ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

- Vettori liberi e vettori applicati
  - Vettore libero:
    - individuato da una direzione orientata ed una lunghezza
    - non ha un'ubicazione fissa nello spazio:
    - puo' essere traslato sia lungo la sua retta d'azione che parallelamente

  Due vettori liberi sono uguali se hanno ugual modulo, direzione e verso.
  - Vettore applicato:
    - Va specificato anche il punto dello spazio nel quale va applicato

  Due vettori applicati sono uguali se hanno ugual modulo, direzione, verso e punto di applicazione

- Operazioni sui vettori liberi

  - Componente di un vettore a secondo una direzione orientata u:
    $a_u = a \cos \phi$

  - Rappresentazione cartesiana dei vettori:
    - Terna levogira, sinistrorsa o destra
    - $a_x = \mathbf{a} \cos \alpha$, $a_y = \mathbf{a} \cos \beta$, $a_z = \mathbf{a} \cos \gamma$ da cui: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$
    - $a = \sqrt{(a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z)}$

  - Somma di vettori **a + b**:
      - Costruzione della poligonale dei vettori
      - Il risultante si ottiene unendo l'origine del primo vettore con l'estremo dell'ultimo vettore
    - Componenti cartesiane della somma = somma delle componenti
    - Gode delle proprietà **commutativa ed associativa**
    - NOTA: le *rotazioni finite* NON sono vettori (nonostante presentino direzione e verso)

  - Differenza di vettori a - b:
      - Somma di a e b considerato in senso opposto

  - Prodotto di uno scalare per un vettore
    - $\mathbf{b} = m\, \mathbf{a}$
    - Dalla somma e dal prodotto con uno scalare:
      - $\mathbf{a} = a_x\, \mathbf{i} + a_y\, \mathbf{j} + a_z\, \mathbf{k}$

Esistono due diversi tipi di prodotto tra due vettori:

- Prodotto scalare o prodotto interno
  - e' lo scalare definito da $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\phi = a_b\, b = a\, b_a$
  - gode della proprietà commutativa
  - gode della proprietà distributiva rispetto alla somma
  - espressione cartesiana:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Prodotto vettoriale o prodotto esterno
  - e' il vettore libero $\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ definito da:
  - modulo: $p = ab \operatorname{sen} \phi$ (area parallelogramma definito da a e b)
  - direzione ortogonale al piano dei vettori dati
  - verso tale che a, b e p formino una terna destra
  - non gode della proprietà commutativa
  - gode della proprietà distributiva rispetto alla somma
  - espressione cartesiana (determinante matrice a tre righe):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati I)

- Vettori applicati

    - *Quanto segue si riferisce a vettori applicati e non ha senso per vettori liberi, ma quanto esposto per i vettori liberi può essere esteso anche a quelli applicati.*

    - *Come regola generale si può affermare che vettori ottenuti come risultato di operazioni su vettori applicati sono vettori liberi.*

- Momento di un vettore rispetto ad un polo.

    - Dato il vettore (**a**, P) ed un punto O, si dice momento polare di a rispetto al polo O il vettore libero definito:

$$\mathbf{m_O} = \mathbf{OP} \times \mathbf{a}$$

        - Se a e' non nullo, m_O si annulla se e solo se la sua retta di applicazione passa per O.

        - Se a applicato in P, viene applicato in qualunque altro punto P' della retta di applicazione di a, il suo momento polare non cambia:

$$\mathbf{OP} \times \mathbf{a} = (\mathbf{OP'} + \mathbf{P'P}) \times \mathbf{a} = \mathbf{OP'} \times \mathbf{a}$$

        Agli effetti del calcolo del momento ogni vettore puo' essere spostato sulla propria retta d'azione

- Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta orientata.

    - Dati il vettore (a, P) e la retta r orientata secondo il versore u. Si dice momento assiale di a rispetto alla retta orientata r (m_r) la componente secondo r del momento polare m_O di a calcolato rispetto ad un polo O appartenente ad r:

$$m_r = \mathbf{m_O} \cdot \mathbf{u}$$

    Il momento assiale e lo stesso qualunque sia la posizione sulla retta r del punto O rispetto al quale si calcola m_O.

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati II)

- Risultante e momento risultante di un sistema di vettori applicati.

Assegnato un sistema S di N vettori applicati ($\mathbf{a}_1$, P_1), ($\mathbf{a}_2$, P_2) … ($\mathbf{a}_N$, P_N) ed un punto O.

