta di un prolungamento analitico propriamente detto, ma si passa attraverso una trasformazione integrale che coinvolge la funzione di Adler  $D(q^2)$  e la funzione di Drell  $R(s)$ , ovvero la (2.9). La funzione  $\Pi(q^2)$  nell'ambito della APT (cioè in assenza di *ghost*) deve essere analitica nel piano complesso, con un taglio sul semiasse reale positivo; sotto le stesse condizioni la funzione di Adler è dunque analitica con un taglio sul semiasse reale negativo, dovuto al fatto che nella definizione (2.7) si trova  $\Pi(-q^2)$  invece che  $\Pi(q^2)$ . La versione analitica della funzione di Adler si trova dallo sviluppo in serie funzionale (2.12) dove le funzioni  $\mathcal{A}_n(q^2)$  si ottengono applicando la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann. Un discorso analogo può essere affrontato, parallelamente, per la funzione di Drell. Già definita come rapporto tra la sezione d'urto adronica del processo  $e^+e^-$  e tra la sezione d'urto leptonica dello stesso, essa è legata al tensore di polarizzazione tramite la relazione di disperione (2.8). Sfruttando la relazione tra  $\Pi(q^2)$  e  $D(q^2)$  si ricava la trasformazione integrale che lega  $D(q^2)$  a  $R(s)$ , ovvero la relazione che permette di passare dalla regione di definizione spacelike a



**Figura 2.3:** Esempio di due possibili cammini di integrazione per la (2.10):  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

quella timelike:

$$D(q^2) = q^2 \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s+q^2)^2}, \text{ ovvero la (2.9).}$$

Invertendo la relazione, è possibile ricavare  $R(s)$  a partire da  $D(q^2)$ , ottenendo:

$$R(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} D(-z), \text{ ovvero la (2.10).}$$

Di conseguenza, utilizzando gli sviluppi funzionali dell'APT sia per la funzione di Adler, sia per la funzione di Drell, è possibile trasferire la relazione (2.10) alle funzioni  $\mathcal{A}_n(q^2)$  e  $\mathfrak{A}_n$  le quali, in virtù di quanto già detto nel

paragrafo precedente, coincidono con le espressioni analitiche della costante di accoppiamento all'ordine  $n$  dello sviluppo, in particolare:

- $\mathcal{A}(t) \equiv \alpha_E(t)$ , corrisponde alla costante d'accoppiamento nella regione spacelike;
- $\mathfrak{A}(s) \equiv \alpha_M(s)$ , corrisponde alla costante d'accoppiamento nella regione timelike.

Quindi si ottiene la (2.15):

$$\mathfrak{A}_n(s) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} dz \frac{\mathcal{A}_n(-z)}{-z},$$

dove:

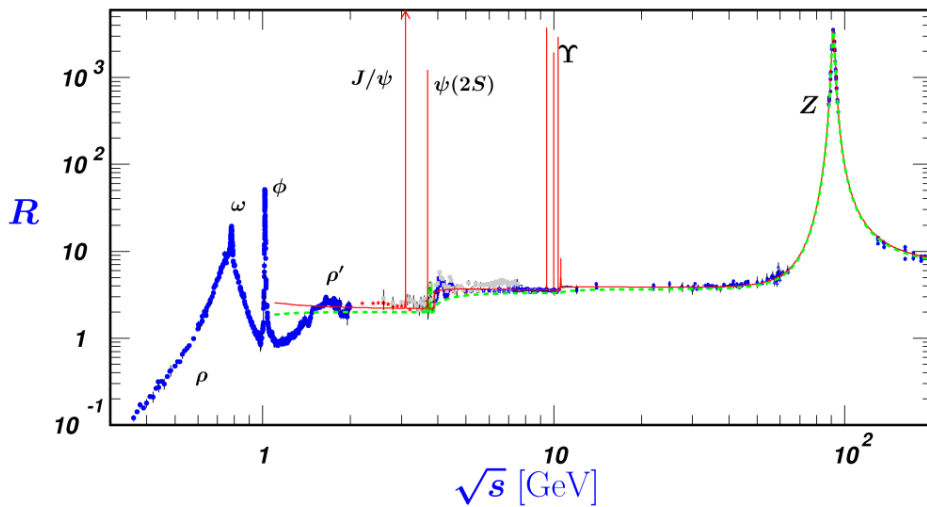
$$\mathcal{A}_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma + t}, \quad \mathfrak{A}_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma}.$$

Quest'ultima relazione è importante per il calcolo riportato nell'ultimo capitolo riferito al contributo adronico nel momento magnetico anomalo del muone.

In conclusione, questo paragrafo ha come obiettivo quello di riprendere i concetti già riportati per la funzione di Adler nella sezione precedente, riorganizzandoli in funzione della distinzione fondamentale tra regime timelike e spacelike. Indipendentemente dalla fisica che le definizioni diverse dei quadrimomenti toccano, la parte rilevante a livello analitico/matematico è che questa distinzione implica solamente una diversa definizione delle funzioni che si stanno considerando nella trattazione teorica dell'APT, senza toccare la fisica e le singolarità che la teoria perturbativa analitica eredita dall'approccio perturbativo.

Regione timelike	Regione spacelike
$R(s) = \frac{1}{2\pi i} [\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)]$	$D(q^2) = -q^2 \frac{d}{dq^2} [\Pi(-q^2)]$
$R(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} D(-z)$	
$R_{APT}(s) = \sum_{n=0}^\infty d_n \mathfrak{A}_n(s)$	$D_{APT}(q^2) = \sum_{n=0}^\infty d_n \mathcal{A}_n(q^2)$
$\mathfrak{A}_n(s) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} dz \frac{\mathcal{A}_n(-z)}{-z}$	

**Tabella 2.2:** Tabella riassuntiva contenete le formule che collegano le grandezze timelike a quelle spacelike.

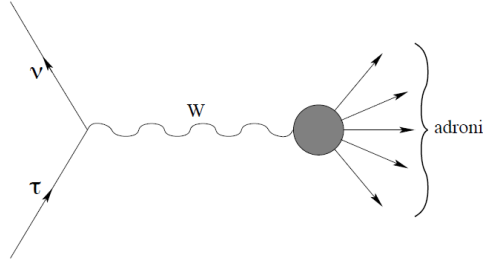


**Figura 2.4:** Andamento del rapporto  $R(s)$  in funzione dell'energia del centro di massa  $\sqrt{s}$  [30].

Nella figura 2.4 è riportato l'andamento sperimentale della funzione  $R(s)$ . Essendo definita nella regione timelike ai valori di  $s = q^2$  corrispondono effettivamente risonanze sperimentali fisiche che non condizionano l'andamento crescente intrinseco di  $R(s)$ . Infatti, aumentando i valori di  $\sqrt{s}$  si accendono diversi *flavour* dei quark che intervengono nel processo, causando un aumento di  $R(s)$ . Le risonanze si trovano in corrispondenza dell'ingresso energetico successivo dei vari quark sempre più pesanti (i.e. la  $J/\psi$  in corrispondenza del quark *charm*, la  $\Upsilon$  per il quark *bottom*...). Analogamente, la funzione di Adler avrà lo stesso andamento fisico crescente, senza però la presenza di risonanze fisiche, in quanto  $D(q^2)$  è definita nella regione euclidea spacelike. Il discorso verrà ripreso nell'ultimo capitolo, nel quale verrà mostrato l'effettivo andamento della  $D(q^2)$  calcolata con il contributo del modello confinante proposto.

## 2.3 Decadimento inclusivo del leptone $\tau$

L'approccio analitico è stato impiegato con successo negli studi di molti processi adronici. La letteratura dedicata alle applicazioni del metodo APT è piuttosto vasta. Nella sezione precedente si è studiata l'impostazione teorica in riferimento al processo di annichilazione  $e^+e^-$  in adroni. La quantità misurata è il rapporto  $R(s)$  che, grazie alla funzione di polarizzazione del vuoto, dipende dalla funzione di Adler, della quale si è studiato lo sviluppo funzionale analitico. In questa sezione, invece, si riporta il caso applicativo



**Figura 2.5:** Decadimento inclusivo del leptone  $\tau$ .

del decadimento inclusivo del leptone  $\tau$ . Tale decadimento (rappresentato dal diagramma in figura 2.5) è utile per testare l'andamento della costante di accoppiamento analitica nella regione di bassa energia. Infatti, il  $\tau$  è l'unico leptone abbastanza pesante da decadere in adroni. La sua massa, che vale  $M_\tau = 1777_{-0.26}^{+0.29}$  MeV [5], sufficientemente grande da permettere modi di decadimento adronici, è abbastanza piccola dal punto di vista della scala della QCD, trovandosi, perciò, nella sua regione di bassa energia. I dati sperimentali su questo decadimento inclusivo in adroni possiedono una buona accuratezza al confronto con quelli di altri processi adronici. Per questo costituiscono un ottimo campione per i test della QCD a bassa energia.

La descrizione teorica del decadimento può essere fatta senza l'uso di modelli e ciò è importante per ottenere il valore di  $\alpha_s(M_\tau^2)$  direttamente dai dati sperimentali. La grandezza misurabile sperimentalmente che si prende in considerazione è  $R_\tau$ :

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{adroni})}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)}.$$

Essa è correlata alla vita media del leptone e la precisione della sua misurazione è di circa l'1%. Allo stesso tempo, il rapporto  $R_\tau$ , nel caso di quark a massa nulla, può essere rappresentato come l'integrale della parte immaginaria della funzione di correlazione  $\Pi(s)$  (Ref. [1]):

$$R_\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{M_\tau^2} \frac{ds}{M_\tau^2} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) \text{Im}[\Pi(s)], \quad (2.19)$$

dove la funzione di correlazione adronica è definita (Ref.[4]):

$$\Pi(s) = \sum_{q=d,s} |V_{uq}|^2 [\Pi_{uq,V}(s) + \Pi_{uq,A}(s)],$$

con gli  $V_{uq}$  che sono gli elementi della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Considerando, come detto, il caso dei quark a massa nulla, i correlatori vettoriale e assiale,  $\Pi_{uq,V}(s)$  e  $\Pi_{uq,A}(s)$  coincidono e si ottiene la dipendenza dalla

parte immaginaria di  $\Pi(s)$  [4] nell'integrale (2.19). La principale difficoltà che si affronta nell'analisi teorica di  $R_\tau$  è dovuta al fatto che l'intervallo di integrazione, nella (2.19), include la regione a bassa energia. Per questo, con l'esempio del decadimento inclusivo considerato, si sottolinea l'importanza della teoria analitica. Ovvero, la teoria perturbativa standard, che non è valida nel dominio IR, non può essere usata. In particolare, se si parametrizza  $\Pi(s)$  con la serie perturbativa in  $\alpha_s$ , l'integrale (2.19) non esiste. Per aggirare questo problema, usando il teorema di Cauchy [27], si trasforma l'integrale lineare (2.19) in un integrale sul piano complesso. Infatti ponendo  $z = s/M_\tau^2$  e integrando per parti, si ottiene:

$$R_\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz (1-z)^3 (1+z) \frac{d}{dz} \text{Im}[\Pi(M_\tau^2 z)].$$

Poichè il correlatore  $\Pi(z)$  è una funzione analitica nel piano complesso, con un taglio lungo l'asse reale positivo, attraverso il quale ha la discontinuità:

$$\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon) = 2i \text{Im}[\Pi(s)], \quad \text{con: } s > 0, \quad (2.20)$$

si può definire l'identità:

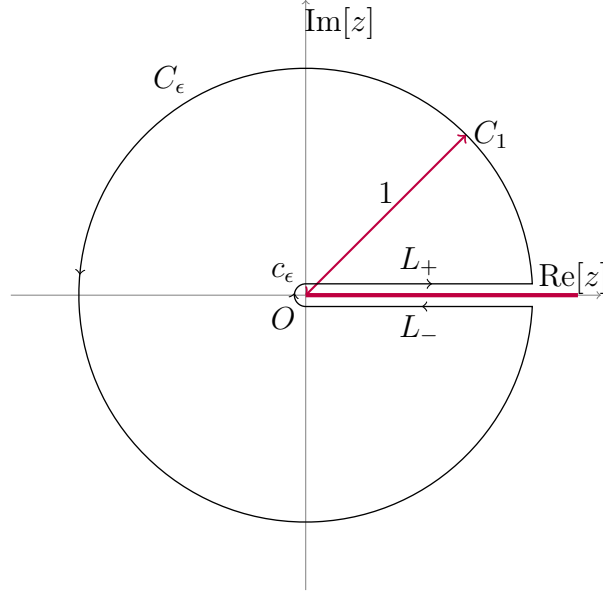
$$\begin{aligned} R_\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz (1-z)^3 (1+z) \frac{d \text{Im}[\Pi(z M_\tau^2)]}{dz} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{L_- + L_+} dz (1-z)^3 (1+z) \frac{d \Pi(z M_\tau^2)^2}{dz}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove i cammini  $L_-$  e  $L_+$  sono i tratti rettilinei mostrati in figura 2.6. Si considera dunque l'integrale nel piano complesso:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{C_\epsilon} dz (1-z)^3 (1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)] = 0, \quad (2.22)$$

che è nullo per il teorema dei residui. Infatti, dalla figura 2.6, si vede che la curva chiusa  $C_\epsilon$  non avvolge nessuna singolarità dell'integranda, se si suppongono valide per  $\Pi(z)$  le proprietà di analicità prescritte dalla APT (assenza di poli, taglio sul semiasse reale positivo). Scomponendo l'integrale su  $C_\epsilon$  negli integrali calcolati sui vari tratti della curva e calcolando il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  si ottiene:

$$\int_{C_\epsilon} = \left[ \int_{L_- + L_+} + \int_{C_1} \right] \equiv 0 \implies \int_{L_- + L_+} \equiv - \int_{C_1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{|z|=1}.$$



**Figura 2.6:** Cammino di integrazione  $C_\epsilon$  per l'integrale (2.22):

$$C_\epsilon = L_+ \cup L_- \cup C_1 \cup c_\epsilon.$$

$$-L_\pm = \{z : z = x \pm i\epsilon \text{ con } x \in [0, 1]\};$$

$$-C_1 = \{z : z = |z|e^{i\theta} \text{ con } |z| = 1, \theta \in [-\arctan(\epsilon), +\arctan(\epsilon)].\}$$

$$-c_\epsilon = \{z : z = \epsilon e^{i\theta} \text{ con } \theta \in [-\pi/2, +\pi/2]\}.$$

L'integrale sulla circonferenza infinitesima  $c_\epsilon$  non è stato considerato nel calcolo in quanto si annulla per i lemmi sugli archetti [27].

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{L_-+L_+} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)] \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Di conseguenza, considerando la (2.21) e la (2.23):

$$\begin{aligned} R_\tau &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 dz(1-z)^3(1+z) \frac{d\text{Im}[\Pi(zM_\tau^2)]}{dz} \\ &= (2.21) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_-+L_+} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d\Pi(zM_\tau)^2}{dz} \\ &= (1.35) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} dz(1-z)^3(1+z) \frac{d}{dz} [\Pi(M_\tau^2 z)]. \end{aligned} \quad (2.24)$$



e usando la funzione di Adler, definita dalla (2.7), si ricava [6][31]:

$$R_\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} (1-z)^3 (1+z) D(zM_\tau^2). \quad (2.25)$$

La forma (2.25) è più utile rispetto alla (2.19) perchè il suo cammino d'integrazione (ossia la circonferenza unitaria nel piano complesso) non coinvolge la regione infrarossa. Per calcolare l'integrale (2.25) si deve esplicitare una forma per la funzione di Adler nell'integranda. Nella referenza [4], considerando quanto detto nella sezione precedente e prendendo la prima equazione delle due in (2.16), si usa come espressione per  $D(q^2)$ [31]:

$$D(M_\tau^2 z) = 3 \left[ 1 + \frac{[\alpha_s(M_\tau^2)]_{an}}{\pi} \right] = 3 \left[ 1 + \frac{1}{\pi [\epsilon_s(M_\tau^2 z)]_{an}} \right], \quad (2.26)$$

dove  $[\epsilon_s]_{an}$  è la costante dielettrica analitica della QCD, definita come il reciproco della costante di accoppiamento  $[\alpha_s]_{an}$ , della quale si parlerà nel prossimo capitolo in dettaglio. Il fattore 3 fa riferimento al numero di colori. Come si vede, la parte complessa è interamente dovuta alla correzione di QCD, ovvero al termine in  $\alpha_s = 1/\epsilon_s$ .

## 2.4 Momento magnetico anomalo del muone

Esiste una proprietà delle particelle denominata momento magnetico, che è associata alle caratteristiche intrinseche dei costituenti infinitesimi della materia (si pensi alle particelle cariche come a delle trottole che a causa della rotazione generano un campo magnetico, a cui si può associare, appunto, un momento magnetico). I leptoni, oltre a una carica elettrica, una massa e uno spin, hanno anche un momento di dipolo elettrico e un momento di dipolo magnetico. Tale proprietà è stata predetta negli anni '20 del secolo scorso e i fisici hanno passato gli ultimi 90 anni a migliorare le misure per via di una discrepanza tra il valore predetto dalla teoria e quello trovato sperimentalmente. Secondo l'elettromagnetismo classico, una particella carica, come l'elettrone e il muone, che ruota su se stessa, dovrebbe avere un momento magnetico proporzionale al suo spin dove la costante di proporzionalità è il magnetone di Bohr. Nel 1928, con la sua equazione relativistica dell'elettrone, Paul Dirac predisse che il momento di dipolo magnetico dell'elettrone avrebbe avuto un valore doppio rispetto alla predizione classica. Questa "anomalia" quantistica viene riassunta dal cosiddetto "fattore  $g$ ", che misura il momento di dipolo in unità di magnetone di Bohr e vale 1 secondo la meccanica classica e 2 secondo la teoria di Dirac. Il valore 2 fu confermato

da esperimenti fatti negli anni immediatamente successivi, anche se con una precisione limitata. Dopo circa venti anni, alla fine degli anni '40, i fisici Polykarp Kusch e Henry Foley osservarono che il valore del momento magnetico dell'elettrone differiva da 2 per la piccola ma molto importante quantità dello 0.12 %. Questa scoperta valse a Kusch il premio Nobel per la Fisica nel 1955. Quindi, il fattore  $g$  risultava essere doppiamente anomalo: non solo differiva dal valore classico ( $g = 1$ ), ma anche da quello predetto dalla teoria di Dirac ( $g = 2$ ). Per rendere più chiara questa differenza venne definita una nuova quantità:

$$a_e = \frac{g - 2}{2}, \quad (2.27)$$

chiamata anche semplicemente " $g-2$ ", che corrisponde alla differenza relativa dal valore  $g = 2$ . Una quantità analoga si può definire naturalmente anche per il muone:  $a_\mu$ . Si parla dunque di *momento magnetico anomalo del muone*, in virtù del fatto che la misura di questa quantità sembra essere in contrasto con le predizioni della meccanica quantistica. Quando le discrepanze sono significative, è legittimo pensare che esistano nuove leggi fondamentali che regolano i fenomeni naturali osservati, con annesse nuove particelle mediatrici della forza che si esercita durante l'interazione tra i costituenti fondamentali della materia. Tali particelle non sono previste dal Modello Standard ed è dunque necessario indagare a fondo nei meandri della teoria per ottenere una spiegazione convincente delle anomalie misurate dagli esperimenti. Per questa anomalia dei suoi valori il *momento magnetico del muone*, come anche quello analogo dell'elettrone, sono osservabili particolarmente ricche di implicazioni per la fisica delle interazioni tra particelle elementari, in quanto possono essere utilizzate per falsificare e perfezionare il Modello Standard. Dal punto di vista teorico, il primo calcolo della quantità  $a_e$  per l'elettrone in QED fu fatto da Julian Schwinger nel 1948, ottenendo il valore:

$$a_e = \frac{\alpha_{QED}}{2\pi} = 0.00116,$$

dove  $\alpha_{QED}$  rappresenta la costante di struttura fine e vale:

$$\alpha_{QED}^{-1} = \alpha_{QED}^{-1}(0) = 137.03599911(46) \quad (\text{Ref. [17]}).$$

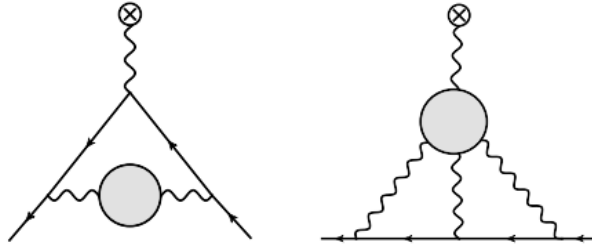
Nel caso del muone, per la corrispondente quantità  $a_\mu$ , con la QCD si introdusse un ulteriore contributo al risultato che gioca, ancora oggi, un ruolo fondamentale, ossia: il *contributo adronico al momento magnetico anomalo del muone* (HAD) [1, 15]. Si hanno, quindi, i seguenti contributi portati dal Modello Standard (SM):

$$a_\mu^{\text{SM}} = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{HAD}} + a_\mu^{\text{WEAK}},$$

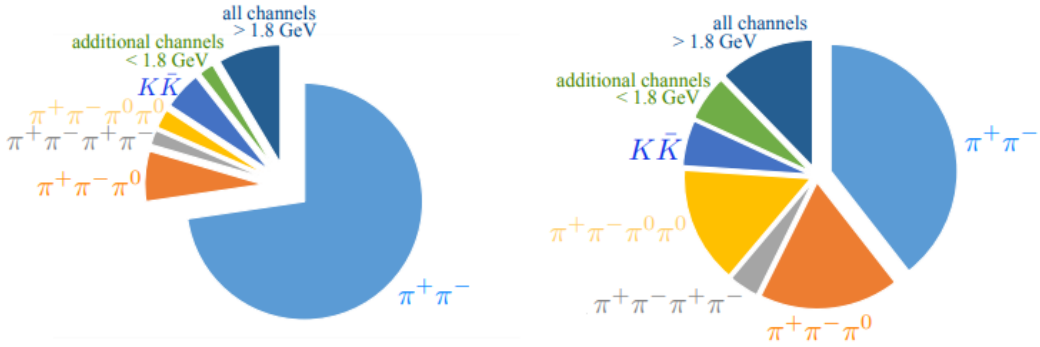
dove:

$$a_{\mu}^{\text{HAD}} = \underbrace{a_{\mu}^{\text{had,LO}} + a_{\mu}^{\text{had,HO}}}_{a_{\mu}^{\text{HVP}}} + a_{\mu}^{\text{HLbL}}$$

Nel contributo adronico totale partecipano, le correzioni portate dalla *polarizzazione del vuoto adronica* (HVP) e le correzioni adronica di *light by light scattering* (HLbL), rispettivamente riferite ai diagrammi sotto riportati (figura 2.7).



**Figura 2.7:** Correzione HVP (diagramma a sinistra) e correzione HLbL (diagramma di destra),



**Figura 2.8:** Contributi a differenti canali e range energetici nel valore assoluto (sinistra) e nell'incertezza (destra) di  $a_{\mu}^{\text{HVP}}$ . Dimostrazione dell'importanza dei processi  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ ,  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$  e  $e^+e^- \rightarrow K\bar{K}$  (valori presi dalla referenza [35]).

Si osserva che le sigle LO NLO e NNLO (HO), riportate anche in tabella 2.3, fanno riferimento a livelli di precisione diversi del calcolo teorico dei parametri. L'ordine di precisione di un calcolo teorico in QCD indica il numero di termini che vengono presi in considerazione nel calcolo delle quantità fisiche. Ad ogni ordine successivo, viene considerato un numero maggiore di termini

e quindi si ottiene una maggiore precisione nei risultati. In particolare "Next-to-next-to-leading order" (NNLO) corrisponde al terzo ordine di precisione nel calcolo teorico delle interazioni forti, dopo il leading order (LO) e il next-to-leading order (NLO). Nel NNLO vengono considerati i contributi di più termini, inclusi i diagrammi a due loop, che rendono il calcolo ancora più preciso in modo da ottenere risultati più accurati e una migliore descrizione delle osservazioni sperimentali. Quindi con HO si fa riferimento agli ordini superiori rispetto al LO. In questo lavoro ci si è concentrati sul calcolo del contributo  $a_\mu^{\text{had,LO}}$ , il quale, per economia di formalismo, verrà indicato come  $a_\mu^{\text{had}}$ . A livello teorico si definisce, al primo ordine nella costante di struttura fine:

$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{QED}}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} K(s) R(s), \quad (2.28)$$

dove:

- $K(s)$  è il fattore di polarizzazione del vuoto espresso da una funzione nota [18], riportata nella referenza [15], ossia:

$$K(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m_\mu^2}, \quad (2.29)$$

dove  $m_\mu = 105.7$  MeV è la massa del muone;

- $R(s)$  è la funzione che descrive il rapporto tra la sezione d'urto adronica inclusiva del processo di annichilazione  $e^-e^+$  – in funzione di  $s$  timelike:

$$R(s) = \frac{3s}{4\pi\alpha^2} \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}),$$

espressa dalla (2.10) in termini della funzione di Adler  $D(q^2)$ .

Inserendo la (2.29) nella (2.28) si ricava:

$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{QED}}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m_\mu^2} R(s).$$

Nella referenza [15] si mostra come esprimere la (2.28) direttamente in funzione della  $D(q^2)$  di Adler, ottenendo il seguente integrale:

$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{QED}}{\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} (1-x)(2-x) D\left(\frac{x^2}{1-x} m_\mu^2\right). \quad (2.30)$$

E' utile sottolineare che le espressioni (2.28) e (2.30) sono equivalenti per effetto delle proprietà di analiticità della funzione  $\Pi(q^2)$ . Se si usa un metodo che non mantiene le proprietà richieste di  $\Pi(q^2)$  le stesse espressioni non

$m_q$ (MeV)		$a_\mu^{\text{had}} \times 10^{10}$			
		LO		NNLO	
$q = u, d \quad q = s$		$m_q = \text{cost} \quad m_q \neq \text{cost}$		$m_q = \text{cost} \quad m_q \neq \text{cost}$	
250	400	736	760	725	763
250	500	716	736	705	726
260	400	691	715	682	711
260	400	671	690	661	685

**Tabella 2.3:** Dipendenza di  $a_\mu^{\text{had}}$  dalle masse dei quark leggeri (Ref. [19]).

saranno più equivalenti e da esse si otterrebbero risultati diversi [16]. Questa situazione è simile a quella del decadimento inclusivo del  $\tau$ , analizzata nella sezione precedente. Grazie alle proprietà analitiche, l'integrale iniziale (2.19), calcolato su un intervallo che include la regione non perturbativa, viene trasformato nella rappresentazione (2.25), dove l'integrale è calcolato lungo una curva chiusa. Analogamente, nel caso del momento magnetico anomalo del muone, le condizioni di analiticità dell'APT giustificano l'utilizzo della (2.30) al posto della (2.28).

