DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI – II

Centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali risulta utile introdurre il concetto di centro di massa:

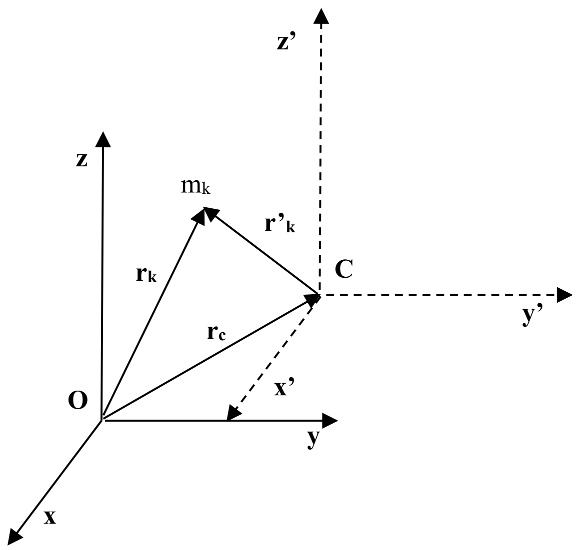
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$

Riferimento del centro di massa:

Onde mettere in evidenza le proprietà dinamiche del centro di massa risulta utile introdurre, oltre al riferimento *inerziale* del laboratorio un sistema di riferimento in moto traslatorio rispetto al precedente e con origine nel punto C. Questo riferimento è dotato di moto traslatorio con la stessa velocità del centro di massa (ed in genere non è un riferimento inerziale).

I vettori posizione e velocità della k-esima particella nel laboratorio e nel centro di massa sono legate dalle relazioni:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{r}_k{}', \quad \vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}_k{}'$$



CENTRO DI MASSA DI UN CORPO RIGIDO

Esistono tre metodi per calcolare il centro di massa di un corpo rigido:

Metodo della simmetria

- Se il corpo omogeneo ha un piano di simmetria, il centro di massa giace su quel piano
- Se il corpo ha un asse di simmetria il centro di massa si trova su quell'asse.
- Se il corpo possiede un punto di simmetria il centro di massa coincide con quel punto.

Metodo della suddivisione

Se un corpo può essere suddiviso in più parti,per ciascuna delle quali sia nota la posizione del centro di massa, e la massa, allora il centro di massa di tutto l'insieme si calcola come per un sistema di punti materiali,collocati nei vari centri di massa

Metodo della supplementazione

Quando un corpo omogeneo ha delle cavità, o dei fori si trova la posizione del centro di massa di tutto il corpo considerato senza fori o cavità e la posizione del centro di massa del foro, che può essere considerato un corpo omogeneo con massa negativa! Poi si procede con il metodo della suddivisione.

PROPRIETA' DINAMICHE DEL CENTRO DI MASSA

1. ESPRESSIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO TOTALE
(I proprietà dinamica del centro di massa)

Da $\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$ si ottiene: $M\vec{r}_C = \sum m_k \vec{r}_k$ che derivata rispetto al tempo dà:

$M\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum m_k \vec{v}_k = \sum \vec{p}_k = \vec{P}$. Ed essendo: $\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c$ risulta:

$$\vec{P} = M\vec{v}_C$$

Cioè:
La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla massa totale del sistema per la velocità del centro di massa.
In altre parole:
La quantità di moto risultante di un sistema di massa complessiva M è la stessa di un punto materiale di massa M in moto con la velocità del centro di massa.

Nel riferimento del centro di massa si ha: $\vec{P}' = \sum m_k \vec{v}'_k = \sum m_k \vec{v}_k - M\vec{v}_C = 0$
In accordo con il fatto che rispetto al riferimento del centro di massa il punto C è in quiete.

2. TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA
(II proprietà dinamica del centro di massa)

Derivando rispetto al tempo l'equazione $\vec{P} = M\vec{v}_C$, otteniamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_C$$

La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema è uguale al prodotto della massa complessiva per l'accelerazione del centro di massa.

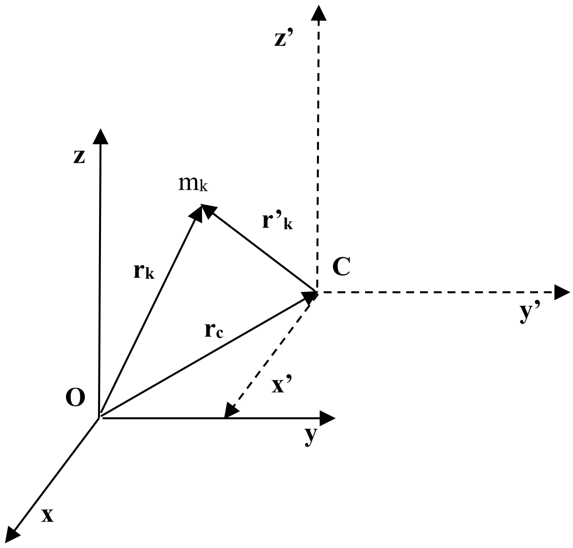
Possiamo ora scrivere la prima equazione cardinale in funzione delle grandezze dinamiche del centro di massa:

$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(e)}$$

Il moto del centro di massa è equivalente a quello di un punto materiale di massa uguale alla massa complessiva del sistema sottoposto ad un forza uguale alla risultante delle forze esterne applicate.

