TEOREMI SUL MOMENTO D'INERZIA DI UN CORPO RIGIDO

I. TEOREMA DEGLI ASSI PARALLELI

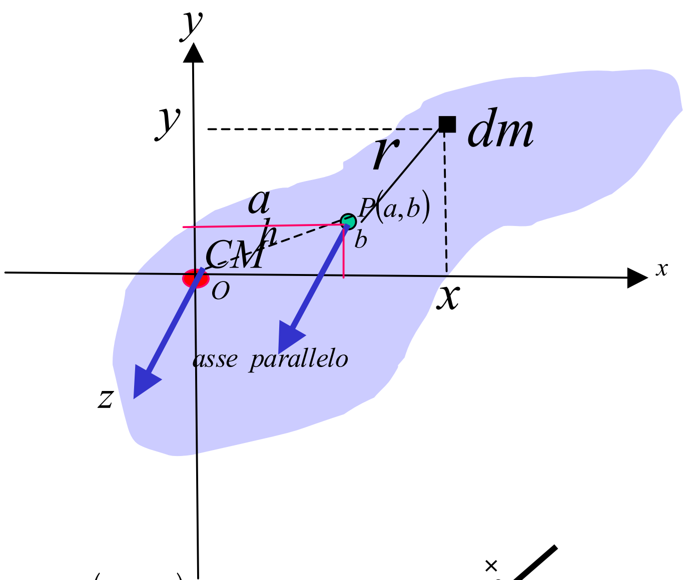
Il teorema degli assi paralleli pone in relazione il momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse che passa per il CM (I_{CM}) e il momento di inerzia I_P rispetto ad un asse parallelo a questo,passante per un altro punto P.
Se M è la massa del corpo, d la distanza fra i due assi paralleli, questo teorema afferma che

$$I_P = I_{CM} + Md^2$$

Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse che passa per il generico punto P è la somma del momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo passante per il centro di massa, più il momento di inerzia del centro di massa rispetto all'asse passante per P.

Dimostrazione

- Si sceglie un sistema di coordinate cartesiano, con origine nel centro di massa, ed asse di rotazione parallela a z perpendicolare al piano xy, e passante per il punto P di coordinate a,b.
- Si considera il punto generico di massa infinitesima dm, di coordinate x,y
- La distanza r di dm dall'asse di rotazione per P è espressa in funzione delle coordinate cartesiane di dm e P



$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$I = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] dm$$

$$I = \int (x^2+y^2)\,dm \qquad \cancel{-2a\int x\,dm} \qquad \cancel{-2b\int y\,dm} \qquad +\int (a^2+b^2)\,dm$$

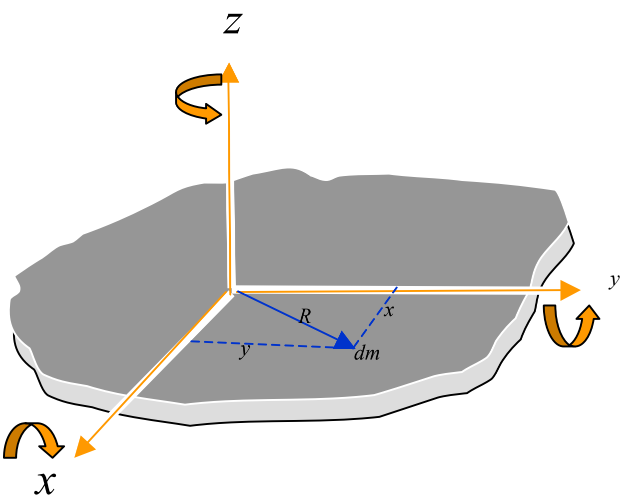
$$I_{CM} = \int (x^2+y^2)\,dm \qquad \int x\,dm = Mx_{CM} = 0 \qquad (a^2+b^2)\int dm = h^2 M$$

II. TEOREMA DEL TERZO ASSE, O DEGLI ASSI PERPENDICOLARI

Una lamina piana di forma arbitraria può ruotare attorno ad un asse perpendicolare alla lamina stessa per esempio l'asse z o a due assi perpendicolari tra loro e all' asse z ,per esempio gli assi x e y. Tra i vari momenti d'inerzia vale la relazione:

$$I_z = I_x + I_y$$

Dimostrazione:



$$dI_z = R^2 dm = \rho R^2 dV$$

$$dI_x = y^2 dm = \rho y^2 dV$$

$$dI_y = x^2 dm = \rho x^2 dV$$

$$dI_z = \rho\left(x^2 + y^2\right)dV = dI_x + dI_y$$

$$I_z = \int \rho\left(x^2 + y^2\right) dV \qquad I_x = \int \rho y^2 dV \qquad I_y = \int \rho x^2 dV$$

Ed il teorema risulta direttamente dimostrato.

MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AD ASSI CONCORRENTI (cenni)

Dato un corpo rigido e considerato un punto O, scegliamo una terna cartesiana ortogonale Oxyz ad esso solidale. Si può dimostrare che il momento d'inerzia rispetto ad una direzione **u** passante per O, di coseni direttori $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ è espresso da:

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2I_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2I_{xz} \cos\alpha \cos\gamma \qquad (1)$$

Dove:
I_x, I_y, I_z sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi x, y,z
I_{xy}, I_{yz},I_{xz} sono chiamati prodotti d'inerzia e sono definiti da:

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k,\ I_{yz} = \sum m_k y_k z_k,\ I_{xz} = \sum m_k x_k z_k$$

La relazione (1) permette di esprimere il momento d'inerzia rispetto a qualunque retta passante per O.

Dell'equazione (1) si può dare una rappresentazione mediante una superficie che va sotto il nome di Ellissoide d'inerzia rispetto al punto O. La sua importanza sta nel fatto che, una volta nota l'equazione di questa superficie relativa ad un generico punto O del corpo, è possibile ottenere il momento d'inerzia rispetto ad una qualunque retta passante per il punto stesso.

Con una opportuna scelta degli assi solidali al corpo, che indichiamo con OXYZ, l'equazione (1) si può porre nella forma "*canonica*":

$$I_u = I_X \cos^2\alpha' + I_Y \cos^2\beta' + I_Z \cos^2\gamma' \qquad (2)$$

In (2) I_X, I_Y,I_Z sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi corrispondenti e $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ i coseni direttori dell'asse u rispetto alla nuova terna. I momenti d'inerzia I_X, I_Y,I_Z si chiamano Momenti Principali d'Inerzia e gli assi XYZ vengono detti Assi Principali d'Inerzia.

Se poi il punto O coincide con il centro di massa i momenti principali d'inerzia sono grandezze caratteristiche del sistema. In questo caso, gli assi principali d'inerzia si chiamano Assi Centrali d'Inerzia o anche Assi Spontanei o Assi Liberi di Rotazione.

La determinazione degli assi principali d'inerzia passanti per un punto è di facile soluzione quando il corpo possiede elementi di simmetria. Ad esempio:

- se un corpo possiede un piano di simmetria, un qualunque asse ad esso ortogonale è asse principale rispetto al punto di intersezione con il piano, mentre gli altri due giacciono sul piano stesso;

- se il corpo possiede un asse di simmetria di massa, esso è asse principale rispetto a tutti i suoi punti

Assi liberi di rotazione

Si consideri un corpo rigido in rotazione con velocità ω attorno ad un asse ad esso solidale. Se l'asse non è di simmetria di massa, le forze centrifughe, agenti su ogni massa elementare a distanza di dall'asse, hanno risultante diverso da zero. Il loro effetto è quello di sollecitare l'asse a spostarsi dalla sua posizione; in particolare, se l'asse è fisso, la sollecitazione si scaricherà sui supporti che lo mantengono in posizione.
Si può dimostrare che per un generico corpo rigido esistono almeno tre assi per ciascuno dei quali si verifica l'annullamento del risultante e del momento risultante delle forze centrifughe e questi assi coincidono con gli assi principali d'inerzia rispetto al centro di massa (assi centrali d'inerzia). Proprio per la loro caratteristica di dar luogo all'annullamento del risultante delle forze centrifughe, essi si chiamano anche assi liberi di rotazione o assi spontanei.
Di questi assi, nel caso in cui siano solo tre, due sono stabili e precisamente quelli rispetto ai quali il momento d'inerzia assume il valore massimo ed il valore minimo, mentre il terzo è instabile: vale a dire spostando leggermente l'asse dalla sua posizione, nel primo caso tende a riacquistarla, mentre nel secondo se ne allontana.

Esempio: Nel parallelepipedo omogeneo i due assi ortogonali alle facce aventi area minima ed area massima (assi x e y di figura), sono stabili, mentre quello ortogonale alla faccia intermedia (asse z) è instabile.