A causa del fattore  $1/s$  l'integrale (2.28) riceve il suo contributo principale dalla regione a bassa energia, in particolare dal canale dominante  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ , come riportato in figura 2.8. Siccome la teoria perturbativa in  $\alpha_s$  non può essere applicata nella regione IR, vicino alla soglia del pione, si deve fare ricorso alle misurazioni sperimentali del rapporto  $R$  per valutare l'integrale. Così facendo la previsione teorica risultate per  $a_\mu^{\text{had}}$  è soggetta a incertezze sperimentali [36]. In altre parole, i valori di  $a_\mu^{\text{had}}$  dipendono significativamente dai parametri di massa dei quark. Sono poco sensibili alle masse dei quark pesanti, ma molto sensibili alle masse dei quark leggeri. I dati riportati nella referenza [15] tengono conto delle condizioni di corrispondenza alle soglie dei quark secondo la procedura descritta in [19]. Infatti le masse dei quark, a livello sperimentale, non assumono un unico valore poichè dipendono dalla scala energetica, in analogia al caso della costante di accoppiamento della QCD. Perciò si sceglie, per il parametro  $M_0^{u,d}$ , nella funzione  $m = m(q^2)$  il miglior valore di fit, ossia: 260 MeV e per  $M_0^s = 400 - 500$  MeV. I contributi relativi ai quark  $u$  e  $d$  sono rispettivamente del 72 % e 19 % (il fattore 4 relativo tra il contributo  $u$  e il contributo  $d$  è il rapporto delle cariche al quadrato dei quark). Il contributo relativo al quark  $s$  nella  $a_\mu^{\text{had}}$  si aggira tra il 5 - 9 % per  $M_0^s = 400 - 500$  MeV e il contributo del quark  $c$  è circa del 2 %. Infine, i contributi dei quark  $b$  e  $t$  sono molto piccoli. Tali risultati sono riportati nella tabella 2.3. Quindi si ottiene come valore teorico di  $a_\mu^{\text{had}}$  [15]:

$$a_\mu^{\text{had}} = (698 \pm 13) \times 10^{-10}. \quad (2.31)$$

Valori teorici alternativi di  $a_\mu^{\text{had}}$ , estratti dai dati per l'annichilazione  $e^+e^-$  e dal decadimento del  $\tau$ , sono:

- $(696.3 \pm 6.2_{\text{exp}} \pm 3.6_{\text{rad}}) \times 10^{-10}$  ( $e^+e^-$ -based) [21], che è sotto  $1.9\sigma$  rispetto all'esperimento di BNL [22];
- $(711.0 \pm 5.0_{\text{exp}} \pm 0.8_{\text{rad}} \pm 2.8_{SU(2)}) \times 10^{-10}$  ( $\tau$ -based) [21], che è dentro  $0.7\sigma$  rispetto all'esperimento di BNL;
- $(693.4 \pm 5.3_{\text{exp}} \pm 3.5_{\text{rad}}) \times 10^{-10}$  ( $e^+e^-$ -based) [23], che è sotto  $0.7\sigma$  rispetto all'esperimento di BNL;
- un ulteriore valore ancora più basso:  $(692.4 \pm 5.9_{\text{exp}} \pm 2.4_{\text{rad}}) \times 10^{-10}$  dato dalla referenza [24];

Il valore più recente è riportato nella referenza [35] e vale:

$$a_\mu^{\text{had}} = (684.68 \pm 2.42) \times 10^{-10}.$$

In sintesi, per la quantità  $a_\mu^{\text{had}}$ , essendo fortemente sensibile ai parametri di massa dei quark leggeri, non è possibile scegliere un risultato preferenziale tra quelli ottenuti dai fit dei dati sperimentali riportati in precedenza. Infatti i parametri di massa dei quark leggeri, come detto, sono ricavati solo con larga incertezza, che viene ereditata da  $a_\mu^{\text{had}}$ .

Nella referenza [15] si riporta una procedura che modifica le formule proposte per il calcolo di  $a_\mu^{\text{had}}$ , considerando esplicitamente questa sua forte dipendenza dalle masse dei quark. In particolare, si interviene sulla (2.28) modificando l'espansione di  $R(s)$  con opportune funzioni contenenti la dipendenza dai sapori dei quark che gradualmente intervengono con l'aumentare dell'energia disponibile (come mostrato nella figura 2.4).

Concludendo, si riportano i valori per gli altri contributi di  $a_\mu^{\text{SM}}$ , presi dalla referenza [21]:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{QED}} &= (11658470.6 \pm 0.3) \times 10^{-10}, \\ a_\mu^{\text{had,HO}} &= (-10.0 \pm 0.6) \times 10^{-10}, \\ a_\mu^{\text{HLbL}} &= (8.6 \pm 3.5) \times 10^{-10}. \end{aligned}$$

La corrispondente predizione del Modello Standard, per l'anomalia del momento magnetico del muone é [21]:

$$a_\mu^{\text{SM}} = \begin{cases} (11659180.9 \pm 7.2_{\text{HVP}} \pm 3.5_{\text{HLbL}} \pm 0.4_{\text{QED+WEAK}}) \times 10^{-10} & [e^+e^-], \\ (11659195.6 \pm 5.8_{\text{HVP}} \pm 3.5_{\text{HLbL}} \pm 0.4_{\text{QED+WEAK}}) \times 10^{-10} & [\tau]. \end{cases}$$

## Capitolo 3

# Costante d'Accoppiamento Inversa $\epsilon_s$ (CAI)

Dopo aver illustrato i principi dell'APT alcune applicazioni nell'ambito della QCD, è interessante analizzare il caso della Costante di Accoppiamento Inversa (CAI), ottenendone un'espressione analitica tramite i principi e i metodi appena presentati. Come già riportato nell'ultima sezione del capitolo precedente, la CAI è definita come:

$$\epsilon_s = \frac{1}{\alpha_s} \quad (3.1)$$

e viene interpretata come una "costante dielettrica forte" del vuoto di QCD. L'utilizzo di  $\epsilon_s$  è essenziale nella trattazione teorica analitica della QCD, poichè consente di lavorare nella regione infrarossa con una grandezza che non diverge, ma anzi è regolare. Infatti, essendo l'inversa di  $\alpha_s$ , dove quest'ultima ha una singolarità polare  $\epsilon_s$  è regolare e viceversa. Considerando l'ipotesi del confinamento, a bassi impulsi  $\alpha_s \gg 1$ , ossia si sta operando nel regime non perturbativo della teoria. Al contrario  $\epsilon_s$ , a bassi impulsi, deve essere piccola. Dunque per l'ipotesi del confinamento si ha:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \alpha_s(q^2) = \infty \quad \implies \quad \lim_{q^2 \rightarrow 0} \epsilon_s(q^2) = 0. \quad (3.2)$$

In altre parole, supponendo di avere un sistema di QCD racchiuso in un volume finito  $L^3$  e indicando con  $\alpha_L$  la costante di accoppiamento rinormalizzata, in virtù della libertà asintotica si ha:

$$\alpha_L > \alpha_l \quad \text{se} \quad L > l.$$

Quindi, nel limite  $l \rightarrow 0$ , la  $\alpha_l$  si annulla. Poichè la lagrangiana della QCD non contiene nessun *mass scale*, la libertà asintotica implica che se  $l$  decresce deve

decreocere anche  $\alpha_l$ . Nel limite infrarosso ( $L \rightarrow \infty$ ), invece, si può dedurre da questo che anche  $\alpha_L$  diverga, o almeno  $\alpha_L \gg 1$ . Quindi, un sistema fisico "reale", avendo  $L = \infty$ , sarà sempre nel limite di interazione "ultra-forte". Questa difficoltà può essere risolta, almeno fenomenologicamente, considerando il vuoto QCD come dielettrico. La costante dielettrica del vuoto si inserisce in questo contesto e, definendola nel volume  $L^3$ , dalla (3.1) si ha:

$$\epsilon_L = \frac{1}{\alpha_L} \implies \epsilon_L < \epsilon_l \quad \text{se} \quad L > l.$$

Per questo, in termini di  $\epsilon$  la suddetta difficoltà dell'accoppiamento "ultra-forte" si traduce in:

$$\epsilon_\infty = 0 \quad \text{ovvero} \quad \epsilon_\infty \ll 1,$$

per cui si definisce il vuoto QCD come un dielettrico perfetto o quasi perfetto.

Di conseguenza è più semplice richiedere la validità dell'ipotesi del confinamento su  $\epsilon_s$  rispetto ad  $\alpha_s$  nella misura in cui, per ottenere un'espressione nel piano complesso per la seconda, imporre la divergenza nell'origine non consente di imporre una condizione direttamente sulla parte immaginaria ovvero, per la (2.2), sulla densità spettrale, ma solo sul modulo quadro di  $\alpha_s$ . Al contrario, richiedere che  $\epsilon_s$  sia infinitesima nell'origine equivale a imporre l'annullamento anche della parte immaginaria e quindi della densità spettrale. Perciò l'ipotesi del confinamento, utilizzando  $\epsilon_s$ , è contenuta direttamente nell'espressione della densità spettrale  $\rho_c(\sigma)$ , che deve annullarsi in  $\sigma = 0$ . La trattazione compilativa riportata in questo capitolo è ripresa, in gran parte, della referenza [4].

### 3.1 Vuoto QCD

Come già visto, si può assumere che il vuoto della QCD sia un dielettrico perfetto ( $\epsilon = 0$ ) o quasi perfetto ( $\epsilon \ll 1$ ). Quindi la presenza di una coppia quark-antiquark genera sempre una disomogeneità intorno alle particelle inserite nel vuoto. A livello fisico questo è dovuto al fatto che per la QCD, oltre ai loop fermionici tra quark ( $q$ ) e antiquark ( $\bar{q}$ ), analoghi a quelli della QED, si hanno anche loop bosonici tra gluoni ( $g$ ). Questi ultimi, infatti, pur essendo i mediatori dell'interazione forte, possiedono a loro volta carica di colore e perciò sono ammessi, dalla teoria, i vertici a quattro o a tre gluoni. Loop fermionici e loop bosonici contribuiscono in modo opposto nell'espansione perturbativa. Come per la QED, la polarizzazione del vuoto dovuta



alla produzione di coppie fermioniche  $q\bar{q}$  produce un effetto di schermo, per il quale la carica di colore diminuisce all'aumentare della distanza. Il contributo di autointerazione tra gluoni, invece, causa l'antischermo e domina sull'effetto precedente. Perciò, considerando un quark immerso nel vuoto, si osservano le due proprietà fondamentali dell'interazione forte:

- *Libertà asintotica*: all'aumentare di  $q^2$  la probabilità di radiazione gluonica aumenta e sempre meno carica di colore sarà concentrata nel quark originale;
- *Confinamento*: al diminuire della scala energetica (ossia all'aumentare della distanza tra due quark) la carica di colore aumenta sempre di più arrivando a divergere in regioni energetiche significativamente basse. Ossia l'interazione di colore diventa troppo forte per  $q^2 \rightarrow 0$ .

In questa sezione si approfondirà la descrizione del vuoto della QCD, riportando un semplice esercizio di elettrodinamica classica, con il quale si intende illustrare il confinamento in termini più rigorosi. In elettrodinamica classica si assume convenzionalmente per il vuoto  $\epsilon_0 = 1$ . Ogni mezzo fisico ha quindi  $\epsilon \geq 1$ , infatti, dalla formula dello spostamento elettrico  $\vec{D}$ :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P},$$

scritta in termini del campo elettrico  $\vec{E}$  e del vettore di polarizzazione  $\vec{P}$ , si vede come un atomo sottoposto al campo esterno  $\vec{E}$  acquisti una polarizzazione  $\vec{P}$ , parallela ad  $\vec{E}$ , così da produrre un effetto di schermatura del campo esterno stesso. Per cui si avrà:  $\epsilon > 0$ . Considerando la situazione ipotetica in cui si ha un mezzo con le stesse caratteristiche del vuoto di QCD, ossia con  $\epsilon \ll 1 \Rightarrow \epsilon = 0$ : essendo il segno della  $\epsilon$  opposto rispetto al caso precedente di schermatura, qui si otterrà un effetto di anti-schermatura.

Se si pone in questo mezzo antischermante una piccola distribuzione di carica  $q$ , si formerà intorno ad essa una cavità, al cui interno si ha  $\epsilon = 1$ , mentre all'esterno il valore della costante dielettrica rimane inalterato. Per verificare ciò, si assume che la cavità sia già formata, allora, grazie all'effetto di anti-schermo, sulla superficie esterna si distribuirà una carica dello stesso segno di  $q$ . Di conseguenza, se si cercasse di comprimere la cavità fino a ridurla a zero, si dovrebbe compiere un lavoro infinito. Quindi essa sopravvive. Ovviamente per un mezzo normale con  $\epsilon > 1$  si avrebbe la situazione opposta e la cavità non potrebbe formarsi. Perciò, considerando una cavità sferica di raggio  $R$ , si avrà:

$$D_{int} = E_{int} = D_{ext} = \frac{q}{R^2},$$

$$E_{ext} = \frac{q}{\epsilon R^2},$$

dove con i pedici *int* e *ext* si indicano le componenti ortogonali, alla superficie della cavità, interne ed esterne. L'energia elettrica esterna è data dall'integrale di volume del prodotto  $\vec{D} \cdot \vec{E} \propto \epsilon^{-1}$ . La variazione di energia dovuta alla presenza del mezzo antischermante quindi sarà:

$$U_{el} = \underbrace{\int \frac{q^2}{\epsilon r^4} d\tau}_{\text{mezzo}} - \underbrace{\int \frac{q^2}{r^4} d\tau}_{\text{vuoto}} = 4\pi q^2 \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi q^2}{R} \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right). \quad (3.3)$$

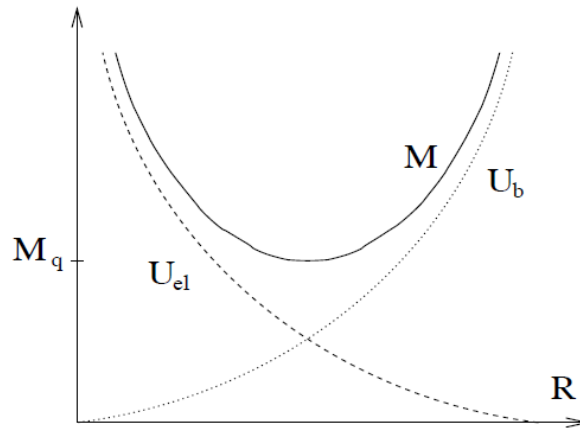
Oltre all'energia elettrostatica, si deve considerare quella necessaria per creare la cavità, che può essere scritta come la somma di termini proporzionali al volume, alla superficie, ..., ovvero:

$$U_b = u_1 R^3 + u_2 R^2 + \dots, \quad (3.4)$$

con i coefficienti  $u_i$  positivi e il pedice  $b$  che fa riferimento a bolla/cavità. L'energia totale  $M$  sarà data dalla somma tra la (3.3) e la (3.4):

$$M = U_{el} + U_b, \quad (3.5)$$

L'andamento di  $M(R)$ , per  $\epsilon < 1$  è rappresentato in figura 3.1.



**Figura 3.1:** Energia totale  $M(R)$  con  $\epsilon < 1$ .

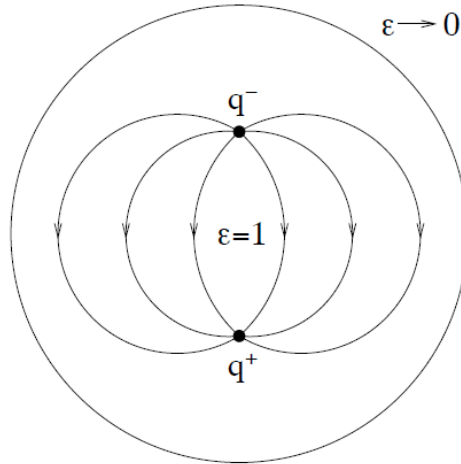
Per  $\epsilon \rightarrow 0$  e considerando l'approssimazione  $U_b \simeq u_1 R^3$ , il valore minimo di  $M$  diventa:

$$M_q \simeq \left( \frac{4\pi q^2}{\epsilon} \right)^{3/4} (3u_1)^{1/4},$$

da cui si ha che:

$$M_q \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Se si sostituisce la carica  $q$  con un dipolo  $q^+ - q^-$ , per valori abbastanza piccoli di  $\epsilon$ , lo stato di energia minima richiede ancora la formazione di una cavità intorno alle due cariche. Inoltre, nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , il campo elettrico interno è parallelo alla superficie della cavità, per cui  $\vec{D}$  sarà nullo all'esterno. La distribuzione del campo all'interno della cavità è mostrata in figura 3.2.



**Figura 3.2:** Distribuzione del campo elettrico all'interno della cavità, dove la carica  $q$  è stata sostituita dal dipolo  $q^+ - q^-$ .

Quindi  $U_{el}$ , così come il minimo dell'energia totale, rimane finita, ossia:

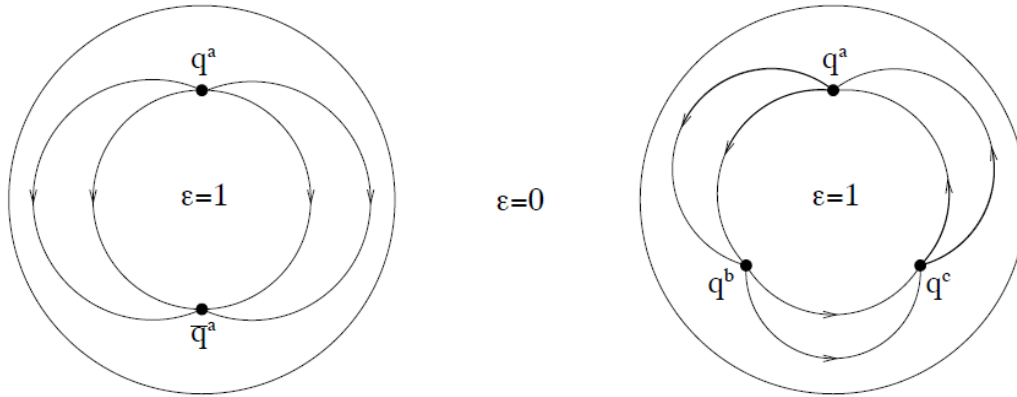
$$M_{q^+q^-} = \text{finito} \quad \text{quando} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Per separare e portare a distanza infinita le due cariche  $q^+$  e  $q^-$ , come segue dalla (3.6), è necessario un lavoro anch'esso infinito. Si è ottenuto così un analogo del confinamento dei quark in QCD.

Cosiderando quindi il vuoto della QCD, se vi si immerge una coppia quark-antiquark, si genera una disomogeneità intorno alle particelle stesse, in analogia con la cavità elettromagnetica del dipolo in figura 3.2. Naturalmente al suo interno  $\epsilon = 1$ , mentre all'esterno  $\epsilon = 0$ . Se il sistema di quark è colorato, la massa diverge per  $\epsilon \rightarrow 0$  (3.6), mentre se si trova in uno stato di singoletto di colore, la massa rimane finita (3.7). Per cui, assumendo che tutti gli adroni siano dei singoletti di colore, si hanno masse finite per:

$$\text{mesoni: } \bar{q}^a q^a \quad \text{barioni: } \epsilon_{abc} q^a q^b q^c.$$

Nella figura 3.3 si mostrano le configurazioni delle linee di campo di colore, all'interno della cavità, sia per mesoni che per barioni.



**Figura 3.3:** Campo elettrico di colore all'interno degli adroni.

Si ottiene che il lavoro necessario per portare i quark ad una distanza  $r$  grande è proporzionale ad  $r$  stesso. Perciò, considerando un'espressione classica per il potenziale di colore associato a un sistema di quark, si avrebbe una funzione del tipo:

$$V_s(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr, \quad (3.8)$$

ossia una somma di due contributi i quali riassumono le proprietà principali dell'interazione forte:

- Il primo contributo domina per  $r \rightarrow 0$ :

$$V \propto \frac{1}{r}$$

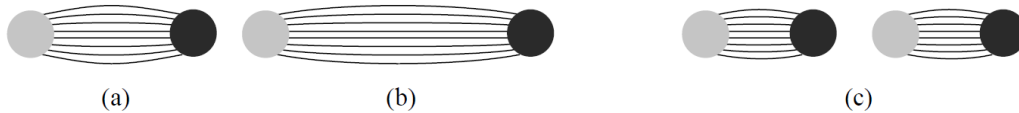
e rappresenta il corrispettivo forte del potenziale elettromagnetico, corrispondente allo scambio di un singolo gluone. Il fattore  $4/3$  deriva dal fatto che si hanno 8 gluoni in 3 colori diversi e si divide per un ulteriore fattore 2 per ragioni storiche dovute alla definizione di  $\alpha_s$ ;

- Il secondo contributo domina quando  $r \rightarrow \infty$ :

$$V \propto r$$

e spiega il confinamento dei quark. Infatti, essendo un termine lineare, corrisponde a una forza elastica per la quale è necessaria energia infinita per rompere l'interazione. Ovvero, se si aumenta la distanza tra 2 quark o gluoni interagenti, l'interazione di colore che li lega aumenta, rendendo impossibile la separazione dei due oggetti interagenti. Infatti, se si prova ad estrarre un quark da un adrone, si crea immediatamente una

coppia  $q\bar{q}$  grazie al vuoto, che riaccoppia il quark separato formando un mesone (figura 3.4). Perciò quark e gluoni sono stati colorati confinati in oggetti non colorati. Da ciò segue il fenomeno dell'adronizzazione, il quale conferma il confinamento a livello sperimentale.



**Figura 3.4:** Schema delle linee di campo di colore tra un quark e un antiquark (Ref. [28]):

- (a)  $q\bar{q}$  sono legati e presentano linee di campo disposte in un tubo che li collega;
- (b) Allontanandosi la forza attrattiva aumenta e le linee di campo si avvicinano sempre di più allungandosi  $\Rightarrow$  aumenta l'energia del campo;
- (c) Man mano che l'energia del campo aumenta con la lunghezza delle linee di campo, si arriva ad un livello sufficiente che permette la creazione di uno stato intermedio  $q\bar{q} \Rightarrow$  si creano così due mesoni.

Concludendo, poichè la teoria è relativisticamente invariante, deve valere la relazione:

$$\epsilon\mu = 1, \quad \text{dove } c = 1 \text{ in unità naturali (UN),}$$

ovvero la permeabilità magnetica  $\mu$  del vuoto della QCD è divergente o, al più:

$$\mu \gg 1.$$

Vuoto QCD	
$\epsilon\mu = 1$	
Costante dielettrica $\epsilon$ $\epsilon \ll 1 \quad \epsilon \rightarrow 0$	Permeabilità magnetica $\mu$ $\mu \gg 1 \quad \mu \rightarrow \infty$

**Tabella 3.1:** Riassunto dei valori di  $\epsilon$  e  $\mu$  per il vuoto della QCD, in quanto dielettrico perfetto o quasi perfetto.

## 3.2 Espansione perturbativa della CAI

### 3.2.1 Ambiguità nella scelta dello schema e della scala

Si consideri l'espansione perturbativa, troncata all'ordine  $N$ , di un osservabile  $\mathcal{O}$ , in termini di  $\alpha_s(\mu)$ , definita in un certo schema di rinormalizzazione  $S$  e ad una scala  $\mu_R = \mu$ :

$$\mathcal{O}_N = o_0\alpha_s^p(\mu) + o_1\alpha_s^{p+1}(\mu) + \dots + o_N\alpha_s^{p+N}(\mu). \quad (3.9)$$

Poichè solo la serie infinita  $\mathcal{O}_\infty$  è invariante rispetto al cambiamento di  $S$  e  $\mu$ , in quanto la dipendenza da  $\alpha_s(\mu)$  e dai coefficienti  $o_i(\mu)$  si elide, mentre nella serie troncata ciò non avviene, la (3.9) dipende dalla scelta dello schema di rinormalizzazione, attraverso i coefficienti  $o_i$ , che, in generale, non sono *scheme-invariant*. Questa ambiguità dovuta alla dipendenza dalla scelta dello schema di rinormalizzazione delle previsioni della QCD rimane uno dei maggiori problemi della teoria. Su questo problema ci sono due posizioni tradizionali:

- La prima, è quella di considerare la dipendenza dallo schema e dalla scala come una caratteristica intrinseca della teoria ed interpretare, quindi, le fluttuazioni nelle previsioni numeriche relative a diverse scelte di schema e scala come degli errori nelle previsioni;
- La seconda, consiste nell'ottimizzare la scelta di scala-schema accordandola con un criterio di sensibilità [7, 8].

La prima interpretazione non è molto produttiva, poichè, in primo luogo, non si sa in che modo e misura le previsioni dipendano dai cambiamenti scala-schema e inoltre, all'errore dovuto all'ambiguità di scelta di schema-scala, va sommato quello derivante dall'omissione dei termini di ordine superiore nelle serie perturbative. Quindi, l'analisi degli errori fatta in questo modo risulta, quanto meno, arbitraria. Un modo per aggirare questo problema potrebbe essere trovare un metodo per scrivere le serie perturbative in modo che risultino sommabili, almeno entro certi limiti. Così si potrebbe evitare il troncamento delle somme che, come detto, porta alla dipendenza dalla scelta di scala-schema.