3. MOMENTO ANGOLARE RISULTANTE
(III proprietà dinamica del centro di massa)

Vogliamo ricavare la relazione che intercorre tra il momento angolare calcolato nel laboratorio e quello calcolato nel riferimento del centro di massa assumendo C come polo.



Sia L'_C il momento angolare risultante rispetto al centro di massa calcolato nel S.R. del centro di massa e Lc il momento rispetto al centro di massa calcolato nel S.R. del laboratorio, si ottiene:

$$\vec{L}'_C = \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}'_k = \sum \vec{r}'_k \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_C) = \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_k - \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_C = \vec{L}_C - 0 = \vec{L}_C$$

essendo $\sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_C = \sum m_k \vec{r}'_k \times \vec{v}_C$ e $\sum m_k \vec{r}'_k = M \vec{r}_C = 0$

Cioè:
Assumendo C come polo, il momento angolare risultante (o momento risultante della quantità di moto) nel laboratorio è uguale al momento risultante delle quantità di moto relative al centro di massa.

Inoltre siccome nel sistema del centro di massa $\vec{P}' = 0$, il vettore $\vec{L}'_C$ è indipendente dal polo ed è lecito parlare di *Momento Angolare intrinseco* senza dover specificare il polo.

Il momento angolare rispetto all'origine si può scrivere come:
$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{P}$
ed essendo $\vec{L}_C = \vec{L}'_C$, si può scrivere nella forma:

$$\vec{L}_O = \vec{L}'_C + \vec{r}_C \times \vec{P}$$

Il momento della quantità di moto, calcolato nell'origine O del laboratorio è uguale, alla somma del momento di quantità di moto calcolato nel sistema del centro di massa e del momento rispetto ad O della quantità di moto P applicata in C.

4. SECONDA EQUAZIONE CARDINALE RIFERITA AL CENTRO DI MASSA (IV proprietà dinamica del centro di massa)

Tenendo presente che $\vec{P} = M\vec{v}_C$ la seconda equazione cardinale può essere scritta:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)} - \vec{v}_A \times M\vec{v}_C$$

Dove A è un punto generico non necessariamente in quiete nel sistema del laboratorio. Vediamo ora in quali condizioni il termine $\vec{v}_A \times M\vec{v}_C$ si annulla ed è possibile scrivere l'equazione nella forma semplificata: $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)}$. Ciò è possibile in una delle situazioni seguenti:

- $\vec{v}_A = 0$ (il punto A è fisso)
- $\vec{v}_C = 0$ (il centro di massa è in quiete nel laboratorio)
- A=C (si assume come polo il centro di massa)

Se appunto A=C, la seconda equazione cardinale diventa:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}$$

ed essendo $\vec{L}_C = \vec{L}'_C$, l'equazione si può scrivere:

$$\frac{d\vec{L}'_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}$$

(Formula utile nella soluzione dei problemi.)

Esso esprime il teorema del momento angolare risultante rispetto al centro di massa:
Se si assume C come polo, la derivata rispetto al tempo del momento risultante della quantità di moto misurate nel laboratorio o nel sistema del centro di massa, è uguale al momento risultante rispetto a C delle forze esterne applicate.

5. ENERGIA CINETICA NEL LABORATORIO E NEL CENTRO DI MASSA (V proprietà dinamica del centro di massa)

Ci si propone di mettere in relazione l'energia cinetica K riferita al sistema del laboratorio con quella riferita al centro di massa K'.

Ricordando: $\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}_C'$ che elevata al quadrato dà: $v_k^2 = v_C^2 + 2\,\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_k + v'^2_k$ dalla definizione segue:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \vec{v}_C \cdot \sum m_k \vec{v}'_k + \frac{1}{2}\sum m_k \vec{v}'^2_k$$

Ed essendo $\sum m_k \vec{v}'_k = \vec{P}' = 0$ e $K' = \frac{1}{2}\sum m_k \vec{v}'^2_k$ si può scrivere:

$$K = \frac{1}{2}Mv_C^2 + K'$$

che va sotto il nome di teorema di König:
L'energia cinetica di un sistema materiale in moto rispetto al sistema del laboratorio è uguale alla somma dell'energia cinetica del centro di massa, nel quale si supponga concentrata l'intera massa, calcolata rispetto al laboratorio, aumentata dell'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa.