MAPPE DI KARNAUGH

A questo punto l'eliminazione di AB è semplice. Infatti:

$$AB + A\bar{C}D + AC\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + BCD = AB(C + \bar{C})(D + \bar{D}) +$$

$$+ A\bar{C}D + AC\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + BCD = ABCD + AB\bar{C}D + ABC\bar{D} +$$

$$+ AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{C}D + AC\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + BCD = A\bar{C}D(B + 1) +$$

$$+ AC\bar{D}(B + 1) + B\bar{C}\bar{D}(A + 1) + BCD(A + 1)\ ; \quad \text{infine:}$$

$$Y = A\bar{C}D + AC\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + BCD\,.$$

Il metodo di Quine - Mc Kluskey, quasi sempre, ha bisogno di essere integrato dalla rete dei termini indispensabili affinchè si possa semplificare al massimo un'espressione booleana. Per tale motivo si rivela piuttosto laborioso. Tuttavia, tale metodo, viene usato per semplificare espressioni in cui il numero delle variabili è superiore a quattro. In tutti gli altri casi è preferibile usare il metodo delle *mappe di Karnaugh*, di cui trattiamo in seguito.

5-5. Metodo delle mappe di Karnaugh.

Le mappe di Karnaugh servono per rappresentare graficamente una funzione booleana e per poterla eventualmente semplificare. Esse sono costituite da un raggruppamento di caselle il cui numero dipende da quello delle variabili che figurano nella funzione da rappresentare. Appunto per questo vi sono mappe a una, due, tre, quattro, e più variabili. Nell'illustrare le mappe che useremo in questo volume, riportiamo, di volta in volta, i raggruppamenti sia in forma binaria che in forma *letterale*.

Mappa ad una variabile.

La mappa ad una variabile è costituita da due caselle, alle quali corrispondono i due valori che può assumere la stessa variabile (figg. 5.15 e 5.16).

I valori riportati all'interno delle caselle, al solo scopo di chiarire meglio l'argomento, in pratica non devono assolutamente comparire; la mappa deve cioè presentarsi come nella figura 5.17.

	0	1
A	0	1

Fig. 5.15 - Mappa ad una variabile nelle cui caselle sono riportati i valori corrispondenti, in forma binaria.

	0	1
A	$\bar{A}$	A

Fig. 5.16 - Mappa ad una variabile, nelle cui caselle sono riportati i valori corrispondenti, in forma letterale.

	0	1
A		

Fig. 5.17 - Rappresentazione corretta di una mappa a una variabile.

I suddetti valori si deducono dalle *annotazioni binarie* messe ai margini della mappa, facendo, com'è noto, corrispondere il bit *1*, alle variabili in forma vera e il bit *0* alle stesse variabili in forma inversa.

Mappa a due variabili.

La mappa a due variabili è costituita da quattro caselle (figg. 5.18 e 5.19), cioè, tante quante sono le combinazioni binarie che possono formarsi con dette variabili. Le combinazioni vanno di solito scritte, facendo seguire alle variabili l'ordine alfabetico. In ogni caso, ad evitare confusioni, in tutte le mappe di Karnaugh, l'ordine con cui devono combinarsi le variabili viene indicato in alto a sinistra, con una chiara *annotazione letterale*.

$B \backslash A$	0	1
0	0 0	1 0
1	0 1	1 1

Fig. 5.18 - Mappa a due variabili con valori espressi in forma binaria.

$B \backslash A$	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$
1	$\bar{A}B$	AB

Fig. 5.19 - Mappa a due variabili con valori espressi in forma letterale.

Mappa a tre variabili.

Nella mappa a tre variabili, riportata con valori espressi sia in forma binaria che in forma decimale, rispettivamente nella figura

BC \ A	0	1
00	000	100
01	001	101
11	011	111
10	010	110

a

BC \ A	0	1
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
01	$\bar{A}\bar{B}C$	$A\bar{B}C$
11	$\bar{A}BC$	ABC
10	$\bar{A}B\bar{C}$	$AB\bar{C}$

b

Fig. 5.20 - Mappa a tre variabili.

5.20 *a* e *b*, si può osservare che in corrispondenza dell'*annotazione letterale*, riguardante le variabili B e C, *l'annotazione binaria*, è formata dalle combinazioni binarie relativa a due variabili, ossia: 00 - 01 - 11 - 10. Ovviamente, a B corrispondono i primi valori di tali combinazioni, che sono nell'ordine: 0 - 0 - 1 - 1, mentre a C, corrispondono i rimanenti valori, che nell'ordine sono: 0 - 1 - 1 - 0. Con criteri analoghi si possono costruire le mappe a quattro, cinque e sei variabili, riportate qui di seguito.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

CD \ AB	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
01	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$	$A\bar{B}\bar{C}D$
11	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}BCD$	$ABCD$	$A\bar{B}CD$
10	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$ABC\bar{D}$	$A\bar{B}C\bar{D}$

Fig. 5.21 - Mappa a quattro variabili.

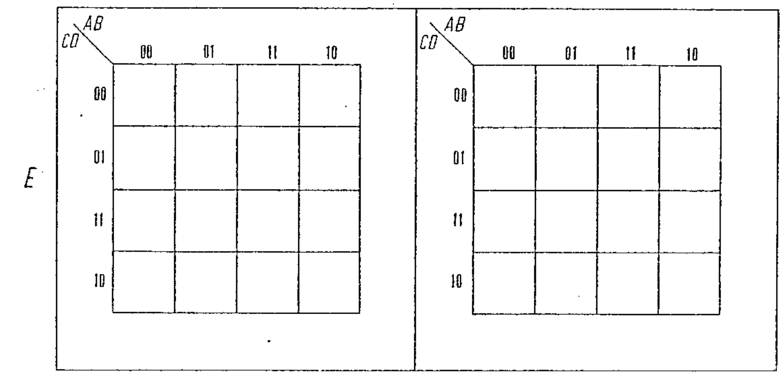


Fig. 5.22 - Mappa a cinque variabili.

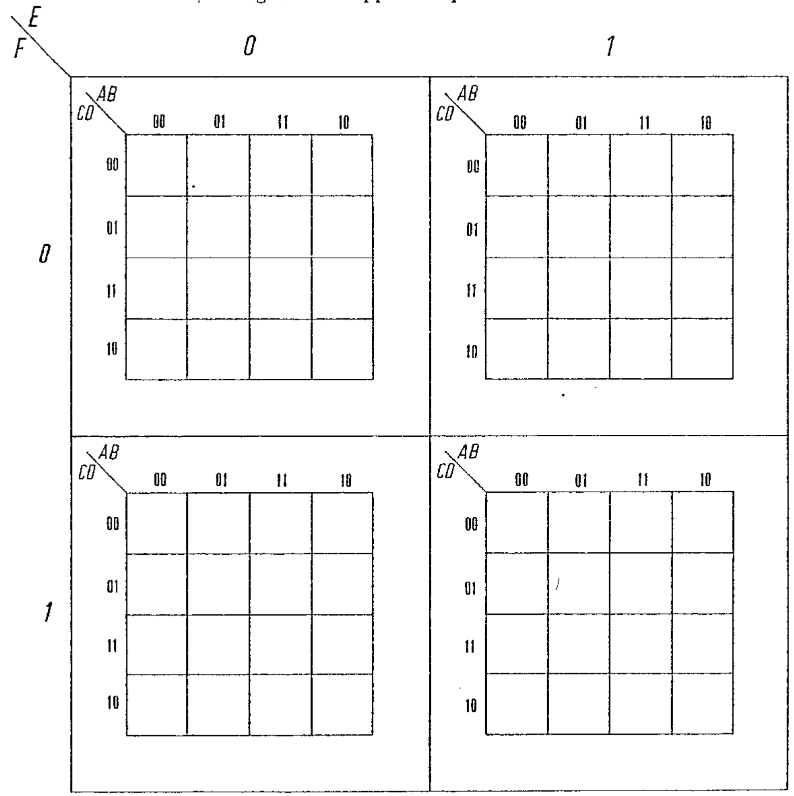


Fig. 5.23 - Mappa a sei variabili.