### 3.2.2 Sviluppo perturbativo di $\epsilon_s$

Per ricavare lo sviluppo perturbativo di  $\epsilon_s$  si parte dal caso di  $\alpha_s$ . Dalle equazioni del gruppo di rinormalizzazione (EGR) si è già ricava la funzione

$\beta$  della QCD (1.3):

$$\mu \frac{\partial g_3}{\partial \mu} = \beta_{QCD}(g_3),$$

di conseguenza si ha:

$$\mu \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} = \frac{1}{4\pi} 2g_3 \beta_{QCD}(g).$$

Poichè

$$\beta_{QCD} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{(4\pi)^{2(k+1)}} g_3^{3+2k}, \quad (3.10)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} &= - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{(4\pi)^{2(k+1)} g_3^{2(k+2)}} = - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{(4\pi)^{2(k+1)}} (4\pi)^{k+2} \alpha_s^{k+2} \\ &= -4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{k+2}, \end{aligned}$$

da cui, ponendo

$$a_s = \frac{\alpha_s}{4\pi},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial \ln(\mu^2)} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k a_s^{k+1} \\ &= -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 - \beta_2 a_s^4 - \dots \\ &= -\beta_0 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 - \beta_1 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 - \beta_2 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^4 - \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nella referenza [7] si mostra che i coefficienti  $\beta_i$  possono essere identificati come i parametri dello schema, quindi nella somma della serie a secondo membro la dipendenza dalla scelta di scala-schema dovrebbe elidersi. Riscrivendo la (3.11) in funzione della CAI si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \ln(\mu^2)} \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right) &= -\beta_0 \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right)^2 - \beta_1 \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right)^3 - \beta_2 \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right)^4 - \dots \\ \frac{\partial}{\partial \ln(\mu^2)} \left( \frac{\epsilon_s}{4\pi} \right) &= \beta_0 \left( \frac{1}{4\pi} \right)^2 + \frac{\beta_1}{\epsilon_s} \left( \frac{1}{4\pi} \right)^3 + \frac{\beta_2}{\epsilon_s^2} \left( \frac{1}{4\pi \epsilon_s} \right)^4 + \dots \\ \frac{\partial}{\partial \ln(\mu^2)} (4\pi \epsilon_s) &= \beta_0 + \frac{\beta_1}{4\pi \epsilon_s} + \frac{\beta_2}{(4\pi \epsilon_s)^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{(4\pi \epsilon_s)^n}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La dipendenza dallo schema di rinormalizzazione si trova nei coefficienti  $\beta_k$  con  $k > 1$ . Perciò è molto conveniente utilizzare i coefficienti  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$

e  $\beta_1 = 102 - 38n_f/3$ , la cui *scheme-invariance* è ben nota, per riscaldare i parametri dell'EGR. Si definiscono quindi:

$$e = \frac{\beta_0}{\beta_1}(4\pi\epsilon_s), \quad \tau = \frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right), \quad (3.13)$$

dove l'introduzione del parametro  $\Lambda$  è giustificata dal punto di vista dimensionale e per il momento non ha significato fisico. Si nota che mentre  $\mu$  varia in  $(0, \infty)$ , la variabile  $\tau$  così definita può, in linea di principio, variare in tutto  $\mathbb{R}$ . In termini dei parametri riscaldati (3.13) la serie di potenze della funzione  $\beta_{QCD}$  (3.12) può essere riscritta:

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\tau} &= -e^2 \frac{\beta_1^2}{\beta_0^3} \beta(e) \equiv B(e) = 1 + \frac{1}{e} + \frac{\beta_0\beta_2}{\beta_1^2} \frac{1}{e^2} + \frac{\beta_0^2\beta_3}{\beta_1^3} \frac{1}{e^3} + \frac{\beta_0^3\beta_4}{\beta_1^4} \frac{1}{e^4} + \dots \\ B(e) &= 1 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \frac{c_3}{e^3} + \frac{c_4}{e^4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{e^n}, \\ \implies \frac{de}{d\tau} &= B(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{e^n}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

con:

$$c_n = \frac{\beta_0^{n-1}\beta_n}{\beta_1^n} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

L'introduzione dei parametri  $c_i$  serve per "unitarizzare" l'espansione, ovvero ad avere coefficienti con valori vicini all'unità, poichè uno schema di QCD è tanto più "buono" quanto più l'espansione della funzione  $\beta$  è simile ad una serie geometrica, cioè a coefficienti unitari. I primi tre valori  $\beta_i$  e  $c_i$ , per  $n_f = 5$ , sono:

$$\begin{cases} \beta_0 \simeq 7.7 & c_0 = 1 \\ \beta_1 \simeq 38.7 & c_1 = 1 \\ \beta_2^{\overline{MS}} \simeq 180.9 & c_2^{\overline{MS}} \simeq 0.93 \quad (\text{Ref. [9]}). \end{cases}$$

A differenza dei  $\beta_i$ , che crescono quasi con legge esponenziale, i  $c_i$  sono  $\sim 1$ , almeno per  $i = 1, 2, 3$ . La funzione  $B(e)$ , definita dalla prima identità della (3.14), è la forma riscaldata della funzione  $\beta_{QCD}$ . Al primo ordine ( $n = 0$ ), il secondo membro della (3.14) è costante ed uguale a 1, per cui si ha:

$$de = d\tau \implies \int_{e(0)}^{e(\tau)} de = \int_0^\tau d\tau' \implies \epsilon_s(\mu^2) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right). \quad (3.16)$$



La  $B(e)$ , essendo la somma di tutti gli ordini perturbativi (ammettendo che la serie sia sommabile), è indipendente dallo schema. Se ci si arresta ad un certo ordine perturbativo, l'equazione (3.14) assumerà la forma:

$$\frac{de}{d\tau} = \sum_{k=0}^N \frac{c_k}{e^k} = \frac{e^N + c_1 e^{N-1} + \dots + c_{N-1} e + c_N}{e^N} \equiv B^{(N)}(e), \quad (3.17)$$

dove riappare la dipendenza dallo schema attraverso i coefficienti  $c_k$ . Supponendo che i  $\beta_i$  siano tutti positivi, saranno positivi anche tutti i  $c_i$ . Di conseguenza, se  $B^{(N)}(e)$  ammette radici reali, esse sono tutte negative. La funzione  $B^{(N)}(e)$  inoltre ha un polo di ordine  $N$  in  $e = 0$ . Integrando l'EGR (3.17) ad un ordine generico  $N \geq 2$ , si ha:

$$\int_{e(0)}^{e(\tau)} \frac{e^N de}{e^N + c_1 e^{N-1} + c_2 e^{N-2} + \dots + c_{N-1} e + c_N} = \tau. \quad (3.18)$$

Il denominatore  $D(e)$  dell'integranda può essere fattorizzato come:

$$D(e) = e^N + c_1 e^{N-1} + c_2 e^{N-2} + \dots + c_N = (e - d_1)(e - d_2) \dots (e - d_N),$$

dove i parametri  $d_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) sono gli  $N$  zeri di  $D(e)$ . Quindi l'integranda della (3.18) può essere decomposta nella somma:

$$\frac{e^N}{e^N + c_1 e^{N-1} + c_2 e^{N-2} + \dots + c_{N-1} e + c_N} = e \sum_{j=1}^N \frac{A_j}{e - d_j}. \quad (3.19)$$

I coefficienti  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) si ottengono come soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N A_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N \frac{A_j}{d_j} = 0 \\ \sum_{j < k} \frac{A_j}{d_j d_k} = 0 \\ \dots \end{cases} \quad (3.20)$$

Inserendo le informazioni appena trovate nella (3.14) si ottiene:

$$\sum_{j=1}^N A_j d_j \ln \left( 1 + \frac{e(\tau)}{d_j} \right) + e(\tau) = \tau, \quad (3.21)$$

in cui si è fatta l'assunzione  $e(0) = 0$  che, nel limite  $e(\tau) \gg 1$ , non comporta perdita di generalità. Con la (3.21) si passa da un'equazione differenziale, come la (3.14), a una trascendente, introducendo però i  $2N$  nuovi parametri

non indipendenti  $d_j$  e  $A_j$ , che si possono interpretare come una rappresentazione diversa dei precedenti  $N$  parametri  $c_i$ . Riscrivendo la (3.21) nella forma:

$$e(\tau) = \tau - \sum_{j=1}^N A_j d_j \ln\left(1 - \frac{e(\tau)}{d_j}\right),$$

si cerca di ottenere un'espressione per la CAI, provando a risolverla in modo ricorsivo:

$$e(\tau) = \tau - \sum_{j=1}^N A_j d_j \ln\left(1 - \frac{\tau}{d_j} + \sum_{j=1}^N \ln\left(1 - \frac{\tau}{d_j} + \sum_{j=1}^N A_j \ln\left(1 - \frac{\tau}{d_j} + \dots\right)\right)\right).$$

Assumendo che, quando  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $e(\tau)$  diverga, con  $e(\tau)/\tau \rightarrow$  costante, si può arrestare l'iterazione al primo passo:

$$e(\tau) = \tau - \sum_{j=1}^N A_j d_j \ln\left(1 - \frac{\tau}{d_j}\right). \quad (3.22)$$

Poichè  $\tau$ , definito dalla seconda equazione nella (3.13), diverge sia nel limite ultravioletto:  $\mu^2 \rightarrow \infty$  che in quello infrarosso:  $\mu^2 \rightarrow 0$ , poichè:

$$\mu \in (0, \infty) \implies \tau \in (-\infty, +\infty),$$

in entrambi i casi si può approssimare il secondo membro dell'equazione (3.22) come:

$$e(\tau) \simeq \tau - \sum_{j=1}^N A_j d_j \ln\left(-\frac{\tau}{d_j}\right) = \tau - \sum_{j=1}^N A_j d_j [\ln(\tau) - \ln(-d_j)],$$

da cui:

$$e(\tau) \simeq \tau - \sum_{j=1}^N A_j d_j \ln(\tau), \quad (3.23)$$

che vale nel limite  $|\tau| \gg 1$ . Ancora, però, nella (3.23) compare la somma sui parametri dello schema di rinormalizzazione, ovvero si deve definire  $e(\tau) \equiv e^{(N)}(\tau)$ . Quindi, per ottenere un'espressione indipendente dallo schema, si deve sommare la serie ( $N = 0$ ) nella (3.23). Dalla (3.19) e (3.20) si ricava:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{x^2 A_j}{x - d_j} - x &= \sum_{j=1}^N A_j \left( \frac{x^2}{x - d_j} - x \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{x d_j A_j}{x - d_j} = \frac{-c_1 x^N - c_2 x^{N-1} - \dots - c_N x}{x^N + c_1 x^{N-1} + \dots + c_N}, \end{aligned}$$

dove  $x$  è una variabile generica e facendo il limite per  $x \rightarrow \infty$ , dall'ultima identità si ottiene:

$$\sum_{j=1}^N d_j A_j = -c_1 = -1,$$

che, essendo indipendente da  $N$ , può essere considerata come la somma della serie, cioè:

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j A_j = -c_1 = -1. \quad (3.24)$$

Sostituendo la (3.24) nella (3.22), si ricava:

$$e(\tau) = \tau + \ln(\tau). \quad (3.25)$$

La (3.25) è valida soltanto nel limite ultravioletto ( $\tau \gg 1 \rightarrow \mu \gg \Lambda$ ), però contiene il contributo di tutti i *loop*, infatti non è più dipendente dai parametri  $A_j$  e  $d_j$ , ovvero dai coefficienti  $\beta_i$  della serie perturbativa della funzione  $\beta_{QCD}$ , caratteristici dello schema di rinormalizzazione. In termini di  $\epsilon_s$  e  $\mu$  si ha:

$$\epsilon_s(\mu^2) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right). \quad (3.26)$$

A conferma della effettiva *scheme-invariance* di questa espressione, gli unici parametri che vi compaiono sono  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , la cui indipendenza dallo schema è ben nota. Nella referenza [4] si riportano i seguenti risultati:

- Per  $t = -\mu^2 < 0$  (spacelike):

$$\epsilon_s(t) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln(-T) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln(-T)\right) \quad \text{con } T \equiv \frac{t}{\Lambda^2} < 0;$$

- Per  $s = \mu^2 > 0$  (timelike):

$$\epsilon_s(s) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln(-S) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln(-S)\right) \quad \text{con } S \equiv \frac{s}{\Lambda^2} > 0.$$

Infatti, facendo riferimento a quanto detto nel secondo capitolo, per la costante di accoppiamento euclidea e minkowskyana, è possibile fare la stessa distinzione anche per la CAI, definendola sia nella regione timelike (ovvero minkowskyana), sia nella regione spacelike (ovvero euclidea). Di seguito si lavorerà nella regione spacelike, in particolare si considereranno i tagli fisici lungo il semiasse reale negativo, definito nel piano complesso, individuato dalla variabile  $t = q^2$ .

### 3.3 Espressione analitica per la CAI

Per ottenere una prima espressione analitica di  $\epsilon_s$  nel piano complesso, si utilizza la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann nella quale è necessario definire la densità spettrale. Essendo quest'ultima definita come la parte immaginaria della funzione della quale si calcola la rappresentazione spettrale, si usa l'approssimazione ultravioletta data dalla (3.26), come punto di partenza per ottenerla. Per prima cosa si definiscono le quantità:

$$K_0 = \frac{\beta_0}{4\pi} \simeq 0.61, \quad K_1 = \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \simeq 0.40$$

e si inseriscono nella (3.26), ottenendo, in funzione della variabile complessa  $t$  (che in questo caso rappresenterebbe la regione spacelike, ma per economia di scrittura tralasciamo il segno meno che essa porta nei logaritmi, come se fosse la variabile timelike  $s$ ):

$$\epsilon_s(t) = \epsilon_s^{(0)}(t) + \epsilon_s^{(1)}(t), \quad (3.27)$$

con:

$$\epsilon_s^{(0)}(t) = K_0 \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right), \quad (3.28)$$

$$\epsilon_s^{(1)}(t) = K_1 \ln\left(\frac{K_0}{K_1} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right). \quad (3.29)$$

Esplicitando la (3.27) si ottiene quindi:

$$\epsilon_s(t) = K_0 \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right) + K_1 \ln\left(\frac{K_0}{K_1} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right).$$

Per applicare i metodi dell'APT, quindi, è necessario verificare se le funzioni, appena definite, rispettano le condizioni di analiticità sul piano complesso con opportuni tagli. In particolare, si osserva che:

- $\epsilon_s^{(0)}(t)$  ha già le proprietà richieste, ovvero è analitica in tutto il piano complesso con un taglio sul semiasse reale negativo;
- $\epsilon_s^{(1)}(t)$  invece è analitica in tutto il piano complesso con il taglio sulla semiretta  $t \in (-\infty, \Lambda^2]$ , di conseguenza, usando le prescrizioni dell'APT, deve essere rimossa la parte non richiesta del taglio, cioè quella sul semiasse reale positivo.

Quindi, per ottenere  $[\epsilon_s]_{an}$  si devono calcolare rispettivamente  $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$  e  $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$ .

### 3.3.1 Calcolo di $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$

Per procedere al calcolo di  $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$ , è necessario ottenere la densità spettrale, ossia è necessario calcolare il valore limite di  $\epsilon_s^{(0)}$  sul bordo inferiore del taglio sul semiasse reale negativo. In questo caso, infatti,  $\rho_c \equiv \rho$  sarà:

$$\rho^{(0)}(\sigma) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \text{Im}[\epsilon_s^{(0)}(-\sigma - i\alpha)]. \quad (3.30)$$

Definendo il logaritmo complesso, che è una funzione polidroma, come segue:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{con} \quad \arg z \in (-\pi, +\pi),$$

è facile calcolare la (3.30) a partire dalla (3.28), e si ottiene:

$$\rho^{(0)}(\sigma) = -\pi K_0. \quad (3.31)$$

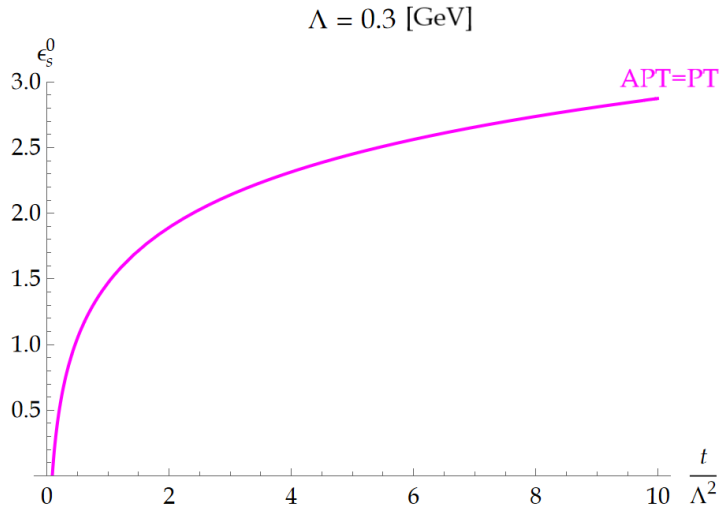
Poichè la (3.31) non ha un corretto andamento per  $\sigma \rightarrow +\infty$ , è necessario utilizzare la relazione di dispersione sottratta (1.42), introdotta nel primo capitolo. Scegliendo come punto di sottrazione  $t = \Lambda^2$  e imponendo per comodità  $[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an} = 0$ , si ha:

$$[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} = \frac{(\Lambda^2 - t)}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(0)}(\sigma)}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}. \quad (3.32)$$

L'integrale è di facile risoluzione e si ottiene come soluzione della (3.32):

$$[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} = K_0 \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right), \quad (3.33)$$

che coincide con l'espressione di  $\epsilon_s^{(0)}$  non analitica (3.28).



**Figura 3.5:** CAI analitica all'ordine zero:  $[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}$ .  
Equazione (3.33) per  $n_f = 5$  e  $\Lambda = 300 \text{ MeV}$ .

### 3.3.2 Calcolo di $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$

Allo stesso modo si calcola  $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$ . Per calcolare la densità spettrale è necessario ottenere il limite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \text{Im}[\epsilon_s^{(1)}(-\sigma - i\alpha)] = \begin{cases} -\pi K_1 & \text{per } -\Lambda^2 < \sigma < 0; \\ -K_1 \left[ \pi + \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) \right] & \text{per } 0 < \sigma < \Lambda^2; \\ -K_1 \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) & \text{per } \sigma > \Lambda^2. \end{cases}$$

Come detto in precedenza, in questo caso, si deve selezionare la parte di taglio fisicamente rilevante affinché si possano applicare le prescrizioni dell'APT. Quindi è necessario non considerare il primo ramo del sistema, in modo da prendere un taglio definito solo nel semiasse reale negativo. In questo caso la densità spettrale risulterà essere:

$$\rho^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} -K_1 \left[ \pi + \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) \right] & \text{per } 0 < \sigma < \Lambda^2; \\ -K_1 \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) & \text{per } \sigma > \Lambda^2. \end{cases} \quad (3.34)$$

Si può osservare che:

- essendo  $\rho^{(1)}(\sigma) \underset{\sigma \rightarrow +\infty}{\sim} 1/\ln \sigma$ , è necessario usare di nuovo la relazione di dispersione sottratta, con  $s$  punto di sottrazione;
- $\rho^{(1)}$  è continua e derivabile in  $\sigma = \Lambda^2$ .

La relazione di dispersione sottratta assume la forma:

$$[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(1)}(s)]_{an} + \frac{s-t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)(\sigma+s)}. \quad (3.35)$$

Per calcolare esplicitamente l'integrale della relazione di dispersione (3.35) con la parte immaginaria di  $\epsilon_s^{(1)}$  è possibile utilizzare il metodo della derivata, poiché per costruzione  $[\epsilon_s^{(1)}]$  è analitica nel suo dominio. Si ha:

$$\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]}{dt} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)(\sigma+s)} - \frac{s-t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)^2(\sigma+s)};$$

riducendo i termini si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sigma+t)(\sigma+s)} &= \frac{1}{s-t} \left[ \frac{1}{(\sigma+t)} - \frac{1}{(\sigma+s)} \right], \\ \frac{s-t}{(\sigma+t)^2(\sigma+s)} &= \frac{1}{t-s} \left[ \frac{1}{(\sigma+t)} - \frac{1}{(\sigma+s)} \right] + \frac{1}{(\sigma+t)^2}, \end{aligned}$$

che è la derivata:

$$\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}{dt} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)^2}. \quad (3.36)$$

Integrando la (3.36) per parti:

$$\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}{dt} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\rho^{(1)}(\sigma)}{(\sigma+t)} \right]_0^\infty - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\frac{d\rho^{(1)}(\sigma)}{d\sigma}}{(\sigma+t)}. \quad (3.37)$$

La derivata della densità spettrale è la stessa per entrambi i rami definiti nella (3.34), quindi si ha:

$$\frac{d\rho^{(1)}}{d\sigma}(\sigma) = \frac{\pi K_1}{(\ln^2(\frac{\sigma}{\Lambda^2}) + \pi^2)\sigma}.$$

Inoltre, per il primo termine al secondo membro della (3.37) si nota che:

$$\rho^{(1)}(0) = -\pi K_1.$$

Sostituendo nella (3.37) si ottiene:

$$\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}{dt} = \frac{K_1}{t} - K_1 \int_0^\infty d\sigma \frac{1}{\ln^2(\frac{\sigma}{\Lambda^2}) + \pi^2} \frac{1}{\sigma(\sigma+t)}. \quad (3.38)$$

Con il cambiamento di variabile:

$$x = \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right),$$

la (3.38) diventa:

$$\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}{dt} = \frac{K_1}{t} \left[ 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + \pi^2} \frac{1}{1 + \frac{\Lambda^2}{t} e^x} \right].$$

Questo tipo di integrale è lo stesso già calcolato nel capitolo precedente (equazione (2.6)), da cui l'espressione per  $\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}{dt}$  è:

$$\frac{d[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}{dt} = K_1 \left[ \frac{1}{t \ln(\frac{t}{\Lambda^2})} - \frac{\Lambda^2}{t(t - \Lambda^2)} \right]. \quad (3.39)$$

Si osserva che, come deve essere per costruzione, la funzione ottenuta è analitica nel dominio di interesse, ovvero su tutto il piano complesso con il taglio (dovuto alla funzione logaritmo) sul semiasse reale negativo, in particolare

$t = \Lambda^2$  non è una singolarità. Integrando la (3.39) tra  $\Lambda^2$  e  $t$ , e scegliendo  $[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an} = 0$ , si ha:

$$[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} = K_1 \int_{\gamma(t)} dw \left[ \frac{1}{w \ln\left(\frac{w}{\Lambda^2}\right)} - \frac{\Lambda^2}{w(w - \Lambda^2)} \right], \quad (3.40)$$

dove  $\gamma(t)$  è una qualunque curva regolare appartenente al dominio di analiticità della funzione che collega  $\Lambda^2$  e  $t$ . Ovviamente la definizione è ben posta perchè l'integrale non dipende dalla curva scelta, dato che si tratta dell'integrale di una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso. Per calcolare l'integrale (3.40) è sufficiente trovare una funzione  $\xi(w)$  analitica nello stesso dominio dell'integranda e tale che:

$$\frac{d\xi(w)}{dw} = \frac{1}{w \ln\left(\frac{w}{\Lambda^2}\right)} - \frac{\Lambda^2}{w(w - \Lambda^2)},$$

da cui si avrebbe:

$$[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} = K_1 [\xi(t) - \xi(\Lambda^2)],$$

conferma definitiva che l'integrale non dipende dalla scelta del percorso. Tale funzione è:

$$\xi(w) = \ln\left(\frac{w}{w - \Lambda^2} \ln\left(\frac{w}{\Lambda^2}\right)\right), \quad (3.41)$$

e, poichè:

$$\xi(\Lambda^2) = 0,$$

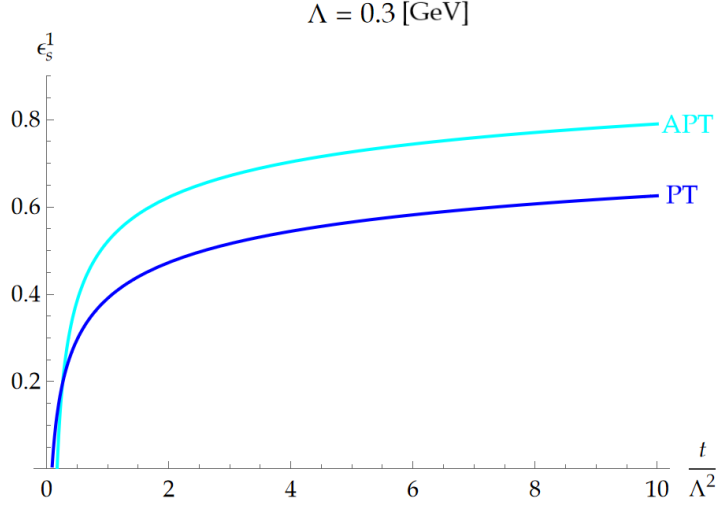
si ottiene:

$$[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} = K_1 \xi(t) = K_1 \ln\left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right). \quad (3.42)$$

	Ordine zero (CAI)	Primo Ordine (CAI)
PT:	$\epsilon_s^{(0)}(\mu^2) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)$	$\epsilon_s^{(1)}(\mu^2) = \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right)$
APT:	$[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)$	$[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} = \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{t}{t - \Lambda^2} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right)$

**Tabella 3.2:** Riassunto delle espressioni della CAI all'ordine zero e al primo ordine.





**Figura 3.6:** CAI analitica al primo ordine:  $[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$ .  
Equazione (3.42) per  $n_f = 5$  e  $\Lambda = 300 \text{ MeV}$ .

Mettendo insieme la (3.33) per  $[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}$  e la (3.42) per  $[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$  si ottiene l'espressione al primo ordine di  $[\epsilon_s(t)]_{an}$ , ossia:

$$[\epsilon_s(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}]_{an} + [\epsilon_s^{(1)}]_{an} = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{t}{t-\Lambda^2} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right). \quad (3.43)$$

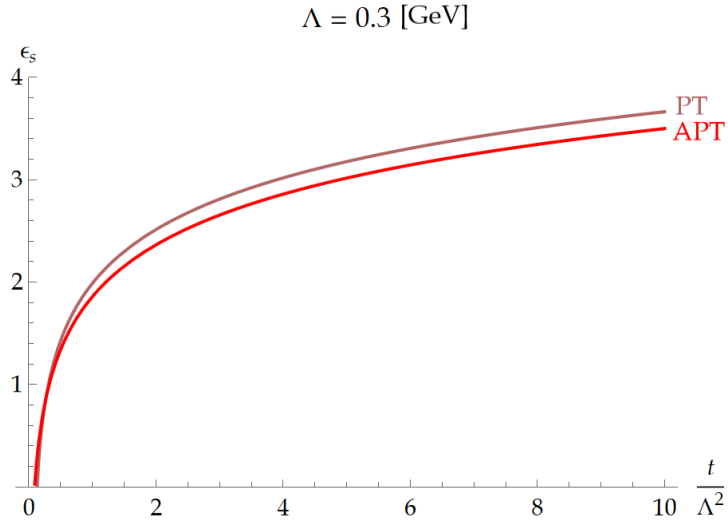
I contributi all'ordine zero e al primo ordine della CAI sono rappresentati rispettivamente in figura 3.5 e 3.6.

Costante di accoppiamento inversa $\epsilon_s$ (CAI)	
PT:	$\epsilon_s(\mu^2) = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{\beta_0^2}{\beta_1} \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right)$
APT:	$[\epsilon_s(t)]_{an} = \frac{\beta_0}{4\pi} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right) + \frac{\beta_1}{4\pi\beta_0} \ln\left(\frac{t}{t-\Lambda^2} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right)$

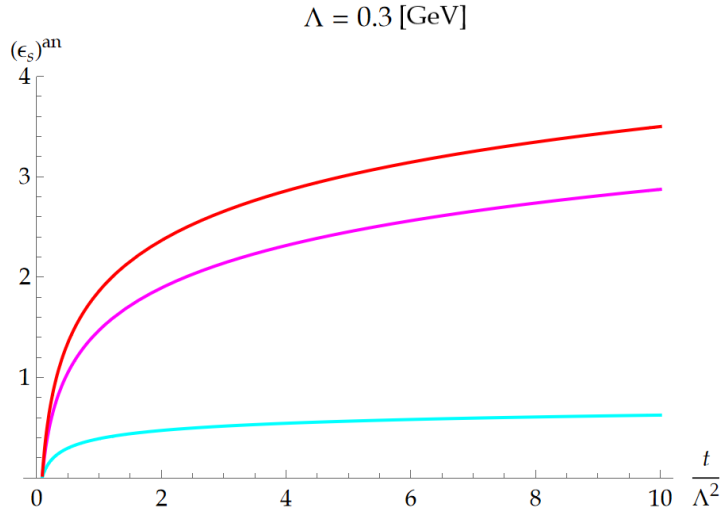
**Tabella 3.3:** Riassunto dei valori di  $\epsilon_s$  ricavati sia con l'approccio perturbativo (PT) sia con la teoria analitica (APT).