- Si definisce risultante il vettore libero R:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{a}_k$$

- Si definisce momento risultante del sistema rispetto ad O il vettore libero $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{a}_N$$

Nota:

- *Il momento risultante di un sistema di vettori in genere **non** e' dato dal momento del risultante: il risultante e' infatti un vettore libero e risulta impossibile definirne il momento rispetto ad un qualunque polo.*

- *Se pero tutti i vettori sono applicati nello stesso punto P:*

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \mathbf{OP} \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_N) = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$$

(Teorema di Varignon)

- Variazione del momento risultante di un sistema di vettori applicati al variare del polo

Con riferimento al polo 0

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{a}_N$$

Con riferimento al polo 0'

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{O'P}_2 \times \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{O'P}_N \times \mathbf{a}_N$$

ma $\mathbf{OP}_k = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}_k$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OO'} \times \left(\sum \mathbf{a}_k \right) + \mathbf{O'P}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{O'P}_2 \times \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{O'P}_N \times a_N$$

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO'} \times \mathbf{R}}$$

- *Il momento risultante di un sistema di vettori rispetto al polo O e uguale al momento risultante dello stesso sistema rispetto al polo O', aumentato del momento del risultante del sistema applicato in O.*

- *Ne consegue che il momento risultante di un sistema di vettori e indipendente dal polo se e solo se e' nullo il risultante del sistema.*

- *Un esempio di vettori applicati a risultante nullo e' la coppia di vettori.*

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati III)

- Operazioni elementari su un sistema di vettori applicati (non alterano **R** e **M**).

   a) Aggiunta od eliminazione di una coppia di braccio nullo
   b) Sostituzione di più vettori applicati in un medesimo punto P col vettore somma applicato in P, oppure sostituzione di un vettore a applicato in P con due o più vettori applicati in P ed aventi come risultante a.

- Due sistemi di vettori S ed S' si dicono riducibili o equivalenti se e' possibile passare dal primo al secondo con le sole operazioni elementari a) e b), poiche' le due operazioni descritte non alterano ne' il risultante ne' il momento risultante
   - Esempio: applicazione di a) due volte equivale al trasporto di un vettore lungo la propria retta d'azione

- Sistemi equivalenti di vettori applicati
  Un sistema di vettori applicati e' caratterizzato da due vettori:
     - Risultante **R**
     - Momento risultante **M**

  (entrambi vettori liberi).
  La riduzione di un sistema di vettori ad uno equivalente che sia il piu' semplice possibile può essere sintetizzata come segue:

     - **R** = 0, **M** = 0 il sistema e' riducibile a zero

     - **R** = 0, **M** ≠ 0 il sistema e' equivalente ad una coppia di momento M

     - **R** ≠ 0, $\mathbf{M}_A$ = 0 o **R** x **M** = 0 il sistema è equivalente ad un solo vettore: il risultante applicato in A od in un punto generico della retta passane per A ed avente direzione R.
       Rientrano in questo caso:
          - Vettori concorrenti in un punto
            Il sistema è riducibile a **R** applicato in P.
          - Vettori complanari non paralleli
            E' riducibili con operazioni elementari ad a vettori concorrenti in un punto
          - Vettori paralleli
            Il sistema e' riducibile ad R applicato in un punto particolare C detto centro.

     - **R** ≠ 0, **M** ≠ 0 il sistema non e' riducibile ne' ad un solo vettore ne' ad una coppia:

- Valgono i seguenti teoremi:

a) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile a tre vettori applicati in tre punti non allineati
b) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile a due vettori di cui uno applicato in un punto prefissato scelto ad arbitrio
c) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile al risultante applicato in un punto piu' una coppia

Il terzo teorema e quello di piu' vasta applicazione nella dinamica e nella statica dei sistemi rigidi.

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati IV)

Centro di un sistema di vettori paralleli

Un sistema S di vettori paralleli e' equivalente al risultante applicato in un punto particolare detto centro C del sistema di vettori.

Risultante:

$$\mathbf{R} = \sum a_k \mathbf{u} \qquad \text{u = versore}$$

Momento risultante del sistema rispetto ad un polo O generico:

$$\mathbf{M_O} = \sum \mathbf{m_k} = (\sum a_k\, OP_k) \times \mathbf{u}$$

$\mathbf{M_O} \perp \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{M_O} \perp \mathbf{R}$

Esiste C tale che il momento rispetto al punto O di R applicato in C e' uguale al momento risultante M_O (dimostrazione nel corso di meccanica razionale).

$$\boldsymbol{OC} \times \mathbf{R} = (\sum a_k\, OP_k) \times \mathbf{u}$$

Da cui:

$\boldsymbol{OC} \times \sum a_k \mathbf{u} = (\sum a_k\, OP_k) \times \mathbf{u}$

$\boldsymbol{OC} \times \sum a_k = \sum a_k\, OP_k \rightarrow OC = \sum a_k\, OP_k / \sum a_k$