5-6. **Raffigurazione di un'espressione in forma canonica, mediante le mappe di Karnaugh.**

Volendo raffigurare con una mappa di Karnaugh, per esempio, l'espressione, sotto forma di somma canonica:

$$X = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}\bar{B}C\,,$$

si disegna la mappa ad essa relativa (fig. 5.24) collocando un bit 1 nelle caselle corrispondenti ai termini dell'espressione, lasciando vuote le altre (fig. 5.25).

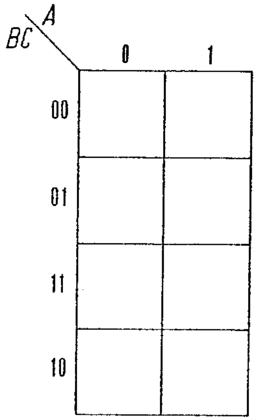


Fig. 5.24 - Mappa a tre variabili non contenente alcuna funzione.

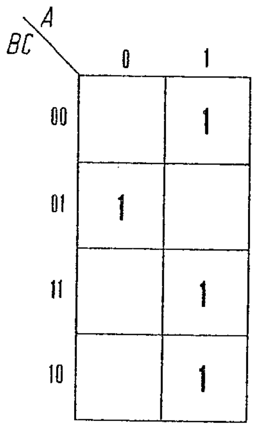


Fig. 5.25 - Rappresentazione della funzione $X = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}\bar{B}C$.

5-7. **Raffigurazione di un'espressione qualunque.**

Si voglia raffigurare l'espressione:

$$X = \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}D + AB\bar{C} + A\bar{C}\bar{D}\,.$$

Essa non è sotto forma di somma canonica, in quanto tre dei suoi termini mancano di una variabile ciascuno. Tuttavia per poterla raffigurare si disegna una mappa a quattro variabili, collocando intanto un bit *1* nella casella relativa al termine $\bar{A}\bar{B}CD$ (fig. 5.26).

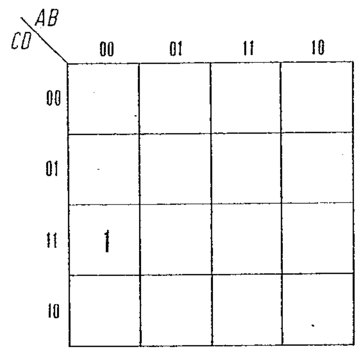


Fig. 5.26 - Mappa a quattro variabili contenente il termine $\bar{A}\bar{B}CD$.

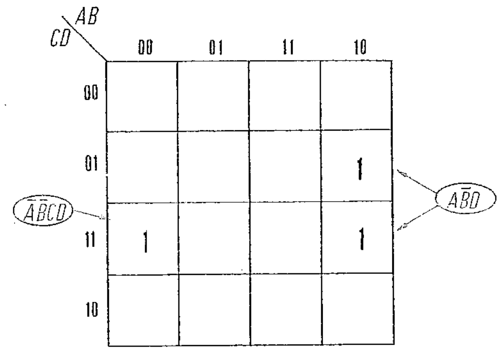


Fig. 5.27 - Mappa a quattro variabili contenente i termini $\bar{A}\bar{B}CD$ e $A\bar{B}D$.

Il secondo termine, $A\bar{B}D$, essendo a tre variabili, è contenuto sia nella casella relativa ad $A\bar{B}CD$ che in quella relativa ad $A\bar{B}\bar{C}D$. Pertanto il segno *1* va collocato in tutt'e due le caselle, così come viene indicato nella figura 5.27.

Allo stesso modo si raffigurano i rimanenti termini, $AB\bar{C}$ e $A\bar{C}\bar{D}$, ottenendo alla fine la mappa della figura 5.28, contenente l'intera espressione.

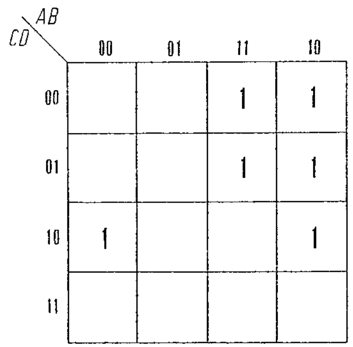


Fig. 5.28 - Mappa raffigurante l'espressione: $X = \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}D + AB\bar{C} + A\bar{C}\bar{D}$.

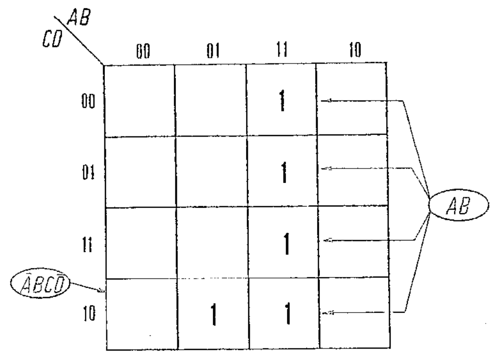


Fig. 5.29 - Raffigurazione della funzione $X = AB + \bar{A}BC\bar{D}$.

Gli ultimi due termini dell'espressione sono contenuti da una stessa casella; non è per questo necessario mettere due volte il segno 1.

Altro esempio di raffigurazione.

Raffigurare l'espressione: $X = AB + \bar{A}BC\bar{D}$.

Si procede nella maniera illustrata dalla figura 5.29.

5-8. Criterio di scelta delle mappe.

Consideriamo, ad esempio, la funzione:

$$Y = AB + \bar{A}\bar{B}\,.$$

Essa si può rappresentare indifferentemente con mappa a 2, 3, 4 variabili, come nella figura 5.30 *a*, *b*, *c*.

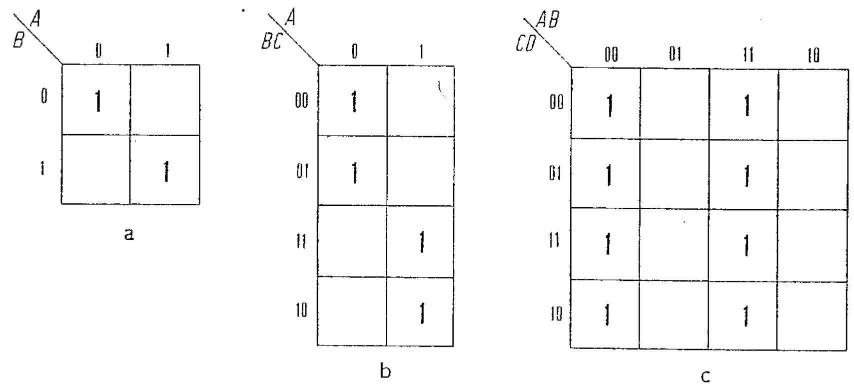


Fig. 5.30 - Mappe raffiguranti l'espressione: $Y = AB + \bar{A}\bar{B}$.

La mappa più indicata, però, è quella a due variabili, essendo chiaramente la meno complessa. Perciò, è buona norma, nella rappresentazione di una funzione, usare la mappa il cui numero di variabili sia uguale a quello della stessa funzione.

5-9. Caselle adiacenti.