Nella tabella 3.3 sono riassunti tutti i risultati perturbativi (PT) e analitici (APT) per la CAI, mentre nella 3.2 si riportano le espressioni all'ordine zero e al primo ordine. Confrontando l'espressione analitica (3.43) della CAI

con l'espressione perturbativa (3.26) si nota che il cambiamento è relativo solo al secondo termine dell'espressione, poichè il primo (libertà asintotica) aveva già l'analiticità richiesta nel piano complesso di  $t$  con il taglio sul semiasse reale. L'analiticità del contributo al primo ordine, invece, è garantita dall'eliminazione del punto di diramazione che ha portato alla selezione dei due rami nel sistema (3.34). Di seguito si riportano i risultati per  $[\epsilon_s(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$  (figura 3.7).



(a)  $\epsilon_s(t)$  della PT (3.26) vs  $[\epsilon_s(t)]_{an}$  della APT (3.43).



(b) CAI analitica totale:  $[\epsilon_s(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$ , e relativi contributi (3.33) e (3.42).

**Figura 3.7:** Grafici ottenuti per  $n_f = 5$  e  $\Lambda = 300$  MeV.

# Capitolo 4

## Modello Confinante

In questo capitolo viene presentato il modello confinante per la costante di accoppiamento. In particolare si lavora con la CAI, introdotta e studiata nel capitolo precedente. Con tale modello si ottengono delle espressioni per  $\epsilon_s$  e per  $\alpha_s$  con le quali si riesce a riprodurre il confinamento, ovvero il corretto andamento di tali funzioni per  $q^2 \rightarrow 0$  nella regione infrarossa (IR). Se da un lato è vero che con la APT si ottengono soluzioni analitiche su tutto il piano complesso di  $q^2$ , privato di opportuni tagli fisici, d'altraparte non si riesce a riprodurre il corretto andamento nella regione IR. Infatti, si parte da funzioni derivate dalla teoria perturbativa, che, nel caso della QCD, sono definite correttamente solo nella regione ultravioletta (UV), le quali, pur essendo estese analiticamente alla regione IR, non garantiscono da sole il corretto andamento in tale regione. Perciò è necessario "regolarizzare" le espressioni ottenute con la sola APT, imponendo l'andamento richiesto fisicamente dalla regione a bassi  $q^2$ . Tale imposizione viene fatta utilizzando una funzione regolarizzatrice, definita in dettaglio nella prima sezione del capitolo, che viene inserita nella rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann per  $\epsilon_s$ , in modo da intervenire direttamente sulla densità spettrale presente nella relazione di dispersione. Si propone un modello per tale funzione regolarizzatrice, con il quale siano rispettati gli andamenti richiesti a bassi e alti  $q^2$ , ottenendo così espressioni analitiche confinanti per  $\epsilon_s$  (e di conseguenza anche per  $\alpha_s$ ). Tali espressioni verranno poi studiate e confrontate con i dati sperimentali ottenuti per la costante di accoppiamento della QCD, in modo tale da avere una prima verifica fenomenologica della correttezza o meno del modello. Dopo aver presentato, in questo capitolo, il modello, in quello successivo lo si andrà a utilizzare direttamente in ambito fenomenologico, ossia per calcolare il contributo adronico di due grandezze significative per la QCD: il rapporto  $R_\tau$  caratteristico del decadimento inclusivo del leptone  $\tau$  e il momento magnetico anomalo del muone  $a_\mu$ .

## 4.1 Confinamento

Come già detto, uno degli aspetti che rende più interessante la trattazione del problema del prolungamento analitico della costante di accoppiamento forte, in termini di  $\epsilon_s$  piuttosto che  $\alpha_s$ , è la possibilità di introdurre condizioni sul comportamento infrarosso di  $\epsilon_s$  in modo più naturale rispetto a quanto non si possa fare direttamente per  $\alpha_s$ . L'importanza dell'andamento nell'intorno dell'origine ( $q^2 < \Lambda^2$ ) è cruciale, poiché in questa regione energetica le serie perturbative di QCD non convergono e tutte le espressioni trovate, sia per  $\alpha_s$ , che per  $\epsilon_s$ , non sono più valide. Utilizzando la rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann, si sfruttano gli andamenti noti per grandi  $q^2$  di  $\alpha_s$  ed  $\epsilon_s$  (o meglio le loro parti immaginarie) come densità spettrali nelle relazioni di dispersione. Quest'ultime, una volta integrate, permettono di ottenere le espressioni analitiche delle grandezze di interesse, definite su tutto il piano complesso di  $q^2$  a meno dei tagli fisici, estese anche nel regime infrarosso (per piccoli valori di  $q^2$ ). Il punto debole di tale ragionamento è che, pur estendendo le soluzioni nella regione IR, non si riesce a riprodurre il confinamento tipico della QCD per  $q^2 = 0$ . Infatti, considerando il caso di  $\alpha_s$ , l'espressione (2.6) ottenuta con l'APT, pur non avendo più singolarità in  $q^2 = \Lambda^2$ , gode della *stabilità infrarossa*, come già detto nel secondo capitolo. Infatti, dalle (2.6), si ottiene che  $\alpha_s^{an}(0) = 4\pi/\beta_0$  per  $q = 0$ , mentre si vorrebbe la divergenza. Grazie all'analiticità, però, è possibile intervenire sulla rappresentazione spettrale (2.3) di  $\alpha_s$ , andando a regolarizzare la densità spettrale, ovvero la parte immaginaria di  $\alpha_s$  perturbativa. Perciò è necessario conoscere almeno il comportamento infrarosso delle parti immaginarie. Ed è qui che la CAI manifesta i suoi pregi rispetto ad  $\alpha_s$ . Infatti, mentre l'ipotesi del confinamento per  $\alpha_s$  implica di imporre la divergenza nell'origine non consentendo di imporre una condizione direttamente sulla sua parte immaginaria (ovvero sulla densità spettrale), per  $\epsilon_s$  la condizione di confinamento si traduce nel suo annullamento a  $q = 0$  e di conseguenza nell'annullamento della sua parte immaginaria. Con ciò si può intervenire direttamente sulla densità spettrale nella relazione di dispersione di Källén-Lehmann, utilizzando una funzione regolarizzatrice  $r(t)$  agente sulla densità spettrale, che rispetti i seguenti andamenti:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \rightarrow 0^+, \\ 1 & \text{per } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Tali andamenti sono giustificati dal fatto che la funzione  $r(t)$  deve modificare solo il comportamento della densità spettrale per  $t = 0$ , lasciando inalterato il comportamento a grandi  $t$ , ovvero la libertà asintotica.

Il modello scelto per la funzione regolarizzatrice è:

$$r_p(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\Lambda^2}}\right)^p \quad \text{con } t \in \mathbb{C}/(-\infty, 0]. \quad (4.1)$$

Il parametro  $p$ , che rappresenta la potenza con cui  $r_p(t)$  si azzerava, caratterizza le proprietà d'integrazione nell'origine della stessa costante di accoppiamento: ovvero il modello deve garantire la convergenza di integrali della forma seguente:

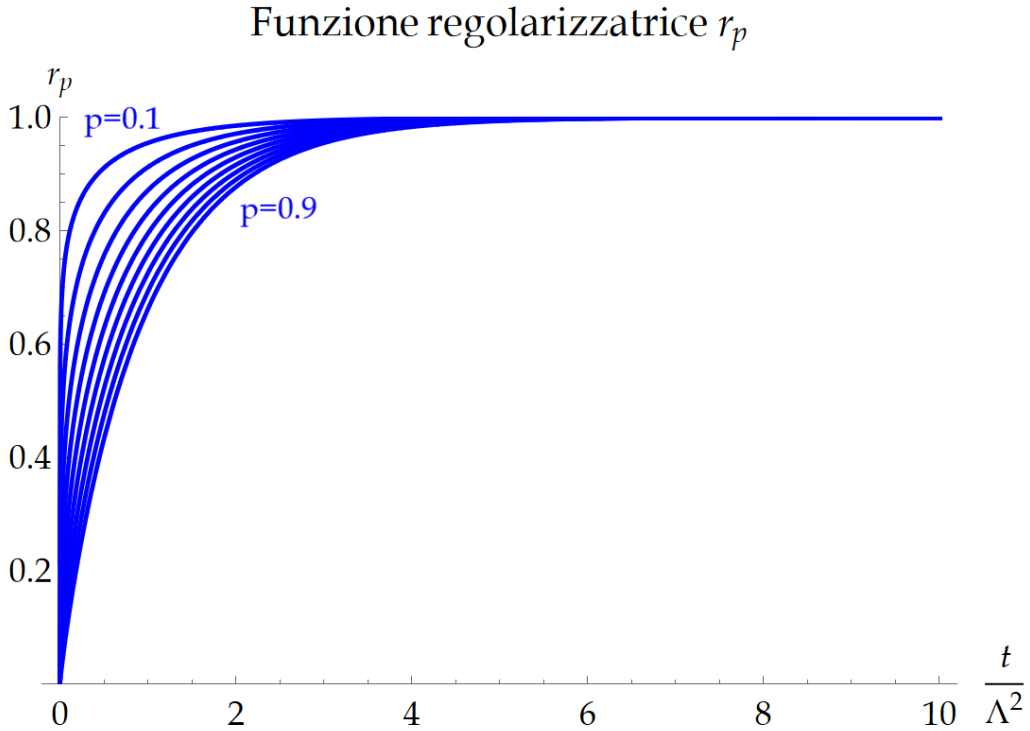
$$\frac{1}{s} \int_0^s ds' \alpha_s(s'),$$

che appaiono nell'ambito della *soft gluon resummation* (Ref. [10]). I valori di  $p$ , che garantiscono la scelta di un modello confinante integrabile sono:

$$p \in \mathbb{R} \mid 0 < p < 1. \quad (4.2)$$

Nella figura 4.1 sono mostrati gli andamenti di  $r_p(t)$  per diversi valori di  $p$ , in particolare i valori riportati sono:

$$p \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$$



**Figura 4.1:** Andamento della funzione regolarizzatrice  $r_p(t)$  (Eq. (4.1)), per valori di  $p = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ .

Perciò, "regolarizzando" le densità spettrali, sia all'ordine zero che al primo ordine, ovvero moltiplicando la (3.31) e la (3.34) per la (4.1):

$$\overline{\rho^{(0)}(\sigma)} = \rho^{(0)}(\sigma) \cdot r_p(\sigma), \quad \overline{\rho^{(1)}(\sigma)} = \rho^{(1)}(\sigma) \cdot r_p(\sigma),$$

e inserendole nelle relazioni (3.32) e (3.35), si ottengono le soluzioni confinanti per la CAI, indicate rispettivamente con  $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$  e  $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$ . Così la CAI totale confinante sarà data dalla somma:

$$[\epsilon_s]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}]_{an} + [\epsilon_s^{(1)}]_{an}.$$

Si procede al calcolo dei singoli contributi.

## 4.2 Calcolo di $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$

### 4.2.1 PARTE 1: Calcolo dell'integrale

Per il calcolo di  $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$ , si parte dalla relazione di dispersione sottratta in  $s = \Lambda^2$ , a causa del valore asintotico non infinitesimo della densità spettrale. L'espressione da calcolare diventa dunque:

$$[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\overline{\rho^{(0)}(\sigma)}}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}.$$

Esplicitando la densità spettrale regolarizzata, si ha:

$$\overline{\rho^{(0)}(\sigma)} = \rho^{(0)}(\sigma) \cdot r_p(\sigma) = -\pi K_0 \cdot (1 - e^{-\frac{\sigma}{\Lambda^2}})^p.$$

Quindi:

$$[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an} - K_0(\Lambda^2 - t) \int_0^\infty d\sigma \frac{(1 - e^{-\frac{\sigma}{\Lambda^2}})^p}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}. \quad (4.3)$$

Con il cambiamento di variabile  $x = \sigma/\Lambda^2$  e  $z = t/\Lambda^2$ , con  $x \in [0, +\infty)$  se  $\sigma \in [0, +\infty)$ , si ottiene:

$$[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} = [\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an} - K_0(1 - z) \int_0^\infty dx \frac{(1 - e^{-x})^p}{(x + z)(x + 1)}. \quad (4.4)$$

L'integrale da calcolare, nella (4.4), è della forma:

$$F(z) = (1 - z) \int_0^\infty dx \frac{(1 - e^{-x})^p}{(x + z)(x + 1)}.$$

Per risolverlo è possibile sviluppare in serie la funzione regolarizzatrice a numeratore, utilizzando lo sviluppo del binomio di Newton generalizzato per  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ovvero:

$$(1 + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k, \quad \text{con } |y| < 1. \quad (4.5)$$

Nel caso di  $r_p(x)$  si ha:  $y = -e^{-x}$  e  $\alpha \equiv p$ . Per cui la (4.5) diventa:

$$(1 - e^{-x})^p = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx}, \quad \text{con } |-e^{-x}| < 1. \quad (4.6)$$

I valori di  $x \in \mathbb{C}$  per i quali è verificata la convergenza si ottengono considerando il modulo dell'esponenziale complesso, dalla (4.6). Infatti, per la funzione esponenziale definita per una variabile complessa generica  $w \in \mathbb{C}$ , si ha  $w = \text{Re}[w] + i\text{Im}[w]$ , da cui:

$$e^w = e^{\text{Re}[w] + i\text{Im}[w]} = e^{\text{Re}[w]} e^{i\text{Im}[w]} \equiv |e^w| e^{i\arg[e^w]},$$

dove il modulo dell'esponenziale complesso è dato da:

$$|e^w| \equiv e^{\text{Re}[w]},$$

mentre l'argomento:

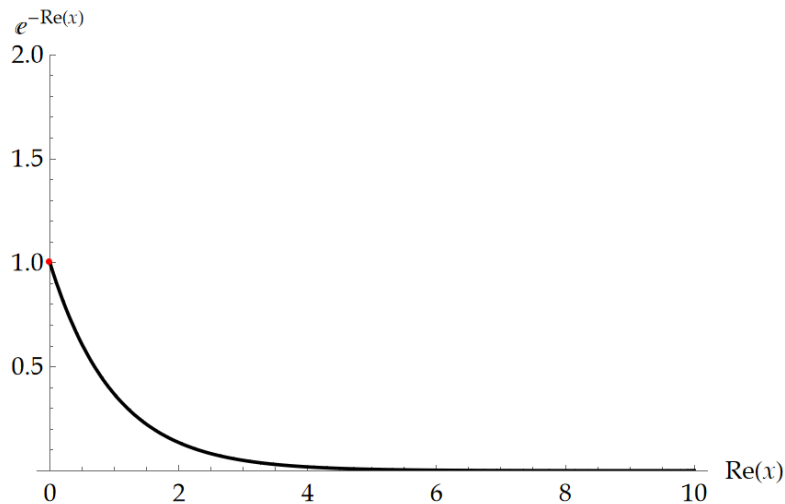
$$\arg[e^w] \equiv \text{Im}[w].$$

Perciò, per il dominio di convergenza della serie (4.6), si ha:

$$|-e^{-x}| = |e^{-x}| = |e^{-(\text{Re}[x] + i\text{Im}[x])}| = e^{-\text{Re}[x]}.$$

Ovvero:

$$|-e^{-x}| \equiv e^{-\text{Re}[x]} < 1 \Rightarrow \text{Re}[x] \in (0, +\infty).$$



**Figura 4.2:** Modulo dell'esponenziale complesso, in funzione di  $\text{Re}[x]$ .

Si nota che la convergenza è garantita sulla semiretta aperta, escluso il valore  $x = 0$ . Ma nella (4.4) il dominio di integrazione comprende anche lo zero. Perciò è necessario estendere il dominio di convergenza della serie, verificando se questa converge anche sul bordo, definito da  $|y| < 1$ , ovvero in  $|y| = 1$ . Dal *teorema di Abel* è chiaro che: se è verificata la convergenza della serie numerica, costruita sostituendo alla serie di potenze iniziale il valore  $x = 0$  ovvero  $y = 1$ , allora è possibile chiudere il disco di convergenza inglobando la frontiera. In altre parole, la serie convergerà, alla funzione  $r_p(x)$ , per  $|y| \leq 1 \Rightarrow x \in [0, +\infty)$ , ovvero nella semiretta chiusa in  $\text{Re}[x]$ . Quindi, la serie numerica da considerare sarà:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx} \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \equiv S_p. \quad (4.7)$$

Per dimostrare la convergenza di  $S_p$  si deve ricorrere ai criteri di convergenza per le serie numeriche. In questo caso è utile il *criterio di Raabe*.

**Criterio di Raabe.** Sia  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  una serie a termini positivi. Se esiste il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = l$$

allora:

- se  $l > 1$  la serie converge;
- se  $l < 1$  la serie diverge;
- se  $l = 1$  il criterio non riesce a determinarne il comportamento.

La serie (4.7) apparentemente sembra essere a segni alterni, in realtà si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{k!}$$

e poichè  $0 < p < 1$ :

$$p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1) = (-1)^{k-1} p(1-p)(2-p)\dots(k-1-p),$$

si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(1-p)(2-p)\dots(k-1-p)}{k!}. \quad (4.8)$$



Si può, quindi, lavorare direttamente con la serie a secondo membro, la quale è a termini positivi, per cui è possibile applicare il *criterio di Raabe*. Perciò si calcola il limite richiesto dal criterio, ovvero:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{p(1-p)(2-p) \dots (k-1-p)}{k!} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(k+1)!}{p(1-p)(2-p) \dots (k-p)} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{k+1}{k-p} - 1 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1+p) \frac{k}{k-p} = 1+p \equiv l > 1. \end{aligned}$$

Dunque, in virtù del criterio, la serie converge. In particolare converge proprio a zero, ovvero a  $r_p(0) = 0$ , per il *teorema di Abel*.

**Teorema di Abel.** *Data una serie di potenze convergente a  $f(z)$ , con raggio di convergenza  $R$ , ovvero:*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \quad \text{con } |z| < R.$$

*Se la serie numerica*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i R^i$$

*converge, allora:*

$$\lim_{z \rightarrow R} f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i R^i,$$

*purchè il limite sia valutato su una successione di numeri reali.*

Grazie al *teorema di Abel*, quindi, la convergenza della serie (4.6) in  $x = 0$ , essendo la serie una serie di potenze, assicura la convergenza totale (e dunque uniforme) nell'intervallo  $|y| \in [0, 1]$  chiuso.

Quindi è possibile riscrivere la (4.4) come:

$$\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0(1-z) \int_0^{\infty} dx \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx}}{(x+z)(x+1)}. \quad (4.9)$$

In generale però, per assicurarsi di poter scambiare la serie con il segno di integrale, non basta la convergenza uniforme della serie nell'intervallo di integrazione. Infatti, l'integrale che si sta calcolando è un integrale improprio, calcolato sulla semiretta positiva dell'asse reale e i teoremi di integrazione (alla Riemann) per serie valgono su serie di funzioni integrate su intervalli

chiusi e limitati. Per dimostrare, quindi, che l'integrazione per serie può essere utilizzata in questo caso, è necessario rifarsi alla teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue. Nell'ambito di tale teoria, si ha infatti il seguente teorema.

**Teorema della convergenza monotona (o di Beppo Levi).** *Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$  un insieme misurabile alla Lebesgue, ed  $f_n : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni misurabili, tali che:*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots \text{ q.o. in } \Sigma.$$

*Allora se  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$  q.o. in  $\Sigma$  allora anche  $f(x)$  è misurabile e vale:*

$$\int_{\Sigma} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} f_n(x) dx,$$

*dove l'integrale è di Lebesgue.*

(q.o.=quasi ovunque)

Si nota, dunque, che:

- per applicare questo teorema non è necessaria la convergenza uniforme della successione di funzioni, ma basta quella puntuale;
- non ci sono restrizioni sul dominio di integrazione purchè esso sia misurabile alla Lebesgue e le semirette chiuse certamente lo sono;
- inoltre, il teorema trova una sua naturale applicazione per le serie di funzioni a termine generale non negativo: in tal caso la non negatività e la monotonia della successione delle somme parziali è difatto garantita.

Per l'integrale considerato, nella (4.9), si ricade in tutto e per tutto nell'ambito di applicazione del suddetto teorema. Di conseguenza è possibile scambiare il segno di integrale con la sommatoria nella (4.9) utilizzando la relazione (4.8) applicata alla (4.6), con la quale si ottiene la serie a termini positivi con la monotonia richiesta, ossia:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx} &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(1-p)(2-p) \dots (k-1-p)}{k!} e^{-kx} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx}. \end{aligned}$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0(1-z) \int_0^\infty dx \frac{1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0(1-z) \left[ \int_0^\infty dx \frac{1}{(x+z)(x+1)} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty dx \sum_{k=1}^\infty \frac{p(1-p)(2-p)\dots(k-1-p)}{k!} \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \right] \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0(1-z) \left[ \int_0^\infty dx \frac{1}{(x+z)(x+1)} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty dx \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \right] \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0(1-z) \left[ \int_0^\infty dx \frac{1}{(x+z)(x+1)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \right] \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0 \left[ F_1(z) + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} F_2(z) \right].
\end{aligned}$$

Quindi:

$$F(z) = F_1(z) + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} F_2(z),$$

dove con  $F_1$  e  $F_2$  si sono indicati:

$$F_1(z) = (1-z) \int_0^\infty dx \frac{1}{(x+z)(x+1)}, \quad (4.10)$$

$$F_2(z) = (1-z) \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)}. \quad (4.11)$$

Risolvendo separatamente i due integrali si osserva:

1. L'integrale (4.10) è già stato risolto nel terzo capitolo e la soluzione è:  $F_1(z) = -\ln(z)$ . Quindi moltiplicando tale risultato per  $-K_0$  si riottiene  $[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}$ , cioè la soluzione (3.33) per la CAI analitica non confinante all'ordine zero, ovvero:

$$-K_0 F_1(z) = K_0 \ln(z) \equiv [\epsilon_s^{(0)}(z)]_{an}.$$

2. Per l'integrale (4.11), invece, si procede con la riduzione in fratti semplici, ovvero:

$$\frac{1}{(x+z)(x+1)} = \frac{1}{1-z} \left[ \frac{1}{x+z} - \frac{1}{x+1} \right],$$

separandolo così in altri due integrali:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \cancel{(1-z)} \frac{1}{\cancel{1-z}} \left[ \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{x+z} - \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{x+1} \right] \\ &= \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{x+z} - \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{x+1}, \end{aligned}$$

che sono riconducibili alla forma generica:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{(ax \pm b)^n} dx = \frac{p^{n-1} e^{\pm pb/a}}{a^n} \Gamma\left(-n+1, \pm \frac{pb}{a}\right), \quad (4.12)$$

con  $p > 0$  e  $|\arg[b/a]| < \pi$  (Ref. [33]). Sostituendo nella (4.12) i valori opportuni ai parametri  $\{p, a, b, n, \pm\}$ , si ottengono:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{x+z} &= \{k, 1, z, 1, +\} = e^{kz} \Gamma(0, kz), \\ \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{x+1} &= \{k, 1, 1, 1, +\} = e^k \Gamma(0, k). \end{aligned}$$

Nei due risultati compare la funzione  $\Gamma(a, x)$ , ovvero la funzione *Gamma incompleta*, definita come:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt,$$

la quale per  $a = 0$  coincide con la *funzione integrale esponenziale*:

$$\Gamma(0, x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = E_1(x),$$

con  $E_n(x) = x^{n-1} \Gamma(1-n, x)$  nel caso generale. Della funzione Gamma incompleta e della funzione integrale esponenziale si parlerà approfonditamente nella prossima sezione. Concludendo, la soluzione per l'integrale (4.11) sarà dunque:

$$F_2(z) = e^{kz} \Gamma(0, kz) - e^k \Gamma(0, k).$$

Perciò, inserendo i risultati di  $F_1$  e  $F_2$  nella  $F$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} F(z) &= F_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} F_2(z) \\ &= -\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)]. \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo  $F(z)$  nell'espressione della CAI all'ordine zero, si ricava:

$$\begin{aligned} \overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0 \left[ F_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} F_2(z) \right] \\ &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0 \left[ -\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)] \right] \\ &= \underbrace{\overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}}}_A + \underbrace{K_0 \ln(z)}_{[\epsilon_s^{(0)}]_{an}} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)]. \end{aligned}$$

In conclusione, l'espressione ottenuta è:

$$\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = A + [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)], \quad (4.13)$$

dove  $A \equiv \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}}$  è un parametro da fissare imponendo il confinamento.

#### 4.2.2 PARTE 2: Selezione del parametro $\overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}}$

Nella soluzione (4.13), il parametro  $A \equiv \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}}$  può essere sfruttato per imporre l'annullamento a 0 della  $[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}$ . Ovvero il parametro va fissato imponendo il confinamento:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = 0, \quad \text{con } z = t/\Lambda^2.$$

Per fare ciò, è utile riscrivere in maniera più compatta la (4.13). In particolare, è conveniente utilizzare la serie numerica  $S_p$ , della quale si sa:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} = 0 \\ \implies \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} &= -1. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Inserendo la (4.14) in maniera opportuna, la (4.13) diventa:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} &= A + [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)] \\
&= A - (-)K_0 \ln(z) - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)] \\
&= A - \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \right) K_0 \ln(z) \\
&\quad - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k)] \\
&= A - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k) + \ln(z)].
\end{aligned}$$

Quindi, una forma più compatta per la (4.13) è:

$$\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = A - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k) + \ln(z)], \quad (4.15)$$

con  $A \equiv \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}}$ . Applicando alla (4.15) la condizione di confinamento, si ottiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k) + \ln(z)]_{z=0} \\
\overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} &= K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) - e^k\Gamma(0, k) + \ln(z)]_{z=0} \\
&= -K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^k\Gamma(0, k) \\
&\quad + K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) + \ln(z)]_{z=0}.
\end{aligned}$$

La prima serie è numerica e se ne studierà la convergenza in seguito. Nella seconda, invece, è necessario studiare i comportamenti delle funzioni per  $t \rightarrow 0$ , ovvero per  $z = t/\Lambda^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ . Si nota che il logaritmo e la funzione Gamma incompleta hanno delle singolarità in  $z = 0$ , ma è semplice vedere come il contributo divergente di una compensa la divergenza dell'altra, annullandosi. Infatti sviluppando le varie funzioni, in  $z = 0$ , si ha:

$$e^{kz} = 1 + kz + o(kz)^2, \quad \Gamma(0, kz) = -\gamma - \ln(kz) + kz + o(kz)^2,$$

dove la  $\gamma \approx 0,57721$  è la *costante di Eulero-Mascheroni*. Si nota che la  $\Gamma$  contiene una divergenza logaritmica. Nel limite  $z \rightarrow 0$  sopravvivono solo i termini senza  $z$  e i termini logaritmici divergenti, e quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{kz}\Gamma(0, kz) &\approx (1 + kz)(-\gamma - \ln(kz) + kz) \\ &= -\gamma - \ln(kz) + kz - \gamma kz - kz \ln(kz) + o(kz)^2 \\ &=\{z \rightarrow 0\} = -\gamma - \ln(kz) \\ &= -\gamma - \ln(k) - \ln(z). \end{aligned}$$

Inserendo il risultato ottenuto per il seguente sviluppo si ha:

$$\begin{aligned} \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} &= -K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^k \Gamma(0, k) \\ &\quad + K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [-\gamma - \ln(k) - \ln(z) + \ln(z)]_{z=0}. \end{aligned}$$

Le divergenze logaritmiche si elidono come previsto, quindi:

$$\begin{aligned} \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} &= -K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^k \Gamma(0, k) \\ &\quad + K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [-\gamma - \ln(k) - \cancel{\ln(z)} + \cancel{\ln(z)}]_{z=0} \\ &= -K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^k \Gamma(0, k) + K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [-\gamma - \ln(k)] \\ &= -K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^k \Gamma(0, k) \quad \{\text{Serie 1}\} \\ &\quad - K_0 \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \quad \{\text{Serie 2}\} \\ &\quad - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \ln(k). \quad \{\text{Serie 3}\} \end{aligned}$$

Per le tre serie numeriche ottenute è possibile dimostrare la convergenza, utilizzando di nuovo il *criterio di Raabe*:

1. {Serie 1}:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^k \Gamma(0, k) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(1-p) \dots (k-1-p)}{k!} e^k \Gamma(0, k).$$

La serie ottenuta è a termini positivi, dunque si vuole calcolare il limite:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[ \frac{(k+1)e^k \Gamma(0, k)}{(k-p)e^{k+1} \Gamma(0, k+1)} - 1 \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[ \frac{(k+1)\Gamma(0, k) - e(k-p)\Gamma(0, k+1)}{e(k-p)\Gamma(0, k+1)} \right].\end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{k-p} \frac{k(\Gamma(0, k) - e\Gamma(0, k+1))}{e\Gamma(0, k+1)} \right. \\ \left. + \frac{k}{k-p} \frac{\Gamma(0, k) + ep\Gamma(0, k+1)}{e\Gamma(0, k+1)} \right].\end{aligned}\tag{4.16}$$

È possibile mostrare che entrambi i termini, nella (4.16), hanno limite finito. Ricordando che

$$\Gamma(0, k) = \int_k^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

segue:

$$\Gamma(0, k) - e\Gamma(0, k+1) = \int_k^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{k+1}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt;$$

facendo il cambiamento di variabile  $t' = t - 1$  nel secondo integrale si ottiene:

$$\Gamma(0, k) - e\Gamma(0, k+1) = \int_k^\infty e^{-t} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int_k^\infty \frac{e^{-t}}{t(t+1)} dt.$$

Definendo

$$G(x) = \Gamma(0, x) - e\Gamma(0, x+1) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t(t+1)} dt$$

il primo termine, nella (4.16), assume la forma:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k-p} \frac{kG(k)}{e\Gamma(0, k+1)}.$$

Usando il teorema di De l'Hôpital, applicato nel limite a  $G/\Gamma$  e sfruttando il fatto che sono funzioni integrali, si vede che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kG(k)}{\Gamma(0, k+1)} = e.$$



Di conseguenza il primo termine risulta essere:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k-p} \frac{kG(k)}{e\Gamma(0, k+1)} = 1.$$

Il secondo, invece, è dato da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k-p} \frac{\Gamma(0, k) + ep\Gamma(0, k+1)}{e\Gamma(0, k+1)} = 1 + p,$$

poichè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(0, k)}{e\Gamma(0, k+1)} = 1.$$

Quindi, inserendo i risultati nella (4.16), si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left[ \frac{(k+1)\Gamma(0, k)}{(k-p)e\Gamma(0, k+1)} - 1 \right] = 2 + p > 1,$$

ovvero la prima serie converge;

2. {Serie 2}:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} = S_p - 1 = -1.$$

Già si è dimostrata la convergenza di tale serie, in particolare il valore a cui converge è  $-1$ , dalla (4.14);

3. {Serie 3}:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \ln(k) = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p(1-p) \dots (k-1-p)}{k!} \ln(k).$$

Si fa partire  $k$  da 2 poichè  $\ln(1) = 0$ . La serie ottenuta è ancora una volta a termini positivi, dunque si vuole calcolare di nuovo il limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left[ \frac{(k+1) \ln(k)}{(k-p) \ln(k+1)} - 1 \right],$$

da cui si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[ k^2 \frac{\ln(k) - \ln(k+1)}{(k-p) \ln(k+1)} + \frac{k}{k-p} \left( \frac{\ln(k) + p \ln(k+1)}{\ln(k+1)} \right) \right]. \quad (4.17)$$

Per il primo termine della somma (4.17), si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \frac{\ln(k) - \ln(k+1)}{(k-p) \ln(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k-p} \frac{k \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k+1)},$$

e, poichè valgono i seguenti limiti:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k-p} &= 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} k \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{\ln(1+1/k)}{1/k} = \{\text{limite notevole}\} = -1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(k+1)} &= 0,\end{aligned}$$

esso è infinitesimo. Il secondo termine della somma (4.17) tende banalmente a  $1+p > 1$ , dunque anche questa serie è convergente.

Quindi, avendo dimostrato che le tre serie ottenute convergono, è ovviamente verificato che il parametro  $A = \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}}$  è una quantità finita, data dall'espressione:

$$A = \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} = K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [-\gamma - \ln(k) - e^k \Gamma(0, k)]. \quad (4.18)$$

Concludendo, per ottenere l'espressione finale e confinante di  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}}$ , si sostituisce la (4.18) nella (4.13), ottenendo:

$$\begin{aligned}\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} &= A + [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) - e^k \Gamma(0, k)] \\ &= [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [-\gamma - \ln(k) - e^k \Gamma(0, k)] \\ &\quad - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) - e^k \Gamma(0, k)] \\ &= [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \cdot [e^{kz} \Gamma(0, kz) - \cancel{e^k \Gamma(0, k)} + \gamma + \ln(k) + \cancel{e^k \Gamma(0, k)}] \\ &= [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) + \gamma + \ln(k)] \\ &= [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \underbrace{\gamma \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k}}_{-1} \\ &\quad - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) + \ln(k)].\end{aligned}$$

Quindi:

$$\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + K_0\gamma - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz}\Gamma(0, kz) + \ln(k)]. \quad (4.19)$$

Si nota che il risultato ottenuto per la CAI analitica e confinante all'ordine zero con il modello proposto è stato scritto sotto forma di correzioni alla CAI analitica non confinante all'ordine zero. Ossia la  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}}$  non è altro che la  $[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}$  a meno di correzioni che ne garantiscono il confinamento. Inoltre la serie ottenuta nella (4.19) è convergente per il *teorema di Beppo Levi*, in quanto si è partiti dall'integrale della somma convergente e dal teorema è garantita anche la convergenza della somma degli integrali.

### 4.2.3 Funzioni speciali

Per il calcolo del contributo all'ordine zero della CAI si sono utilizzate due *funzioni speciali*: la *Gamma incompleta* e la *funzione integrale esponenziale*. In questa sezione si analizzeranno alcune proprietà di tali funzioni, sottolineando quelle utilizzate nel calcolo appena concluso.

#### Funzione Gamma incompleta

Le funzioni gamma incomplete sono funzioni speciali definite a partire dalla *Gamma di Eulero*. Ovvero, queste hanno la stessa struttura integrale della  $\Gamma$ :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt, \quad \text{con: } \text{Re}[n] > 0,$$

ma con uno degli estremi di integrazione variabile. Se si varia l'estremo inferiore allora si parla di funzione *Gamma incompleta "superiore"*, altrimenti se si varia l'estremo superiore si parla di funzione *Gamma incompleta "inferiore"*. Tali funzioni si indicano quindi:

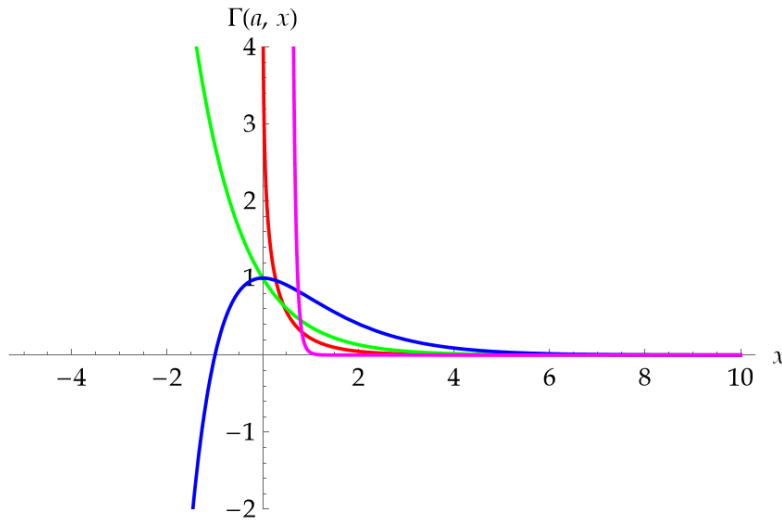
- con la notazione di Abramowitz e Stegun:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt;$$

- con la notazione di Nielsen:

$$Q_x(a) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = \Gamma(a, x), \quad P_x(a) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt = \gamma(a, x).$$

Le principali proprietà sono:



**Figura 4.3:** Andamento della funzione  $\Gamma(a, x)$  in funzione di  $x$ , fissati i valori di  $a$ :  $\Gamma(0, x)$ ,  $\Gamma(1, x)$ ,  $\Gamma(2, x)$  e  $\Gamma(-10, x)$ .

- Proprietà di legame con la  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}\Gamma(a, x) + \gamma(a, x) &= \Gamma(a), \\ \Gamma(a, 0) &= \Gamma(a);\end{aligned}$$

- Proprietà della derivata: la derivata della funzione  $\Gamma(a, x)$  superiore e incompleta rispetto alla variabile  $x$  è ben nota. Essa è semplicemente data dall'integranda della funzione integrale presente nella sua definizione, ovvero:

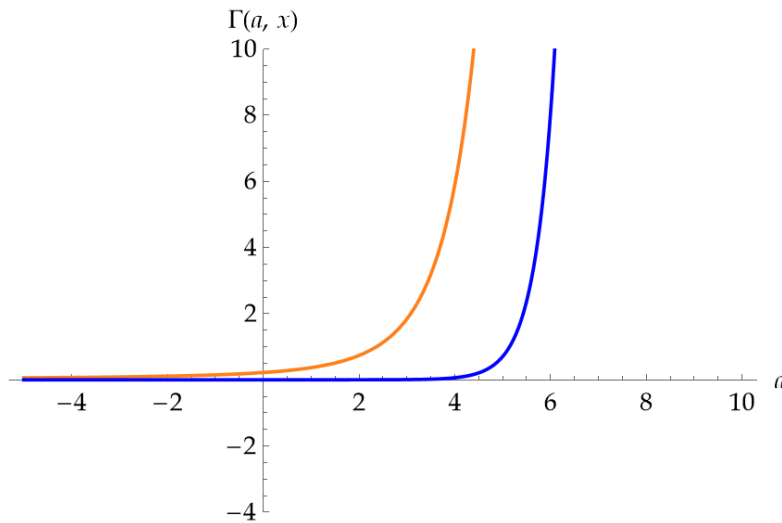
$$\frac{\partial \Gamma(a, x)}{\partial x} = -x^{a-1}e^{-x}.$$

- Proprietà che legano le gamma incomplete ad altre funzioni speciali: numerose funzioni speciali sono in realtà delle gamma incomplete, calcolate per particolari valori dei parametri indipendenti, in particolare:
  - la *funzione degli errori* " $\text{erf}(x)$ ":  $\gamma(1/2, x^2) = \sqrt{\pi}\text{erf}(x)$ ;
  - la *funzione integrale esponenziale* " $E_1(x)$ ":  $\Gamma(0, x) = E_1(x)$ .

Inoltre è possibile ricondurre la somma dei reciproci dei fattoriali da 0 a  $n$  all'espressione:

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = \frac{e\Gamma(n+1, 1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Siccome nel risultato ottenuto per  $[\epsilon_s^{(0)}]_{an}$  compaiono  $\Gamma(0, x)$ , le quali sono riconducibili a  $E_1(x)$ , è utile analizzare anche la *funzione integrale esponenziale*.



**Figura 4.4:** Andamento della funzione  $\Gamma(a, x)$  in funzione di  $a$ , fissati i valori di  $x$ :  $\Gamma(a, 1)$  e  $\Gamma(a, 10)$ .

### Funzione integrale esponenziale

In matematica, la *funzione integrale esponenziale* è una funzione speciale complessa caratterizzata tramite l'integrale definito del rapporto tra la funzione esponenziale e il suo argomento. Essa viene definita come:

$$Ei(x) = - \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt,$$

e dato che  $1/t$  diverge per  $t \rightarrow 0$ , il precedente integrale si deve intendere come valore principale di Cauchy, ovvero:

$$Ei(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\delta}^x \frac{e^t}{t} dt \right].$$

Per valori complessi dell'argomento  $x \rightarrow z$  si utilizza la funzione:

$$E_1(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad |\arg[z]| < \pi,$$

che tramite il prolungamento analitico può essere estesa a tutto il piano complesso. L'integrale esponenziale è così anche definito come:

$$Ei(-x) = -E_1(x).$$

Si ha inoltre che per valori positivi di  $\operatorname{Re}[z]$ :

$$E_1(z) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{t} dt = \int_0^1 \frac{e^{-z/u}}{u} du, \quad \operatorname{Re}[z] \geq 0.$$

Le principali proprietà sono:

- Legame con la funzione integrale logaritmica:  $li(x) = Ei(\ln(x))$ , per tutti gli  $x$  reali e diversi da 1;
- Per quanto riguarda gli sviluppi in serie si ha:

$$Ei(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!k}, \quad x \in \mathbb{R} | x \neq 0,$$

il quale è ottenuto integrando lo sviluppo di Taylor di  $e^{-t}/t$ . La  $\gamma$  indica la *costante di Eulero-Mascheroni*, che è definita come limite della differenza tra serie armonica e il logaritmo naturale, ovvero:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x} dx - \ln(n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln(n)),$$

dove  $H_n$  è l'ennesimo numero armonico. La valutazione approssimata di  $\gamma$  è:

$$\gamma \approx 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992\ 35988\ 05767\ 23488\ 48677\ 26777\ 66467\ 09369\ 47063\ 29174\ 67495\dots$$

e non è noto se sia un numero razionale o meno. Tuttavia, se si suppone che  $\gamma$  sia razionale, l'analisi in frazioni continue dimostra che il suo denominatore ha più di  $10^{242080}$  cifre.

Per argomenti complessi, lo sviluppo di  $Ei$  si generalizza a  $E_1$ , ovvero:

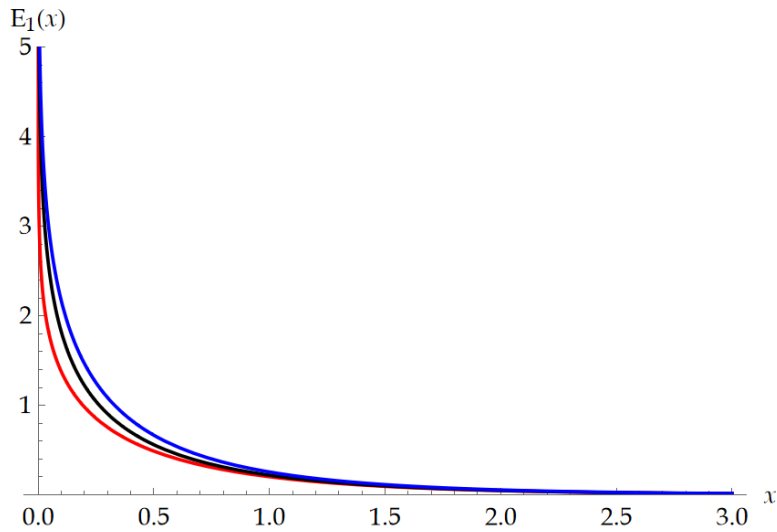
$$E_1(z) = -\gamma - \ln(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!k}, \quad |\arg[z]| < \pi,$$

che è esattamente lo sviluppo utilizzato per  $\Gamma(0, kz)$  nel calcolo. Tale somma converge per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ;

- Dalle serie precedenti si evince che  $E_1$  si comporta come un esponenziale negativo per grandi valori dell'argomento e come un logaritmo per valori piccoli. Quando l'argomento è reale e positivo si ha:

$$\frac{1}{2}e^{-x} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) < E_1(x) < e^{-x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad x > 0,$$

come mostrato in figura 4.5;



**Figura 4.5:** Grafico di  $E_1$ , ovvero di  $\Gamma(0, x)$ , delimitato dalle funzioni elementari:  $(1/2)[e^{-x} \ln(1 + 2/x)]$  e  $e^{-x} \ln(1 + 1/x)$ , per  $x$  reale e positivo.

- Sia  $Ei(x)$  che la funzione  $E_1(x)$  possono essere espresse mediante una funzione intera:

$$Ei(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k!k}.$$

Per questa funzione e la funzione logaritmo si possono utilizzare come definizioni le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} Ei(x) &= \gamma + \ln(x) - Ei(-x), & x > 0; \\ E_1(z) &= -\gamma - \ln(z) + Ei(z), & |\arg[z]| < \pi; \end{aligned}$$

- Una generalizzazione della funzione integrale esponenziale è:

$$E_n(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt,$$

che può essere interpretata come caso particolare della funzione gamma incompleta:

$$E_n(x) = x^{n-1} \Gamma(1 - n, x).$$

Concludendo, è utile osservare che per la  $\Gamma(0, x)$  si è utilizzato lo sviluppo riportato per  $E_1(x)$  in modo da isolare la divergenza logaritmica presente a bassi valori di  $x$ , garantendo così un modello confinante convergente e finito.

## 4.3 Calcolo di $\overline{[\epsilon_s^{(1)}]_{an}}$

### 4.3.1 PARTE 1: Calcolo dell'integrale

Per il contributo al primo ordine della CAI confinante si parte dalla rappresentazione spettrale sottratta, ovvero:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\overline{\rho^{(1)}(\sigma)}}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}.$$

Esplicitando la densità spettrale regolarizzata, si ha:

$$\overline{\rho^{(1)}(\sigma)} = \rho^{(1)}(\sigma) \cdot r_p(\sigma) = \rho^{(1)}(\sigma) \cdot (1 - e^{-\frac{\sigma}{\Lambda^2}})^p,$$

con:

$$\rho^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} -K_1 \left[ \pi + \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) \right] & \text{per } 0 < \sigma < \Lambda^2; \\ -K_1 \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) & \text{per } \sigma > \Lambda^2, \end{cases}$$

risultato ottenuto dalla (3.34), nel terzo capitolo. Quindi:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \frac{\rho^{(1)}(\sigma) \cdot (1 - e^{-\frac{\sigma}{\Lambda^2}})^p}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}. \quad (4.20)$$

Con il cambiamento di variabile  $x = \sigma/\Lambda^2$  e  $z = t/\Lambda^2$ , con  $x \in [0, +\infty)$  se  $\sigma \in [0, +\infty)$ , si ottiene:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{1 - z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot (1 - e^{-x})^p}{(x + z)(x + 1)}. \quad (4.21)$$

Come già fatto per  $\overline{[\epsilon_s^{(1)}]_{an}}$ , si procede sviluppando in serie la funzione regolarizzatrice a numeratore utilizzando lo sviluppo (4.6), ovvero:

$$(1 - e^{-x})^p = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx}, \quad \text{con } \text{Re}[x] \in [0, +\infty).$$

Si ottiene, così:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{1 - z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx})}{(x + z)(x + 1)}. \quad (4.22)$$

Grazie al *teorema di Beppo Levi* è garantita la convergenza della somma degli integrali a partire dalla convergenza dell'integrale della somma, quindi



è possibile scambiare la serie con il segno di integrale e la (4.22) diventa:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} &= \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot (1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx})}{(x+z)(x+1)} \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{1-z}{\pi} \left[ \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x)}{(x+z)(x+1)} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot (\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx})}{(x+z)(x+1)} \right] \\
&= \underbrace{\overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x)}{(x+z)(x+1)}}_{[\epsilon_s^{(1)}]_{an}} \\
&\quad + \frac{1-z}{\pi} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \binom{p}{k} I_k(z),
\end{aligned}$$

dove:

- $[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$  è il contributo al primo ordine della CAI analitica non confinante ed è stato già calcolato nel capitolo precedente, ottenendo la (3.42):

$$[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} = \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x)}{(x+z)(x+1)} = K_1 \ln\left(\frac{t}{t-\Lambda^2} \ln\left(\frac{t}{\Lambda^2}\right)\right);$$

- $I_k(z)$  indica la successione di integrali del tipo:

$$I_k(z) = \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)}.$$

Tali integrali non sono di facile risoluzione, poichè nella densità spettrale  $\rho_1$  compare la funzione arcotangente, come mostrato dalla (3.34). Quindi, con opportune tecniche, si è provato a risolvere gli integrali della successione, cercando di eliminare la dipendenza dall'arcotangente. Tra i vari tentativi, quello più efficace è riportato nella sezione dedicata di seguito. Ma in ogni caso, con il modello proposto per la funzione regolarizzatrice (4.1), non si riesce ad ottenere un'espressione, per  $[\epsilon_s^{(1)}]_{an}$ , dipendente da integrali facilmente risolvibili analiticamente. Per questo la soluzione è lasciata in forma

implicita, dipendente dagli  $I_k$ . Si ottiene quindi:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = B + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} I_k(z), \quad (4.23)$$

dove  $B \equiv \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}}$  è un parametro da fissare imponendo il confinamento.

### 4.3.2 PARTE 2: Selezione del parametro $\overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}}$

Come già visto per  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}]_{an}}$ , anche per la soluzione (4.23), il parametro  $B \equiv \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}}$  può essere sfruttato per imporre l'annullamento, per  $t = 0$ , della  $\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}$ . Ovvero il parametro va fissato imponendo il confinamento:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = 0, \quad \text{con } z = t/\Lambda^2.$$

Per fare ciò, è utile riscrivere in maniera più compatta la (4.23). In particolare, è conveniente utilizzare il risultato ottenuto dalla serie numerica  $S_p$ , ossia la somma della serie (4.14):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} = -1.$$

Di conseguenza, la (4.23) diventa:

$$\begin{aligned} \overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} &= B + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} I_k(z) \\ &= B - (-)[\epsilon_s^{(1)}(z)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} I_k(z) \\ &= B - \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \right) [\epsilon_s^{(1)}(z)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} I_k(z) \\ &= B - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [[\epsilon_s^{(1)}(z)]_{an} + I_k(z)], \end{aligned}$$

dove gli  $I_k(z)$  sono stati definiti nella sezione precedente, come integrali non risolti. Esplicitando  $[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$  e  $I_k(z)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} &= B - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [[\epsilon_s^{(1)}(z)]_{an} + I_k(z)] \\
&= B - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \left[ \frac{1-z}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)}{(x+z)(x+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-z}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \right] \\
&= B - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \left( \frac{1-z}{\pi} \right) \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{(x+z)(x+1)}.
\end{aligned}$$

Quindi, una forma più compatta per la (4.23) è:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = B - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \left( \frac{1-z}{\pi} \right) \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{(x+z)(x+1)}, \quad (4.24)$$

con  $B \equiv \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}}$ . Applicando alla (4.24) la condizione di confinamento, si ottiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \left( \frac{1-z}{\pi} \right) \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{(x+z)(x+1)} \Big|_{z=0} \\
&= \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{x(x+1)},
\end{aligned}$$

ovvero:

$$B \equiv \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{x(x+1)}. \quad (4.25)$$

Da notare che  $B$  non è scrivibile in forma esplicita, ma rimane dipendente da integrali irrisolti, ereditando il problema dagli  $I_k(z)$ . Così facendo però si riesce comunque ad ottenere un risultato esteticamente concorde con la struttura dell'espressione ottenuta per  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}}$ , ovvero delle correzioni alla soluzione non confinante analitica che ne impongono il confinamento. Di seguito si vede in che modo ciò accada. Sostituendo la (4.25) nella (4.23) si ottiene un'espressione per  $\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}$  in forma integrale, indipendente dal

parametro  $B$ , ovvero:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} &= [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1 - e^{-kx})}{x(x+1)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \underbrace{\frac{1-z}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)}}_{I_k(z)} \\
&= [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1 - e^{-kx})}{x(x+1)} + I_k(z) \right] \\
&= [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \overline{I_k(z)}.
\end{aligned}$$

In forma compatta, si ha:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \overline{I_k(z)}, \quad (4.26)$$

dove:

$$\overline{I_k(z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1 - e^{-kx})}{x(x+1)} + I_k(z).$$

Si nota che, anche per la CAI analitica confinante al primo ordine con il modello proposto, il risultato ottenuto è stato scritto sottoforma di correzioni alla CAI analitica non confinante al primo ordine. Ossia la  $\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}$  non è altro che la  $[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}$  a meno di correzioni che ne garantiscono il confinamento. In questo caso però, i termini correttivi  $\overline{I_k(z)}$  sono scritti in forma implicita, tramite integrali non risolti esplicitamente.

### 4.3.3 Tecnica di risoluzione per gli integrali $I_k(z)$

Nella soluzione analitica confinante per la CAI al primo ordine compare la dipendenza da integrali del tipo:

$$I_k(z) = \frac{1-z}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)}.$$

Il calcolo di tali integrali è reso difficile dalla forma della densità spettrale, poichè dipende dalla funzione arcotangente, ovvero:

$$\rho^{(1)}(x) = \begin{cases} -K_1 \left[ \pi + \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(x)}\right) \right] & \text{per } 0 < x < 1 \\ -K_1 \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(x)}\right) & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

La tecnica riportata in questa sezione consente di semplificare la forma degli integrali, arrivando a integrali più semplici che possono essere risolti nel piano complesso. Quello che si fa è inserire un parametro  $\alpha$ , nella  $\rho^{(1)}(x)$ , generalizzandola a una successione di funzioni a gradino definite per diversi valori di questo nuovo parametro, ovvero:

$$\tilde{\rho}^{(1)}(x, \alpha) = \begin{cases} -K_1 \left[ \pi + \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\alpha x)}\right) \right] & \text{per } 0 < x < 1, \quad \alpha > 0; \\ -K_1 \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\alpha x)}\right) & \text{per } x > 1, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

tale che  $\tilde{\rho}^{(1)}(x, 1) \equiv \rho^{(1)}(x)$ . Quindi gli integrali  $I_k(z)$  diventano:

$$I_k^\alpha(z) = \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\tilde{\rho}^{(1)}(x, \alpha) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)}.$$

Calcolando la derivata degli  $I_k^\alpha(z)$  rispetto ad  $\alpha$  si ottiene un'integranda indipendente dall'arcotangente. Infatti la dipendenza da  $\alpha$  è contenuta solo in  $\tilde{\rho}^{(1)}(x, \alpha)$ , quindi la derivazione modifica solo la densità spettrale, lasciando invariate il resto delle integrande. Soprattutto i due rami della densità spettrale, definita a gradino, hanno la stessa derivata. Quindi non è nemmeno più necessario distinguere due regioni di integrazione in  $x$  una volta derivata la  $\tilde{\rho}^{(1)}(x, \alpha)$ . Esplicitamente si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I_k^\alpha(z) &= \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{d}{d\alpha} \tilde{\rho}^{(1)}(x, \alpha) \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \\ &= \frac{1-z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\ln^2(\alpha x)}} \left( \frac{-\pi}{\ln^2(\alpha x)} \right) \frac{1}{\alpha x} \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \\ &= - (1-z) \int_0^\infty dx \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \frac{e^{-kx}}{(x+z)(x+1)} \\ &= - (1-z) \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \frac{1}{\alpha(x+z)(x+1)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si prosegue poi integrando a sua volta la (4.27) in  $d\alpha$  sapendo che:

$$\int_1^\infty d\alpha \frac{d}{d\alpha} I_k^\alpha(z) = I_k^{\alpha=\infty}(z) - I_k^{\alpha=1}(z),$$

dove gli estremi di integrazione in  $\alpha$  sono stati scelti opportunamente per ottenere:

$$I_k^{\alpha=\infty}(z) = 0, \quad I_k^{\alpha=1}(z) = I_k(z).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_k(z) &= - \int_1^\infty d\alpha \frac{d}{d\alpha} I_k^\alpha(z) \\ &= (1-z) \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \frac{1}{(x+z)(x+1)}. \end{aligned}$$

Semplificando in fratti semplici il denominatore nel secondo integrale, si ottiene:

$$\frac{1}{(x+z)(x+1)} = \frac{A}{x+z} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{(1-z)(x+z)} - \frac{1}{(1-z)(x+1)}.$$

Inserendo il risultato ottenuto, nell'integrale si ha:

$$\begin{aligned} I_k(z) &= \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^\infty dx \frac{e^{-kx}}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \left[ \frac{1}{(x+z)} - \frac{1}{(x+1)} \right] \\ &= \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \left[ \int_0^\infty dx \frac{1}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \frac{e^{-kx}}{(x+z)} - \int_0^\infty dx \frac{1}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \frac{e^{-kx}}{(x+1)} \right] \\ &= \int_1^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} [G_k^\alpha(z) - G_k^\alpha(1)], \end{aligned}$$

con:

$$G_k^\alpha(z) = \int_0^\infty dx \frac{1}{\ln^2(\alpha x) + \pi^2} \frac{e^{-kx}}{(x+z)}.$$

Così l'integrazione degli  $I_k(z)$  viene tradotta per questi nuovi integrali  $G_k^\alpha(z)$ . Quindi, risolvendo gli  $G_k^\alpha(z)$  si può trovare l'espressione esplicita dei termini correttivi alla CAI analitica al primo ordine, i quali ne impongono il confinamento. Ma, analogamente agli  $I_k(z)$  la soluzione per gli integrali  $G_k^\alpha(z)$  non è banale. Il problema è solo stato trasferito ad un'altra tipologia di integrali, senza essere risolto. Perciò, un aspetto interessante da approfondire in futuro è legato alla ricerca delle soluzioni degli integrali ottenuti.

