Giuseppe Ciullo

Dispensa introduttiva

Fisica Generale per Laurea Triennale in Matematica

Indice

Capitolo 1
Il Metodo Scientifico e la Misura

La Fisica (dal greco $\tau\grave{\alpha}\ \phi\upsilon\sigma\iota\kappa\grave{\alpha}$: le cose naturali) si pone l'obiettivo di descrivere e prevedere il comportamento dei fenomeni naturali, nonché degli apparati e degli strumenti, che hanno reso e rendono la nostra vita più comoda ed efficiente. Tale obiettivo viene perseguito mediante un'attenta osservazione dei fenomeni, con una conseguente schematizzazione dell'osservazione, per fornire una conoscenza della realtà oggettiva, affidabile, verificabile e condivisibile.

Nel seguente capitolo si affronteranno gli argomenti relativi al metodo scientifico, che richiede la definizione delle grandezze fisiche e la loro misura.

Parte di questo argomento risulta il modo di presentare una misura e le convenzioni sui sistemi di unità di misura. Per districarsi tra le relazioni (leggi fisiche) tra le varie grandezze, l'analisi dimensionale è lo strumento necessario, sia per il loro controllo, che per la loro manipolazione.

1.1 Il metodo Scientifico

Alla base della ricerca scientifica, ma anche dello sviluppo tecnologico contemporaneo, è il *metodo scientifico*, attributo a Galileo Galilei.

Tale metodo è a fondamento di ogni disciplina, che voglia fornire una risposta, attendibile nelle previsioni dei comportamenti, sulla base di una formulazione matematica. Esso prende spunto dall'osservazione di un fenomeno e ne elabora una descrizione mediante un modello mentale, veicolato da processi di misurazione e relazioni matematiche tra le grandezze in gioco.

Nella costruzione del modello si cerca di trovare la descrizione più semplice possibile, per isolare le cause e gli effetti, che ne conseguono.

Come esempio si pensi alla caduta del grave, per trovare la relazione tra il tempo, che il grave impiega a cadere, e lo spazio, che esso percorre. Si osserva il fenomeno e si costruisce un modello.

Tale processo di pensiero è innato nell'essere umano ed ha coinvolto lo studio della natura nell'ambito della filosofia. Per secoli l'approccio è stato secondo quanto schematizzato in Fig. 1.1.

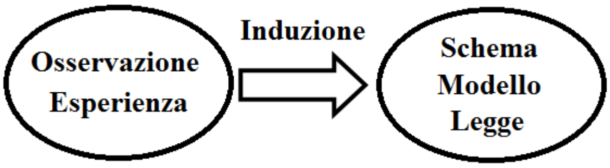

Figura 1.1 Schema a blocchi dell'osservazione della natura e induzione di un modello.

In una prima fase siamo ancora fermi ad ipotesi qualitative e la descrizione dei fenomeni risulta autoconsistente. Tale approccio risulta autoreferenziale, ovvero si ferma a descrive i processi secondo principi e schemi mentali, senza metterli in discussione, "interrogando" la natura.

Galileo Galilei ha introdotto un approccio di verifica sperimentale del modello, cercando di *dedurre* da esso comportamenti da impostare in esperienze riproducibili in laboratorio, per "interrogare" la natura con domande ben precise e circonstanziate.

Tale approccio, che oggi definiamo scientifico, è schematizzato in Fig. 1.2.

Per tornare al nostro esempio, una volta stabilito il modello, si cercherà di condurre

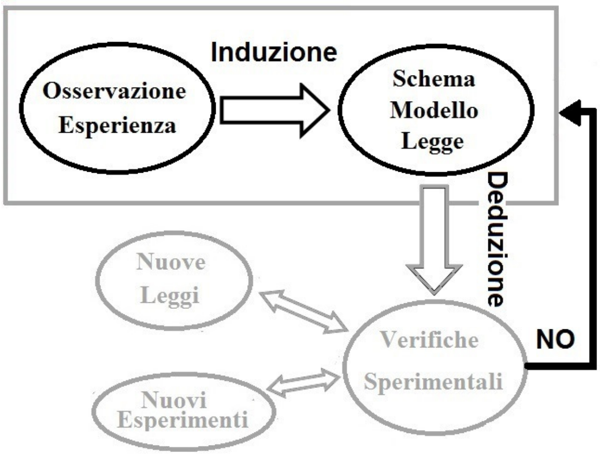

Figura 1.2 Schema a blocchi dell'osservazione dei fenomeni con il metodo scientifico.

l'esperienza della caduta del grave in assenza di vento — in un ambiente chiuso— o sotto vuoto. Se non si verifica il modello, si torna indietro e si osserva il fenomemo per descrivere un nuovo modello da sottoporre all'esperienza.

Se invece dalla misurazione del tempo t di caduta e dello spazio h percorso si può confermare il modello, descritto da una relazione funzionale $h = h(t)$, tale risultato si può utilizzare in altre prove, o per descrivere e dedurre altre leggi, per esempio il comportamento di un grave lanciato verso l'alto. In questo modo si possono formulare nuove leggi, o altri possibili schemi di esperimenti. In ogni caso tutto deve passare attraverso le verifiche sperimentali, come indicato in Fig. 1.2.

La combinazione di varie leggi, e la loro verifica sperimentale, in una descrizione completa dei fenomeni correlati, permetterebbe di formulare una teoria, per esempio le teoria della attrazione gravitazionale terrestre (che poi si potrebbe estendere all'attrazione gravitazionale universale).

Il metodo scientifico, schematizzato in Fig. 1.2 con un diagramma a blocchi e descritto con l'esempio — alla portata di tutti — della caduta di un grave, è di fondamentale importanza, per affrontare problemi concreti, ed è per la formazione scientifica uno strumento, al quale bisogna educarsi ed educare.

Come si può verificare una relazione tra grandezze?

Per fare questo, nella verifica sperimentale di una legge le grandezze in gioco devono essere determinate quantitativamente.

1.2 Le grandezze fisiche e la loro misurazione

Interrogare in modo circostanziale la natura, significa, quindi, stabilire, se le grandezze fisiche seguono il modello mentale (descritto con il linguaggio matematico) costruito sulla base dell'osservazione.

Significa predisporre un'esperienza ed ottenere una risposta quantitativa, da confrontare con quanto atteso.

Bisogna quindi definire le grandezze fisiche, trovare i criteri per individuarle e le operazioni necessarie a definirle e descriverle quantitativamente.

Una grandezza è una classe di elementi, che soddisfanno i seguenti criteri:

- il *criterio di uguaglianza*,
- il *criterio di somma*,
- la *definizione di un campione*.

Come esempio chiave per discutere una classe (una grandezza) e capire tali criteri, utilizziamo la lunghezza, con la quale ci confrontiamo quotidianamente.

La fisica è una scienza operativa, per cui si dovrebbero verificare tali criteri "operativamente", come faremo per esempio di seguito per la lunghezza.

Il criterio di uguaglianza tra due segmenti AB e CD è soddisfatto, se, facendo corrispondere l'inizio del segmento AB con l'inizio del segmento CD, si osserva che anche le due estremità opposte coincidono perfettamente.

Il criterio di somma, espresso dalla relazione matematica $AB + CD$, si ottiene facendo combaciare la fine del primo segmento (AB) con l'inizio del secondo segmento (CD), il risultato sarà un segmento $AB|CD$, che coincide con un segmento equivalente, che abbia l'inizio coincidente con l'inizio di $AB|CD$ e la fine coincidente con la fine di $AB|CD$. Tale segmento equivalente, che potremmo chiamare EF, soddisfa la relazione $EF = AB + CD$.

Questi criteri stabiliscono dei vincoli “matematici” forti: possiamo utilizzare tali criteri solo con grandezze, che li soddisfino, e che appartengono pertanto alla stessa classe.

Questo significa che la relazione matematica del tipo:

$$a = b + c$$

per la fisica vale, se e solo se a, b e c sono grandezze della stessa classe, il che equivale a dire, che a tutti i termini si possano applicare i criteri di uguaglianza e di somma. Nel dettaglio che b e c si possano sommare e che si possa verificare che a risulta equivalente alla somma di $b + c$.

Manca ancora un *campione, al quale riferire le grandezze*.

Possiamo fornire per segmenti diversi la rispettiva lunghezza come confronto con un riferimento, e quindi dire che un segmento sia un multiplo (o sottomultiplo) di volte tale riferimento. Un riferimento universalmente riconosciuto ed immutabile nel tempo è chiamato *campione di misura*.

La definizione del campione risulta necessaria, per diffondere in modo coerente risultati ed informazioni.

Per assurdo si potrebbe pensare, che nel proprio laboratorio uno sperimentatore possa decidere a suo piacimento un campione per la lunghezza e stabilire la misura delle grandezze omogenee in rapporto ad esso. Tale informazione non sarebbe fruibile e condivisibile facilmente a livello universale.

Quindi per l'*universalità della fisica* si richiede, che il campione sia accettato da tutti, in quanto riproducibile ed invariabile.

La metrologia si interessa e studia i sistemi di unità di misura e come renderli universali e immutabili, nonché si preoccupa di definire e trovare i campioni di unità di misura. È una scienza che ha trascorsi storici, è in continua evoluzione ed ha portato nel corso del tempo a modificare i campioni di riferimento. Nell'ambito di questo corso prenderemo direttamente, quanto universalmente proposto e riconosciuto da comitati e/o istituzioni internazionali, preposti al controllo ed alla definizione degli standard internazionali (ovvero il “ Bureau International des Poids et Mesures”, BIPM), che rilasciano pubblicazioni aggiornate su siti ufficiali per il BIPM si veda http://www.bipm.org.

Per questo corso riteniamo appropriato utilizzare le informazioni presenti in un pieghevole disponibile sul sito del BIPM [2]. Nel sito suddetto si trovano informazioni storiche, nonché gli aggiornamenti sui campioni utilizzati.

La misura di una grandezza

Misurare una grandezza G significa confrontarla con il campione di riferimento $\{G\}$ ed esprimerla quindi come multiplo o sottomultiplo di esso. In modo formale una grandezza fisica G sarà descritta dalla sua misura g come:

$$g = \frac{G}{\{G\}} \ ,$$

espressa da un simbolo in corsivo, un numero e un'unità di misura, queste ultime invece in testo piano. Supponiamo di misurare la grandezza L, lunghezza di un segmento, che riporteremo come l, che risulta dal confronto con il campione (metro) in rapporto pari a 10 , riporteremo la misura come segue:

$$l = 10 \text{ m} \ .$$

Questa sarebbe la notazione, che di solito si utilizza e che risulta simile a quanto fornito nel caso dei problemi di fisica, anticipiamo che, perché, quanto riportato, sia "riconosciuto" come frutto di una misura, deve essere corredato anche con *un'incertezza*, cosa di solito non contemplata nei problemi di fisica.

Ma andiamo per passi. Prima di arrivare all'incertezza è opportuno chiarire l'importanza dell'uso dei simboli, nello studio delle leggi fisiche e per la loro manipolazione. La sua presentazione come numero risulta la parte finale di tutta l'elaborazione della parte sperimentale e del lavoro di analisi dei dati, o come nel caso dei problemi nei corsi di teoria dal calcolo sulle leggi fisiche.

Nel corso della storia ci sono stati sviluppi e studi, per arrivare a stabilire, che le leggi fisiche risultano più universalmente comprensibili, se si utilizzano i simboli piuttosto che i valori numerici.

Si pensi allo sviluppo dell'algebra nella relazione $a^2 = b^2 + c^2$ rispetto a $5^2 = 4^2 + 3^2$. L'equazione simbolica gode di un'universalità nella descrizione, che non è contemplata nella limitatezza dell'espressione numerica.

La corda a dodici nodi era nota già agli architetti egizi, per costruire strutture ad angolo retto, ma solo il formalismo e la generalizzazione ha reso l'equazione suddetta uno dei teoremi fondanti della matematica, grazie a Pitagora.

Per la fisica c'è una argomentazione in più: l'utilità di esprimere equazioni e risultati con i simboli, piuttosto che con i numeri, sta nella fatto che, se esprimiamo per esempio la lunghezza con unità di misura diverse $L = \{L\}\,[L]$ e $L = \{L'\}\,[L']$, si osserva che la *quantità fisica è invariante*, mentre le quantità numeriche devono soddisfare la regola della proporzionalità inversa rispetto alle unità di misura.

Questa descrizione simbolica, può sembrare a primo acchito in disaccordo con l'operatività della fisica, in quanto cerchiamo di misurare e quindi di esprimere numericamente il valore di una grandezza, va utilizzata nelle relazioni funzionali e nelle operazioni, prima di giungere al risultato finale. Solo alla fine è opportuno riportare i valori numerici.

Per questo si consiglia agli studenti di sforzarsi nell'utilizzo di simboli, per il calcolo di qualsiasi tipo di equazione, soprattutto nel ricavare le relazioni funzionali.

Sistemi di unità di misura

I sistemi di unità di misura sono ormai catalogati a livello internazionale e stabiliscono un minimo di grandezze dette *fondamentali*, dalle quali sono *derivate* tutte le altre. In un certo senso l'uso corretto delle grandezze e delle unità di misura può essere associato ai dettagli della grammatica per una lingua. Spesso l'insegnamento della grammatica viene ritenuto futile e poco pratico, dando come risultato lacune di precisione nel linguaggio. Per una scienza esatta le lacune di precisione nel significato e nella chiarezza di espressione non sono tollerabili. Pertanto si invita lo studente a consultare le indicazioni del BIPM ed avere a portata di mano il sommario delle convenzioni del SI [2], in cui sono disponibili le unità di misura delle grandezze fondamentali e derivate ed infine i prefissi dei multipli e sottomultipli.

Nel corso di questo testo cercheremo di seguire le indicazioni editoriali suggerite dal BIPM per il SI. Nella presentazione di risultati scientifici il SI internazionale richiede uno *stile tipografico* opportuno. I *simboli*, che esprimono le grandezze fisiche, vanno in *corsivo*, *i numeri* in testo piano le *unità di misura* e *prefissi* in testo piano. Tra numeri e unità di misura si richiede *uno spazio*.

Nei numeri le posizioni multiple di mille richiedono uno spazio, p.e., se dovessimo fornire la velocità della luce nel vuoto, scriveremmo:

$$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m\ s^{-1}}\ .$$

Si osservi che si lascia uno spazio tra numero ed unità di misura. Inoltre risulta più chiaro riportare m s^{-1} piuttosto che m/s, kg m^{-3} invece che kg/m^3.

Anche nelle cifre decimali la separazione va effettuate per sottomultipli di millesimi, per esempio scriveremo 0.045 657 098. Nella tabelle, nei calcoli e nei grafici, per comodità e/o per maggiore compattezza, non ci preoccuperemo di usare tale spaziatura, però avremo l'accortezza di seguire tali indicazioni nella presentazione dei risultati finali.