Dal punto di vista geometrico due caselle sono *adiacenti* quando hanno un lato in comune. Nelle mappe di Karnaugh, i termini contenuti in *due caselle adiacenti devono necessariamente differire tra loro di una variabile, che in una casella si trova in forma vera e nell'altra in forma inversa.* Ciò allo scopo di poter semplificare le funzioni, applicando graficamente il teorema $AB + A\bar{B} = A\,(B + \bar{B}) = A$, come vedremo meglio in seguito.

Nelle figure 5.31 *a*, *b*, *c*, riportiamo alcuni esempi di caselle adiacenti, i cui termini corrispondenti differiscono effettivamente di una variabile.

Per ottenere che i termini relativi a due caselle adiacenti dal punto di vista geometrico differiscano anche di una variabile è indispensabile che le annotazioni, messe ai margini delle mappe, per

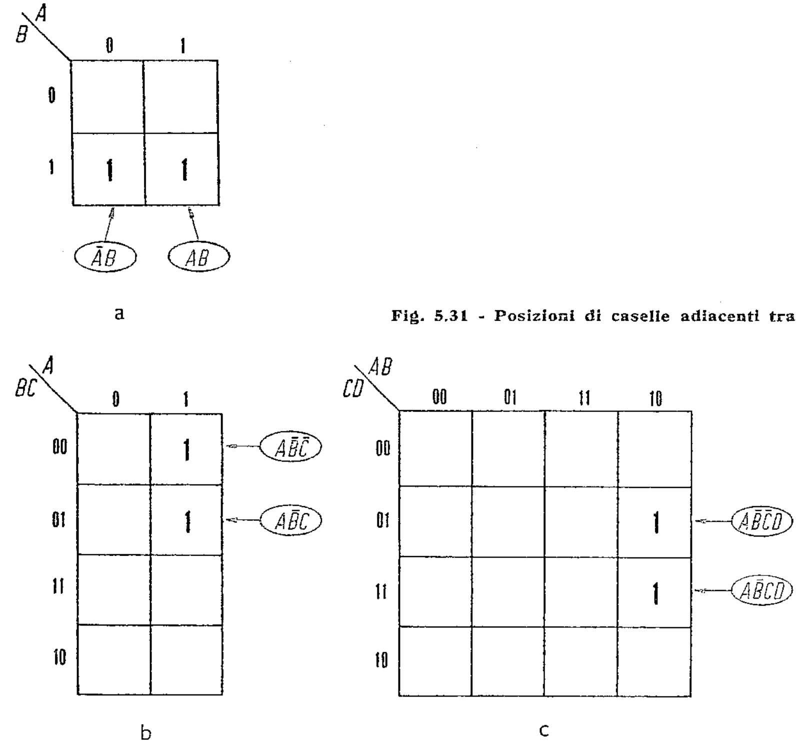


Fig. 5.31 - Posizioni di caselle adiacenti tra loro.

la formazione di tutte le combinazioni binarie, si succedano secondo l'ordine finora seguito: 00 - 01 - 11 - 10, e non secondo l'ordine stabilito in precedenza, dalle tavole della verità: 00 - 01 - 10 - 11.

Infatti, in una mappa numerata secondo quest'ultimo ordine, i termini delle righe centrali differiscono tra loro di due variabili invece che di una, come si può vedere, osservando la figura 5.32.

Nelle mappe di Karnaugh sono da considerarsi adiacenti anche le caselle poste rispettivamente agli estremi delle righe o delle colonne, come chiaramente mostrano gli esempi delle figure 5.33 *a*, *b*, *c*, in cui i termini presi in considerazione, differiscono tra loro di una variabile. Ciò si può spiegare considerando le mappe avvolte in forma

CD \ AB	00	01	10	11
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}\bar{D}$
01	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$
10	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$ABC\bar{D}$
11	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}BCD$	$A\bar{B}CD$	$ABCD$

Fig. 5.32 - Mappa con indicazione binaria errata.

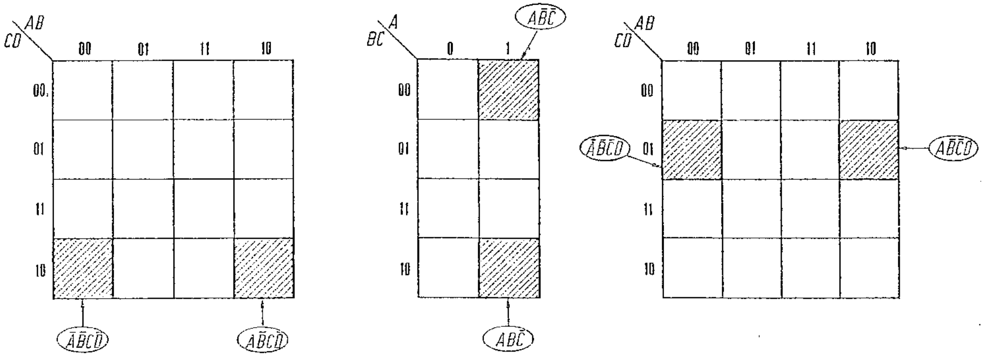


Fig. 5.33 - Altri esempi di caselle adiacenti tra loro.

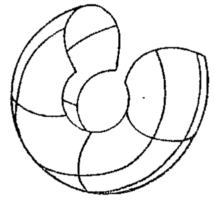


Fig. 5.34 - Con la raffigurazione del toroide si può spiegare perchè sono da ritenersi adiacenti le caselle delle figg. 5.35 *a*, *b*, *c*.

di *toroide* (fig. 5.34) dove ogni qualsiasi casella ha tante altre caselle adiacenti per quanti sono i suoi lati, ossia quattro.

5-10. Semplificazione delle funzioni mediante l'uso delle mappe di Karnaugh.

Si voglia, per esempio, rappresentare, su una mappa a quattro variabili, il termine $A\bar{B}D$ (fig. 5.35).

Notiamo che esso è contenuto nelle due caselle adiacenti, corrispondenti ai termini $A\bar{B}CD$ e $A\bar{B}\bar{C}D$.

Ciò conferma che:

$$A\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}D = A\bar{B}D\,,$$

essendo $C + \bar{C} = 1$ (vedere IV teorema, paragrafo 3-3, a pag. 48).

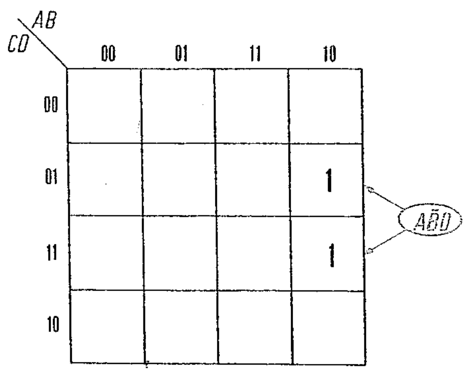


Fig. 5.35 - Rappresentazione del termine $A\bar{B}D$.

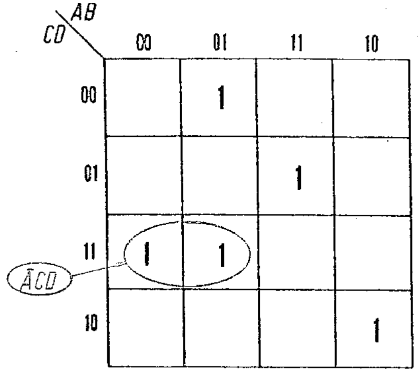


Fig. 5.36 - Mappa con anello di semplificazione.

Pertanto, quando in una mappa di Karnaugh si incontrano termini contenuti in caselle adiacenti tra lòro, si può praticare una semplificazione.

Così, nella mappa della figura 5.36 rappresentante l'espressione:

$$Y = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + A\bar{B}C\bar{D}\,,$$

si può operare una semplificazione, sostituendo, al posto della somma: $\bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD$, il termine $\bar{A}CD$. Tale operazione si mette in evidenza raggruppando i due termini in un unico anello.