## 4.4 Modello confinante per la CAI

### 4.4.1 Risultati ottenuti per $\epsilon_s$

Sintetizzando i risultati ottenuti per la CAI confinante usando la funzione regolarizzatrice (4.1), ovvero:

$$r_p(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\Lambda^2}})^p, \quad \text{con } t \in \mathbb{C}/(-\infty, 0], \quad p \in \mathbb{R} \mid 0 < p < 1,$$

$$(1 - e^{-x})^p = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} e^{-kx}, \quad \text{con } |-e^{-x}| \leq 1,$$

si ha:

- per la CAI all'ordine zero  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}}$ :

Dalla rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann si ottiene:

$$\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\overline{\rho^{(0)}(\sigma)}}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)},$$

con, la densità spettrale definita come:

$$\overline{\rho^{(0)}(\sigma)} = \rho^{(0)}(\sigma) \cdot r_p(\sigma) = -\pi K_0 \cdot (1 - e^{-\frac{\sigma}{\Lambda^2}})^p.$$

Integrando la relazione di dispersione con la densità spettrale regolarizzata, si ottiene:

$$\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = A + [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) - e^k \Gamma(0, k)],$$

con:

$$A = \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} = K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [-\gamma - \ln(k) - e^k \Gamma(0, k)].$$

Ovvero, come risultato finale (4.19):

$$\boxed{\overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} = [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + K_0 \gamma - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) + \ln(k)];}$$

- per la CAI al primo ordine  $\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}$ :

Dalla rappresentazione spettrale di Källén-Lehmann si ottiene:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\overline{\rho^{(1)}(\sigma)}}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)},$$

con, la densità spettrale definita come:

$$\overline{\rho^{(1)}(\sigma)} = \rho^{(1)}(\sigma) \cdot r_p(\sigma) = \rho^{(1)}(\sigma) \cdot (1 - e^{-\frac{\sigma}{\Lambda^2}})^p,$$

$$\rho^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} -K_1 \left[ \pi + \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) \right] & \text{per } 0 < \sigma < \Lambda^2; \\ -K_1 \arctan\left(\frac{\pi}{\ln(\sigma/\Lambda^2)}\right) & \text{per } \sigma > \Lambda^2. \end{cases}$$

Integrando la relazione di disperisione con la densità spettrale regolarizzata, si ottiene:

$$\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = B + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} I_k(z),$$

con:

$$I_k(z) = \frac{1-z}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x) \cdot e^{-kx}}{(x+z)(x+1)},$$

$$B \equiv \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{x(x+1)}.$$

Ovvero, come risultato finale (4.26):

$$\boxed{\overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} = [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \overline{I_k(z)},}$$

con:

$$\overline{I_k(z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\rho^{(1)}(x)(1-e^{-kx})}{x(x+1)} + I_k(z).$$

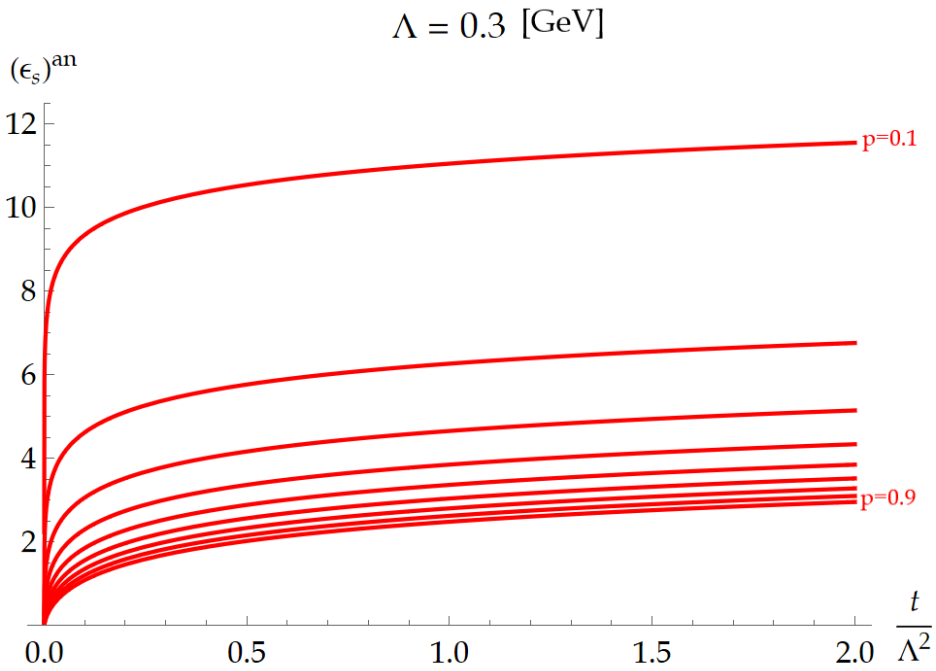
Da cui:

$$\begin{aligned} \overline{[\epsilon_s(t)]_{an}} &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an}} + \overline{[\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}} \\ &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\overline{\rho^{(0)}(\sigma)}}{(\sigma+t)(\sigma+\Lambda^2)} \\ &\quad + \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\overline{\rho^{(1)}(\sigma)}}{(\sigma+t)(\sigma+\Lambda^2)} \\ &= (4.19) + (4.26) \\ &= [\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + K_0 \gamma - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) + \ln(k)] \\ &\quad + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \overline{I_k(z)} \\ &= \underbrace{[\epsilon_s^{(0)}(t)]_{an} + [\epsilon_s^{(1)}(t)]_{an}}_{[\epsilon_s]_{an}} + \text{correzioni confinanti...} \\ &= [\epsilon_s(t)]_{an} + \text{correzioni confinanti...} \end{aligned}$$



Ovvero:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}} &= [\epsilon_s(t)]_{an} + K_0 \gamma \\
&\quad - K_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} [e^{kz} \Gamma(0, kz) + \ln(k)] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \overline{I_k(z)}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$



**Figura 4.6:** Grafici per  $n_f = 5$  e  $\Lambda = 300$  MeV di  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$  data dalla somma di (4.19) e (4.26), per  $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ .

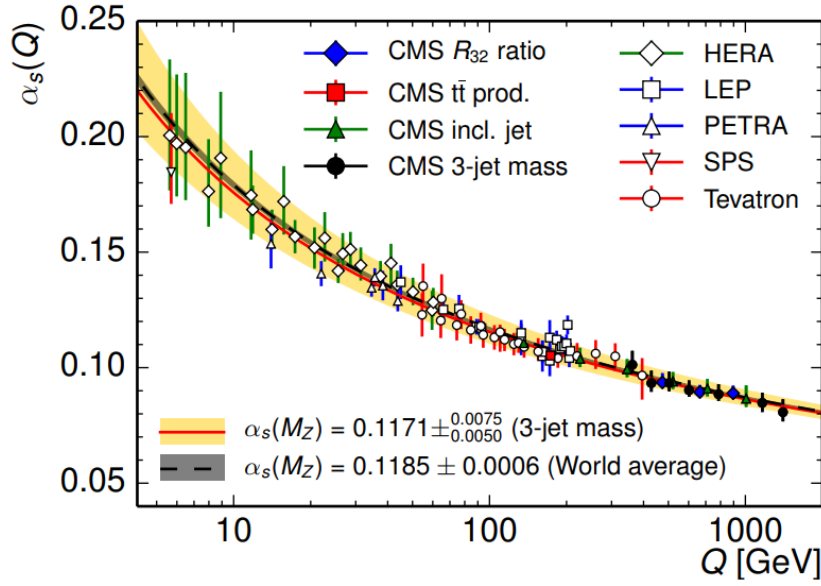
I grafici, riportati nella figura 4.6, rappresentano i valori di  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$  calcolati utilizzando la versione iniziale della (4.28), ossia:

$$\begin{aligned}
\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}} &= \overline{[\epsilon_s^{(0)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\overline{\rho^{(0)}(\sigma)}}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)} \\
&\quad + \overline{[\epsilon_s^{(1)}(\Lambda^2)]_{an}} + \frac{\Lambda^2 - t}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\overline{\rho^{(1)}(\sigma)}}{(\sigma + t)(\sigma + \Lambda^2)}.
\end{aligned}$$

Gli stessi risultati si ottengono dalle (4.19) e (4.26), dove gli integrali lasciati in forma implicita e le serie convergenti sono stati risolti numericamente con Mathematica.

#### 4.4.2 Confronto con i dati sperimentali di $\alpha_s$

È interessante vedere come si comporta il modello confinante proposto in confronto ai dati sperimentali di  $\alpha_s$  a basse energie. Nella referenza [34] si riportano alcuni valori misurati per  $\alpha_s$  da diversi esperimenti e a diverse energie. In particolare, ad alte energie si hanno i dati di CMS mentre a energie intorno ai 10 GeV si riportano misure di JADE, LEP II e HERA.

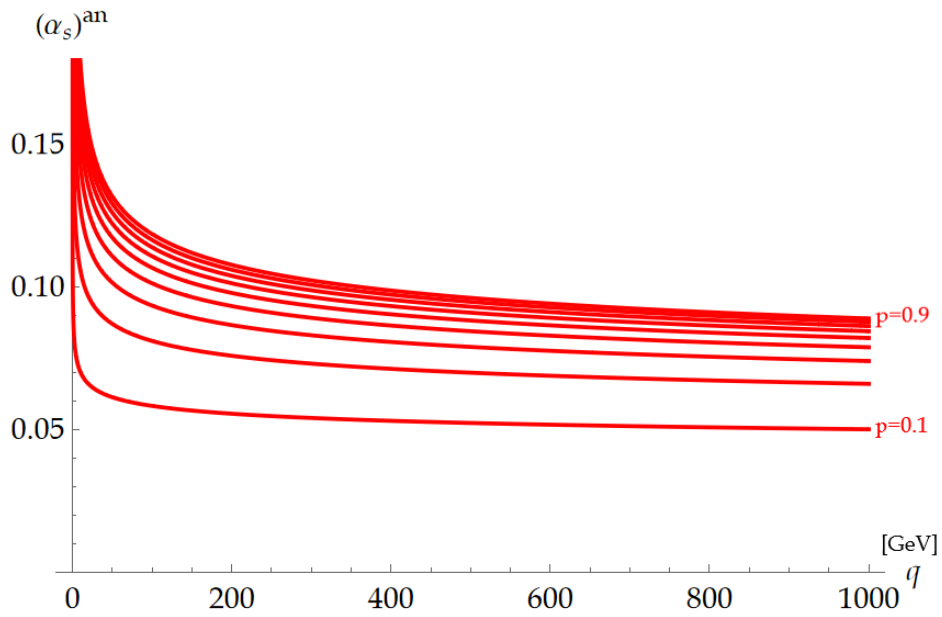


**Figura 4.7:** Dati sperimentali per il *running* della costante di accoppiamento forte  $\alpha_s$  in funzione di  $q^2$ , riportati nella referenza [34].

Dei dati sopra riportati si sono presi solo alcuni, soprattutto tra quelli riportati per i più bassi valori trovati per  $q^2$ , in modo da poterli confrontare direttamente con i risultati ottenuti per  $[\overline{\epsilon_s(t)}]_{an}$  dalla (4.28). Nel fare il confronto è però necessario ritornare ad  $\alpha_s$ . Per farlo, a livello numerico/computazionale, basta semplicemente invertire i risultati ottenuti dal modello confinante per la CAI, ovvero il modello confinante per la costante di accoppiamento analitica forte sarà dato dalla relazione:

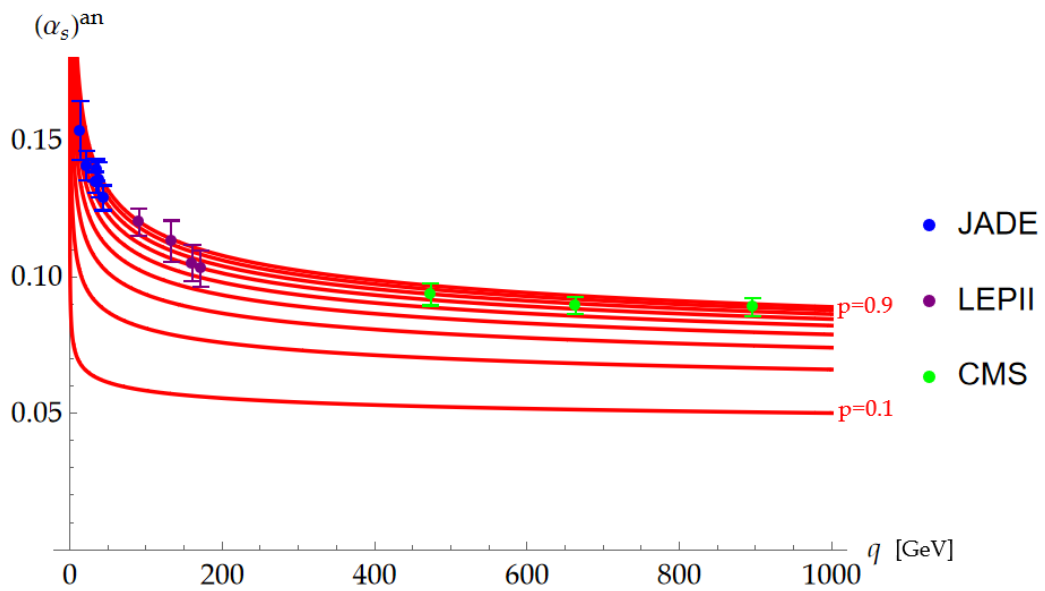
$$\overline{[\alpha_s(t)]}_{an} = \frac{1}{\overline{[\epsilon_s(t)]}_{an}}.$$

Di seguito si riporta l'andamento delle curve del modello ottenuto per  $[\overline{\alpha_s(t)}]_{an}$  confinante (figura 4.8).



**Figura 4.8:** Grafici per  $n_f = 5$  e  $\Lambda = 300$  MeV di  $[\overline{\alpha_s(t)}]_{an}$ .

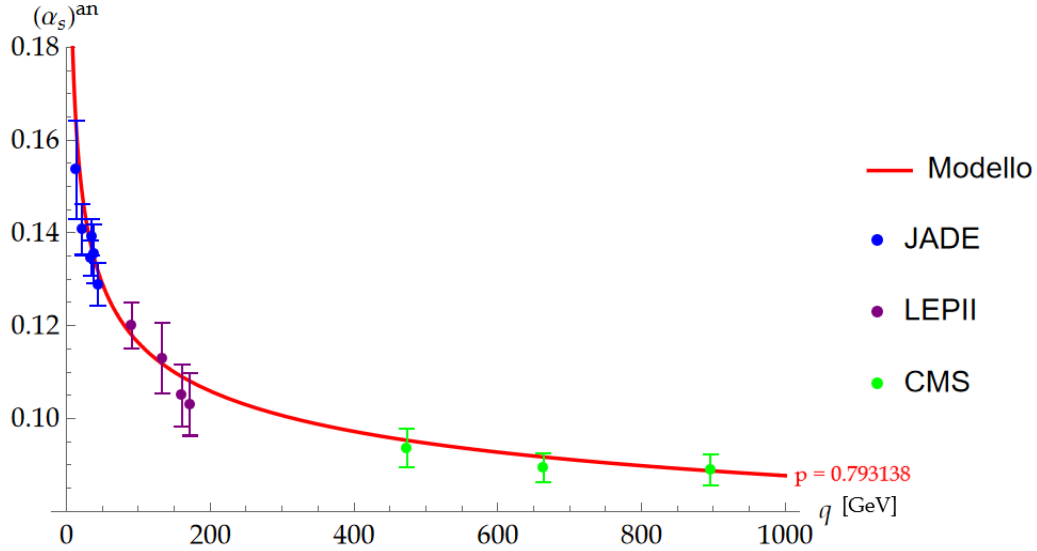
Rappresentando i punti sperimentali sullo stesso piano, definito da  $\alpha_s$  e  $q^2$ , si ottiene:



**Figura 4.9:** Grafici per  $n_f = 5$  e  $\Lambda = 300$  MeV di  $[\overline{\alpha_s(t)}]_{an}$ .

Tra tutte le varie curve ottenute si vede, dalla figura (4.9), che è possibile

selezionare dei valori del parametro  $p$  in modo da ottenere un buon accordo con i dati.



**Figura 4.10:** Confronto tra i dati sperimentali [34] e il modello confinante di  $\alpha_s$ , per  $n_f = 5$ ,  $\Lambda = 0.3$  GeV e  $p = 0.793138$ .

Utilizzando come funzione di fit il modello confinante proposto per  $[\overline{\alpha_s(t)}]_{an}$ , ovvero per  $[\overline{\epsilon_s(t)}]_{an}$ , si può determinare il valore del parametro  $p$ , in modo da ottenere la migliore stima dell'andamento dei dati sperimentali. In particolare si è lavorato con la funzione regolarizzatrice (4.1), inserendo direttamente quest'ultima come funzione per il fit. La scelta è giustificata dal fatto che la dipendenza dal parametro  $p$ , è contenuta nella  $r_p(q^2)$ . Quindi la forma delle curve finali, ottenute per  $[\overline{\alpha_s}]_{an}$  e  $[\overline{\epsilon_s}]_{an}$ , è ereditata dall'andamento della funzione regolarizzatrice, ossia dal valore del parametro  $p$ . Così facendo, si ottiene un valore pari a:

$$p \simeq 0.793138.$$

Qualitativamente si osserva che il modello riproduce bene l'andamento dei dati per valori alti di  $p$ , all'interno dell'intervallo permesso  $0 < p < 1$  dalla *soft gluon resummation* (in particolare per valori superiori a  $p = 0.7$ , ovvero per 0.75, 0.8, 0.85, 0.9). Quindi il valore ottenuto è ragionevole, come mostrato nella figura 4.10.

Concludendo, i risultati riportati forniscono un buon test di verifica della correttezza del modello considerato. Non si è fatta un'analisi dettagliata di quanto il modello sia effettivamente in accordo con i dati sperimentali, anche perchè i dati riportati nella 4.10 non scendono sotto i 10 GeV. Per testare

quantitativamente e in maniera rigorosa la precisione del fit è necessario esaminare i dati di  $\alpha_s$  a energie ancora più basse. Nonostante questo, il modello si comporta bene, riproducendo con buon accordo l'andamento dei valori sperimentali alle energie riportate.

```

r[z_, p_] := (1 - Exp[-z]) ^ p
β0[n_] := 11 - 2 / 3 * n
k0[n_] := β0[n] / (4 * Pi)
ρ0[z_, n_, p_] := k0[n] * (-Pi) * r[z, p]
e0[z_, n_, p_] := (1 - z) / Pi * NIntegrate[ρ0[x, n, p] / ((x + z) (x + 1)), {x, 0, Infinity}]
e0[t_, Δ_, n_, p_] := e0[t / Δ ^ 2, n, p] - e0[0, n, p]
β1[n_] := 102 - 38 / 3 * n
k1[n_] := β1[n] / (4 * Pi * β0[n])
F[x_] := -Piecewise[{{Pi + ArcTan[Pi / Log[x]], 0 < x ≤ 1}, {ArcTan[Pi / Log[x]], x > 1}}]
ρ1[z_, n_, p_] := k1[n] * r[z, p] * F[z]
e1[z_, n_, p_] := (1 - z) / Pi * NIntegrate[ρ1[x, n, p] / ((x + z) (x + 1)), {x, 0, Infinity}]
e1[t_, Δ_, n_, p_] := e1[t / Δ ^ 2, n, p] - e1[0, n, p]
ε[t_, Δ_, n_, p_] := e0[t, Δ, n, p] + e1[t, Δ, n, p]

α[t_, Δ_, n_, p_] := 1 / ε[t, Δ, n, p]

```

**Figura 4.11:** Definizione delle funzioni utilizzate in Mathematica, per il calcolo numerico del contributo all'ordine zero e al primo ordine della CAI. I parametri da cui dipende il modello sono:  $t$ ,  $\Delta$ ,  $n$  e  $p$ .

```

JADEQ = ListPlot[{{14, Around[0.1536, 10^(-4) * Sqrt[32^2 + 64^2 + 28^2 + 74^2]}],
  {22, Around[0.1407, 10^(-4) * Sqrt[28^2 + 34^2 + 21^2 + 24^2]}],
  {34.6, Around[0.1346, 10^(-4) * Sqrt[7^2 + 19^2 + 31^2 + 11^2]}],
  {38.3, Around[0.1355, 10^(-4) * Sqrt[21^2 + 42^2 + 38^2 + 20^2]}],
  {35, Around[0.1391, 10^(-4) * Sqrt[6^2 + 17^2 + 33^2 + 12^2]}],
  {43.8, Around[0.1289, 10^(-4) * Sqrt[12^2 + 11^2 + 38^2 + 19^2]}]}, PlotStyle -> Blue,
  PlotLegends -> {"JADE"}]

LEP2Q = ListPlot[{{133, Around[0.113, 10^(-3) * Sqrt[3^2 + 7^2]}],
  {161, Around[0.105, 10^(-3) * Sqrt[3^2 + 6^2]}],
  {172, Around[0.103, 10^(-3) * Sqrt[3^2 + 6^2]}], {91, Around[0.120, 10^(-3) * 5]}},
  PlotStyle -> Purple, PlotLegends -> {"LEP2"}]

CMSQ = ListPlot[{{474, Around[0.0936, 10^(-4) * 41]}, {664, Around[0.0894, 10^(-4) * 31]},
  {896, Around[0.0889, 10^(-4) * 34]}}, PlotStyle -> Green, PlotLegends -> {"CMS"}]

```

**Figura 4.12:** Dati sperimentali utilizzati, presi dalla referenza [34].

# Capitolo 5

## Fenomenologia

In questo capitolo si verificherà l'efficienza del modello di  $[\overline{\epsilon_s(t)}]_{an}$  applicandolo in ambito fenomenologico al calcolo di due grandezze fisicamente importanti per lo studio dell'interazione forte, ovvero: il rapporto  $R_\tau$  per il decadimento inclusivo del leptone  $\tau$  e il contributo adronico al momento magnetico anomalo del muone  $a_\mu^{\text{had}}$ .

### 5.1 Calcolo di $R_\tau$

La grandezza  $R_\tau$ , definita dalla (2.19), nel contesto dell'APT è ottenibile attraverso l'integrale (2.25) come:

$$R_\tau = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} (1-z)^3 (1+z) D(zM_\tau^2),$$

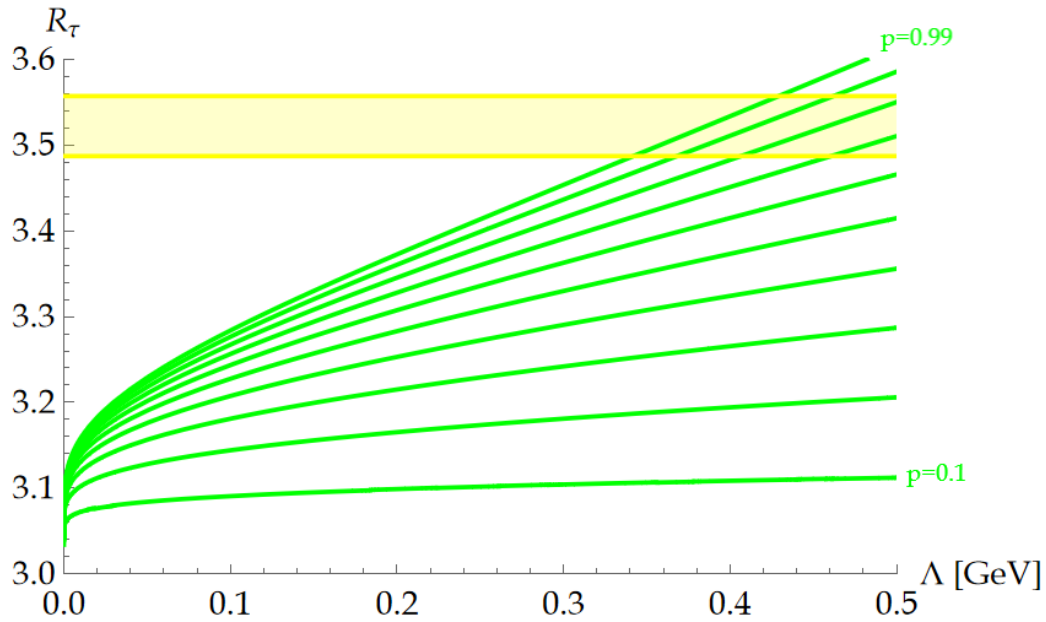
il cui cammino di integrazione è una circonferenza nel piano complesso. In questo caso si può verificare direttamente se la struttura nel piano complesso di  $[\overline{\epsilon_s(t)}]_{an}$  è in grado di riprodurre risultati ragionevoli per grandezze sperimentalmente osservabili. Nell'integranda compare la funzione di Adler  $D(t)$ , la cui definizione è data dalla (2.7), che si ottiene attraverso la rappresentazione in serie (2.12). Arrestando tale sviluppo funzionale a  $n = 1$ , si ottiene la (2.16), la quale esplicitando i coefficienti diventa la (2.26). È possibile inserire la dipendenza dal modello confinante, proposto nel capitolo precedente, direttamente nello sviluppo funzionale analitico della funzione di Adler, sostituendo  $[\alpha_s]_{an}$  o  $[\epsilon_s]_{an}$ , nella (2.26), rispettivamente con  $[\overline{\alpha_s}]_{an}$  o  $[\overline{\epsilon_s}]_{an}$ . Si ottiene:

$$D(t) = N_c \left[ 1 + \frac{[\overline{\alpha_s(t)}]_{an}}{\pi} \right] = N_c \left[ 1 + \frac{1}{\pi [\overline{\epsilon_s(t)}]_{an}} \right], \quad (5.1)$$

dove  $N_c = 3$  è il numero dei colori. Quindi si sostituisce la (5.1) nella (2.25) per ottenere  $R_\tau$  come funzione di  $\Lambda$ , mentre per il parametro  $p$  sono stati utilizzati i valori  $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  e  $0.99$ . Il valore sperimentale per  $R_\tau$  è:

$$R_\tau = 3.522 \pm 0.035. \quad (5.2)$$

I risultati ottenuti dall'integrazione (2.25) sono rappresentati in figura 2.19



**Figura 5.1:** Grafici di  $R_\tau$  in funzione di  $\Lambda$ , per  $n_f = 6$  e  $p = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  e  $0.99$ .

Confrontando il valore sperimentale (5.2) (rappresentato nella 5.1 con la banda orizzontale gialla) con le curve di  $R_\tau$ , ottenute per diversi valori di  $p$ , si nota che il modello riesce a riprodurre il valore sperimentale per valori alti di  $p$ , ovvero per  $p \sim 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ . Tale regione di sovrapposizione si trova in corrispondenza di  $\Lambda \sim 350 - 500$  MeV (valori vicini a  $\Lambda \simeq 300$  MeV).

```

d[t_, L_] := Nc * (1 + 1 / (Pi * e[t, L]))

G[z_, L_] := 1 / (2 * I * Pi) * 1 / z * (1 - z) ^ 3 * (1 + z) *
  d[-Mt^2 * z, L]

Rt[L_] := NIntegrate[I * Exp[I * t] * G[Exp[I * t], L],
  {t, 0, 2 * Pi}, Method -> {Automatic, "SymbolicProcessing" -> 0},
  PrecisionGoal -> 1, AccuracyGoal -> 1]

```

**Figura 5.2:** Definizioni funzioni utilizzate per il calcolo (Mathematica).

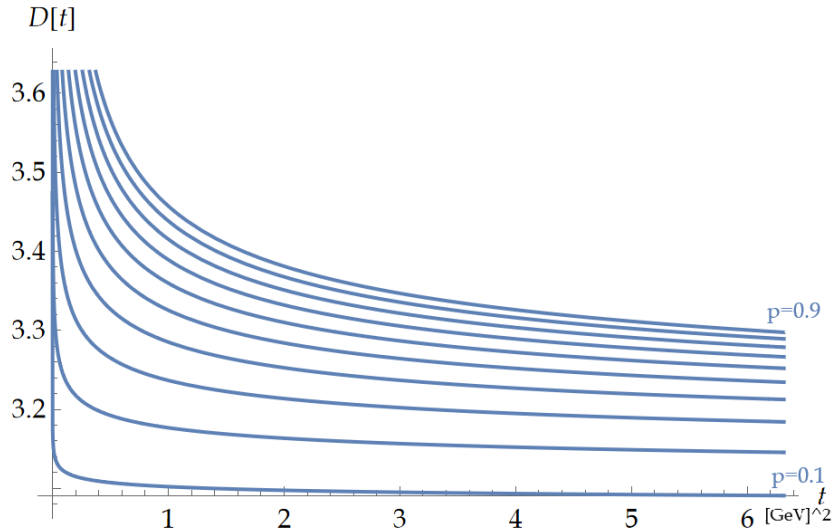
## 5.2 Calcolo di $a_\mu^{\text{had}}$

Per il calcolo di  $a_\mu^{\text{had}}$  si parte dalle espressioni riportate nel secondo capitolo, ovvero la (2.28) e la (2.30):

$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{QED}}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} K(s) R(s),$$

$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{QED}}{\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} (1-x)(2-x) D\left(\frac{x^2}{1-x} m_\mu^2\right).$$

Nella seconda si è esplicitata la funzione  $K(s)$ , nucleo dell'integrale. I due integrali sono equivalenti se si rispettano le prescrizioni dell'APT per la funzione di polarizzazione del vuoto, e quindi per la funzione di Adler. L'unica differenza tra le due è che nella (2.28) l'integranda contiene la funzione di Drell timelike  $R(s)$ , mentre la (2.30) la funzione di Adler spacelike, la quale è ricavata, a partire dalla  $R(s)$ , tramite la trasformazione di Mellin inversa (2.10). A livello matematico questi integrali sono divergenti. Quindi è necessario trovare una procedura in grado di aggirare tale divergenza. In particolare, nella (2.30) la divergenza è portata dall'integrazione ricavata dalla funzione  $K(s)$ , che viene alimentata dalla divergenza in zero della funzione di Adler. Infatti nel regime spacelike la  $D(t)$  confinante, descritta dalla (5.1), ha il seguente andamento:



**Figura 5.3:** Andamento della funzione di Adler espressa dalla (5.1) (spacelike).

Analogamente, anche l'integrale (2.28) diverge in zero. In questo caso lo zero nel dominio di integrazione è dovuto alle condizioni fisiche che si stanno



considerando per l'APT. Infatti il taglio sul piano complesso di  $q^2$ , corrispondente agli stati fisici, va dall'origine fino a  $\pm\infty$ , dipendentemente dalla prescrizione che si sceglie di utilizzare. In ogni caso, a livello fisico, si stanno considerando stati legati a più quark con masse anche nulle. A livello sperimentale, però, è chiaro che l'adrone più leggero osservabile è il mesone  $\pi$ , quindi si potrebbe risolvere il problema della divergenza facendo partire l'integrazione da  $q^2 = 4m_\pi^2$ . Ma questo comporterebbe una ridefinizione complessiva dei tagli fisici sul piano di  $q^2$  che andrebbe a toccare direttamente anche tutti gli altri integrali nelle varie rappresentazioni spettrali utilizzate, ovvero i risultati del modello confinante per la CAI. Quindi, l'alternativa è lavorare sulla funzione  $R(s)$ , in modo tale da trovarne una parametrizzazione che dipenda dalle masse degli stati adronici quark-antiquark, in modo che questa si annulli al di sotto della soglia di produzione più bassa. Infatti, la funzione  $R(s)$  rappresenta il rapporto tra la sezione d'urto adronica esclusiva del processo di annichilazione elettrone-positrone e la sezione d'urto *point-like* dello stesso processo, quindi ci si aspetta che assuma un valore nullo al di sotto della massa dello stato adronico più leggero. Inoltre, come detto nel secondo capitolo, il contributo delle masse dei quark influenza notevolmente il risultato teorico di  $a_\mu^{\text{had}}$ , soprattutto quello dei quark più leggeri. Perciò è lecito considerarli in  $R(s)$  in modo tale da ottenere una funzione a gradino crescente, man mano che si aprono i canali energetici associati ai sapori successivi. Quindi, per ogni sapore, si defisce un contributo alla  $R(s)$ , tenendo conto delle soglie di produzione dei quark, come proposto nella referenza [15]. Di seguito si riporta una sintesi del procedimento approfondito nella [15]:

- Per prima cosa si introduce il fattore di correzione relativistico  $S$ :  
Dalla QED è noto che, nel descrivere un sistema particella-antiparticella vicino alla soglia, gioca un ruolo fondamentale il *fattore di correzione di Coulomb*. Tale fattore è ricavato dall'equazione di Schrödinger non relativistica, utilizzando il potenziale coulombiano, ossia:  $V(r) = -\alpha/r$ , e viene chiamato *fattore S di Sommerfeld-Sakharov*, in riferimento al fatto che si sta considerando solo il contributo del canale vettoriale, per il quale si usa il fattore  $S$  associato allo stato di onda  $s$ . Per il canale vettoriale-assiale è richiesto il fattore  $P$  (onda  $p$ ). Se le stesse approssimazioni si utilizzano per la QCD, ovvero si considera una teoria con termine di interazione a potenziale coulombiano, il fattore  $S$  compare nella parametrizzazione della parte immaginaria del correlatore della corrente dei quark, cioè compare direttamente nella parametrizzazione del funzione  $R(s)$ . Perciò, per un'analisi relativistica sistematica dei sistemi quark-antiquark, è essenziale avere una generalizzazione

relativistica del fattore  $S$ . Nella referenza [15] è riportata la seguente:

$$S(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - e^{-X(\chi)}}, \quad X(\chi) = \frac{\pi\alpha}{\sinh(\chi)}, \quad (5.3)$$

dove  $\chi$  è la rapidità, associata a  $s$  tramite:  $2m \cosh(\chi) = \sqrt{s}$ ,  $\alpha = 4\alpha/3$  in QCD. La funzione  $X(\chi)$  può essere espressa nei termini di  $v = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ :  $X(\chi) = \pi\alpha\sqrt{1 - v^2}/v$ . Il fattore di correzione relativistico (5.3), così definito, riproduce sia il limite non relativistico, sia il limite ultrarelativistico nell'approssimazione di QCD con il potenziale di Coulomb.

- Per incorporare gli effetti delle masse dei quark si usa l'espressione approssimata proposta nella [15], sopra la soglia quark-antiquark:

$$\mathcal{R}(s) = T(s)[1 + g(v)R(s)], \quad (5.4)$$

dove:

$$T(v) = v \frac{3 - v^2}{2}, \quad g(v) = \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{\pi}{2v} - \frac{3 + v}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4\pi} \right) \right], \quad v_f = \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{s}},$$

con  $g(v)$  ottenuta nell'approssimazione di Schwinger [18]. La  $R(s)$  è calcolata a partire dalla funzione di Adler in forma confinante, ovvero dalla (5.1). Quindi è in  $R(s)$  che interviene il modello confinante proposto.

Oltre a questa sostituzione, è necessario modificare l'espressione (5.4) in modo tale da tener conto della somma di un numero arbitrario di singolarità di soglia. Includendo il fattore  $S$  (5.3), si arriva alla seguente espressione per la (5.4) per un particolare sapore del quark  $f$ :

$$R_f(s) = [R_{0,f}(s) + R_{1,f}(s)]\theta(s - 4m_f^2),$$

$$R_{0,f} = T(v_f)S(\chi_f), \quad R_{1,f} = T(v_f) \left[ R(s)g(v_f) - \frac{1}{2}X(\chi_f) \right]. \quad (5.5)$$

Per evitare il doppio conteggio, la funzione  $R_1$  contiene la sottrazione di  $X(\chi)$ . Il termine potenziale, corrispondente alla funzione  $R_0$ , fornisce il contributo principale a  $R(s)$ , con la correzione  $R_1$  che rappresenta meno del venti per cento per l'intero intervallo di energia.

Di seguito si riporta la procedura completa, utilizzata per ricostruire il modello della funzione di Drell, seguendo le indicazioni sovrariportate, tratte dalla [15].

### 5.2.1 Calcolo di $R(s)$

Per prima cosa si riporta il calcolo esplicito della funzione di Drell, ottenuta con le prescrizioni dell'APT estese dal modello confinante proposto nel capitolo precedente, a partire dalla funzione di Alder confinante. Infatti la  $D(t)$  è definita dalla (5.1) nella regione spacelike:

$$D(t) = N_c \left[ 1 + \frac{\overline{[\alpha_s(t)]_{an}}}{\pi} \right] = N_c \left[ 1 + \frac{1}{\pi \overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}} \right],$$

la quale dipende dal modello analitico/confinante  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$  della CAI, approfondito nel quarto capitolo. Dalla (2.10) è immediato vedere che la  $R(s)$  è la funzione  $D(t)$  calcolata nel regime timelike, ovvero:

$$R(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\epsilon}^{s+i\epsilon} \frac{dz}{z} D(-z).$$

Di conseguenza, la  $R(s)$  dipenderà da  $\overline{[\epsilon_s(s)]_{an}}$  timelike, seguendo lo sviluppo funzionale analitico (2.14), ovvero al primo ordine la (2.16), dove  $D$  e  $R$  hanno gli stessi coefficienti a ordini bassi. In particolare nella referenza [15] si approssima:

$$R(s) \approx \overline{[\alpha_s(s)]_{an}}. \quad (5.6)$$

Ossia, nella (5.5) si considera solo il contributo del primo termine dello sviluppo (2.14), ottenuto dalla rappresentazione spettrale, trascurando il termine all'ordine zero costante. In altre parole si considera solo il termine dipendente dalla costante di accoppiamento nella (2.16), considerando solo il contributo nel quale interviene significativamente il confinamento. Perciò è necessario calcolare  $\overline{[\alpha_s(s)]_{an}}$  nella regione timelike, a partire dalla  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$  presentata e calcolata nella regione spacelike. Per farlo si calcola la parte reale della  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$  sopra al taglio nell'asse reale negativo, utilizzando la relazione di dispersione per la parte reale. Sopra o sotto in questo caso non fa differenza, in quanto, per il principio di riflessione di Schwarz, la parte reale di  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$  non presenta discontinuità attraversando il taglio, a differenza della parte immaginaria (1.49). Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} \text{Im}[\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}] = \overline{\rho(t)} = \overline{\rho^{(0)}(t)} + \overline{\rho^{(1)}(t)}; \\ \text{Re}[\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}] = \frac{1+z}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\overline{\rho(t)}}{(x-z)(x+1)}, \end{cases}$$

dove  $z = t/\Lambda^2$ . Così facendo è possibile calcolare la parte immaginaria per il reciproco di  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$ , sapendo che: dato un generico numero  $w \in \mathbb{C}$  definito come  $w = x + iy$ , con  $x = \text{Re}[w]$  e  $y = \text{Im}[w]$ , allora:

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{w} \right] = -\frac{\text{Im}[w]}{\text{Im}[w]^2 + \text{Re}[w]^2}.$$

Nel caso di  $\overline{[\alpha_s(s)]_{an}} = 1/\overline{[\epsilon_s(s)]_{an}}$  si ottiene, allora:

$$\text{Im} \left[ \overline{[\alpha_s(s)]_{an}} \right] = \text{Im} \left[ \frac{1}{\overline{[\epsilon_s(s)]_{an}}} \right] = -\frac{\overline{\rho(s)}}{\rho(s)^2 + \text{Re} \left[ \overline{[\epsilon_s(s)]_{an}} \right]^2} \equiv \overline{\rho_\alpha(s)}.$$

Quindi, utilizzando la (2.15), si ottiene:

$$\mathfrak{A}_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty d\sigma \frac{\rho_n(\sigma)}{\sigma},$$

che per  $\mathfrak{A}_n(s) \equiv \overline{[\alpha_s(s)]_{an}}$  e  $\rho_n(\sigma) \equiv \overline{\rho_\alpha(\sigma)}$  si traduce in:

$$\overline{[\alpha_s(s)]_{an}} = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty d\sigma \frac{\overline{\rho_\alpha(\sigma)}}{\sigma}.$$

Quindi, per la (5.6):

$$R(s) \approx \overline{[\alpha_s(s)]_{an}} = \frac{1}{\pi} \int_s^\infty d\sigma \frac{\overline{\rho_\alpha(\sigma)}}{\sigma}.$$

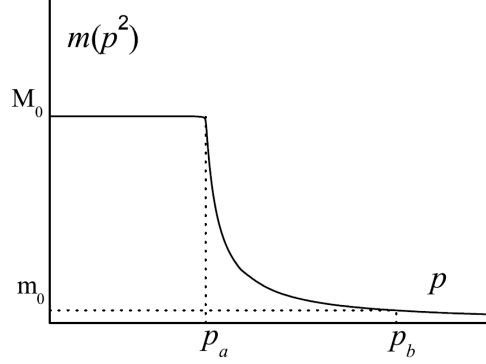
Tale risultato si inserisce nella  $\mathcal{R}(s)$  complessiva. Invece che calcolare la trasformata di Mellin inversa, si è semplificato il problema sfruttando il legame esistente tra le funzioni  $\mathcal{A}$  e  $\mathfrak{A}$  definite attraversando il taglio fisico nel piano, ovvero passando dalla regione spacelike a quella timelike. Così facendo, si è utilizzato il modello confinante, proposto per la CAI, direttamente all'interno della  $R(s)$ .

## 5.2.2 Calcolo di $\mathcal{R}(s)$

Per costruire la forma di  $\mathcal{R}(s)$  si definiscono le (5.5) per ogni sapore  $f = u, d, s, c, b, t$ . In particolare nelle  $v_f$  compaiono le masse  $m_f$  dei quark. Considerando il *running* delle masse dei quark, nella referenza [15] si riporta l'andameno rappresentato in figura 5.4. I valori sono riportati nella tabella 5.1. Dalle soluzioni delle equazioni di Schwinger-Dyson [20], si dimostra che la massa dei quark più leggeri assume un valore fisso per bassi momenti trasferiti. All'aumentare dell'impulso la funzione di massa diminuisce rapidamente in quanto per  $p^2 > 1 - 2 \text{ GeV}$  il comportamento principale della funzione  $m(p^2)$  è definito dalla teoria perturbativa. Mentre la massa nell'IR ha essenzialmente una natura non perturbativa. L'altezza  $M_0$  del *plateau* è data dal condensato del quark:

$$m^3 = -\frac{4}{3} \pi \alpha_s \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle.$$

In questo caso si prendono i valori a bassi  $q^2$  per le masse  $m_f$ .



**Figura 5.4:** Massa dei quark effettiva.

$f$	$u$	$d$	$s$	$c$	$b$	$t$
$m_0^f$ (GeV)	0.004	0.007	0.130	1.35	4.4	174
$M_0^f$ (GeV)	0.260	0.260	0.450	1.35	4.4	174

**Tabella 5.1:** Valori tipici di  $m_0^f$  e  $M_0^f$ .

Quindi:

**u:**  $m_u = 0.260$  GeV e  $q_u = \frac{2}{3}$

$$v_u(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_u^2}{s}},$$

$$\chi_u(s) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{2m_u}\right),$$

$$R_u(s) = 3q_u^2 \cdot T(v_u(s)) \cdot [S(\chi_u(s)) + \overline{[\alpha_s(s)]}_{an} \cdot g(v_u(s)) - \frac{1}{2}X(\chi_u(s))].$$

**d:**  $m_d = 0.260$  GeV e  $q_d = -\frac{1}{3}$

$$v_d(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_d^2}{s}},$$

$$\chi_d(s) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{2m_d}\right),$$

$$R_d(s) = 3q_d^2 \cdot T(v_d(s)) \cdot [S(\chi_d(s)) + \overline{[\alpha_s(s)]}_{an} \cdot g(v_d(s)) - \frac{1}{2}X(\chi_d(s))].$$

$$\mathbf{s}: m_s = 0.450 \text{ GeV e } q_s = \frac{2}{3}$$

$$v_s(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_s^2}{s}},$$

$$\chi_s(s) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{2m_s}\right),$$

$$R_s(s) = 3q_s^2 \cdot T(v_s(s)) \cdot [S(\chi_s(s)) + \overline{[\alpha_s(s)]}_{an} \cdot g(v_s(s)) - \frac{1}{2}X(\chi_s(s))].$$

$$\mathbf{c}: m_c = 1.35 \text{ GeV e } q_c = -\frac{1}{3}$$

$$v_c(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}},$$

$$\chi_c(s) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{2m_c}\right),$$

$$R_c(s) = 3q_c^2 \cdot T(v_c(s)) \cdot [S(\chi_c(s)) + \overline{[\alpha_s(s)]}_{an} \cdot g(v_c(s)) - \frac{1}{2}X(\chi_c(s))].$$

$$\mathbf{b}: m_b = 4.4 \text{ GeV e } q_b = \frac{2}{3}$$

$$v_b(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_b^2}{s}},$$

$$\chi_b(s) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{2m_b}\right),$$

$$R_b(s) = 3q_b^2 \cdot T(v_b(s)) \cdot [S(\chi_b(s)) + \overline{[\alpha_s(s)]}_{an} \cdot g(v_b(s)) - \frac{1}{2}X(\chi_b(s))].$$

$$\mathbf{t}: m_t = 174 \text{ GeV e } q_t = -\frac{1}{3}$$

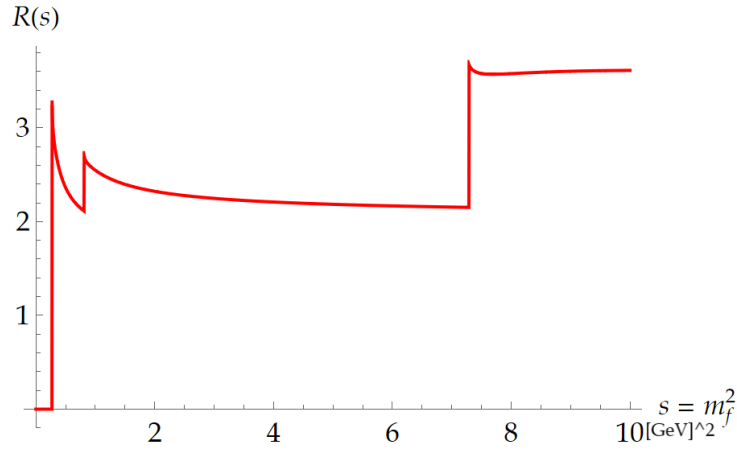
$$v_t(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_t^2}{s}},$$

$$\chi_t(s) = \cosh^{-1}\left(\frac{\sqrt{s}}{2m_t}\right),$$

$$R_t(s) = 3q_t^2 \cdot T(v_t(s)) \cdot [S(\chi_t(s)) + \overline{[\alpha_s(s)]}_{an} \cdot g(v_t(s)) - \frac{1}{2}X(\chi_t(s))].$$

Con le varie funzioni  $R_f(s)$  si costruisce la funzione  $\mathcal{R}(s)$  seguendo la (5.5). In particolare, la funzione  $\theta$  di Heaviside permette di selezionare le diverse soglie di produzione dei quark, rappresentando l'apertura in successione dei canali energetici. Ad ogni apertura di livello corrisponde l'inserimento, di una nuova  $R_f(s)$  associata al sapore attivato. Di seguito si riporta l'espressione ottenuta per  $\mathcal{R}(s)$ .

$$\mathcal{R}(s) = \begin{cases} 0 & 0 < s < 4m_u^2, \\ R_u(s) + R_d(s) & 4m_u^2 \leq s < 4m_s^2, \\ R_u(s) + R_d(s) + R_s(s) & 4m_s^2 \leq s < 4m_c^2, \\ R_u(s) + R_d(s) + R_s(s) + R_c(s) & 4m_c^2 \leq s < 4m_b^2, \\ R_u(s) + R_d(s) + R_s(s) + R_c(s) + R_b(s) & 4m_b^2 \leq s < 4m_t^2, \\ R_u(s) + R_d(s) + R_s(s) + R_c(s) + R_b(s) + R_t(s) & s \geq 4m_t^2. \end{cases}$$



**Figura 5.5:** Modello di  $\mathcal{R}(s)$  ( $p=0.3$ ) per il rapporto tra la sezione d'urto hadronica del processo di annichilazione  $e^+e^-$ , e la sezione d'urto *point-like* del medesimo. L'andamento sperimentale è riportato nella (2.4).

Inserendo il modello di  $\mathcal{R}(s)$  nella (2.28) si ottiene:

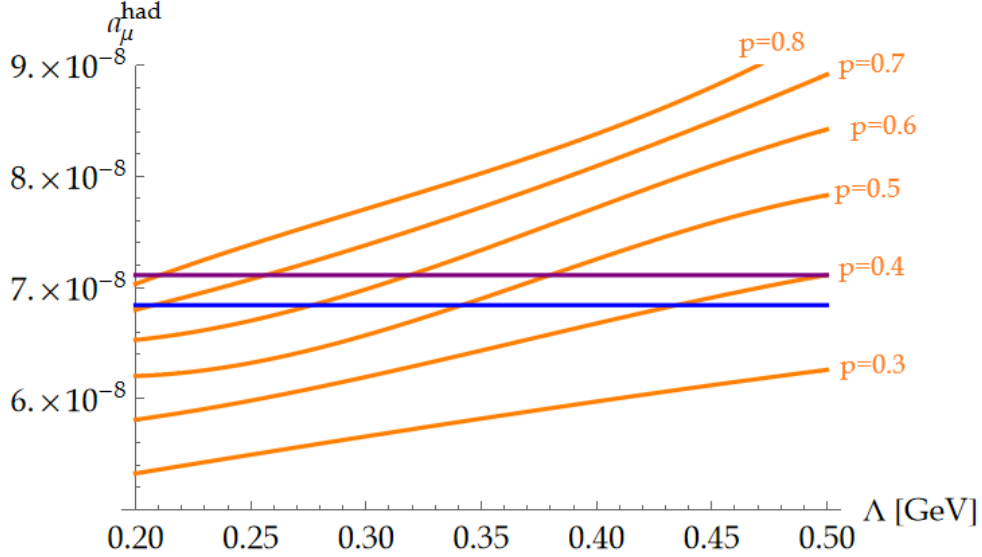
$$a_\mu^{\text{had}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha_{QED}}{\pi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} K(s) \mathcal{R}(s).$$

Come valori teorici di riferimento si sono utilizzati:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{had}} &= (684.68 \pm 2.42) \times 10^{-10} [e^+e^-] [35], \\ a_\mu^{\text{had}} &= (711.0 \pm 5.0_{\text{exp}} \pm 0.8_{\text{rad}} \pm 2.8_{SU(2)}) \times 10^{-10} [\tau] [21], \end{aligned} \quad (5.7)$$

ottenuti dai dati dell'annichilazione  $e^+e^-$  e del decadimento del  $\tau$ . Infatti, come detto nel secondo capitolo,  $a_\mu^{\text{had}}$  teorico necessita dei dati sperimentali poichè interviene principalmente nella regione infrarossa, per le correzioni di  $a_\mu$ . Quindi, il modello proposto, calcolato con  $\mathcal{R}$ , rappresenta un'alternativa

all'uso dei dati sperimentali nel calcolo teorico del contributo adronico. Per questo viene confrontato con altri valori teorici e non con quello sperimentale.