Per il sistema internazionale si definiscono *grandezze fondamentali* il numero minimo di grandezze necessarie, per descrivere i fenomeni fisici, e sono riportate in Tab. 1.1, dove si fà notare che per le grandezze i simboli sono in corsivo, mentre per le unità di misura i simboli devono essere riportati in testo piano. Non affronteremo l'argomento della definizione di un campione sulla base delle costanti fisiche, rimandando gli interessati agli aggiornamenti disponibili al riferimento [1], ma segnaliamo lo sforzo della fisica di avere, come campioni per le unità di misura, sistemi riproducibili, universalmente riconosciuti e inalterabili nel tempo. Questo ha portato alla definizione del campione della lunghezza, ovvero il metro, come lo spazio percorso dalla luce nel vuoto in un tempo 1/(299 792 458) s.

I dettagli sull'evoluzione dei campioni delle unità fondamentali, sono reperibili sul sito ufficiale del BIPM [1].

Le grandezze derivate possono essere espresse in funzione di quelle fondamentali.

Una qualsiasi grandezza G avrà come dimensioni:

$$[G] = \mathrm{L}^{\alpha}\ \mathrm{M}^{\beta}\ \mathrm{T}^{\gamma}\ \mathrm{I}^{\delta}\ \Theta^{\varepsilon}\ \mathrm{N}^{\zeta}\ \mathrm{J}^{\eta}\ .$$

Tabella 1.1 Nome delle grandezze fondamentali nel (SI) (1^a colonna), simbolo usato (2^a colonna), dimensione (3^a colonna), unità di misura (4^a colonna) e corrispondente simbolo dell'unità di misura (5^a colonna)

Grandezza	Simbolo	Dim.	Unità di misura	Simbolo u.m.
lunghezza	l	L	metro	m
massa	m	M	chilogrammo	kg
Tempo	t	T	secondo	s
corrente	I	I	ampére	A
temperatura	T	Θ	kelvin	K
quantità di sostanza	n	N	mole	mol
intensità luminosa	I_v	J	candela	cd

Per esempio la forza, che nel sistema internazionale viene espressa in Newton N (da non confondere con N quantità di sostanza), risulta $[F]$ = N (Newton). Se espressa secondo le grandezze fondamentali ($F = ma$), risulta $[F]$= M L T^{-2}.

Possiamo utilizzare anche le unità di misura, per cui diremo che l'unità di misura per il SI della forza è il Newton, che espresso in unità di misura delle grandezze fondamentali è pari a kg m s^{-2}.

Ritorneremo spesso su questo, nonostante possa sembrare banale e ripetitivo, è e deve essere uno strumento quasi istintivo di controllo delle equazioni sotto studio e della loro derivazione successiva.

L'analisi dimensionale delle grandezze espresse per dimensione, può essere una prima osservazione preliminare, per accettare o meno un'equazione. Nella fase conclusiva, in cui si deve fornire un risultato, è necessario controllare anche l'omogeneità delle unità di misura anche rispetto ai multipli o sottomultipli.

Andiamo ancora più a fondo. Nel caso in cui una grandezza sia espressa con gli esponenti di ogni grandezza fondamentale nulli, si dice che tale grandezza ha dimensione nulla, ovvero $[G]$=1. Se tutte le dimensioni fondamentali sono elevate a zero, si ha infatti come risultato uno. I numeri sono adimensionali, gli angoli (Probl.1.4), risultano adimensionali, gli argomenti della funzione esponenziale (in e^x si ha che x deve essere adimensionale) e delle funzioni trigonometriche sono adimensionali.

Il sistema internazionale adotta come separatore per le cifre decimali la virgola, ma vista l'evoluzione dell'utilizzo del punto, soprattutto a causa della diffusione dei computer, ne ammette la possibilità dell'utilizzo.

Nel seguente testo e nel corso stesso useremo il *punto* come *separatore per le cifre decimali*.

1.3 L'analisi dimensionale

L'*analisi dimensionale* è uno strumento molto potente, che gli studenti devono usare quasi d'istinto in ogni loro passaggio nella derivazione di relazioni tra grandezze.

Per questo corso risulta indispensabile, in quanto si affronterà la termodinamica, mentre in parallelo si affronteranno gli argomenti iniziali della fisica (Meccanica), che sono il punto di partenza della termodinamica stessa. Pertanto le leggi fisiche, utilizzate, possono essere accettate, anche se non derivate dall'inizio nel corso.

La *condizione necessaria*, ma *non sufficiente*, che permetta di controllare la correttezza del modello teorico o del calcolo, è appunto l'analisi dimensionale.

Sulla base dei criteri, che definiscono una grandezza fisica, ovvero il criterio di uguaglianza ed il criterio di somma , non è possibile, né confrontare, né sommare due grandezze, se non sono omogenee: se non hanno la stessa dimensione e siano espresse nella stessa unità di misura.

Una relazione del tipo $a = b$ deve soddisfare non solo l'uguaglianza numerica, ma anche la dimensione e la rispettiva unità di misura (espressa anche come multipli o sottomultipli in modo coerente).

Se esprimiamo con numeri ed unità di misura due grandezze A e B nel seguente modo "num$_A$ u.m.$_A$ = num$_B$ u.m.$_B$", questa relazione vale, se le grandezze sono omogenee, ovvero stessa dimensione, se i valori numerici sono uguali e anche le unità di misura sono le stesse.

Stessa considerazione vale per il criterio di somma: posso sommare grandezze, che abbiano la stessa dimensione e conseguentemente la stessa unità di misura. Quindi un'equazione del tipo $a = b + c$ vale in fisica, se le dimensioni di a, che si indicano con $[a]$, sono le stesse delle dimensioni di $[b + c]$, dove ovviamente per poter sommare b e c necessariamente le dimensioni devono essere le stesse: $[b]$=$[c]$. A livello operativo, calcoli o misure, per dimensioni intendiamo anche le unità di misura usate, se al primo membro per a, nel caso di una lunghezza, usiamo i metri, non possiamo esprimere $b + c$ in centimetri. Come non possiamo sommare b espresso in m direttamente con c espresso in cm.

Facciamo un esempio che chiarisca come comportarsi, e gli esercizi proposti sono formativi per chiarire l'argomento.

α .... α .... **Inizio Esempio** .... ℵ .... ℵ

Supponiamo di trovarci nel caso del moto rettilineo uniforme la cui legge è:

$$x = x_0 + v_0 t \ ,$$

da cui vogliamo, misurati posizione iniziale (x_0) e la la posizione x ad un dato tempo t, fornire la velocità v_0. Sebbene non abbiamo parlato del moto rettilineo uniforme, grazie all'analisi dimensionale possiamo accettare la legge.

Per ora consideriamo x, x_0 e l'intervallo t, intercorso tra l'istante in cui abbiamo osservato il corpo in x_0 e quello in cui l'abbiamo osservato nel punto x. Allora esprimeremo la velocità come:

$$v_0 = \frac{x - x_0}{t},$$

e consideriamo le dimensioni, $[v_0]$ al primo membro si ha L T^{-1}, in quanto velocità. Per il criterio di uguaglianza, quanto espresso nel secondo membro deve avere le stesse dimensioni del primo membro. Consideriamo il numeratore del secondo membro, per il criterio di somma devo avere grandezze, che abbiano la stessa dimensione, ed infatti $[x]$= $[x_0]$= L, ci siamo, allora posso sommarle tra loro ed $[x - x_0]$= L.

Il secondo membro risulta $[(x - x_0)/t]$ =L T^{-1}, dividendo lo spazio per il tempo.

Questa analisi, con i soli simboli delle dimensioni, va bene ai fini della verifica dell'equazione, ma nel risultato finale l'equazione sarà utilizzata in modo corretto, se si considerano le dimensioni corredate dalle rispettive unità di misura appropriate. La velocità a primo membro va espressa secondo il sistema internazionale in m s^{-1}. La somma o sottrazione tra x ed x_0 si può fare, se entrambe sono espresse in m, il secondo membro alla fine risulterà appropriato, se divideremo lo spazio espresso in metri (m), per il tempo espresso in secondi (s). L'analisi dimensionale è corretta, se esprimiamo le dimensioni con le rispettive unità di misura omogenee.

$\sqsupset$ .... $\sqsupset$ .... **Fine Esempio** .... ω .... ω

Evidenziamo che

perché una formula sia correta la condizione necessaria, ma non sufficiente, è che le dimensioni delle grandezze, che si sommano e si uguagliano, siano le stesse.

Passo successivo, nel riportare i valori numerici e le unità di misura, bisogna stare attenti all'uniformità tra loro.

In questa parte introduttiva non deriveremo le leggi dall'inizio, ma le useremo per i fondamenti minimi alla termodinamica, per cui è fondamentale, che lo studente acquisisca un certa abilità, nel *controllare* le leggi teoriche fornite e si eserciti con questo strumento. Tale strumento gli sarà indispensabile, anche nel seguito del corso, per controllare i suoi stessi calcoli.

Per questo motivo sarà richiamata spesso l'analisi dimensionale, come verifica delle formule fornite o anche dedotte, ed invitiamo vivamente lo studente a svolgere i seguenti problemi.

Problemi

1.1. Con l'utilizzo dell'analisi dimensionale verificare, se la seguente relazione è corretta:

$$x = x_0 + mv_0 + \frac{5}{7}at \ ,$$

dove si esprimono $[x]$=$[x_0]$=L, $[v_0]$ = L T^{-1}, $[m]$ = M, $[a]$=L T^{-2} ed infine $[t]$=T.

1.2. Con l'utilizzo dell'analisi dimensionale verificare, se la seguente relazione è corretta:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - cos\theta) \ ,$$

dove si esprimono ν e ν' in s^{-1} (o hertz per cui si usa il simbolo Hz), h in J s, m_e in kg ed infine c in m s^{-1}.

1.3. Chiarire mediante l'analisi dimensionale, se le seguenti relazioni sono corrette:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ \text{ oppure } \ T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}} \ .$$

Si chiarisca, grazie a tale esempio, l'affermazione: l'analisi dimensionale è condizione necessaria, ma non sufficiente, perché una formula sia corretta.

1.4. Lo sviluppo in polinomi di Taylor di sen θ, dove θ è espresso in radianti, risulta:

$$\text{sen}\theta \overset{Taylor}{\approx} \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 \cdots$$

utilizzare tale sviluppo per chiarire, che l'angolo θ ha dimensione nulla, e quindi è adimensionale.

1.5. Verificare mediante l'analisi dimensionale la relazione:

$$f = \frac{2}{\pi R}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgR\right) \ ,$$

dove per la prima equazione f è espressa in N, R in m, m in kg, v in m s^{-1} e g in m s^{-2}.

1.6. Verificare mediante l'analisi dimensionale la relazione:

$$v = \sqrt{{v_l}^2 + 2\mu_d g D} \ ,$$

dove $[v]$=$[v_1]$= L T^{-1}, $[\mu_d]$=1, $[g]$=L T^{-2} e $[D]$=L. Chiarite la differenza tra l'analisi dimensionale di questo esercizio e del precedente. Prendere confidenza del fatto che per l'espressione del risultato finale è necessario esprimere le unità di misura come nel Probl.1.5.

Capitolo 2
Misure e incertezze: conseguenze nel calcolo in Fisica

Sommario Dal punto di vista fisico un numero esprime la misura di una grandezza. Ogni misura è affetta da un'incertezza. In questo capitolo diamo alcuni cenni sulle incertezze, che giustificano l'atteggiamento dei fisici nei confronti della precisione dei numeri, che esprimono una grandezza fisica, e di conseguenza l'attenzione riposta nella significatività nei calcoli per gli esercizi di fisica. Un numero fornito ha significato per le cifre indicate, la cifra meno significativa, quella più a destra, è incerta, incertezza che si propaga nei calcoli.

2.1 Incertezza nella misura di una grandezza

La fisica si propone di misurare le grandezze, che significa assegnare un numero x, che indichi il rapporto rispetto ad una grandezza omogenea, universalmente riconosciuta e definita come campione $\{\mathrm{X}\}$, e la grandezza da misurare X. Tale numero è dato dalla relazione:

$$x = \frac{X}{\{\mathrm{X}\}} \ .$$

Spesso tale operazione viene sottintesa e si parla indistintamente della *grandezza* X o della sua *misura* x.

L'*incertezza* (detta anche *errore*) nella fisica classica è data da limitazioni *strumentali*, e dalla difficoltà nell'isolare completamente un fenomeno fisico, al punto da evitare variazioni della misura, dette "*casuali*". Queste ultime hanno la particolarità, se compaiono con un certo valore, di avere la stessa probabilità, che si presentino con il segno meno o con il segno più rispetto al "valore vero" della grandezza.

L'incertezza risulta essere inevitabile nell'osservazione delle leggi naturali, di conseguenza lo studio e la sua valutazione sono fondamentali, per fornire una descrizione quantitativa dei fenomeni.

In ogni situazione, o campo, una condizione imprescindibile per un fisico, o un tecnologo, è *non ritenere attendibile una misura*, che *non* sia *corredata dell'incertezza*.

La misura x di una grandezza fisica *deve essere presentata* nel modo seguente:

$$x = x_{ms} \pm \delta x \ ,$$

dove

x_{ms}: è un valore numerico, che riteniamo la *migliore stima* (il pedice *ms* sta per migliore stima) e fornisce il rapporto della grandezza rispetto ad un campione di riferimento,

δx: è un'incertezza, espressa con un numero in valore *assoluto*, etichettata con il simbolo δ e detta anche *incertezza assoluta totale*, che fornisce il rapporto dell'incertezza rispetto ad un campione di riferimento.

Significa affermare, che la nostra misura x della grandezza X possa essere compresa nell'intervallo

$$x_{ms} - \delta x \leq x \leq x_{ms} + \delta x \ .$$

L'incertezza totale si compone di vari tipi di incertezze.

2.2 Misura e incertezze.

Iniziamo con il descrivere le *misure dirette* di grandezze fisiche ed anticipare alcune considerazioni generali, per chiarire la necessità della significatività di un numero, in quanto espressione di una misura.

Forniremo alcune informazioni sulle *misure indirette*, per chi è curioso, alla fine di questo capitolo, ma non saranno trattate a lezione. Le incertezze sulle misure indirette sono ottenute dalla propagazione delle incertezze sulle misure dirette.

Si parla di misura *diretta* di una grandezza, quando viene effettuata mediante confronto diretto con regoli, o mediante l'utilizzo di strumenti sensibili alla grandezza stessa: i.e. la misura della velocità (istantanea) di un'auto mediante il suo tachimetro a bordo.

Si parla invece di misura *indiretta*, quando viene dedotta grazie a leggi (relazioni funzionali), che descrivono una relazione della grandezza con altre, misurate direttamente, o a loro volta anche indirettamente, i.e. la misura della velocità (media) di un'auto mediante il rapporto tra la misura diretta dello spazio percorso, effettuata con un regolo, e la misura diretta, effettuata con un cronometro, dell'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.

Le incertezze posso essere strumentali di lettura o di accuratezza, e casuali.

Incertezze di lettura

L'incertezza di lettura, come dice la definizione, dipende dalla lettura del misuratore. Per chiarire come comportarsi, osserviamo un sistema analogico (termometro a mercurio in Fig. 2.3 a) ed uno digitale (in Fig. 2.3b). Si osserva per il caso del termometro analogico, che il livello di mercurio si colloca vicino alla tacca 25.7 °C, e non si è in grado di risolvere meglio tale osservazione. Presentiamo come incertezza di lettura la *metà dell'unità fondamentale o risoluzione*.

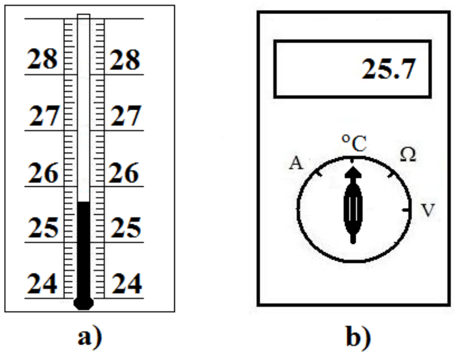

Figura 2.1 Sistemi di misura più diffusi: **a**) scala graduata e **b**) visualizzatore digitale.

Si riporterà quindi la misura della temperatura come:

$$T = 25.7 \pm 0.05\ ^{\circ}\mathrm{C}(\text{ misura con scala o strumento analogico}).$$

Consideriamo ora il caso del visualizzatore digitale, sul quale si legge il valore 25.7 °C, l'unità fondamentale è, in questo caso, il minimo, che lo strumento riesce a risolvere, ovvero 0.1 °C, detta risoluzione dello strumento.

Con gli strumenti digitali, risulta più accettabile la definizione dell'incertezza di lettura, come la metà della risoluzione. Se leggiamo 25.7 °C, questo valore potrebbe risultare a partire da un minimo 25.65 °C ad un massimo 25.74 °C.

Risulterà opportuno e chiaro riportare come misura:

$$T = 25.7 \pm 0.05\ ^{\circ}\mathrm{C}\ \text{ misura con strumento digitale},$$

in questa approssimazione è stato incluso tutto l'intervallo dei possibili valori.

Nel caso che si osservi *solo un valore* in lettura, si riporta come migliore stima il *valore letto* e come incertezza la *metà della risoluzione* strumentale. Tale incertezza la indicheremo con la lettera greca epsilon (ε) e con al pedice il simbolo della grandezza corrispondente, in questo caso particolare, in cui misuriamo la grandezza temperatura, scriviamo ε_T.

In genere per una grandezza g qualsiasi indicheremo simbolicamente l'incertezza di lettura con ε_g

Incertezze di accuratezza

Nelle misure dirette altre incertezze possono derivare dalla non *taratura* (o *calibrazione*) del regolo.

Problema che potrebbe scaturire per difetti di costruzione, per usura nel tempo, per utilizzi impropri e vari altri motivi. Questo tipo di incertezza è detta "*strumentale di accuratezza*".

Per un regolo ci si potrebbe aspettare, che si sia dilatato, o contratto.

Consideriamo il termometro analogico. Cosa succede se tutto il sistema bulbo-capillare del termometro si abbassa rispetto alla scala graduata [1]?

Ogni lettura di temperatura sarà falsata di un valore sempre positivo.

Supponiamo di poter controllare, con un altro termometro, o con un processo attendibile e riproducibile (per esempio punto di fusione del ghiaccio e punto di ebollizione dell'acqua distillata) il termometro e notare che tutta la scala graduata risulta più in alto di 2 °C. Allora ad ogni nostra misura dovremmo sottrarre 2 °C.

Questo processo di "controllo" viene detto *calibrazione* o *taratura* dello strumento. E tali incertezze sono dette sistematiche di *accuratezza*.

Uno strumento scientifico per costruzione ha un'incertezza di accuratezza inferiore e quindi trascurabile rispetto alla sua risoluzione.

Etichettiamo questo tipo di incertezza come η, se si è in grado di fornire il segno di tale incertezza, grazie ad una calibrazione, allora riportiamo:

$+$ oppure $-\ \eta$, si riporta il segno positivo oppure quello negativo,

se non riusciamo ad isolare il segno, si riporta invece:

$\pm\eta$, per esempio se fornito dalla casa costruttrice.

Le incertezze di accuratezza sono difficili da individuare, spesso si deve trovare un modello predittivo, che permetta di isolarle o eliminarle, per questo nelle misure si trovano, come di seguito, riportate quelle di lettura e quelle casuali. Se fornite dalla ditta, come quelle di lettura, comprendono un intervallo del 100 % , in cui ci aspettiamo si trovi il valore vero.

Spesso le incertezze di accuratezza sono da individuare con dedicati ed approfonditi lavori di indagine sperimentale, e modellizzazione matematica, tutto con stretti vincoli alla situazione reale. Presenteremo un esempio solo per curiosità alla fine del capitolo.

---

[1] Se osservate per esempio i termometri di utilizzo domestico, il bulbo-capillare è vincolato a volte con semplici fili metallici.

Incertezze casuali

Supponiamo che, sempre in condizioni ambientali o sperimentali invariate, i valori sul visualizzatore del termometro digitale varino senza alcuna evidente motivazione.

Possiamo fare una serie di ipotesi: correnti d'aria, non sufficiente isolamento della stanza, che permetta una regolazione costante della temperature, ecc., l'operatore che alita sulla parte sensibile del termometro.

Dopo aver cercato di eliminare qualsiasi perturbazione, vediamo, che ancora non siamo in grado di "evitare" delle variazioni.

Dobbiamo fornire la misura della temperatura della stanza e quindi dobbiamo trovare un modo per presentare la nostra misurazione.

Nel caso di osservazioni diverse nella misura della stessa grandezza, si ottiene che la *migliore stima della misura* (g_{ms}) sia la *media aritmetica* di tutte le misure g_i, indicata con $\overline{g}$:

$$\overline{g} = \sum_{i=1}^{n} g_i \Big/ n$$

dove g_i è ogni singola misura registrata, n il numero totale di dati, il simbolo $\sum_{i=1}^{n}$ indica la sommatoria di indice i da uno ad n.

Si ottiene come *migliore stima dell'incertezza* la cosiddetta *deviazione standard del campione* σ_g, definita nel seguente modo:

$$\sigma_g = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (g_i - \overline{g})^2 \Big/ (n-1)} \,. \tag{2.1}$$

Il perchè di queste scelte ha una solida conferma formale nella cosiddetta distribuzione di probabilità di Gauss.

Una buona stima dell'*incertezza casuale* è data da σ_g nella (2.1).

Quanto buona sia questa stima, i criteri per definirla tale e quanti dati servono, perché si possa verificare che segua la distribuzione di Gauss, sono argomenti della statistica.

Useremo per una grandezza generica g per tali incertezze il simbolo σ_g, tale valore individua invece un intervallo del 68 % dei valori osservati.

Combinazione delle varie incertezze

Quello che si propone la fisica è verificare un modello, per ora ci limitiamo per esempio ad un valore atteso di una determina grandezza, indicato in genere con g_{att}, come si osserva in Fig. 2.2, dove abbiamo riportato come argomento di confronto g_{ms} l'intervallo individuato da $\pm\delta g$, lo studio comprende l'analisi dei dati sulla base della statistica e la distribuzione delle densità di probabilità di Gauss, costruita utilizzando come parametri proprio i valori misurati g_{ms} e δg.

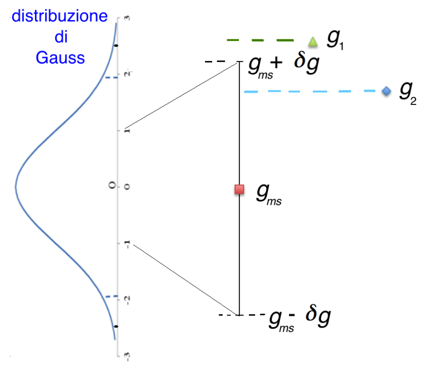

Figura 2.2 Confronto tra due modelli, quindi due valori attesi, che indichiamo g_1 e g_2, con la misura $g_{ms} \pm \delta g$. Viene qui riportato il confronto didattico con l'intervallo della misura. La discussione statistica si basa invece sulla distribuzione della densità di probabilità di Gauss, costruita utilizzando come parametri i valori misurati. La discussione è più elaborata e si accetta di rigettare un'ipotesi con un rischio bassissimo per un'ipotesi probabilmente buona (1 % di probabilità di rischio).

La verifica viene effettuata su un intervallo, che dipende dall'incertezza, se il valore atteso è fuori e si valuta una probabilità che possa invece essere buono solo dell' 1 % viene rigettato, non vogliamo rischiare di più nel rigettare un ipotesi.

Gli esperimenti di fisica sono orientati proprio a "rigettare" modelli o ipotesi, per individuarne una sola accettabile come valida.

A livello didattico qui possiamo limitarci al semplice confronto dell'intervallo individuato proprio dall'incertezza, come indicato anche in Fig. 2.2, nella quale abbiamo anche indicato la corrispondenza nella distribuzione di Gauss.

Ma l'incertezza totale, δg, che è un parametro fondamentale per individuare l'intervallo di rigetto, o accettazione, deve comprendere tutte le incertezze, che vanno combinate in modo appropriato.

Per l'incertezza di lettura ci aspettiamo che il 100 % delle misure cadano nell'intervallo: $g_{ms} - \varepsilon_g \leq g \leq g_{ms} + \varepsilon_g$. Abbiamo visto che per il termometro digitale avremmo ε_T=0.05 °C, dato che la risoluzione è 0.1 °C.

Supponiamo ora di osservare due valori oscillanti, per esempio 25.7 °C e 25.6 °C. Possiamo fornire come miglior stima della misura la media $T_{ms} = \overline{T} = 25.65$ °C

Nel calcolo della deviazione standard del campione si osserva che all'aumentare del numero di misure questa tende a 0.05 °C (probl. 2.1).

Potremmo quindi fornire la misura con un'incertezza casuale :

$$T = 25.65 \ \pm \ 0.05_{cas} \ ^{\circ}\mathrm{C},$$

dove con il pedice $_{cas}$ abbiamo evidenziato proprio l'incertezza casuale.

Per la risoluzione dello strumento in uso, la lettura 25.6 °C potrebbe cadere nell'intervallo 25.55 – 25.64 °C, mentre la misura 25.7 °C potrebbe essere compresa tra 25.65 – 25.74 °C.

Se forniamo la misura 25.65 ± 0.05 °C, non abbiamo incluso tali intervalli, percui dovremmo aggiungere anche l'incertezza di lettura ovvero avremo come risultato

$$T = 25.65 \pm 0.05_{cas} \pm 0.05_{lett} \ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Questo modo di combinare le incertezze viene detto *somma lineare* tra le incertezze casuali ($_{cas}$) e quelle sistematiche di lettura ($_{lett}$), si ha pertanto che:

$$\text{incertezza totale } \delta T \;=\; 0.05 + 0.05\ ^\circ\text{C} \;=\; 0.1\ ^\circ\text{C},$$

che abbiamo ottenuto dalla *somma lineare* delle incertezze casuale e di lettura.

La statistica sulla base dell'indipendenza tra l'incertezza casuale e quella strumentale ci permette di fornire come miglior stima dell'incertezza la cosiddetta *somma in quadratura* [2]:

$$\text{incertezza totale } \delta T \;=\; \sqrt{0.05^2 + 0.05^2}\ ^\circ\text{C} = 0.070\,710\,678\,11\ ^\circ\text{C}.$$

Ci servono tutte queste cifre?

Continuiamo ancora la discussione e vedremo che avremo sempre da confrontarci con calcoli, che fornisco misure, quindi numeri, con varie cifre.

Quanto mostrato per due valori, che si osservano continuamente in alternanza, si estende a piu valori osservati, dobbiamo sempre tenere conto dell'incertezza di lettura, otteniamo nel caso generale di misure diverse, o ripetute nelle stesse condizioni:

$$\text{incertezza totale } \delta T \;=\; \sqrt{\sigma_T^2 + \varepsilon_T^2}\ .$$

Il risultato di tali operazioni è che ci troviamo davanti a calcoli sulle incertezze, che forniscono numeri con diverse cifre:

> Non è necessario lo sforzo di portarsi dietro tutte queste cifre, che non cambiano il senso della discussione, anzi portano a rischi di errori di calcolo. Dato che il confronto si basa su $\mid g_{ms} - g_{att} \mid < \delta g$ è sufficiente una cifra significativa per l'incertezza e uniformare la misura in modo che la cifra più a destra della misura g_{ms} sia nella stessa posizione della stessa cifra dell'incertezza.

Se misuro per esempio una costante di accelerazione gravitazionale 9.8309450 m s^{-2} e come incertezza 0.034569 m s^{-2}. Si arrotonda l'incertezza a 0.04 m s^{-2}, e si uniforma la misura in 9.83 m s^{-2}. Il confronto con il valore atteso 9.807 m s^{-2}, non cambia la discussione di accettazione del valore atteso (o meglio del suo rigetto).

Tale approccio frutto del punto di partenza della fisica, che è una scienza della misura, si ripercuote negli esercizi anche di teoria, ma solo per il numero fornito, per il quale la cifra più a destra è ritenuta incerta. Per questo la *cifra* più a destra di un numero è detta *meno significativa*, quella più a sinistra più significativa.

---

[2] La statistica combina probabilità confrontabili e quindi si ottiene che l'incertezza è data in generale per una grandezza g

$$\delta g = \sqrt{\sigma_g^2 + \varepsilon_g^2/3 + \eta_g^2/3}$$

la grandezza segue una distribuzione di probabilità gaussiana con valore centrale la migliore stima g_{ms} e come parametro σ l'incertezza totale δg.

È opportuno ora chiarire la questione dei numeri e delle cifre significative di questi numeri e la significatività nelle operazioni di base.

2.3 Misura, incertezza e cifre significative

Nel riportare una misura è sufficiente arrotondare l'incertezza ad una sola cifra significativa e poi uniformare la posizione decimale della misura.

Uniformità tra cifre significative

Anche nei corsi di teoria di fisica rimane memoria dell'incertezza soprattutto nei calcoli degli esercizi di fisica:
un numero non va inteso come esatto, ma approssimato al numero di cifre fornite, pertanto la cifra meno significativa risulta incerta.

Si parte dalla cifra meno significativa, quindi da destra, e procedendo si arrotonda cifra per cifra: per esempio il numero 1.245787, passo passo lo arrotonderemo in 1.24579, poi 1.2458, ancora 1.246, poi 1.25 ed infine 1.3.

Arrotondiamo per eccesso, perchè non vogliamo rischiare di rigettare un'ipotesi, che potrebbe essere buona. Il lavoro di rigetto delle ipotesi permette di accettare una sola ipotesi valida, per questo non si vuole escludere a "cuor leggero" ipotesi, che potrebbero essere buone.

Negli esercizi di fisica, quando viene fornito un dato, si intende una misura di una grandezza fisica, per esempio $g = 9.81$ m s^{-2}, la cifra meno significativa è affetta da incertezza, significa che non so il valore delle cifre dopo (a destra) quella meno significativa fornita, che è arrotondata (il valore potrebbe quindi essere dato dall'arrotondamento di valori compresi tra 9.805 o 9.814).

Cifre significative per la presentazione e per i calcoli

Per lo studente la significatività dei numeri è un risparmio di tempo, perché non deve preoccuparsi di portarsi dietro cifre, che non hanno alcuna utilità.

Finalizziamo come comportarsi ai fini dei calcoli negli esercizi di fisica, non considerando oltre le questioni relative a misure, tipicamente argomento di laboratori o corsi di didattica delle fisica con laboratorio.

Nel caso degli esercizi di fisica il confronto è tra il calcolo finale ed il risultato fornito con un determinato numero di cifre, che rispetti quelle fornite per l'esercizio.

Si consiglia di giungere a risultati finali in funzione delle grandezze fornite in partenza, e non rispetto ai risultati numerici intermedi, questo per evita di propagare le incertezze nel calcolo, nonché, cosa frequente, errori di calcolo precedenti.

Passiamo a fornire alcune regole fondamentali.

Nelle *moltiplicazioni o divisioni* domina la significatività del *numero con meno cifre significative*. Il numero risultante avrà come numero di cifre significative, il minimo di cifre significative tra i numeri utilizzati.

Per esempio se mi vengono forniti come dati g= 9.807 m s^{-2} e un tempo di t= 1.2 s, e devo calcolare $v = gt$ ottengo come risultato $v = 11.7684$ m s^{-1}, ma, dato che il tempo mi viene fornito con sole due cifre significative, il risultato ha la significatività del numero con cifre minori, quindi è corretto fornire $v = 12$ m s^{-1}.

Nel caso di *somme* o *differenze* il numero di cifre significative può rispettivamente *aumentare* o *diminuire*.

Per esempio, se sommo 1.2 cm a 0.45 cm, ottengo 1.65 cm, un aumento di cifre significative. Diversamente, se sottraggo 124 cm a 135 cm, ottengo come risultato 11 cm, ho una diminuzione di cifre significative. Si richiede almeno *nella presentazione dei risultati* finali di *arrotondare* opportunamente.

Nei problemi di fisica le cifre significative sono fornite e si richiede solo di preservarne la significatività nel corso dello svolgimento dei problemi, facendo attenzione alla minima significatività, anche dopo operazioni di somma o sottrazione.

Negli esercizi si usano spesso costanti fisiche fondamentali, delle quali alcune sono fornite in tabelle e tra esse ce ne sono anche di esatte [3], per esempio la velocità della luce nel vuoto è assunta esatta senza alcune errore e la si trova espressa:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \text{ (esatta)}.$$

Trovate anche la costante magnetica nel vuoto μ_0 e la constante elettrica nel vuoto ε_0 espresse senza incertezza, per definizione esatte [3].

Alcune costanti fisiche sono tabulate e fornite con incertezze anche su due cifre per esempio trovate per la carica elementare

$$e = 1.602176462(63) \times 10^{-19}\ \text{C} \quad \text{incertezza relativa } 3.9 \times 10^{-8}\ .$$

Nei corsi teorici di fisica tutto questo problema viene semplificato, ci si deve solo preoccupare del numero di cifre significative, fornito nei dati dell'esercizio.

Notazione in base dieci

In alcuni numeri non risulta chiaro, se le cifre fornite sono significative, oppure no. Per esempio nel numero 3 700 mm non è chiaro se i due zeri sono significativi, in quanto sono necessari per esprimere le decine e le unità di mm. Diversamente se esprimiamo 3.700 m, dato che riportiamo i due zeri, che non sarebbero necessari, lo facciamo proprio per esprimerne la significatività degli zeri. Se viene scritto 3.7 10^3 m, abbiamo solo due cifre significative; se 3.70 10^3 m, ne abbiamo tre; se 3.700 10^3 ne abbiamo quattro.

La notazione con esponente in base dieci risulta non solo utile per segnalare la significatività degli zeri, ma anche per dare immediata visione dell'*ordine di grandezza* di un numero. Un numero secondo questa notazione è espresso come $g = m\ 10^n$, dove m è la mantissa ed n l'esponente.

Nel confronto tra due grandezze si parla di differenza di ordini di grandezza in rapporto agli esponenti, per ordine di grandezza si intende l'esponente, percui dovremmo esprimere anche la mantissa in base dieci, e, dato che $10^{0.5} \approx 3.16$ si avrà per un numero $m\ 10^n$

$$\begin{array}{l} \text{se la mantissa } m < 3.16 \rightarrow \quad n \text{ ordini di grandezza,} \\ \text{se la mantissa } m \geq 3.16 \rightarrow n+1 \text{ ordini di grandezza.} \end{array}$$

Spesso nei manuali o nelle tabelle si esprime un numero con mantissa ed esponente $g = m\ 10^n$, per comodità editoriali, nella cosiddetta *notazione scientifica* (come in alcune calcolatrici) $g = mE + n$. Nel caso di esponente negativo si ha per $g = m\ 10^{-n}$ la notazione $g = mE - n$. Per esempio la carica dell'elettrone sarà riportata come e = 1.60 E-19 C.

α .... α .... **Inizio parte di curiosità** .... ℵ .... ℵ

Quanto segue è solo fornito per completezza, nell'ambito dell'approccio alla fisica come scienza della misura.

2.4 propagazione delle incertezze

Finora abbiamo affrontato la questione delle misure dirette, di seguito presentiamo le complicazioni nel caso di misure indirette, o anche derivazione delle misure da regressioni funzionali.

Supponiamo di volere misurare la costante di accelerazione di gravità dalla legge della caduta del grave:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \ , \tag{2.2}$$

dove h è la quota da cui si lascia cadere il grave, t il tempo che impiega a cadere, per cui:

$$g = \frac{2h}{t^2} . \tag{2.3}$$

Se misuro con un regolo h, ottengo quindi la misura $h = h_{ms} \pm \delta h$, sebbene qui δh sia solo data da ε_h, per una descrizione generale si riporta sempre δ.

Per la misura di t con cronometro, faccio misure ripetute, per cui avrei che $\delta t = \sqrt{\sigma_t^2 + \varepsilon_t^2}$, dove σ_t è la deviazione standard del campione, che fornisce l'incertezza casuale, e ε_t è l'incertezza di lettura.

Come si propagano queste incertezze sulla misura di g?
Possiamo qui solo accennare, che si utilizzano gli sviluppi di una funzione in polinomi di Taylor, si limita lo studio all'approssimazione al primo ordine, da qui il simbolo δ per l'incertezza totale, che ricorda "d" il simbolo del differenziale.

La formulazione corretta dell'approssimazione di una funzione di più variabili, si basa, anche, sullo sviluppo secondo polinomi di Taylor, di cui riportiamo solo il primo ordine:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) = g(x_0,y_0,z_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0,y_0,z_0} (x - x_0) + \\ + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x_0,y_0,z_0} (y - y_0) + \\ + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_{x_0,y_0,z_0} (z - z_0) + \cdots \end{aligned}$$

$$+ \ldots \text{termini di ordine superiore} .$$

La funzione g calcolata in (x,y,z) si ottiene dallo sviluppo intorno al valore (x_0,y_0,z_0), dove $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$, di cui abbiamo esplicitato solo il primo ordine.

Quindi una approssimazione al primo ordine della funzione mi permette di fornire il valore approssimato della sua variazione, limitandomi al solo primo ordine dello sviluppo in polinomi.

Nel caso della propagazione delle incertezze si traduce in δg, approssimazione al primo ordine, e, dato che le incertezze sono da fornire in modo assoluto, prendiamo in valore assoluto anche le variazioni della funzione per ogni variabile:

$$\delta g \approx \left| \frac{\partial g}{\partial x}_{(x_{ms},\, y_{ms},\, z_{ms})} \right| \delta x + \left| \frac{\partial g}{\partial y}_{(x_{ms},\, y_{ms},\, z_{ms})} \right| \delta y + \left| \frac{\partial g}{\partial z}_{(x_{ms},\, y_{ms},\, z_{ms})} \right| \delta z.$$

Per semplicità di scrittura si riporta semplicemente:

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \delta y + \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| \delta z \ ,$$

dove vanno effettuate prima le derivate parziali, calcolate nelle migliori stime di tutte le variabili, si prende il valore assoluto, ed ogni derivata parziale si moltiplica per l'incertezza sulla variabile di derivazione corrispondente.

Non vogliamo inoltrarci in questi argomenti, che sono principalmente affrontati in corsi di laboratorio di fisica, o di didattica della fisica con laboratorio, ma riteniamo formativo o almeno corretto, chiarire il punto di partenza della fisica, che implica anche il "linguaggio" adottato.

Per esempio cosa voglia dire verificare, se la misura di g_{ms} è quella attesa g_{att}, quest'ultima frutto di un modello teorico.
Si cerca di confrontare tale valore misurato rispetto ad un valore atteso, per esempio per g si può prendere il valore riportato nel Handbook of Chemistry and Physics [3] del valore medio di g per la latitudine 44 ed al livello del mare g_{att}= 9.807 m s^{-2}.

Possiamo utilizzare sistemi elettronici con risoluzioni spinte e ridurre le incertezze statistiche, ma spesso, immagino vi sia capitato anche in esperienze nelle scuole superiori, il valore atteso non ricade nell'intervallo della nostra misura.

Immaginiamo di avere misurato $g = 9.63 \pm 0.03$ m s^{-2}, nonostante la misura sia precisa, per precisione intendiamo $\delta g / \mid g_{ms} \mid$, in questa misura abbiamo una precisione del 0.3 %.
Devo rigettare il valore atteso (g_{att}), perché non rientra nell'intervallo della misura, nonostante tutti gli sforzi per migliorare la misura, si ha che il valore atteso è notevolmente fuori.

Quindi ... e qui ritorniamo sul metodo scientifico.

Ritorno sull'esperienza e cerco di costruire un altro modello, che sia più adatto al mio sistema. Posso assumere che ci sia un errore di accuratezza nell'elettronica, ritardo o anticipo, sarà la mia misura a dirlo, e quindi nell'equazione della caduta di un grave aggiungo un termine t_0 da sommare al t misurato.

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_0)^2 \ . \tag{2.4}$$

Vedete come il modello mentale si traduce in una relazione funzionale.

Se faccio misure per vari valori di la h otterrò vari tempi di misura. Come nel caso del confronto tra grandezze della figura, cercherò di studiare l'andamento funzionale, che per semplicità linearizzo, e devo cercare la relazione $y = A + Bx$, dove la y sarà la variabile con l'incertezza relativa maggiore, mentre la x sarà quella con l'incertezza relativa minore.

Quindi per ogni quota h_i registro le rispettive misure di t_i, di cui prendo più misurazioni, e voglio verificare, se veramente la relazione tra h e t segue il modello del punto materiale e dell'accelerazione costante, con le correzioni appropriate al mio sistema di misura.

Nel mio caso fisso h, la misuro direttamente, avrò quindi solo l'incertezza di lettura. Per ogni h_i misuro vari tempi di caduta, per questi tempi corrispondenti t_i fornisco la migliore stima con i valori medi, e l'incertezza come somma della deviazione standard del campione con l'incertezza di lettura sul tempo.

Quindi se la variabile y è il tempo, perché con incertezza maggiore, la legge da verificare sarà:

$$t = -t_0 + \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{h}$$

che risulta descritta da una relazione lineare come :

$$y = A + Bx \ ,$$

dove la variabile y concide con t, le misure ottenute, e la variabile x, coincide con le misure corrispondenti $\sqrt{h}$. Ci sono tecniche statistiche (metodo dei minimi quadrati), che permettono di dedurre la migliore stima dei *parametri* della retta e le loro incertezze.
Ottenuti A e δA, B e δB, dalla relazione $B = \sqrt{2/g}$ si può fornire la misura di g e la sua incertezza δg, come dalla relazione $A = -t_0$ si può fornire la misura del tempo di ritardo, o anticipo, dell'elettronica con la sua incertezza.

I parametri sono calcolati dalle migliori stime e dalle incertezze delle grandezze misurate direttamente, quindi ancora propagazione delle incertezze, con le dovute cautele nel portarsi dietro solo cifre significative ai fini della verifica. In questo modo si verifica la legge, o meglio non si può rigettare.

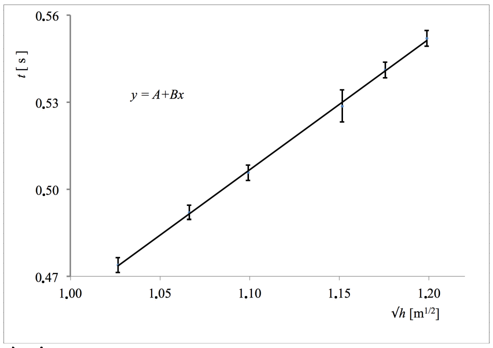

Figura 2.3 Verifica di una legge fisica, graficamente la relazione funzionale, in questo caso lineare, deve "in media" passare negli intervalli individuati dalle misure e le corrispondenti incertezze. Anche per questo studio, ci sono argomenti rigorosi che sono propri della statistica. Una volta verificata la legge si può fornire la misura di una grandezza, dedotta dai parametri della relazione funzionale.

Se il modello assunto, equazione matematica $y = A + Bx$, passa nei vari intervalli individuati dai dati sperimentali (migliori stime) e le rispettive incertezze, la legge è accettata. Ovviamente anche la verifica di una legge segue regole statistiche più rigorose, di quanto è presentato graficamente in Fig. 2.3.

Se il modello è verificato, posso fornire la misura di g, estratta dal parametro frutto dell'analisi dei dati. Tale grandezza risulta sempre una gaussiana e si confronta, per accettare il valore atteso, con l'intervallo individuato dall'incertezza, secondo le regole statistiche della verifica di ipotesi.

ℶ .... ℶ .... Fine parte di curiosità ω .... ω

Problemi

2.1. Osservate un misuratore digitale, che oscilla continuamente tra due valori x_1, x_2 con la differenza di una sola unità fondamentale (u.f.). Assumete $n/2$ misure di x_1 ed $n/2$ misure di x_2. Dimostrate per n tendente ad infinito, che il valore medio è pari a $(x_1 + x_2)/2$ e la deviazione standard del campione tende a 1/2 della risoluzione (o u.f.).

2.2. Se avete difficoltà a formalizzare il Probl. 2.1, provate con la calcolatrice o con un foglio elettronico al calcolatore con la formula, aumentando di volta in volta n, oppure semplicemente aumentando il numero dei due dati.

2.3. Per le seguenti grandezze v= 2.550 m s^{-1}, x_0 = 250 mm, t_1 = 15.0 s, fornire il numero di cifre significative per ogni grandezza. Fornire la posizione del corpo x all'istante t_1=15.0 s , dalla relazione $x = x_0 + vt$.

2.4. Fornire per i seguenti dati a= 7.53 m s^{-2}, t_1= 0.25 s, v_0=5.3 km h^{-1}, x_0 = 253 cm, i calcoli per la velocità all'istante t_1 dalla relazione $v(t) = v_0 + at$ e per la posizione sempre all'istante t_1 dalla relazione $x(t) = x_0 + v_0 t + 1/2at^2$.

2.5. Il valore atteso per l'accelerazione di gravità terrestre a Ferrara è fornito sulla base di alcuni modelli teorici ed è pari a 9.807 m s^{-2}, vengono effettuate alcune misure riportate di seguito

$$\begin{array}{ll} \text{a} \quad 9.7 \pm 0.8 & \text{m s}^{-2}, \\ \text{b} \quad 9.74 \pm 0.09 & \text{m s}^{-2}, \\ \text{c} \quad 9.749 \pm 0.005 & \text{m s}^{-2}. \end{array}$$

Chiarire per quali risultati possiamo correre il rischio di rigettare l'ipotesi, che il valore atteso — quindi il modello teorico utilizzato per la deduzione — sia corretto, e per quali esprimiamo la fiducia, che invece lo sia.

2.6. Il raggio medio dell'atomo è 5.29 E-11 m, quello del nucleo 1.2 E-15 m.
Qual è la differenza in ordini di grandezza.
Convertire prima le mantisse in ordini di grandezza, e poi vedere il rapporto tra i due valori espressi come 10^n rispetto agli esponenti.

2.7. Nel caso del lancio di un corpo verso l'altro l'equazione della velocità istantanea risulta:

$$v = v_0 - gt$$

Calcolare la velocità all'istante t = 0.5345 s (ed anche 0.54 s), dove g risulta 9.807 m s^{-2} e v_0 = 5.647 m s^{-1} (fate attenzione alle cifre significative, per entrambi i casi).

Capitolo 3
Cenni di Meccanica

Sommario Nel corso di fisica per la laurea in matematica, ci troviamo ad affrontare come primo argomento la termodinamica, che richiede alcune premesse fondamentali: lavoro, energia, principio di conservazione dell'energia e principio di conservazione della quantità di moto, quest'ultimo per per introdurre la teoria cinetica dei gas. Questi sono argomenti della meccanica, che vengono svolti in un corso parallelo. Per poter iniziare è opportuno fornire alcuni anticipi, senza andare troppo nei dettagli, solo per arrivare a comprendere i termini utilizzati. In questa parte introduttiva seguirò un approccio snello, ed userò per i chiarimenti concettuali calcoli di base.

3.1 Cenni di cinematica per orientarsi

La cinematica studia il moto dei corpi nello spazio.

Il modello di partenza è il *punto materiale*, che idealmente concentra tutta la massa in un punto, si studia la sua posizione nello spazio e l'evoluzione nel tempo (moto del punto materiale), di seguito detto anche corpo.

Limiteremo la nostra introduzione al solo modello iniziale. Le posizioni di un punto materiale nello spazio ed i suoi spostamenti sono descritti dai vettori. Lo spostamento è didatticamente utile come prototipo, per introdurre i vettori e come si opera con essi.

Un vettore è individuato da un *modulo*, una *direzione* ed un *verso* (Fig. 3.1).
Vettori uguali hanno stesso modulo, stessa direzione e stesso verso, stiamo qui parlando di vettori liberi, non di vettori applicati in un punto. In figura abbiamo utilizzato dei punti nello spazio, ma lo spostamento può descrivere un moto del punto materiale in qualsiasi punto di partenza (vettori liberi).

La somma tra vettori segue la *regola del parallelogramma*.
Se consideriamo lo spostamento, questa relazione è immediata, per esempio in Fig. 3.1 supponiamo di spostarci da A a B lungo una linea retta orientata (stessa

direzione e stesso verso), arrivati in B, ci spostiamo ancora verso C su un'altra retta orientata.

Qual è lo spostamento totale?

In Fig. 3.1 lo spostamento totale da A a C definisce il modo, in cui si sommano i segmenti orientati $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$, per dare il segmento orientato $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$.

Questi segmenti orientati prendono il nome di vettori, semplicemente indicati con lettere, per esempio $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$, e $\overrightarrow{\boldsymbol{c}}$, dato che non sono vincolati al punto iniziale.

La somma tra i vettori segue la regola del parallelogramma, riportata graficamente in Fig. 3.1, mentre viene scritta come:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \ . \tag{3.1}$$

I vettori sono entità che hanno le proprietà di direzione, verso e modulo in qualsiasi punto dello spazio (vettori liberi). Dal punto di vista fisico descrivono situazioni generali del moto, indipendentemente dalla posizione iniziale.

Nella (3.1) e in Fig. 3.1 è stata utilizzata la freccia sopra, sebbene per la notazione di stampa sia sufficiente il solo corsivo in grassetto. Questo per rendere presente allo studente, che sia alla lavagna, che sui fogli, è opportuno rendere evidenti le grandezze vettoriali in questo modo, altrimenti non sarebbero distinguibili da quelle scalari. Di seguito, useremo la notazione per la stampa.

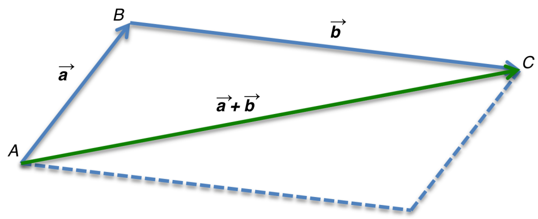

Figura 3.1 Somma ($\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$) di due vettori ($\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$) con la regola del parallelogramma. Qui in didascalia abbiamo riportato la notazione a stampa per i vettori, mentre nella figura diamo evidenza della notazione con frecce sopra per la scrittura manuale.

La differenza tra due vettori si ottiene dalla somma del secondo meno l'opposto del primo, sempre secondo la regola del parallelogramma. In Fig. 3.2 si riporta tale operazione sui vettori, con la notazione per la scrittura sul grafico, e la notazione a stampa nella didascalia e nel testo.

Lo spostamento è ottenuto dalla differenza di due vettori posizione ($\Delta\ \boldsymbol{r}$), riferiti ad un origine di assi coordinanti (a seconda della geometria si può utilizzare un sistema di assi coordinati cartesiani, polari sferici, o anche polari cilindrici[4]).

Riprendiamo Fig. 3.1 e 3.2 e riportiamo le operazioni di somma e sottrazione sui vettori di partenza in Fig. 3.3, si faccia attenzione a come si ottiene la somma di due vettori e la loro differenza, senza per ora utilizzare le loro rappresentazioni.

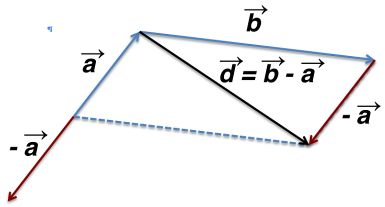

Figura 3.2 Differenza tra due vettori ottenuta dalla regola del parallelogramma come somma di $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

Vogliamo mettere in evidenza le operazioni di somma e sottrazione di due vettori, riportate in Fig. 3.3 per la loro importanza: molte leggi fisiche, vettoriali, coinvolgono la somma o la differenza tra vettori. Prima di arrivare alla loro rappresentazione con sistemi di riferimento ed assi coordinati è fondamentale, capirne il senso fisico, evidente dalla semplice rappresentazione grafica.

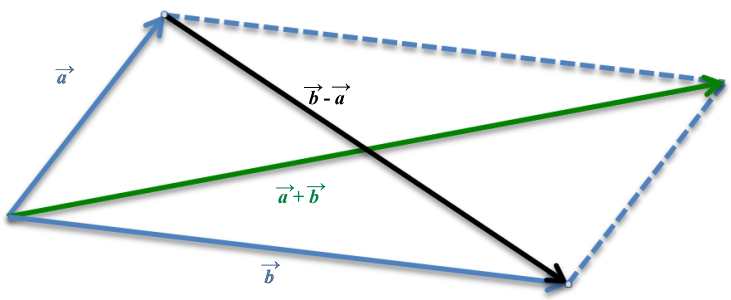

Figura 3.3 Somma e differenza tra due vettori. Prima si fanno coincidere gli estremi iniziali dei due vettori: nel caso della somma si traccia la diagonale congiungente il punto di connessione tra i due e il vertice opposto, nel parallelogramma costruito con due segmenti paralleli ai vettori dati ottenendo il vettore somma ($\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$), nel caso della differenza si traccia la diagonale partendo dalla fine del vettore sottraendo ($\boldsymbol{a}$) e si arriva alla fine del vettore minuendo ($\boldsymbol{b}$), come somma di $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

È utile che lo studente prenda dimestichezza con i vettori nello spazio, prima di inoltrarsi nella loro rappresentazione matematica, utile al calcolo. Le proprietà dei vettori, e quindi le leggi fisiche, che si basano su tali grandezze, sono generali, le loro rappresentazioni sono solo una semplificazione per il calcolo.

α .... α .... **Inizio Esempio** .... $\aleph$ .... $\aleph$

Solo basandovi sulla regola del parallelogramma, fate la differenza

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} ,$$

prima passo passo, come in Fig. 3.2, ed anche come in Fig. 3.3. Se chiamiamo $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, qual è la relazione con $\boldsymbol{d}$?
Osservate tale relazione, sia analiticamente, che graficamente. Con la somma non ci sono differenze, in quanto commutativa. Con la differenza sì , dato che non è commutativa.

$\sqsupset$ .... $\sqsupset$ .... **Fine Esempio** .... ω .... ω

Ora riportiamo lo spostamento sulla base del riferimento rispetto ad un punto, che potrebbe essere l'origine di un sistema di riferimento. Un qualsiasi punto dello spazio, rispetto all'origine di un sistema di riferimento, è descritto dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$.

Continueremo con la descrizione grafica senza utilizzare le rappresentazioni, fino al momento in cui saranno necessarie per alcuni esempi. Il calcolo vettoriale avrà la sua importanza, in questo corso, quando affronteremo l'elettromagnetismo, in quel caso discuteremo anche le varie rappresentazioni necessarie ed utili.

In questa parte introduttiva affrontiamo l'argomento con alcuni cenni, per giungere all'introduzione della termodinamica. È importante che si riesca a comprendere

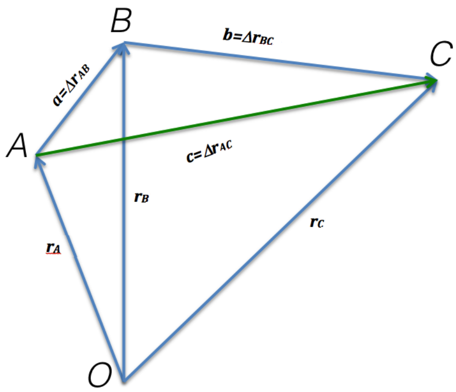

Figura 3.4 Lo spostamento viene ottenuto come differenza tra vettori posizione rispetto ad un punto nello spazio, che potrebbe essere l'origine di un sistema di riferimento. In questo caso lo spostamento da A a B risulta il vettore $\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$, lo spostamento da B a C risulta il vettore $\boldsymbol{b} = \Delta \boldsymbol{r}_{BC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_B$, lo spostamento da A a C $\boldsymbol{c} = \Delta \boldsymbol{r}_{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A$.

il modo di rappresentare i vettori differenza rispetto ad un punto.

In Fig. 3.4 sono riportati i vettori posizione rispetto ad uno stesso punto O.

I vettori posizione $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$ e $\boldsymbol{r}_C$, descrivono la posizione dei punti A, B e C nello spazio rispetto ad un'origine O. Il vettore spostamento da A a B è dato da $\Delta\, \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$, $\Delta\, \boldsymbol{r}_{BC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_B$, così l vettore $\Delta\, \boldsymbol{r}_{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A$. E si ottiene ovviamente che $\Delta\, \boldsymbol{r}_{AC} = \Delta\, \boldsymbol{r}_{AB} + \Delta\, \boldsymbol{r}_{BC}$.

Si invita lo studente a fare l'esercizio grafico delle differenze e somme suddette, tale approccio è importante dal punto di vista fisico, spesso ci si inoltra nelle rappresentazioni dei vettori e si perde il senso pratico e fisico di tali entità, incorrendo in errori di impostazione dei problemi.

Grandezze vettoriali

In Fisica parliamo di *grandezze vettoriali*.
Una grandezza fisica deve soddisfare il *criterio di uguaglianza*, quello di *somma* e necessita della *definizione di un campione*. Vediamo come comportarci con le grandezze vettoriali.

Consideriamo lo spostamento, che è per noi il prototipo di una grandezza vettoriale.

Per il *criterio di uguaglianza*: due vettori risultano uguali, se sovrapponendo le rispettive estremità iniziali, si sovrappongono anche quelle finali. Sono vettori liberi, posso spostarli, e sovrapporli, ma senza modificare la loro direzione ed il loro verso.

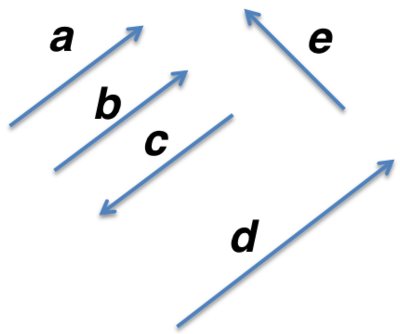

Figura 3.5 In figura solo i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono uguali, gli altri sono tutti diversi. Il vettore $\boldsymbol{b}$ può essere rappresentato rispetto al versore $\boldsymbol{u}_a$ ($\hat{\boldsymbol{u}}_a$ nella scrittura manuale) . Anche i vettori $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ possono essere rappresentati rispetto al versore $\boldsymbol{u}_a$. Invece $\boldsymbol{e}$ ha direzione e verso diversi dal versore $\boldsymbol{u}_a$, per cui non può essere rappresentato solo da tale versore.

Il *criterio di somma* per i vettori deve soddisfare la regola del parallelogramma.

Per il *campione* è opportuno rappresentare il vettore rispetto al versore unitario ed adimensionale, che mantiene le informazioni su direzione e verso, mentre il modulo presenterà le caratteristiche del rapporto rispetto al campione e l'unità, per cui nel caso di un vettore spostamento scriveremo:

$$\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{u}_a, \text{ dove } \boldsymbol{u}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\,\boldsymbol{a}\,|}, \text{ o semplicemente } \frac{\boldsymbol{a}}{a},$$

dove $|\boldsymbol{a}|$ è il modulo del vettore $\boldsymbol{a}$, che indichiamo anche con a e sarà un numero con l'unità di misura (o in multipli o sottomultipli dell'unità di misura). Nel caso dello spostamento l'unità di misura sarà il metro.

Anche per i versori, è opportuno richiamare qui, che nel caso di scrittura manuale è necessario renderli evidenti, utilizzando il simbolo ˆ quindi $\hat{\boldsymbol{u}}_a$. Nei testi stampati basta riportare il grassetto e corsivo $\boldsymbol{u}$, come continueremo a fare nel seguito del testo. Si usa la lettera “u” per indicare che il versore è un vettore di modulo unitario.

Osservando la Fig. 3.5 possiamo trascrivere i vettori come $\boldsymbol{b} = b\,\boldsymbol{u}_a$ dato che $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{a}$ hanno stessa direzione e verso.

Ed anche $\boldsymbol{c} = -c\,\boldsymbol{u}_a$ dato che il modulo del vettore è c, stessa direzione, ma verso opposto $\boldsymbol{u}_c$ = -$\boldsymbol{u}_a$. Anche il vettore $\boldsymbol{d}$=$d\,\boldsymbol{u}_a$, invece il vettore $\boldsymbol{e}$ ha direzione e verso diversi da $\boldsymbol{u}_a$, per cui risulta $\boldsymbol{e} = e\,(\boldsymbol{e}/\mid \boldsymbol{e}\mid) = e\,\boldsymbol{u}_e$.

Anche le velocità sono grandezze vettoriali, così come le accelerazioni, e anche le forze. Ovviamente dobbiamo distinguere tra spazi vettoriali e la rappresentazione delle direzioni nello spazio, che risultano adimensionali.

Come per le grandezze scalari anche per quelle vettoriali si possono sommare solo grandezze omogenee. Attenzione all’analisi dimensionale anche delle equazioni vettoriali:

un’equazione vettoriale è corretta, se le grandezze a primo e secondo membro sono omogenee, nonché in ogni membro si possono fare operazioni di somma e sottrazione solo tra grandezze vettoriali omogenee.

3.2 Moto del punto materiale

Dal punto di vista della cinematica il vettore posizione descrive la posizione di un corpo in funzione del tempo, quindi spesso si considera la posizione $\boldsymbol{r}(t)$, e si riporta $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2)$, con t_2 un tempo successivo a t_1, quindi uno spostamento $\Delta\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ nell’intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Quanto rapidamente si percorre lo spostamento?
Questa grandezza in fisica prende il nome di *velocità media* $\boldsymbol{v}_m$:

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{\Delta\,\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1}\ .$$

La velocità media descrive il moto del corpo tra due punti, non connesso ad un sistema di riferimento, quindi una caratteristica generale, che fornisce indicazioni locali.

L’andamento al limite $\Delta t \to 0$ fornisce la velocità istantanea.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\,\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt}\ .$$

La velocità istantanea è la derivata del vettore posizione $\boldsymbol{r}$ rispetto al tempo.

Il vettore velocità istantanea risulta essere la tangente alla traiettoria e fornisce la rapidità istantanea, con cui la si percorre.

Risulta spesso utile rappresentare la velocità in questa sua caratteristica locale rispetto alla traiettoria:

$$\boldsymbol{v} = v_s \, \boldsymbol{u}_t \ ,$$

dove $\boldsymbol{u}_t$ individua la retta tangente alla traiettoria nel verso in cui la si percorre, mentre s è la coordinata lungo la traiettoria, definita rispetto ad un origine sulla traiettoria, e $v_s = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ indica quanto rapidamente si percorre la traiettoria. Tale rappresentazione viene detta dell'ascissa curvilinea [1].

Ottenuta la velocità istantanea si può studiare come varia quest'ultima.

Definiamo *accelerazione media*, come per il caso della velocità, per gli istanti di tempo t_1 e t_2, la variazione della velocità rispetto al tempo:

$$\boldsymbol{a}_m = \frac{\Delta \, \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} \ .$$

La rapidità con cui varia la velocità in ogni istante t è detta *accelerazione istantanea*, che risulta l'andamento al limite per $\Delta t \to 0$ di $\boldsymbol{a}_m$, ovvero la derivata temporale della velocità:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \, \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d} \, \boldsymbol{v}}{dt} \ .$$

Se rappresentata rispetto all'ascissa curvilinea, si osserva, nel caso generale, che l'accelerazione ha una componente tangente alla traiettoria ed una normale, quest'ultima fornisce la curvatura della traiettoria[5]:

$$\boldsymbol{a} = a_t \, \boldsymbol{u}_t + a_n \, \boldsymbol{u}_n \ . \tag{3.2}$$

È opportuno fare notare qui che in generale $\boldsymbol{u}_t$ e $\boldsymbol{u}_n$ possono variare nel tempo, in direzione e verso, visto che il modulo è costante ed unitario.

Ci sono casi semplici di moto e noi per questa introduzione ci limiteremo al più semplice possibile:

moto con accelerazione normale nulla, in cui non c'è componente normale dell'accelerazione. Se l'accelerazione non cambia in modulo direzione e verso nel tempo, siamo nel caso del *moto uniformemente accelerato.*

Iniziamo a considerare il *moto uniformemente accelerato* con la velocità iniziale lungo la direzione dell'accelerazione.

Per introdurre concetti base possiamo limitarci per ora ad una discussione di un moto di questo tipo.

---

[1] Per una descrizione più approfondita, non richiesta in questo corso, vedere l'addendum "ascissa curvilinea" [5].

Una volta definite le grandezze cinematiche, risulta più pratico, attraverso il calcolo inverso della derivazione, ovvero l'integrazione, ricavare le caratteristiche del moto.

In un certo senso è comprensibile dalla definizione:
moto "uniformemente accelerato"; quello che lo caratterizza è l'accelerazione.
Per cui partiamo dall'accelerazione.
Questo approccio ha un aspetto fisico ancora più importante: le interazioni tra i corpi sono descritte da forze, che ne causano l'accelerazione (vedi dinamica).

Quindi ripercorriamo il processo inverso, ovvero, data un'accelerazione costante, ricaviamo la velocità per tale tipo di moto, e poi ancora l'equazione del vettore posizione, detta anche *legge oraria del moto*.

Dall'accelerazione alla legge oraria: per il semplice moto uniformemente accelerato

Partiamo dalla definizione di accelerazione $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{v}/\mathrm{dt}$, e rappresentandola rispetto al suo versore riportiamola come $\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{u}_a$, ricordiamo che sono constanti nel tempo il modulo a, nonché la direzione ed il verso $\boldsymbol{u}_a$.

Possiamo integrare il vettore accelerazione, per ottenere la velocità, partendo dalla definizione di accelerazione:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \mathrm{d}\,\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}\mathrm{d}t \ ,$$

con $\boldsymbol{a}$ costante nel tempo:

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \int \mathrm{d}t \ ,$$

da cui si osserva che $d\ \boldsymbol{v}$ è lungo $\boldsymbol{u}_a$, o equivalentemente lungo $\boldsymbol{a}$.

Nel caso del moto uniformemente accelerato possiamo facilmente integrare l'equazione vettoriale[2]:

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}(t)} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{dt} \ \equiv \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{a}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0) \ ., \tag{3.3}$$

Semplifichiamo la formula, ponendo $t_0 = 0$ s:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \ . \tag{3.4}$$

Possiamo ora utilizzare la definizione di velocità, dalla quale otteniamo:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}t, \tag{3.5}$$

[2] Utilizziamo la rappresentazione degli estremi di integrazione rispetto a d$\boldsymbol{v}$, che è conseguenza del fatto che la funzione integrale è definita a meno di una costante, ovviamente essendo qui un integrale di un vettore, la costante è il vettore velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$.

ed integrare rispetto agli estremi di integrazione nel tempo della (3.3), ma adesso a primo membro in t_0 (invece in t) avremo il vettore posizione $\boldsymbol{r}_0$ ($\boldsymbol{r}(t)$):

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}(t)} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}\mathrm{d}t \tag{3.6}$$

sostituendo $\boldsymbol{v}$ con quanto ricavato nella (3.4):

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}(t)} d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t)dt \tag{3.7}$$

da cui si ottiene, dato che ho posto $t_0 = 0$ s:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \ . \tag{3.8}$$

La (3.8), detta *equazione oraria del moto uniformemente accelerato* in forma vettoriale, è di immediato utilizzo per due moti semplici.

Moto del grave: ovvero il moto di un punto materiale di massa m solo lungo l'asse dell'accelerazione di gravità terrestre.
Moto del proiettile: ovvero il moto di un punto materiale di massa m, in cui la velocità iniziale non è lungo la direzione dell'accelerazione, tale moto sarà utile nell'elettromagnetismo.

I moti di cui stiamo parlando sono in un campo gravitazionale costante descritto dal vettore $\boldsymbol{g}$ (l'accelerazione nello spazio è costante in modulo direzione e verso). Iniziamo la discussione con il moto del grave lungo la verticale, e su un piano inclinato, limitandoci al minimo indispensabile.

3.2.0.1 Moto del grave

Nel caso della caduta di un grave $\boldsymbol{g} = -g\ \boldsymbol{u}_z$, l'accelerazione è rivolta verso il basso, ma noi scegliamo un asse coordinato rivolto verso l'alto $z\ \boldsymbol{u}_z$, come indicato in Fig. 3.6.

L'equazione della legge oraria, se riferita al sistema di asse coordinato suddetto, dalla (3.8) risulta:

$$\begin{cases} z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 \\ \text{che derivata rispetto a } t, \text{ fornisce } v(t) \\ v(t) = -gt \end{cases}$$

tenuto conto che $\boldsymbol{v}_0 = 0$ m s^{-1} e $\boldsymbol{r}_0 = z_0\ \boldsymbol{u}_z$.
L'accelerazione risulta negativa, nel senso che è rivolta verso il basso, in quanto abbiamo scelto l'asse $\boldsymbol{u}_z$ con il verso opposto a $\boldsymbol{g}$.

Figura 3.6 Schema per il moto del grave. Il sistema di assi coordinati è stato scelto in modo tale da avere l'asse z orientato verso l'alto. Gli assi coordinati x ed y, sul piano ortogonale a z non sono indicati, perchè il moto si svolge solo lungo z (si usano terne di assi coordinati levogire, per il caso degli assi cartesiani si ha che in piedi lungo z si deve osservare sovrapporsi l'asse x sull'asse y con una rotazione di un angolo inferiore a 180° verso sinistra, ovvero in senso antiorario.)

Bisogna ricordare qui che tali equazioni nascono da grandezze vettoriali e quindi $z(t)$ e $v(t)$ sono riferite alla scelta fatta (per l'asse orientato nello stesso verso di $\boldsymbol{g}$ vedere probl. 3.2).

Anche la velocità risulta negativa, che significa che è rivolta verso il basso, ma il corpo viene accelerato e la sua velocità aumenta in modulo.

Consideriamo ora il lancio di un oggetto verso l'alto con la stessa rappresentazione cartesiana in Fig. 3.6.

Supponiamo di trovarci sempre alla stessa quota z_0 e quindi di lanciare verso l'alto un oggetto con velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_0\,\boldsymbol{u}_z$, l'equazione della coordinata e della velocità ora diventano:

$$\begin{cases} z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

Da questa equazioni si può ricavare:

a) quale quota massima (z_{max}) raggiunge l'oggetto ed in quale istante di tempo,
b) la velocità quando ripassa dalla quota z_0 in caduta, ed in quale istante,
c) l'istante di tempo, in cui raggiunge il suolo, e la sua velocità (probl. 3.2)

3.3 Qualche piccolo cenno di dinamica

La dinamica studia le cause del moto.
Prima di arrivare a tale argomento, considerazioni operative permettono di verificare, che la grandezza forza, misurata in Newton (N) nel SI, è una grandezza vettoriale, dato che soddisfa i criteri di uguaglianza e di somma dei vettori. Per il campione rimandiamo al SI, nonché dopo avere affrontato le correnti nell'elettromagnetismo.

La somma di tutte le forze agenti su un corpo è detta *forza totale* (o risultante) e la indichiamo con $\boldsymbol{F}_{tot} = \sum_i^N \boldsymbol{F}_i$.

La dinamica viene descritta dalle tre leggi di Newton, detti anche principi, perché hanno validità in tutti i campi della fisica.

1^a *legge di Newton*, detta anche di " *Inerzia*": un corpo, sul quale agisce una forza totale nulla, permane nel suo stato di moto. Lo stato del moto viene descritto dalla velocità, pertanto, se la velocità è nulla, il corpo permane nello stato di quiete; se è diversa da zero, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

2^a *legge di Newton*: un corpo di massa (inerzia) m soggetto ad una forza risultante $\boldsymbol{F}_{tot}$ acquista un'accelerazione proporzionale alla forza ed inversamente proporzionale alla m, per questo detta anche "inerzia":

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}_{tot}}{m} \tag{3.9}$$

3^a *legge di Newton*, detta anche di "*Azione e Reazione*": ad ogni *Azione* $\boldsymbol{F}_{ij}$ corrisponde sempre una *Reazione* uguale e contraria $\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$, dove con $\boldsymbol{F}_{ij}$ abbiamo indicato la forza, che agisce su un corpo j dovuta al corpo i; mentre con $\boldsymbol{F}_{ji}$ la forza, che agisce su un corpo i dovuta al corpo j (per esempio l'interazione gravitazionale tra due corpi di massa m_i ed m_j, o l'interazione elettrostatica tra due corpi carichi con carica q_i e q_j).

Lo stato del moto di un corpo viene descritto dalla sua velocità $\boldsymbol{v}$, pertanto nel caso in cui la forza risultante agente sia nulla, la velocità non varia del tempo. Ovvero il corpo permane nel suo stato di moto rettilineo uniforme, o nel caso che v=0 di quiete.

La seconda legge afferma che in presenza di una forza risultante diversa da zero, che agisca su un corpo di massa m, il suo stato di moto viene modificato secondo la (3.9):

$$\boldsymbol{F}_{tot} = m\,\boldsymbol{a} \text{ (notazione per stampa)}. \tag{3.10}$$

Mettiamo di nuovo in evidenza, che su carta o lavagna bisogna usare le frecce sopra i simboli delle grandezze secondo la seguente notazione:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{tot} = m\,\vec{\boldsymbol{a}} \text{ (notazione per scrittura manuale)}. \tag{3.11}$$

La forza modifica lo stato del moto, ovvero la velocità, ricordiamo che quest'ultima è un vettore, quindi ci sono situazioni in cui la forza può modificarne solo il modulo, o solo la direzione, o entrambe.

La terza legge riguarda soprattutto le interazioni tra i corpi.

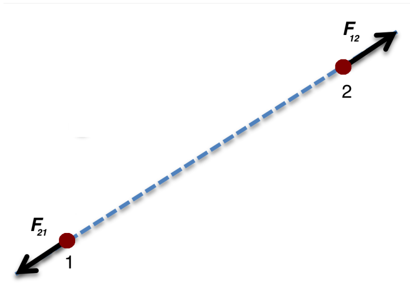

Figura 3.7 Terza legge di Newton rappresentata graficamente: se il corpo 1 esercita sul corpo 2 una forza $\boldsymbol{F}_{12}$, il corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza uguale e contraria $\boldsymbol{F}_{21}$= - $\boldsymbol{F}_{12}$

Una conseguenza delle leggi di Newton applicate ai sistemi dei punti materiali è il principio di conservazione della quantità di moto. Se la forza esterna risultante è nulla, dato che la sommatoria delle forze interne, di azione–reazione, risulta nulla, visto che per ogni forza $\boldsymbol{F}_{ij}$ si ha una forza $\boldsymbol{F}_{ji}$, e se esprimo come quantità di moto del sistema $\boldsymbol{P} = \sum_i^N \boldsymbol{p}_i$, dove $\boldsymbol{p}_i$ sono le rispettive quantità di moto ($\boldsymbol{p}_i = m\boldsymbol{v}_i$ nel caso di un sistema di N punti materiali) posso riscrivere la legge di Newton come $\boldsymbol{F}_{tot} = \mathrm{d}\boldsymbol{P}\ /\mathrm{d}t$:

$$\boldsymbol{F}_{tot} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} \overbrace{=}^{\boldsymbol{F}_{tot}=0} = 0 \tag{3.12}$$

pertanto $\boldsymbol{P}$ risulta costante.

La (3.12) è nota come *principio di conservazione della quantità di moto*.

Questo principio è fondamentale per lo studio della fisica dei razzi e della fisica degli urti. Gli urti sono di interesse per lo studio microscopico della termodinamica, una delle prime teorie fisiche, detta *teoria cinetica dei gas*, che descrive i comportamenti macroscopici dei sistemi gassosi.

3.3.1 Il lavoro

Il lavoro, che troveremo diffusamente in termodinamica, viene introdotto in meccanica, per questo vediamo il suo significato con il modello del punto materiale.

Il lavoro di una forza viene definito come il prodotto scalare tra il vettore forza ed il vettore spostamento: per uno spostamento infinitesimo $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ sulla traiettoria di un corpo, su cui agisce una forza $\boldsymbol{F}$, il lavoro infinitesimo dW per il tratto $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ è dato da:

$$dW(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\ , \tag{3.13}$$

dove con $\cdot$ indichiamo il prodotto scalare tra due vettori[3]. L'unità di misura del

[3] Onde evitare confusione non si usa $\cdot$ per la semplice moltiplicazione tra numeri o grandezze scalari , anche perché, come visto finora, non è necessario

lavoro nel Sistema Internazionale è il Joule, indicato con il simbolo J.

Da tale definizione se scomponiamo la forza rispetto alla direzione tangente allo spostamento ed a quella normale, solo la componente tangente dà un risultato diverso da zero nell'integrazione di $dW(\boldsymbol{F})$ (anche solo dW).

Il lavoro è un integrale di linea su una curva da una coordinata intrinseca s_A ad una s_B, che spesso sono indicate semplicemente come punti nello spazio A e B:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}) = \int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{3.14}$$

È opportuno richiamare alcune proprietà del calcolo integrale, applicato ai vettori.

L'integrale gode della *proprietà dell'additività*:

$$\int_A^C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_B^C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

dove B è compreso nell'intervallo $[A,\ C]$, o meglio B si trova lungo la curva tra A e C.

L'integrale di linea cambia di segno, se percorso in senso inverso:

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_B^A \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}\ ,$$

o $W_{AB} = -W_{BA}$.

Il verso di integrazione lungo la curva $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_{BA}$ è orientato in verso opposto a $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_{AB}$, quindi per ogni elementino di integrazione i contributi sono di segno opposto.

Una proprietà delle forze, nota come *principio di sovrapposizione*, afferma che la forza totale, agente su un corpo, è data dalla *somma vettoriale* di tutte le forze agenti.

Sembra un'ovvietà, ma è opportuno chiarirne l'importanza proprio nell'ambito del calcolo del lavoro.

Associata alla proprietà distributiva dell'integrale, fornisce una semplificazione al calcolo del lavoro, fatto dalla forza risultante.

Scriviamo in modo formale il *principio di sovrapposizione* nel caso di N forze $\boldsymbol{F}_i$:

$$\boldsymbol{F}_{tot} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ \dots\ + \boldsymbol{F}_{N-1} + \boldsymbol{F}_N\ \ ,$$

con il suo utilizzo nel calcolo del lavoro:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_{tot}) = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B (\sum_i^N \boldsymbol{F}_i)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_i^N \int_A^B (\boldsymbol{F}_i)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_i^N W_{AB}(\boldsymbol{F}_i)\ . \tag{3.15}$$

Posso calcolare i lavori fatti da ogni singola forza $\boldsymbol{F}_i$, e poi sommarli per ottenere il lavoro totale della forza risultante $\boldsymbol{F}_{tot}$.

C'è anche un notevole valore didattico: posso affrontare forze diverse singolarmente e piano piano aggiungere altre forze in gioco, fino a completare il quadro anche di situazioni più complesse.

Il lavoro di forze "speciali" sarà possibile descriverlo attraverso funzioni scalari, non preoccupandosi del calcolo dell'integrale di linea, ma considerando solo posizione iniziale e finale.

Come premessa cercheremo di fornire un esempio esplicativo, che si basa ancora al moto nel campo gravitazionale terrestre.

Moto su un piano inclinato: calcoli semplici su forze conservative

Prendiamo un caso introduttivo di una forza applicata ad un corpo libero di scivolare su un piano inclinato (Fig. 3.8).

La forza risultante $\boldsymbol{F}_{tot}$, che agisce sul corpo (punto materiale), è data dalla somma vettoriale della forza di attrazione gravitazionale $\boldsymbol{F}_g$ e della forza $\boldsymbol{N}$ (normale).

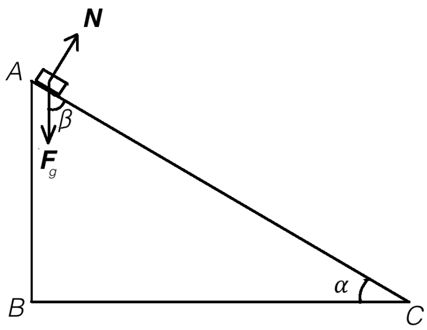

Figura 3.8 Rappresentazione delle forze agenti su un punto materiale (rappresentato qui come un mattoncino) in presenza del campo di attrazione gravitazionale terrestre. Sono rappresentate le sole forze agenti sul corpo: $\boldsymbol{F}_g$, forza di attrazione gravitazionale, ed $\boldsymbol{N}$, una forza, che agisce sul corpo, come reazione alla componente normale al piano della forza di attrazione gravitazionale, agente sul piano. Ai fini del calcolo del moto del corpo si considera la risultante delle forze agenti su di esso.

Posso usare le leggi di Newton per chiarire le forze in gioco.
Se il corpo fosse libero di muoversi, cadrebbe lungo la verticale, invece il corpo (punto materiale) scivola lungo il piano inclinato, quindi ci sarà una componente risultante solo lungo il piano, che accelera il corpo. Sono nel campo gravitazionale e sono in presenza della forza di attrazione $\boldsymbol{F}_g = m\,\boldsymbol{g}$.

Posso scomporre la forza di attrazione gravitazionale nelle componenti lungo il piano inclinato e lungo la normale al piano.
Lungo la normale non ho variazione di velocità, il corpo rimane sul piano inclinato, allora la sommatorie delle forze lungo questa direzione deve essere nulla. Quindi il corpo subisce una forza, detta normale $\boldsymbol{N}$, come reazione del piano al-

la forza d'azione, che il corpo imprime sul piano, dovuta alla forza di attrazione gravitazionale.

Se considero le forze agenti sul punto materiale, per il lavoro della forza totale agente su di esso da A a C avrò:

$$W_{AC}(\boldsymbol{F}_{tot}) = \int_A^C \boldsymbol{F}_{tot} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_A^C (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_g) \cdot d\boldsymbol{s} \ . \tag{3.16}$$

Posso studiare ogni singola forza, e poi fornire il risultato globale, come somma dei singoli lavori:

$$W_{AC}(\boldsymbol{F}_{tot}) = \int_A^C \boldsymbol{N} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_A^C \boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \ = W_{AC}(\boldsymbol{N}) + W_{AC}(\boldsymbol{F}_g) \ ,$$

dato che $\boldsymbol{N}$ è normale a d$\boldsymbol{s}$ il lavoro $W_{AC}(\boldsymbol{N}) = 0$.

Consideriamo ora il lavoro fatto dalla forza $\boldsymbol{F}_g$: $W_{AC}(\boldsymbol{F}_g)$. Posso scomporla nei suoi componenti normale e parallelo allo spostamento.
Il componente normale (in maschile si intende il vettore, al femminile il modulo) al piano risulta $\boldsymbol{F}_{g\,\perp} = -mg\mathrm{sen}\beta\ \boldsymbol{u}_N$. Tale forza per il contatto tra il corpo ed il piano agisce sul piano, quindi la reazione del piano sul corpo è $\boldsymbol{N} = mg\mathrm{sen}\beta\ \boldsymbol{u}_N$, dove abbiamo scelto come versore quello individuato dal vettore $\boldsymbol{N}$.
Il componente $\boldsymbol{F}_{g\,\parallel} = mg\cos\beta\ \boldsymbol{u}_s$, dove tale forza è nel verso dello spostamento d$\boldsymbol{s}$ e dà un contributo non nullo al lavoro.
La forza gravitazionale compie lavoro solo lungo il piano inclinato, o meglio il componente lungo d$\boldsymbol{s}$ compie lavoro, mentre quello normale compie lavoro nullo, per cui:

$$W_{AC}(\boldsymbol{F}_g) = \int_A^C F\cos(\beta)\boldsymbol{u}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^C F\cos(\beta)\mathrm{d}s = F\cos(\beta)\int_A^C \mathrm{d}s = F\cos\beta l \ , \tag{3.17}$$

dove con l indichiamo la lunghezza del piano inclinato.

Abbiamo ricavato in questo caso che il lavoro della forza totale è uguale al lavoro della forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_g$, solo il componente di tale forza lungo il piano inclinato compie lavoro non nullo.

Si propone come esercizio di calcolare il lavoro, fatto dalla forza gravitazionale nel caso, che il corpo, invece di scivolare sul piano, percorra il tratto ABC in Fig. 3.8.

Il Teorema dell'energia Cinetica detto anche delle forze vive

Il teorema dell'energia cinetica afferma, che il lavoro, fatto da una forza da una posizione qualsiasi A ad un'altra posizione qualsiasi B, è pari alla variazione di energia cinetica nella posizione B meno l'energia cinetica nella posizione A:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}) = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = K(B) - K(A) \ , \tag{3.18}$$

dove $K(B)$ e $K(A)$ è l'energia cinetica rispettivamente in B ed in A, con l'energia cinetica K definita come:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \ . \tag{3.19}$$

Sulla base della (3.18), che esprime la relazione tra lavoro ed energia cinetica, si ha che anche l'energia cinetica è espressa in Joule.

Esplicitando la (3.18):

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}) = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \ . \tag{3.20}$$

La dimostrazione di questo teorema è una conseguenza immediata del calcolo vettoriale.
Per dimostrarlo, considero il lavoro di una forza qualsiasi $\boldsymbol{F}$:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}) = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \overbrace{=}^{\boldsymbol{F}=m\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^B m\mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t} = \int_A^B m\mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \ .$$

Si dimostra (vedi probl. 3.4) che il prodotto $\mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(v^2) \ , \tag{3.21}$$

dove $\boldsymbol{v}$ è il vettore velocità, mentre v è il suo modulo, $\mathrm{d}(v^2)$ è il differenziale di v^2.

Pertanto si ha:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}) = \int_A^B m\mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \int_A^B m\frac{1}{2}\mathrm{d}(v^2) = \frac{1}{2}mv^2 \,\Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \ ,$$

che dimostra la (3.20).

Forze conservative ed energia potenziale

Si dicono forze conservative le forze, per le quali il lavoro da un punto A ad un punto B risulta indipendente dal percorso fatto[4].

Se questo è verificato, per una forza conservativa posso definire una funzione, detta energia potenziale, che indicherò con U, tale che la sua differenza tra due punti nello spazio dia il lavoro fatto dalla forza conservativa stessa. Iniziamo con il considerarla proporzionale al lavoro, con una appropriata scelta per il calcolo vedremo che tale funzione sarà di segno opposto rispetto al lavoro, fatto dalla forza conservativa, in ogni caso sarà indipendentemente dal percorso.
Quindi U risulterebbe:

$$U \propto \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \mathrm{cost} \ . \tag{3.22}$$

[4] Si dimostra che tale definizione equivalente a dire che il lavoro su un percorso chiuso è nullo.

La (3.22), per le proprietà del calcolo integrale, afferma che tale funzione U è definita a meno di una costante, dato che:

$$dU \propto \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \mathrm{d}(\mathrm{cost}) \propto \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \ ,$$

il differenziale di qualsiasi costante risulta pari a zero.

Tale funzione sarà dipendente solo dalle coordinate dello spazio, quindi la sua espressione dipenderà dal sistema di assi coordinati scelto.

La forza gravitazionale: un esempio didattico semplice di una forza conservativa

Verifichiamo, se la forza gravitazionale è una forza conservativa. Scegliamo due percorsi e calcoliamo il lavoro tra i punti iniziale e finale. Utilizziamo Fig. 3.8 e prendiamo il primo percorso (I), che va da A a B, e poi da B a C, ed il secondo percorso (II) va da A a C lungo il piano inclinato. Calcoliamo il lavoro dal punto A al punto C per entrambi i percorsi W_I, W_{II}.

$$\begin{cases} \text{Percorso } I) \;\; W_I(\boldsymbol{F}_g) = W_{ABC}(\boldsymbol{F}_g) = W_{AB}(\boldsymbol{F}_g) + W_{BC}(\boldsymbol{F}_g) \ , \\ \text{Percorso } II) \;\; W_I(\boldsymbol{F}_g) = W_{AC}(\boldsymbol{F}_g) \ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_A^B (\boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_B^C \boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = mgh + 0 \ , \\ \int_A^C (\boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A^C (mg\cos(\pi/2 - \alpha)dl = mg\sin\alpha l \ , \end{cases}$$

dove h è la distanza tra il punto A ed il punto B.

Il risultato sul primo percorso e quello sul secondo percorso son uguali, dato che $l\sin\alpha = h$.

Il lavoro non dipende dal percorso. Si può scegliere qualsiasi percorso, il lavoro da A a C sarà sempre lo stesso (vedere il probl. 3.5) e sarà dato dalla distanza tra i due piani normali al versore $\boldsymbol{u}_g$, che contengono rispettivamente uno il punto A l'altro il punto C.

Generalizziamo per arrivare alla definizione della funzione U, dipendente dalle coordinate spaziali, dobbiamo esprimere il calcolo del lavoro fatto dalla forza conservativa $\boldsymbol{F}_g$ rispetto a tali coordinate. Visto che non dipende dal percorso, ma solo dalla distanza tra i piani ortogonali alla forza, scegliamo il percorso più facile per il calcolo dell'integrale di linea rispetto al sistema di assi coordinati cartesiani, ovvero lungo l'asse z. Seguiamo la stessa impostazione grafica presentata in Fig. 3.6, dove per tale sistema di assi si ha $\boldsymbol{F}_g = -mg\,\boldsymbol{u}_z$ e uno spostamento infinitesimo generico l'asse z è dato da $\mathrm{d}z\,\boldsymbol{u}_z$ [5]

Quindi il lavoro della forza gravitazionale tra qualsiasi piano si calcola:

---

[5] Vedremo che nel caso di un sistema di assi cartesiani uno spostamento infinitesimo è dato da $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{u}_x + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{u}_y + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{u}_z$, in questo caso ci stiamo limitando al calcolo solo lungo la verticale, visto che il lavoro dipende solo dalla distanza tra piani ortogonali.

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_g)(\text{ lungo l'asse } z \text{ in Fig.}(3.6)) =$$

$$= \int_A^B (-mg\, \boldsymbol{u}_z) \cdot (\mathrm{d}z\, \boldsymbol{u}_z) = -mg \int_A^B \mathrm{d}z = -mg(z_B - z_A)\ .$$

Osserviamo, come ci aspettiamo, che

nel caso $z_B > z_A$ il lavoro fatto dalla forza gravitazionale è negativo, infatti lo spostamento e la forza risultano discordi (in verso);
nel caso $z_B < z_A$ l lavoro fatto dalla forza gravitazionale è positivo, infatti lo spostamento e la forza risultano concordi.

3.3.2 L'energia potenziale

Chiarito il calcolo del lavoro per qualsiasi punto dello spazio di una forza conservativa dal punto di vista della sua rappresentazione con le coordinate spaziali (ne stiamo utilizzando una delle più semplici), dobbiamo ora risolvere la questione della proporzionalità nella (3.22).