Quando i termini da semplificare si trovano in caselle poste agli estremi della tavola, gli anelli si pongono nella maniera indicata dalla figura 5.37.

Supponiamo adesso di voler semplificare l'espressione:

$$X = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D\,,$$

contenuta nella mappa della figura 5.38.

In base alle precedenti considerazioni, possiamo fare tre raggruppamenti diversi (fig. 5.39 *a*, *b*, *c*) ottenendo così altrettante relazioni, equivalenti tra loro:

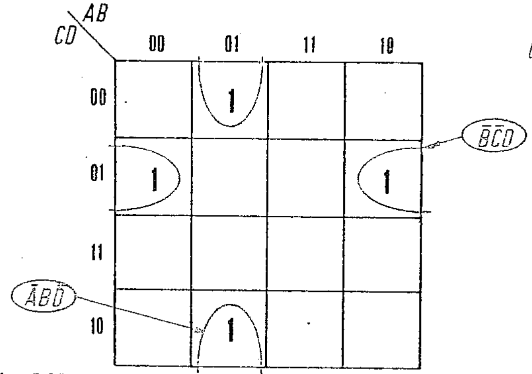


Fig. 5.37 - Rappresentazione del modo di raggruppare i termini adiacenti.

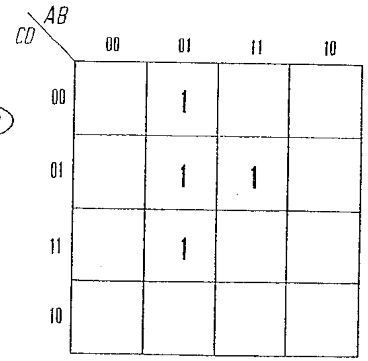


Fig. 5.38 - Mappa raffigurante l'espressione
$X = \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D$.

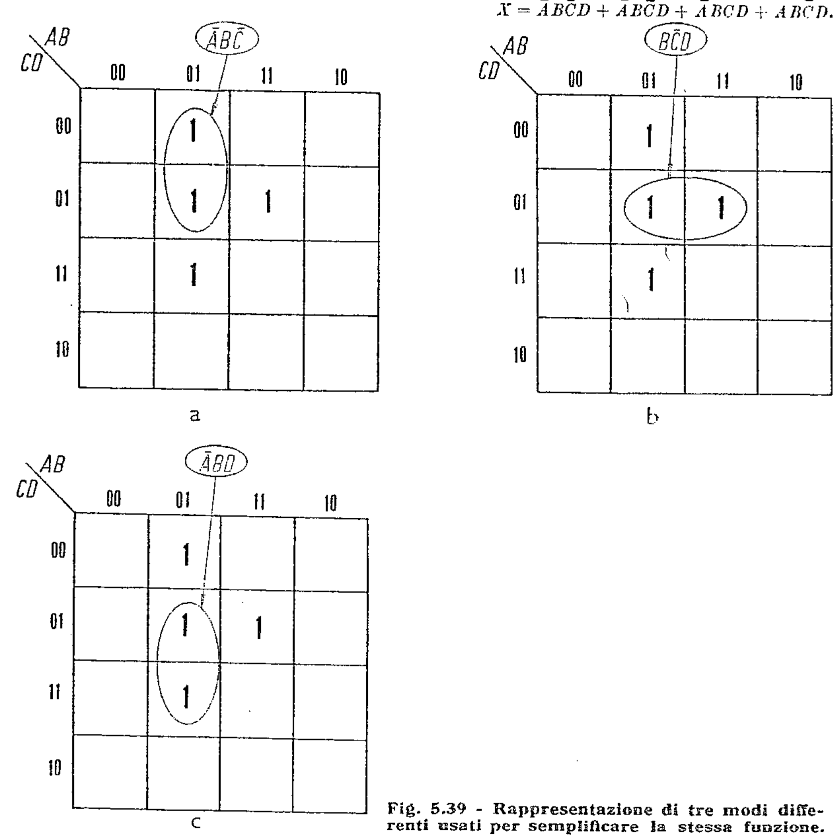


Fig. 5.39 - Rappresentazione di tre modi differenti usati per semplificare la stessa funzione.

1) $X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D$

2) $X = B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD$

3) $X = \bar{A}BD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D\,.$

Elaborando, col metodo algebrico, una delle tre espressioni, per esempio la prima, si ottiene:

$$X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D =$$

$$= \bar{A}B\,(\bar{C} + CD) + AB\bar{C}D =$$

$$= \bar{A}B\,(\bar{C} + D) + AB\bar{C}D = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD + AB\bar{C}D =$$

$$= \bar{A}B\bar{C} + BD\,(\bar{A} + A\bar{C}) = \bar{A}B\bar{C} + BD\,(\bar{A} + \bar{C}) =$$

$$= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD + B\bar{C}D\,.$$

Anche le altre espressioni conducono allo stesso risultato. Ciò significa che con i raggruppamenti formati non si è ottenuta la massima semplificazione dell'espressione.

A tale semplificazione si perviene invece formando su una stessa mappa i tre raggruppamenti, come indica la figura 5.40.

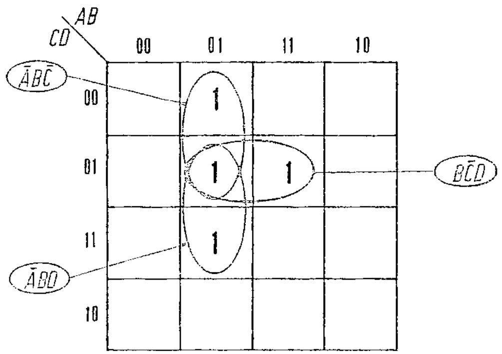


Fig. 5.40 - Semplificazione di una funzione, operata su una sola mappa, con più anelli. La funzione semplificata è $X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD + B\bar{C}D$.

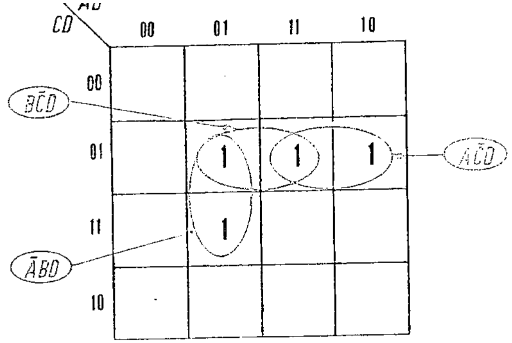


Fig. 5.41 - Semplificazione di una funzione in modo non corretto.

Si viene così a stabilire che, per ottenere la massima semplificazione di un'espressione, talvolta, è necessario includere lo stesso termine in anelli diversi.

Nel fare ciò bisogna però evitare di formare raggruppamenti inutili, come per esempio avviene nella mappa della figura 5.41.

In base agli anelli di semplificazione l'espressione dovrebbe essere:

$$Y = \bar{A}BD + B\bar{C}D + A\bar{C}D\,,$$

mentre si può dimostrare che il termine $B\bar{C}D$ è superfluo. Infatti:

$$Y = \bar{A}BD + B\bar{C}D + A\bar{C}D = \bar{A}BD + B\bar{C}D\,(A + \bar{A}) + A\bar{C}D =$$

$$= \bar{A}BD + AB\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{C}D = \bar{A}BD\,(1 + \bar{C}) + A\bar{C}D\,(1 +$$

$$+ B) = \bar{A}BD + A\bar{C}D\,.$$

5-11. Caselle adiacenti a due a due.

Si voglia semplificare l'espressione:

$$X = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC\,.$$

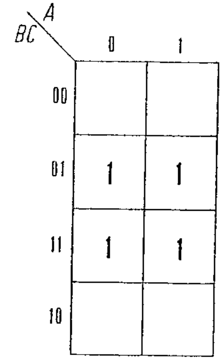


Fig. 5.42 - Rappresentazione della funzione $X = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$.

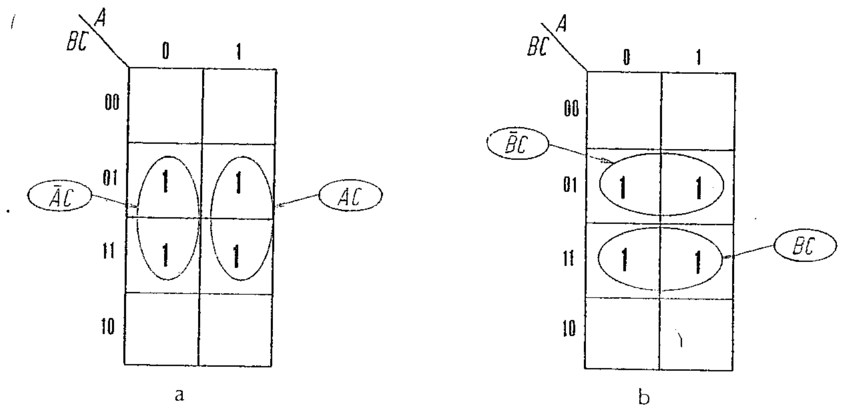


Fig. 5.43 - Due modi diversi per semplificare la stessa funzione.

Riportandola su una mappa di Karnaugh a tre variabili (fig. 5.42), si nota che i termini sono tutti adiacenti tra loro. In base a ciò, si possono formare due diversi raggruppamenti, indicati nelle figure 5.43 *a* e *b*, che ovviamente formano altrettante espressioni semplificate, equivalenti tra loro. Esse sono infatti rispettivamente:

$$X = AC + \bar{A}C = C \qquad \text{e} \qquad X = BC + \bar{B}C = C\,.$$

A questo punto, il concetto di caselle adiacenti, esposto nel paragrafo 5-9, pag. 117, riguardante le *caselle singole*, può essere esteso anche a *gruppi di caselle*, i cui termini da essi rappresentati, diffe-

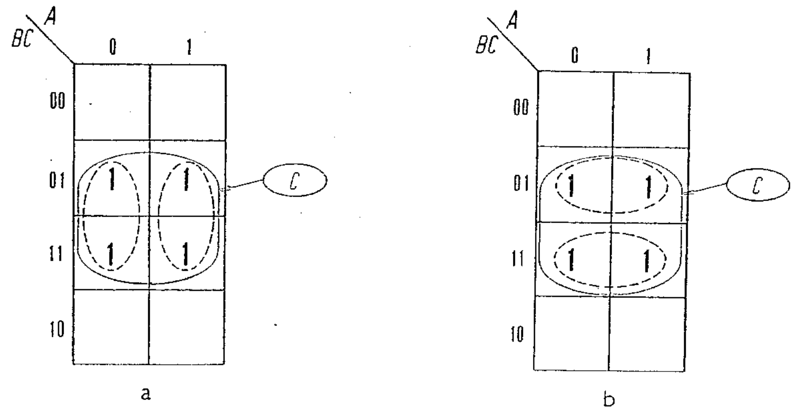


Fig. 5.44 - Semplificazione con gruppi di caselle adiacenti a due a due.

riscono di una variabile. Quindi i gruppi di caselle, relativi ai termini AC e $\bar{A}C$, della figura 5.43, *a*, sono da ritenersi adiacenti, in quanto quest'ultimi, differiscono della variabile A. Analogamente, sono da considerarsi adiacenti i gruppi di caselle relativi ai termini BC e $\bar{B}C$, della figura 5.43 *b*, in quanto quest'ultimi differiscono della variabile B. Possiamo perciò comprendere in un *anello unico* di semplificazione i suddetti gruppi, ottenendo le mappe equivalenti, riportate rispettivamente nelle figure 5.44 *a*, *b*.

Le caselle che nelle suddette figure sono contenute nell'*unico*

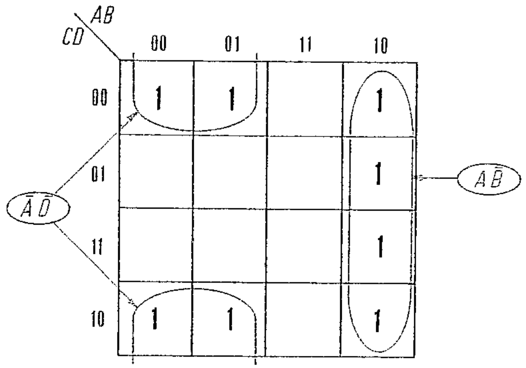


Fig. 5.45 - Esempio di raggruppamenti di caselle adiacenti a due a due.

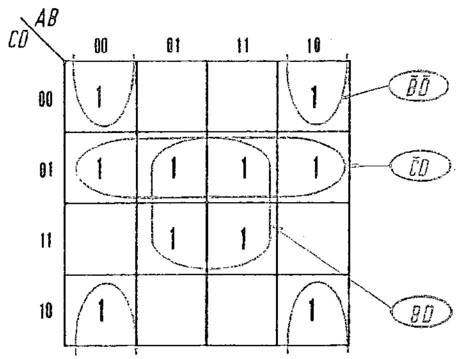


Fig. 5.46 - Esempio di raggruppamenti di caselle adiacenti a due a due.

anello di semplificazione, si definiscono *adiacenti a due a due*. Gli anelli punteggiati, non avendo ormai alcun significato vengono pertanto eliminati.

Nelle figure 5.45 e 5.46 sono riportati esempi di raggruppamenti di caselle adiacenti a due a due.

Se indichiamo con X e Y rispettivamente le funzioni relative alle suddette figure, otteniamo:

$$X = \bar A\bar D + A\bar B \qquad \text{e} \qquad Y = \bar B\bar D + \bar C D + BD\,.$$

5-12. Caselle adiacenti a quattro a quattro.

Si voglia semplificare l'espressione contenuta nella mappa della figura 5.47.

Poichè le caselle contenenti i termini sono tutte adiacenti tra loro, si possono formare due diversi ragruppamenti (fig. 5.48 *a*, *b*) le cui funzioni relative, ovviamente si equivalgono.

Esse sono infatti rispettivamente:

$$X = \bar C D + CD = D \qquad \text{e} \qquad X = \bar A D + AD = D\,.$$

Poichè, anche in questo caso, i termini di tali raggruppamenti, differiscono tra loro di una variabile, possiamo dire che le corrispon-

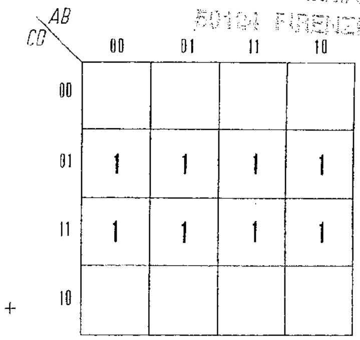
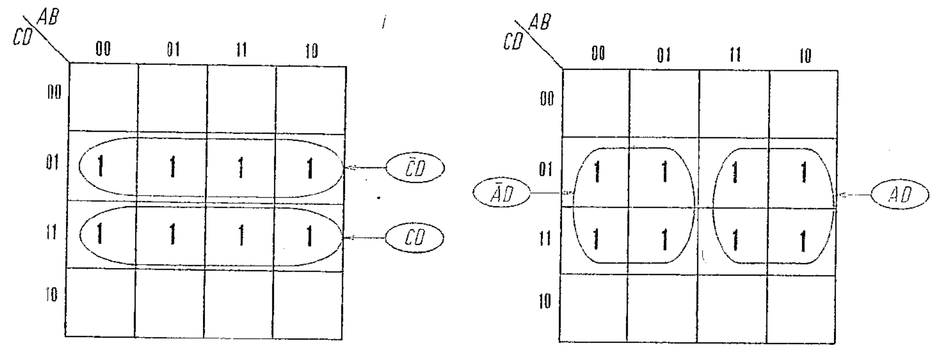


Fig. 5.47 - Rappresentazione della funzione
$X = \bar A\bar B\bar C D + \bar A\bar B C D + \bar A B\bar C D + \bar A B C D + A B\bar C D + ABCD + A\bar B\bar C D + A\bar B C D\,.$



a b

Fig. 5.48 - Due modi diversi per semplificare la stessa funzione.

denti caselle sono adiacenti a quattro a quattro. Appunto per questo gli otto termini vengono raggruppati in un solo anello, come indica la figura 5.49.

5-13. Semplificazione delle funzioni inverse mediante le mappe di Karnaugh.

In tutte le mappe di Karnaugh, mentre le caselle col bit *1* forniscono i termini dell'espressione che si deve rappresentare, le caselle vuote, ovviamente, forniscono i termini che compongono la

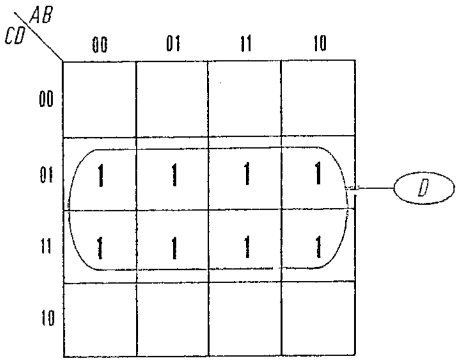


Fig. 5.49 - Mappa raffigurante la variabile C.

corrispondente *funzione inversa*. Questo fatto si riscontra anche nelle tavole della verità, nelle quali la funzione inversa viene formata con i termini corrispondenti ai bit *0* della colonna relativa alla funzione in forma vera (paragrafo 4-5, pag. 80). L'analogia tra tavole della verità e mappe di Karnaugh, del resto, è indiscutibile, dato che sia le une che le altre contengono tutte le combinazioni binarie delle variabili che le caratterizzano. Naturalmente le mappe, a differenza delle tavole forniscono le funzioni inverse possibilmente già semplificate, nel caso si faccia uso degli anelli di semplificazione. Così, per esempio, la funzione inversa $\bar{X}$, contenuta nella mappa della figura 5.50, desunta dai raggruppamenti effettuati nelle caselle vuote, colorate in rosso, è: $\bar{X} = AB\bar{C} + AB\bar{D} + \bar{A}BD$.

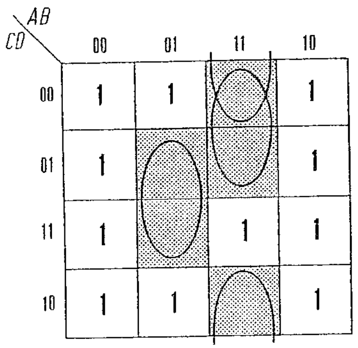


Fig. 5.50 - Mappa con anelli di semplificazione collocati nelle caselle vuote.

Dalla funzione inversa ottenuta, possiamo ricavare la *funzione diretta, sotto forma di prodotto*, nella maniera descritta a pag. 81, paragrafo 4-7; ossia:

$$\bar{X} = AB\bar{C} + AB\bar{D} + \bar{A}BD$$

$$\bar{\bar{X}} = \overline{AB\bar{C} + AB\bar{D} + \bar{A}BD}$$

da cui:

$$X = (\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + \bar{B} + D)(A + \bar{B} + \bar{D}) .$$

La stessa funzione possiamo ricavarla direttamente dalla mappa, senza operare alcuna inversione, prendendo prima in considerazione i termini che compongono la funzione inversa, moltiplicando, poi, tra loro, le somme formate dalle variabili invertite, di ciascun termine. Ciò è chiarito nel seguente esempio, in cui si vuole determinare sotto forma di prodotto la funzione minimizzata X, relativa alla mappa della figura 5.51.

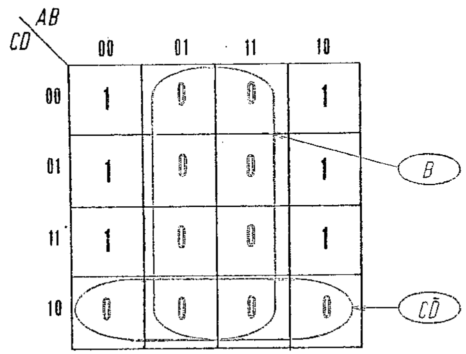


Fig. 5.51 - Tavola a 4 variabili, dove si vuole determinare la funzione inversa.

La funzione è quindi: $X = \bar{B}(\bar{C} + D)$.

Il fatto di potere ricavare speditamente la *funzione inversa* già semplificata, da una mappa di Karnaugh, è molto vantaggioso, in quanto il circuito ad essa relativo, alle volte può essere più economico di quello dovuto alla *funzione diretta*. Basta quindi, ogni volta che si compila una mappa, confrontare le funzioni complementari, e stabilire quindi se il circuito conviene realizzarlo con l'una o con l'altra funzione. Vediamo di chiarire l'argomento con il seguente esempio applicativo, in cui, data la funzione:

$$Y = \bar{A}\ \overline{\overline{\overline{[(B + C + D)(B + \bar{C} + D) \cdot (\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + \bar{D})]}}} +$$

$$+ A\ \overline{\overline{\overline{[(\bar{B} + C + \bar{D})(B + C + \bar{D})]}}},$$

si vuole stabilire qual'è lo schema a blocchi logici più economico, relativo ad essa, e di quanti componenti elettronici (diodi e transistori) risulta costituito.

Soluzione:

Per poter formulare una precisa risposta, dopo aver semplificata la funzione, la raffiguriamo in una mappa di Karnaugh a quattro variabili, confrontando poi le due funzioni complementari, già minimizzate. Ossia:

$$Y = \bar{A}\ [\overline{\overline{\overline{(B + C + D)(B + \bar{C} + D)}}} +$$

$$+ \overline{\overline{\overline{(\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{B} + C + \bar{D})}}}] +$$

$$+ A\ [\overline{\overline{\overline{(\bar{B} + C + \bar{D})(B + C + \bar{D})}}}] =$$

$$= \bar{A}\ [\overline{B + C + D} + \overline{B + \bar{C} + D} + \overline{\bar{B} + \bar{C} + \bar{D}} + \overline{\bar{B} + \bar{C} + D} +$$

$$+ \overline{\bar{B} + C + \bar{D}}] + A\,[\overline{\bar{B} + C + \bar{D}} + \overline{B + C + \bar{D}}] =$$

$$= \bar{A}\,[\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}C\bar{D} + BCD + BC\bar{D} + B\bar{C}D] +$$

$$+ A\,[B\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}D] =$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D +$$

$$+ AB\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D.$$

Riportiamo l'espressione così ottenuta in una mappa di Karnaugh, formando gli opportuni anelli di semplificazione, sia con i bit *1* che con i bit *0* (fig. 5.52).

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	0	0
10	1	1	0	0

Fig. 5.52 - Mappa nella quale si confrontano le due funzioni complementari Y e $\bar{Y}$.

Da tale mappa ricaviamo le funzioni che consentiranno la realizzazione del circuito richiesto. Esse sono:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}BC + B\bar{C}D + A\bar{C}D$$

e:

$$\bar{Y} = AC + A\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D$$

da cui:

$$Y = (\bar{A} + \bar{C})(\bar{A} + D)(\bar{B} + C + D)(A + B + \bar{D}).$$

E' facile constatare che lo schema più economico è dovuto alla funzione inversa (fig. 5.54). Infatti, secondo quest'ultima, occorrono: *14 diodi* e *5 transistori*, contro i *16 diodi* e *6 transistori* relativi alla funzione in forma vera (fig. 5.53).

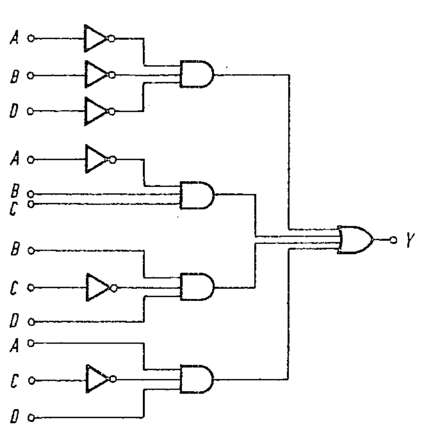


Fig. 5.53 - Schema a blocchi logici relativo alla funzione:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}BC + B\bar{C}D + A\bar{C}D.$$

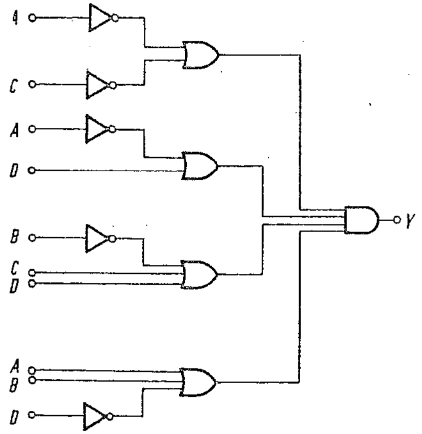


Fig. 5.54 - Schema a blocchi logici relativo alla funzione:

$$Y = (\bar{A} + \bar{C})(\bar{A} + D)(\bar{B} + C + D)(A + B + \bar{D}).$$

5-14. Termini indifferenti.

Si definiscono *indifferenti* quei termini che in una funzione possono prendere, indifferentemente, tanto il valore *0* quanto il valore *1*, senza che la stessa funzione venga ad essere alterata. Per farci un'idea concreta di tali termini, riportiamo un esempio in cui si ha la possibilità di individuarli e successivamente impiegarli.

Esempio:

Si voglia comandare una lampada X, mediante quattro pulsanti, A, B, C, D, in modo che essa si accenda solo quando, almeno due dei quattro pulsanti, sono premuti contemporaneamente.

Soluzione:

Per poter realizzare il circuito che permette l'accensione della lampada X, è necessario determinare la funzione ad essa relativa. Indicando con *1* i *pulsanti premuti* e la *lampada accesa*, tale funzione possiamo determinarla prendendo in considerazione tutti i termini di una mappa a quattro variabili, che contengono almeno due bit *1*. Si compila quindi la mappa della figura 5.55, dalla quale si ricava:

$$X = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D\,.$$

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	
01		1		1
11	1			
10		1		1

Fig. 5.55 - Mappa rappresentante la funzione:

$$X = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D.$$

L'espressione ottenuta, non a caso è stata riportata sulla mappa, ma col preciso scopo di poterla semplificare. Come si può vedere, la semplificazione non è però possibile, in quanto, le caselle contenenti i diversi termini, non sono adiacenti tra loro.

A questo punto, includiamo nella stessa mappa tutti quei termini contenenti tre o quattro bit *1*, i quali soddisfano ugualmente alle richieste del problema, cioè consentono l'accensione della lampada, pur non essendo esplicitamente quelli richiesti. Detti termini, che vengono indicati col segno $\varnothing$, si definiscono *indifferenti*, appunto perchè possono, o meno, essere presi in considerazione. La mappa della figura 5.55, si completa quindi di altri cinque termini, come indica la figura 5.56.

Se ora ai termini indifferenti della mappa, attribuiamo valore *1*, ossia li prendiamo in considerazione, possiamo formare i raggruppamenti indicati nella mappa della figura 5.57, che ci consente di ottenere la funzione semplificata:

$$X = AB + CD + BD + BC + AD + AC\,.$$

L'esempio precedente mette in evidenza l'utilità dei termini indifferenti nella semplificazione delle funzioni. Questi termini, tuttavia, vanno utilizzati con opportunità per non complicare le stesse funzioni, invece di semplificarle. Così, per esempio, nella tavola della figura 5.58 relativa alla funzione:

$$Y = \bar{A}B\bar{C}D + AB\bar{C}D$$

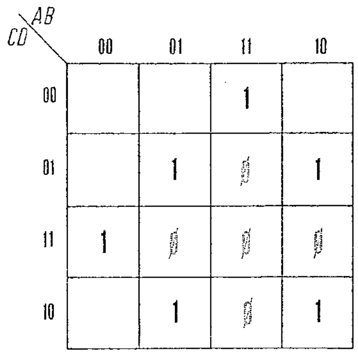


Fig. 5.56 - Mappa contenente termini indifferenti.

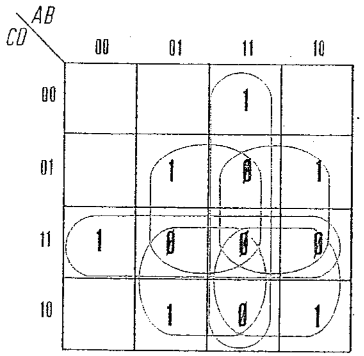


Fig. 5.57 - Semplificazione di una funzione con l'ausilio dei termini indifferenti.

se ne utilizzano soltanto due mentre i rimanenti tre non vengono presi in considerazione. In tal modo l'espressione semplificata diventa:

$$Y = BD\,.$$

I termini indifferenti servono anche a semplificare le funzioni inverse, dove naturalmente assumono valore *0*. Nella figura 5.59

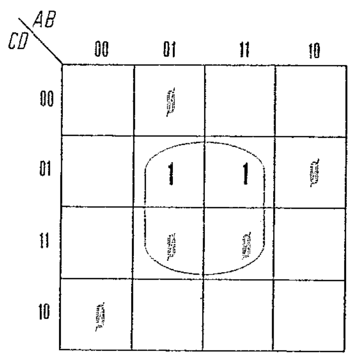


Fig. 5.58 - Utilizzazione di due soli termini indifferenti per semplificare la funzione.

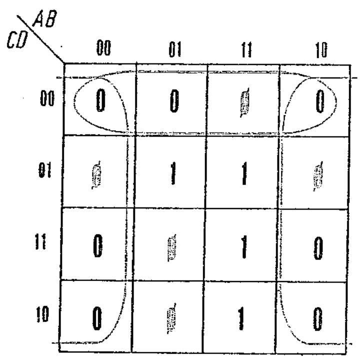


Fig. 5.59. - Esempio di semplificazione di una funzione inversa con l'ausilio dei termini indifferenti.

è riportato un esempio di semplificazione della funzione inversa:

$$\bar{X} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}\,.$$

Utilizzando tre soli termini indifferenti si ottiene la funzione inversa semplificata:

$$\bar{X} = \bar{B} + \bar{C}\bar{D}\,.$$

5-15. Circuiti con più uscite.

Immaginiamo che i circuiti riportati nelle figure 5.60 e 5.61 facciano parte di una stessa apparecchiatura. Essi hanno in comune il blocco logico relativo al termine $\bar{A}BC$.