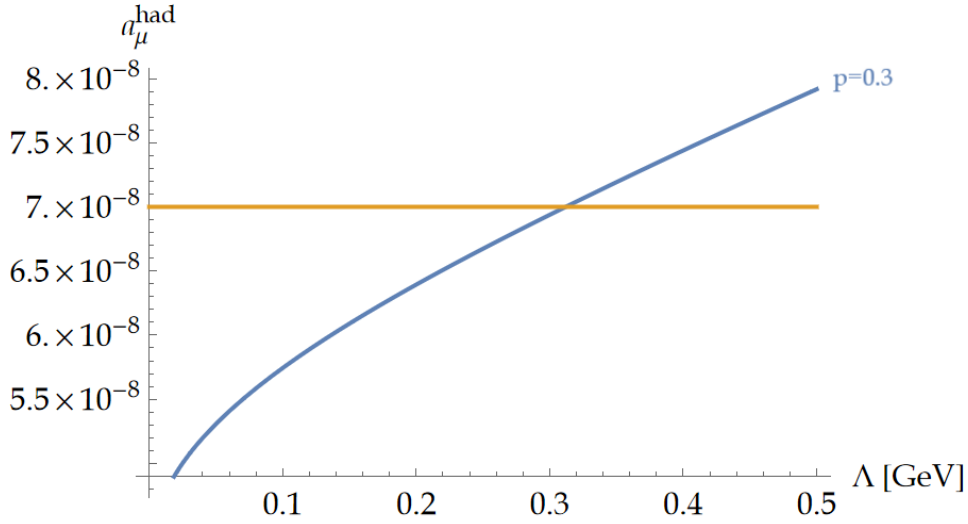


**Figura 5.6:** Risultati per  $a_\mu^{\text{had}}$  calcolati per  $p = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ . In questo caso  $n_f$  cresce seguendo la  $\mathcal{R}(s)$ , quindi non è fissato a priori. Precisione bassa e punti calcolati ogni 100 MeV in  $\Lambda$ .

Dai risultati riportati nella figura 5.6 si nota che: le curve del modello intersecano i due valori teorici di riferimento (5.7), in corrispondenza di valori di  $\Lambda$  compresi tra 250 MeV e 400 MeV e per valori di  $p$  pari a 0.5 e 0.6. In particolare, per  $a_\mu^{\text{had}}$  la curva con  $p = 0.5$  riproduce il valore teorico, per valori di  $\Lambda \approx 300 - 350$  MeV. Mentre per  $a_\mu^{\text{had}}$  la curva con  $p = 0.6$  riproduce il valore teorico, in corrispondenza dello stesso intervallo di  $\Lambda$ . Rispetto ai risultati di  $R_\tau$  si nota che le curve ottenute sono meno precise a causa della minore accuratezza impostata nel calcolo numerico degli integrali definiti in Mathematica. Per ridurre il tempo computazionale, in figura 5.6 è riportato un andamento discretizzato in  $\Lambda$ , con valori presi ad ogni 100 MeV. Aumentando la precisione di calcolo e il numero di punti, ci si aspetta un risultato più preciso che tende ad avvicinarsi a valori più alti di  $p$  come nel caso di  $R_\tau$ , dove gli integrali sono stati risolti con precisione di calcolo massima. Infatti, da un punto di vista computazionale, il modello inserito nell'integrale per  $R_\tau$  non richiedeva tempi eccessivi di calcolo. In quel caso le curve significative da un punto di vista fenomenologico sono quelle ad alti valori di  $p$  (rimanendo sempre nei limiti di integrabilità della teoria  $0 < p < 1$ ). Per verificare l'andamento continuo alla massima precisione della  $a_\mu^{\text{had}}$  in



funzione di  $\Lambda$ , si è calcolato a parte il modello con solo  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}]_{an}}$ . Isolando il contributo della CAI all'ordine zero, nel calcolo della  $\mathcal{R}(s)$  si risparmia molto tempo computazionale, in modo da poter ottenere l'integrale (2.28) di  $a_\mu^{\text{had}}$  con la massima precisione. Il risultato continuo ottenuto è il seguente:



**Figura 5.7:** Grafico per  $a_\mu^{\text{had}}$  calcolato per  $p = 0.3$ , utilizzando, nella  $\mathcal{R}$ , solo  $\overline{[\epsilon_s^{(0)}]_{an}}$ . Precisione massima e integrazione continua in  $\Lambda$ .

Si vede un ottimo accordo con una media dei valori teorici in (5.7) per  $\Lambda \approx 300$  MeV. Da ciò si osserva che per bassi  $p$  si hanno buone curve, considerando solo il contributo della CAI confinante all'ordine zero. Quindi si conclude che, inserendo il contributo della CAI confinante al primo ordine  $\overline{[\epsilon_s^{(1)}]_{an}}$ , il modello subisce un abbassamento delle curve, che ne causa uno slittamento verso destra del punto di intersezione con i valori teorici nominali scelti. Infatti, i valori di  $p$  per i quali si hanno curve che intersecano i valori (5.7) per  $\Lambda$  fisicamente rilevante, salgono da 0.3 a 0.5, 0.6.

Di seguito si riportano le funzioni definite nel notebook di Mathematica, La precisione di calcolo si regola direttamente nell'integrale numerico riportato nella 5.10. I comandi di riferimento sono AccuracyGoal e PrecisionGoal, in questo caso fissati al valore 1. Si sono fatti numerosi tentativi, aggiustando sia i due comandi per la precisione, sia aumentando/diminuendo il salto della discretizzazione in  $\Lambda$ , passando da precisioni e accuratezza di 1 – 5 e intervallo di discretizzazione da 100 MeV a 10 MeV. Tra tutti i risultati ottenuti, quello che presenta meno oscillazioni significative, con il migliore equilibrio tra precisione/discretizzazione e velocità computazionale, è il risultato nella figura 5.6.

```

Vu[s_] := Sqrt[1 - 4 * (mu) ^2 / s]      Xu[s_] := ArcCosh[Sqrt[s] / (2 * mu)]
Vd[s_] := Sqrt[1 - 4 * (md) ^2 / s]     Xd[s_] := ArcCosh[Sqrt[s] / (2 * md)]
Vs[s_] := Sqrt[1 - 4 * (ms) ^2 / s]     Xs[s_] := ArcCosh[Sqrt[s] / (2 * ms)]
Vc[s_] := Sqrt[1 - 4 * (mc) ^2 / s]     Xc[s_] := ArcCosh[Sqrt[s] / (2 * mc)]
Vb[s_] := Sqrt[1 - 4 * (mb) ^2 / s]     Xb[s_] := ArcCosh[Sqrt[s] / (2 * mb)]
Vt[s_] := Sqrt[1 - 4 * (mt) ^2 / s]     Xt[s_] := ArcCosh[Sqrt[s] / (2 * mt)]

```

Figura 5.8: Definizione delle funzioni  $v_f$  e  $\chi_f$  (Mathematica).

```

R1[s_, L_, α_, n_] :=
  3 * qu^2 * T[Vu[s]] * (S[Xu[s], α] + ra[s, L, n] * g[Vu[s]] - 1/2 * X[Xu[s], α])
R2[s_, L_, α_, n_] :=
  3 * qd^2 * T[Vu[s]] * (S[Xd[s], α] + ra[s, L, n] * g[Vd[s]] - 1/2 * X[Xd[s], α])
R3[s_, L_, α_, n_] :=
  3 * qs^2 * T[Vs[s]] * (S[Xs[s], α] + ra[s, L, n] * g[Vs[s]] - 1/2 * X[Xs[s], α])
R4[s_, L_, α_, n_] :=
  3 * qc^2 * T[Vc[s]] * (S[Xc[s], α] + ra[s, L, n] * g[Vc[s]] - 1/2 * X[Xc[s], α])
R5[s_, L_, α_, n_] :=
  3 * qb^2 * T[Vb[s]] * (S[Xb[s], α] + ra[s, L, n] * g[Vb[s]] - 1/2 * X[Xb[s], α])
R6[s_, L_, α_, n_] :=
  3 * qt^2 * T[Vt[s]] * (S[Xt[s], α] + ra[s, L, n] * g[Vt[s]] - 1/2 * X[Xt[s], α])
R[s_, L_, α_] :=
  Piecewise[{{R1[s, L, α, 2] + R2[s, L, α, 2], 4 * mu^2 < s < 4 * ms^2},
    {R1[s, L, α, 3] + R2[s, L, α, 3] + R3[s, L, α, 3], 4 * ms^2 < s < 4 * mc^2},
    {R1[s, L, α, 4] + R2[s, L, α, 4] + R3[s, L, α, 4] + R4[s, L, α, 4],
    4 * mc^2 < s < 4 * mb^2},
    {R1[s, L, α, 5] + R2[s, L, α, 5] + R3[s, L, α, 5] + R4[s, L, α, 5] +
    R5[s, L, α, 5], 4 * mb^2 < s < 4 * mt^2},
    {R1[s, L, α, 6] + R2[s, L, α, 6] + R3[s, L, α, 6] + R4[s, L, α, 6] +
    R5[s, L, α, 6] + R6[s, L, α, 6], s > 4 * mt^2}}]

```

Figura 5.9: Definizione delle  $R_f$  e di  $\mathcal{R}$  (Mathematica).

```

K[s_] := NIntegrate[x^2 * (1 - x) / (x^2 + (1 - x) * s / mμ^2), {x, 0, 1}]
F[s_, L_, α_] := 1 / s * K[s] * R[s, L, α]
aμ[L_, α_] := NIntegrate[F[s, L, α], {s, 0, Infinity},
  Method -> {Automatic, "SymbolicProcessing" -> 0},
  Exclusions -> {4 * mu^2, 4 * md^2, 4 * ms^2, 4 * mc^2, 4 * mb^2, 4 * mt^2},
  AccuracyGoal -> 1, PrecisionGoal -> 1]

```

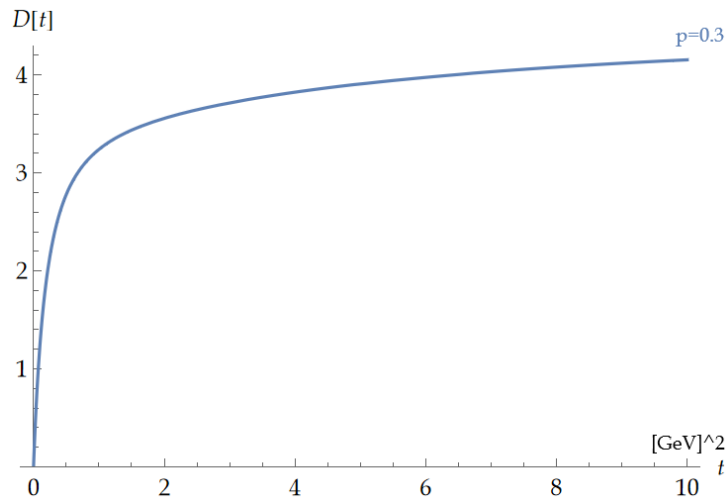
Figura 5.10: Definizione delle funzioni utilizzate per il calcolo di  $a_\mu^{\text{had}}$ . Il parametro  $\alpha$  è stato fissato a circa  $\alpha_s(M_Z^2)$  (Mathematica).

### Adler con $\mathcal{R}(s)$

Per concludere, è utile vedere come il modello proposto per  $\mathcal{R}(s)$  può essere utilizzato per ricostruire la funzione di Adler. Infatti si è partiti dalla (5.1) direttamente dipendente da  $\overline{[\epsilon_s(t)]_{an}}$ , passando per la  $R(s)$ , per poi arrivare al modello dipendente dalle soglie energetiche dei quark  $\mathcal{R}(s)$ . Perciò è possibile invertire il procedimento per calcolare  $D(t)$  direttamente dalla  $\mathcal{R}(s)$ . Per farlo si utilizza la relazione (2.9), ovvero:

$$D(z) = z \int_0^\infty ds \frac{\mathcal{R}(s)}{(s+z)^2},$$

nella quale al posto di  $R(s)$  si considera  $\mathcal{R}(s)$ . Si ottiene così, un andamento corretto della funzione di Adler, ovvero lo stesso del rapporto della sezione d'urto adronica del processo di annichilazione  $e^+e^-$  riportato nella 2.4, privato dei picchi di risonanza, poichè la  $D(t)$  è definita nella regione spacelike. Nella figura 5.11 si riporta tale andamento.



**Figura 5.11:** Funzione di Adler ricostruita tramite la  $\mathcal{R}(s)$ , grazie alla relazione (2.9).

# Conclusione

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è stato quello di formulare un modello analitico nel piano complesso e confinante per la CAI della QCD:  $\epsilon_s = 1/\alpha_s$ . L'analiticità è una diretta conseguenza della causalità espressa nell'ambito di una teoria di campo attraverso la forma spettrale di Källén-Lehmann dei propagatori. Poichè per la QCD la rinormalizzazione della costante di accoppiamento è collegata a quella del campo di gauge, anch'essa deve soddisfare la suddetta rappresentazione, che ha la forma di una relazione di dispersione. Il confinamento, invece, deve essere imposto utilizzando la funzione regolarizzatrice (4.1), intervenendo su  $\epsilon_s$  piuttosto che su  $\alpha_s$ . Per la prima, infatti, il confinamento si impone in maniera più naturale attraverso l'annullamento della funzione a zero, implicando direttamente l'annullamento della parte immaginaria della CAI. Mentre per  $\alpha_s$  il confinamento si impone richiedendone la divergenza nell'origine, non permettendo di dedurre direttamente un andamento per la parte immaginaria per  $q^2 \rightarrow 0$ . Il comportamento infrarosso scelto per  $[\overline{\epsilon_s}]_{an}$  è di tipo esponenziale, governato da un parametro  $p$  che definisce la velocità con la quale la CAI si azzerava nell'origine.

$$\underbrace{\epsilon_s}_{\text{PT}} \longrightarrow \underbrace{[\epsilon_s]_{an}}_{\text{APT}} \longrightarrow \underbrace{[\overline{\epsilon_s}]_{an}}_{\text{APT+conf.}} .$$

Quindi si è andati oltre la teoria perturbativa analitica, definendo un modello per il comportamento confinante nella regione infrarossa della CAI, sfruttando l'analiticità delle espressioni ottenute dalla APT.

Infine, sono state effettuate verifiche fenomenologiche sulla bontà del modello confinante, utilizzando la  $[\overline{\epsilon_s}]_{an}$  per calcolare due osservabili sperimentali tipiche dell'interazione forte: il rapporto  $R_\tau$  e l'anomalia del momento magnetico del muone  $a_\mu^{\text{had}}$ . Tramite le prescrizioni dell'APT, sulle quali è costruito il modello confinante proposto, si riesce ad esprimere tali grandezze fisiche tramite espressioni teoriche dipendenti dalla funzione di Adler  $D(t)$  o dalla funzione di Drell  $R(s)$ . In particolare:

$R_\tau$  permette di verificare come l'APT consente di operare con integrali su percorsi chiusi nel piano complesso, in modo da sostituire l'integrazione ini-

zialmente dipendente dalla regione non perturbativa IR con quella su circonferenze nel piano complesso in  $q^2$ ;

$a_\mu^{\text{had}}$ , invece, necessita di un modello teorico valido nella regione IR, in modo da poter essere calcolata senza l'ausilio dei dati sperimentali. Infatti l'espressione teorica di  $a_\mu^{\text{had}}$  dipende a sua volta dai dati sperimentali poichè nell'integrale che la definisce dominano i contributi dei canali a basse energie, tra tutti  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Quindi, intorno ad energie paragonabili alla massa dei pioni, le espressioni perturbative perdono validità. Perciò si propone un modello per la funzione di Drell  $R(s)$ , dipendente da  $[\epsilon_s]_{an}$  e dalle masse dei quark, sfruttando l'analiticità e il confinamento.

Confrontando i risultati delle grandezze calcolate, con i valori sperimentali/nominali, si studia per quali valori dei parametri, da cui il modello dipende, si ha maggiore accordo. Sia per  $R_\tau$  che per  $a_\mu^{\text{had}}$  si ottengono risultati qualitativi interessanti che possono essere migliorati utilizzando calcolatori più potenti.

Si è inoltre confrontato l'andamento delle curve del modello confinante per la CAI con i dati sperimentali misurati a diverse energie. Si è visto un buonissimo accordo qualitativo con i dati a energie superiori ai 10 GeV. Si è poi cercato di quantificare l'accordo utilizzando il modello di  $[\alpha_s]_{an} = 1/[\epsilon_s]_{an}$  come funzioni di fit per selezionare i parametri, anche in questo caso, ottenendo un buon accordo per  $p \simeq 0.7$ .

Da tali verifiche fenomenologiche si evince che: nell'intervallo permesso per il parametro  $p$ , ovvero  $0 < p < 1$ , a livello fenomenologico hanno importanza valori alti. Per valori fisicamente accettabili di  $\Lambda$  (350 – 400 GeV), la previsione di  $R_\tau$  cade all'interno dell'intervallo sperimentale per  $p \in (0.7, 0.99]$ . Mentre per  $a_\mu^{\text{had}}$  si ottengono valori di  $p$  leggermente più bassi, a causa della minore precisione di calcolo dovuta utilizzare, ovvero:  $p \simeq 0.5, 0.6$ .

Questo primo approccio qualitativo comporta delle conseguenze interessanti per tutte le grandezze dipendenti dalla funzione di Adler o dalla funzione di Drell, ovvero per tutte quelle osservabili nelle quali compare l'integrale di  $R(s)$  nella regione infrarossa, che deve essere calcolato con approcci non perturbativi al fine di ottenere un risultato teorico privo di incertezza sperimentale. Le prospettive in questo ambito di ricerca sono ampie, poichè si cerca di dare un'alternativa di calcolo teorico alla QCD su reticolo. Soprattutto, nel caso dell'anomalia del momento magnetico del muone, è utile per analizzare la discrepanza che si trova tra il valore sperimentale e le previsioni teoriche, e per sondare così la possibilità di trovare contributi di nuova fisica oltre il Modello Standard.

# Bibliografia

- [1] D. V. Shirkov and I. L. Solovtsov, *Ten years of the Analytic Perturbation Theory in QCD*, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980, Russia, arXiv:hep-ph/0611229;
- [2] N. N. Bogoliubov, A. A. Logunov, and D. V. Shirkov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1959, 37, 3(9), 805;
- [3] B. A. Magradze, *QCD coupling up to third order in standard and analytic perturbation theories*, *Int. J. Mod. Phys. A*, 2000, 15, 2715; hep-ph/0010070;
- [4] Appunti: *Continuazione analitica per  $\alpha$  strong*, Prof. Simone Pacetti;
- [5] Particle Data Group. (D.E. Groom et al.), *Eur. Phys. L. C15* (2000), 1;
- [6] E. Braaten, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988), 1606; E. Braaten, S. Narison and A. Pich, *Nucl. Phys.* B373 (1992), 581;
- [7] P. M. Stevenson, *Phys. Lett.* B100 (1981), 61; *Phys. Rev.* D23 (1981), 2916; *Nucl. Phys.* B203 (1982), 472; *Nucl. Phys.* B231 (1984), 65;
- [8] G. Grunberg, *Phys. Lett.* B95 (1980), 70; *Phys. Lett.* B110 (1982), 501; *Phys. Rev.* D29 (1984), 2315;
- [9] O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov and A. Yu. Zharkov, *Phys. Lett.* B93 (1980), 429;
- [10] A. Grau (Universidad de Granada), G. Pancheri (INFN - Laboratori Nazionali di Frascati), Y.N. Srivastava (INFN and University of Perugia), *Hadronic Total Cross-sections Through Soft Gluon Summation in Impact Parameter Space*, 1999: arXiv:hep-ph/9905228v1;

- [11] Serone, M. *Notes on Quantum Field Theory*.  
<https://userswww.pd.infn.it/feruglio/Serone.pdf> [Online; Last Update: December 13, 2018];
- [12] Milton, K.A., and Solovtsov, I.L. *Analytic perturbation theory in QCD and Schwinger's connection between the  $\beta$ -function and the spectral density*. Physical Review D 55 (1997), 5295–5298;
- [13] D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov *Analytic QCD running coupling with finite IR behaviour and universal  $\alpha_s(0)$  value*, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, Dubna, 141980 Russia. (arXiv:hep-ph/9604363);
- [14] A. P. Bakulev and S. V. Mikhailov, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, 141980 Dubna, Russia, N. G. Stefanis, Institut für Theoretische Physik II, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany *QCD Analytic Perturbation Theory. From integer powers to any power of the running coupling*, (Dated: November 1, 2018);
- [15] Milton, K.A., Solovtsov, I. L., and Solovtsova, O. P. *An analytic method of describing R-related quantities in QCD*. Modern Physics Letter A 21, 17 (2006), 1355–1368, arXiv:hep-ph/0512209;
- [16] K.A. Milton and O.P. Solovtsova, *Int. J. Mod. Phys. A* 17 (2002) 3789;
- [17] Particle Data Group, S. Eidelman et al., Phys. Lett. B 592 (2004) 1;
- [18] J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields, Vol. 2* (New York, Addison-Wesley, 1973, Perseus, 1998);
- [19] Kimball A. Milton, Olga P. Solovtsova, *Analytic Perturbation Theory: A New Approach to the Analytic Continuation of the Strong Coupling Constant  $\alpha_s$  into the Timelike Region*, (August 7, 2018), Phys.Rev. D57 (1998) 5402-5409, arXiv:hep-ph/9710316;
- [20] C.D. Roberts and S.M. Schmidt, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 45 (2000) S1;
- [21] M. Davier, S. Eidelman, A. Hocker, and Z. Zhang, Eur. Phys. J. C 31 (2003) 503;
- [22] Muon  $g - 2$  Collab., G.W. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 161802;

- [23] A. Hocker, in: Proc. the XXXII Int. Conf. ICHEP'04, (Beijing, China, Aug. 2004), Vol. II., eds. H. Chen et al. (World Scientific Publ. Co., 2005) p. 710; hep-ph/0410081;
- [24] K. Hagiwara, A.D. Martin, D. Nomura, and T. Teubner, Phys. Rev. D 69 (2004) 093003;
- [25] Donoghue, J., Golowich, E., & Holstein, B. (2014), *Dynamics of the Standard Model* (2nd ed., Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511803512;
- [26] Chris Quigg Advanced Book Classics, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Second edition, Westview Press;
- [27] Rossetti. C, *Metodi matematici della fisica*, Seconda edizione, 2000, Libreria editrice universitaria Levrotto & Bella, Torino;
- [28] Bettini, A. (2014). *Introduction to Elementary Particle Physics* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781107279483;
- [29] Michael E Peskin, Daniel V. Schroeder, *An introduction To Quantum Field Theory*, CRC Press, 2018;
- [30] A.Ali, G.Kramer, *JETS AND QCD: A Historical Review of the Discovery of the Quark and Gluon Jets and its Impact on QCD*, DESY, D-22603 Hamburg (Germany), Universität Hamburg, D-22761 Hamburg (Germany): <https://arxiv.org/pdf/1012.2288.pdf>;
- [31] A. Grau, S. Pacetti, G. Pancheri and Y.N. Srivastava, *Bloch-Nordsieck resummation for QCD processes*, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 126 (2004) 84-93;
- [32] Alexander Kurza, Tao Liu, Peter Marquard, Matthias Steinhauser, *Hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment to next-to-next-to-leading order*, arXiv:1403.6400v2 [hep-ph] 25 Jun 2014;
- [33] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Seventh edition, Alan Jeffrey, Editor University of Newcastle upon Tyne, England Daniel Zwillinger, Editor Rensselaer Polytechnic Institute, USA, Translated from Russian by Scripta Technica, Inc., Elsevier;



- [34] The CMS Collaboration, *Measurement of the inclusive 3-jet production differential cross section in proton-proton collisions at 7 TeV and determination of the strong coupling constant in the TeV range*: arXiv:1412.1633v2 [hep-ex] 1 May 2015;
- [35] IHEP-Physics-Report-BESIII-2020-4-7, *Future Physics Programme of BESIII*, Published in Chinese Physics C 44, 040001 (2020): arXiv:1912.05983v3 [hep-ex] 6 Apr 2020;
- [36] Hartmut Wittig Institute for Nuclear Physics, PRISMA+ Cluster of Excellence and Helmholtz Institute Mainz Becher Weg 45, D–55099 Mainz, Germany, *Progress on  $(g - 2)_\mu$  from Lattice QCD*: arXiv:2306.04165v2 [hep-ph] 17 Jun 2023.

Ringrazio il Professore Simone Pacetti per l'infinita disponibilità e professionalità con la quale mi ha accompagnato in questo lavoro di tesi. Grazie soprattutto per i preziosi consigli sia sulla materia che sul futuro. Fonte di ispirazione, soprattutto per la competenza e per la cura che mette nell'insegnamento. Sono grato di aver avuto la possibilità di affiancarlo nel corso di metodi matematici per la fisica, come tutor. Un'esperienza stupenda che mi ha dato conferma di quanto l'insegnamento della fisica possa essere affascinante.

Ringrazio Rocco Malaspina per avermi assistito nel lavoro. Un collega inaspettato con il quale si è lavorato in perfetta sintonia grazie alla sua competenza e disponibilità.

Ringrazio la mia famiglia. Papà Mamma e Marta. Sempre al mio fianco anche nei momenti più difficili. Nei momenti di crisi e ansia, e nei momenti in cui "posticipo l'esame che non faccio in tempo a finire di rivedere tutto". Sono io ad essere fiero di voi e di quello che avete costruito. Grazie per questo.

Ringrazio il nonno Aldo. Il mio barbiere di fiducia. Colui che appoggia sempre le mie passioni e che oramai sa cosa è la Q... CD.

Ringrazio i miei amici. Gli amici del Liceo. Gli amici di Corciano. Gli amici di Fisica e tutti coloro che ho conosciuto lungo questo percorso. Grazie per esserci e per dare senso anche alle più piccole cavolate. Soprattutto grazie a coloro che mi sono stati vicino nei momenti più difficili e coloro con i quali, dopo chiarite allontanamenti e riavvicinamenti, ci si ritrova sempre. L'amicizia è questo. Andare oltre. Capire che alla fine quello che conta è il potersi fidare, al di là delle piccole cose.

Ma ringrazio soprattutto, mio nonno. Nello. Il mio coinquilino. Colui che era sempre lì seduto sul divano ad aspettarmi quando tornavo dall'università dopo aver dato un esame. Colui che avrei voluto fosse qui oggi a vedermi vestito bene pronto per la discussione, ad attendere la proclamazione. So che te ne sei andato consapevole del nostro legame e soprattutto consapevole che ce l'avrei fatta a concludere questo percorso, grazie al sostegno che mi hai sempre dato per qualsiasi cosa facessi. Mi manchi.

Concludo dicendo. Sono fiero.

Sono fiero del percorso fatto.

Sono fiero delle scelte fatte e dei sacrifici che mi hanno portato a questo traguardo.

Sono fiero delle persone che ho accanto e che ho scelto di avere vicino a me lungo questo percorso.

Sono fiero di ogni minuto passato sopra ai libri, e di tutti gli esami sostenuti. Dal primo esonero di Geometria, all'ultimo Fisica dello Spazio. Sono fiero di aver dedicato sei anni della mia vita a costruire questo enorme traguardo.

Soprattutto sono fiero della consapevolezza che in questi anni ho raggiunto. Ricordo a me stesso che è vero che bisogna sapersi guardare dentro, ma l'autocritica pretende consapevolezza. In modo tale che l'umiltà non si trasformi in insicurezza e che la sicurezza non si trasformi in arroganza. Al me di un anno fa voglio dire, grazie, perchè senza di te non sarei qui oggi consapevole del traguardo raggiunto.

Ringrazio la Fisica. Per la sua logica complessità naturale. Per essere stata sempre lì, sia nei momenti belli che nei momenti brutti. Per mostrarmi ogni giorno quanto la semplicità che viviamo sia complessa. Per aver contribuito a creare il mio modo di avvicinarmi al mondo con consapevolezza. E per ricordami di non smettere mai di cercare e andare oltre.