Se lascio cadere un corpo dal un punto A al punto C lungo il piano inclinato, ottengo una velocità in C, che mi viene data dal teorema dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned} W_{AC} &= \tfrac{1}{2}mv_C^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2\ , \\ \text{dove } W_{AC} &= -mg(z_C - z_A)\ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

dato che la velocità in A è nulla ottengo, se pongo $h = -(z_C - z_A)$, che il lavoro mgh si "trasforma" in energia cinetica K_C, la (3.23) diventa:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2\ .$$

Ma, per ottenere tale energia cinetica, bisogna portare prima l'oggetto in A. Bisogna configurare il sistema – massa del corpo e Terra – la forza gravitazionale deriva dall'interazione tra questi due corpi.

Quindi suppongo di prendere il corpo di massa m fermo sul suolo terrestre, il piano xy passante per $z = 0$, e di portarlo nel punto A. Visto che il lavoro non dipende dal percorso, ne scelgo uno facile per il calcolo, ma sullo stesso piano del punto C. Dato che $Z_C = Z_B$ parto da B per portare il corpo in A e mi muovo quindi lungo la verticale da B ad A.
Per fare questo, devo applicare una forza esterna, che etichetto $\boldsymbol{F}_{app}$, al corpo di massa m e da B, in cui ha velocità nulla, lo porto in A, dove mi fermo, e quindi il corpo anche in A avrà alla fine velocità nulla.

Se applico il teorema dell'energia a questa operazione, ne consegue, dato che le forze agenti sono $\boldsymbol{F}_{app}$ e $\boldsymbol{F}_g$:

$$W_{BA}(\boldsymbol{F}_{app} + \boldsymbol{F}_g) = K_A - K_B = 0 \equiv W_{BA}(\boldsymbol{F}_{app}) = -W_{BA}(\boldsymbol{F}_g)\ . \tag{3.24}$$

Il lavoro fatto dalla forza esterna applicata, per configurare il sistema, una volta lasciato il corpo scivolare lungo il piano inclinato, si trasforma in energia cinetica. Di questo lavoro, fatto dall'esterno, nella configurazione, presentata con il corpo già nella posizione A, se ne perde memoria.

Osserviamo la configurazione ed associamo ad essa un'energia detta potenziale, potremmo dire che l'*energia potenziale* è un *energia di configurazione*, che deve essere stata fornita dall'esterno al sistema.

Tale energia si può calcolare dal lavoro della forza conservativa, in quanto il lavoro fatto dalla forza esterna è uguale in modulo, ma di segno contrario, al lavoro fatto dalla forza conservativa.

Quindi l'energia potenziale è l'energia di configurazione del sistema, che viene fornita al sistema:

$$\Delta U_{BA} = W_{BA}(\boldsymbol{F}_{app}) = -W_{BA}(\boldsymbol{F}_g) \ .$$

Dell'equazione precedente della forza esterna applicata quasi ci si dimentica e si presenta semplicemente la conclusione:

$$\Delta U_{BA} = -W_{BA}(\boldsymbol{F}_g) = -\int_B^A \boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \ ,$$

invece è di fondamentale importanza ricordare, che l'energia potenziale di un sistema riguarda la sua configurazione, e che, per calcolare l'energia, dobbiamo immaginare di costruire il sistema proprio in quella configurazione.

Indicheremo $\Delta U_{BA} = U(B) - U(A) = -\int_B^A \boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$. La funzione scalare U, che rende conto del fatto, che la forza sia conservativa e che si calcola come differenza dei valori assunti nei punti nello spazio.
Per generalizzare è meglio fornirla in forma differenziale:

$$dU = -\boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \ . \tag{3.25}$$

Noi abbiamo utilizzato una forza particolare, $\boldsymbol{F}_g$, chiamandola anche solo conservativa, per comodità e semplicità didattica, ma la (3.25) vale per qualsiasi forza conservativa, che indicheremo in genere con $\boldsymbol{F}_{cons}$.

Sulla base della definizione (3.25) la funzione energia potenziale è definita a meno di una costante. Sta a noi arbitrariamente porre la costante pari a zero in una configurazione, a seconda delle comodità di calcolo.

Applichiamo questa considerazione al caso della forza di attrazione gravitazionale, espressa secondo il sistema di assi coordinati in Fig. 3.8, con origine alla base del piano inclinato:

$$dU = -\boldsymbol{F}_g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -(-mg\ \mathrm{d}z)$$
per cui :
$$U = mg\,z + \mathrm{cost}$$

Se impongo $U(z = 0) = 0$, ottengo che cost = 0, posso esprimere per questa scelta $U = mgz$, ma devo ricordare, che il valore della funzione per $z = 0$ è stato arbitrariamente imposto da me pari a zero per comodità di calcolo[6].

3.3.3 Principio di conservazione dell'energia

In generale, se una forza è conservativa, posso definire quindi una funzione U dipendente solo dalle coordinate spaziali, tale che $\Delta U_{AB} = -W_{AB}(\boldsymbol{F}_{cons})$, e per il teorema dell'energia cinetica:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_{cons}) = K(B) - K(A) \equiv$$

$$\equiv -\Delta U_{AB} = K(B) - K(A) \equiv$$

$$\equiv -[U(B) - U(A)] = K(B) - K(A) \equiv$$

$$\equiv K(B) + U(B) = K(A) + U(A) \ ,$$

la somma tra energia potenziale ed energia cinetica si conserva, " $K + U$ = cost " in qualsiasi punto dello spazio, o direi per qualsiasi configurazione– stato del sistema.

Ci possono essere varie forze conservative, abbiamo visto che quella gravitazionale terrestre lo è, lo è anche la forza elastica, nonché la forza elettrostatica, ed altre ancora.

Da ciò ne consegue il *principio di conservazione dell'energia meccanica*, indicata qui con il simbolo E_M:

$$E_M = K + \sum U = \text{cost} \quad \text{in un sistema isolato con solo forze conservative .}$$

In un sistema isolato, ovvero sul quale non agiscono forze esterne, l'energia meccanica del sistema si conserva. Si ricordi che nell'energia meccanica contempliamo l'energia cinetica e qualsiasi forma di energia potenziale, derivata da forze conservative.

3.3.4 Estensione del principio di conservazione dell'energia meccanica ad altre forme di energia

Il teorema dell'energia cinetica può essere esteso a una qualsiasi forza applica, mentre l'energia cinetica e le eventuali energie potenziali, dovute a forze conservative,

[6] Inoltre per correttezza dovremmo dire che $U = U(x,y,z)$. Nel caso dell'energia potenziale gravitazionale terrestre U è costante sul piano xy, questo deriva dal fatto che il lavoro su ogni piano ortogonale è nullo, e quindi la variazione dU è nulla. Per questa parte introduttiva tale puntualizzazione non è fondamentale.

sono inglomerate nell'energia meccanica E_M.

In presenza di un'altra forza applicata esterna e di forze conservative il teorema dell'energia cinetica si può scrivere sempre, per il teorema dell'energia cinetica, come:

$$W_{AB}(\boldsymbol{F}_{app}) = \Delta E_M \ ,$$

dove in E_M è inclusa l'energia cinetica e tutte le forze conservative presenti con la rispettiva energia potenziale.
Se il lavoro della forza applicata è maggiore di zero, aumenta l'energia meccanica; se negativo, invece diminuisce.

Consideriamo ora alcune forze, dette dissipative, che non sono conservative, tipo per esempio la forza di attrito dinamico, ovvero una forza che agisce su un corpo in moto, opponendosi al moto stesso. Tale forza è data dalla legge $\boldsymbol{F}_d = -\mu_d N \boldsymbol{u}_v$, dove N è il modulo della normale alla superficie di contatto, tra il corpo e la superficie, pertanto μ_d, detto coefficiente di attrito dinamico deve essere adimensionale, e risulta sempre minore di uno. Tale forza è sempre nel verso opposto al versore della velocità, indicato qui come $\boldsymbol{u}_v$, si dimostra che tale forza non è conservativa (vedi probl. 3.6).

Per semplicità consideriamo che ci sia attrito solo sul piano orizzontale in Fig. 3.9, ottenuta dal piano inclinato, presentato in Fig. 3.8.

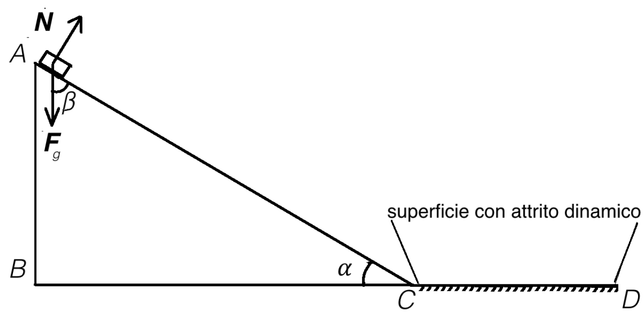

Figura 3.9 All'esempio presentato in Fig. 3.8 viene aggiunto un piano orizzontale, sul quale tra corpo e superficie c'è attrito dinamico.

Sul moto orizzontale il lavoro della forza di attrito è negativo. Pertanto l'energia potenziale iniziale nel punto A, si trasforma in energia cinetica nel punto C, poi il corpo viene rallentato fino a fermarsi nel punto D dalla forza di attrito dinamico (probl. 3.6).

Dall'esperienza sappiamo che sia il corpo che il piano si scaldano, ovvero aumenta la loro temperatura. Quindi consideriamo come sistema l'insieme del corpo (e ovviamente la sua interazione gravitazionale con la Terra), il piano inclinato e la superficie con attrito.

L'energia fornita all'inizio dalla forza esterna assume la forma di energia potenziale, poi energia del moto (cinetica), ed in parte viene dissipata in energia termica, l'energia termica aumenta. La chiamiamo in questo modo, perché produce lo stesso effetto dell'aumento di temperatura, che si avrebbe fornendo calore (questa grandezza sarà studiata nella termodinamica).

Possiamo quindi aggiungere un termine di energia termica, indicata con E_{th}:

$$E_{th} + U + K = \text{cost}$$
$$E_{th}(A) + U(A) + K(A) = E_{th}(D) + U(D) + K(D)$$

nel caso del corpo lasciato cadere lungo il piano inclinato, ci sarà un aumento dell'energia termica.

Diversamente dal caso in cui non ci fosse attrito , adesso si arriverà ad una distanza dal piano inclinato in cui il corpo si fermerà: l'energia potenziale iniziale in A si trasformain energia cinetica in C , e nel punto in cui si fermerà il corpo, che abbiamo indicato con D, in energia termica.

Il principio di conservazione dell'energia, può essere esteso ad altre forme di energia, energia chimica, energia nucleare, ecc. ecc. ecc. L'estensione del principio di conservazione dell'energia meccanica porta direttamente al principio di conservazione dell'energia, qualsiasi forma di energia.

Possiamo estendere il nostro concetto applicando una forza esterna nella direzione del moto con un lavoro $W_{AD}(\boldsymbol{F}_{est}) > 0$ per cui avremo

$$W_{AD}(\boldsymbol{F}_{est}) = \Delta E_{th} + \Delta U + \Delta K \ , \tag{3.26}$$

Il lavoro, fatto da questa forza esterna, andrà in parte in energia cinetica, in parte in energia termica, in parte in energia potenziale.

Per la meccanica vale il principio di conservazione dell'energia, se fornisco energia al sistema dall'esterno, mediante il lavoro di una forza esterna, ne aumento l'energia potenziale e cinetica, che descrivono lo stato meccanico del sistema, e l'energia termica.

Immaginate che il lavoro sia negativo, ovvero nel verso opposto, posso diminuire l'energia meccanica e avrò sempre parte dell'energia, che viene dissipata in calore.

Il punto di partenza della termodinamica è proprio lo studio delle trasformazioni dell'energia interna, che riguardano lo stato del sistema, un sistema con un numero infinito di corpi, in calore e l'influenza del lavoro su tali sistemi, nonché anche la possibilità di ottenere lavoro da sistemi complessi detti termodinamici, sfruttando l'energia del sistema o il calore.

Problemi

3.1. Per la caduta libera del grave descrivere l'equazione oraria, utilizzando l'asse coordinato, rivolto verso il basso, e l'origine nella posizione, dove si trova il corpo prima di lasciarlo cadere. Riportare su grafico z in funzione del tempo, per entrambi i casi.

3.2. Per il caso della caduta del grave, utilizzando l'asse coordinato z presentato in Fig. 3.6 e con i seguenti dati $\boldsymbol{r}_0 = (9.8 \text{ m})\ \boldsymbol{u}_z$, $\boldsymbol{v}_0 = (9.8 \text{ m s}^{-1})\ \boldsymbol{u}_z$, nonché $\boldsymbol{g} = -(9.8 \text{ m s}^{-2})\ \boldsymbol{u}_z$ trovare:

a) l'altezza massima, alla quale arriva il grave, in quale istante e con quale velocità;
b) l'istante in cui ripassa, cadendo per z_0, e la velocità,
c) l'istante in cui raggiunge il suolo e con quale velocità.

3.3. Fare il probl. 3.2, utilizzando l'asse coordinato, rivolto verso il basso, e l'origine nella posizione, dove si trova il corpo prima di lasciarlo cadere. Riportare su grafico z in funzione del tempo, per entrambi i casi.

3.4. Dimostrare che $\mathrm{d}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 1/\mathrm{d}v^2$, si ricordi che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2$ e si calcoli il differenziale del primo e del secondo membro della uguaglianza.

3.5. Si calcoli il lavoro fatto dalla forza di attrazione gravitazionale terrestre, su una semicirconferenza di raggio h, che parta da una quota h e sia appoggiata all'estremo inferiore sul suolo. Ovviamente ci aspettiamo che tale lavoro risulti ancora mgh.

3.6. Si consideri la forza d'attrito dinamico, data dalla relazione $\boldsymbol{F}_d = -\mu_d N \boldsymbol{u}_v$ e si dimostri che non è conservativa. Si assuma di avere un corpo di massa 1.25 kg, che si trovi su un piano inclinato di lunghezza 1.25 m e di angolo di inclinazione $\alpha = 30°$. Si fornisca l'energia cinetica iniziale, la velocità alla fine del piano inclinato. Il corpo si muove su un piano orizzontale e subisce la forza di attrito suddetta, con il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.20$. Fornire a quale distanza dal piano inclinato si ferma il corpo, l'energia dissipata durante il moto.

Riferimenti bibliografici

1. BIPM, *Le Système international d'unitès –SI* 8ª ed. 2006.
   http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8_en.pdf . 8 th ed. 2006
2. BIPM, *A concise summary of the International System of Units — the SI* 8ª ed. 2006.
   http://www.bipm.org/utils/common/pdf/si_summary_en.pdf
3. CRC *Handbook of Chemistry and Physics*, 83ª ed., ed. D.R. Lide (CRC press LLC, Bota Raton Florida, 2002).
4. *Addendum sui sistemi di assi coordinati* sarà studiato nella parte dell'elettromagnetismo ed è reperibile sul sito nella pagina dei dettagli del corso
   http://www.fe.infn.it/u/ciullo/fisica_mate/16_17_programma_e_indicazioni_testi.htm
5. G. Ciullo "*Addendum sull'ascissa curvilinea*" un addendum che descrive in modo formale l'ascissa curvilinea, fornito solo per curiosità personale.