Allo scopo di rendere più economica l'apparecchiatura suddetta, si può formare un circuito unico, come quello della figura 5.62, nel quale viene utilizzato un solo blocco logico $\bar{A}BC$, risparmiando naturalmente l'altro. Il circuito che ne deriva viene definito a più uscite o a *uscite multiple*.

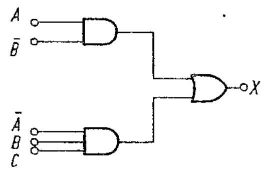


Fig. 5.60 - $X = A\bar{B} + \bar{A}BC$.

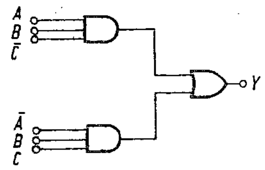


Fig. 5.61 - $Y = AB\bar{C} + \bar{A}BC$.

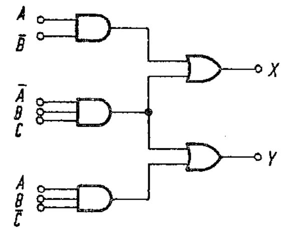


Fig. 5.62 - Circuito a uscite multiple.

Non sempre i termini comuni a più funzioni, vengono individuati agevolmente, come nel caso esaminato in precedenza, dato che tali termini esistono anche in funzioni che a prima vista non sembrano averne. Ciò si verifica, per esempio, nell'esaminare le se-

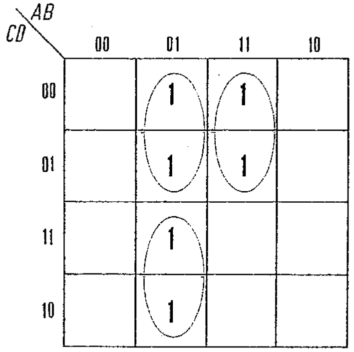


Fig. 5.63 - $X = \bar{A}B + B\bar{C}$.

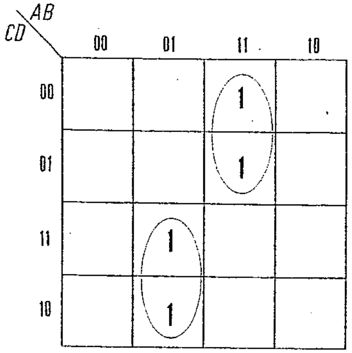


Fig. 5.64 - $Y = AB\bar{C} + \bar{A}BC$.

guenti tre funzioni:

$$X = \bar{A}B + B\bar{C}$$

$$Y = AB\bar{C} + \bar{A}BC$$

$$Z = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\,,$$

con le quali si vogliono realizzare altrettanti circuiti a blocchi. Se però riportiamo le funzioni rispettivamente nelle mappe delle figure 5.63, 5.64, 5.65, dopo aver formato gli opportuni raggruppamenti di semplificazione, notiamo che la funzione X contiene i termini delle altre funzioni. Si può così realizzare il *circuito a più uscite* riportato nella figura 5.66.

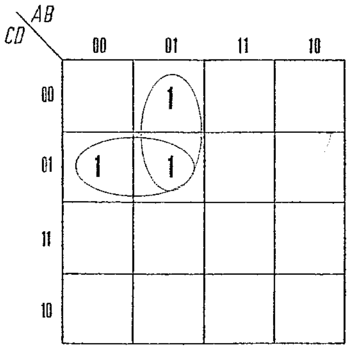


Fig. 5.65 - $Z = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$.

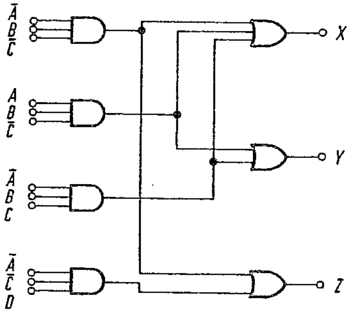


Fig. 5.66 - Circuito a tre uscite.

ESERCIZI

1 — *Semplificare col metodo algebrico le seguenti espressioni:*

a) $Y = (\bar{A} + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$

b) $X = [AB + \bar{A}(B + \bar{C}) + \bar{B}\bar{C}](A + B + \bar{C})$

Soluzione

a) $Y = (\bar{A} + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) =$

$= (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B} + \bar{B}\bar{C} + AC + \bar{B}C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) =$

$= [\bar{B}(\bar{A} + A + 1 + \bar{C} + C) + AC + \bar{A}\bar{C}](\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) =$

$= (\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + AC)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) = \bar{A}\bar{B} + \bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}C =$

$= \bar{B}(\bar{A} + 1 + \bar{C} + \bar{A}\bar{C} + AC) + \bar{A}\bar{C} = \bar{B} + \bar{A}\bar{C}$

b) $X = [AB + \bar{A}(B + \bar{C}) + \bar{B}\bar{C}](A + B + \bar{C}) =$

$= [AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}](A + B + \bar{C}) =$

$= AB + A\bar{B}\bar{C} + AB + \bar{A}B + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} =$

$= B(A + \bar{A} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{C}) + \bar{C}(A\bar{B} + \bar{A} + \bar{B}) =$

$= B + \bar{C}(\bar{A} + \bar{B}) = B + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} = B + \bar{C} + \bar{A}\bar{C} =$

$= B + \bar{C}(1 + \bar{A}) = B + \bar{C}$

---

2 — *Semplificare col metodo di Quine Mc Kluskey le seguenti funzioni, determinando inoltre gli eventuali termini superflui:*

a) $X(A, B, C, D) = \Sigma\,(1, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15)$

b) $Y(A, B, C, D, E) = \Sigma\,(0, 1, 2, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$.

Soluzione

a) $X(A, B, C, D) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15) =$

$= 0001 + 0100 + 0101 + 0110 + 0111 + 1001 + 1100 + 1110 + 1111$

n°	A	B	C	D	
1	0	0	0	1	x
4	0	1	0	0	x
5	0	1	0	1	x
6	0	1	1	0	x
9	1	0	0	1	x
12	1	1	0	0	x
7	0	1	1	1	x
14	1	1	1	0	x
15	1	1	1	1	x

n°	A	B	C	D	
1-5	0	–	0	1	
1-9	–	0	0	1	
4-5	0	1	0	–	x
4-6	0	1	–	0	x
4-12	–	1	0	0	x
5-7	0	1	–	1	x
6-7	0	1	1	–	x
6-14	–	1	1	0	x
12-14	1	1	–	0	x
7-12	–	1	1	1	x
14-15	1	1	1	–	x

n°	A	B	C	D
4-5-6-7	0	1	–	–
4-6-12-14	–	1	–	0
6-7-14-15	–	1	1	–

L'espressione diventa pertanto:

$X = \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B + B\overline{D} + BC$

Rete dei termini superflui:

	1	4	5	6	7	9	12	14	15
$\overline{A}\,\overline{C}D$	*		*						
$\overline{B}\,\overline{C}D$	*					*			
$\overline{A}B$		*	*	*	*				
$B\overline{D}$		*		*			*	*	
BC				*	*			*	*

Dalla rete si rileva che $\overline{A}\,\overline{C}D$ è un termine superfluo.

b) Con lo stesso procedimento si rileva che l'espressione semplificata relativa è:

$$Y = \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}E + \overline{A}BE$$

Il termine $\overline{A}\,\overline{C}E$ risulta superfluo; pertanto diventa:

$$Y = \overline{A}BC \cdot \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BE$$

3 — *Determinare la funzione X, rappresentata dalla mappa seguente:*

E = 0

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		
01	1			
11		1	1	
10			1	

E = 1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11			1	
10				

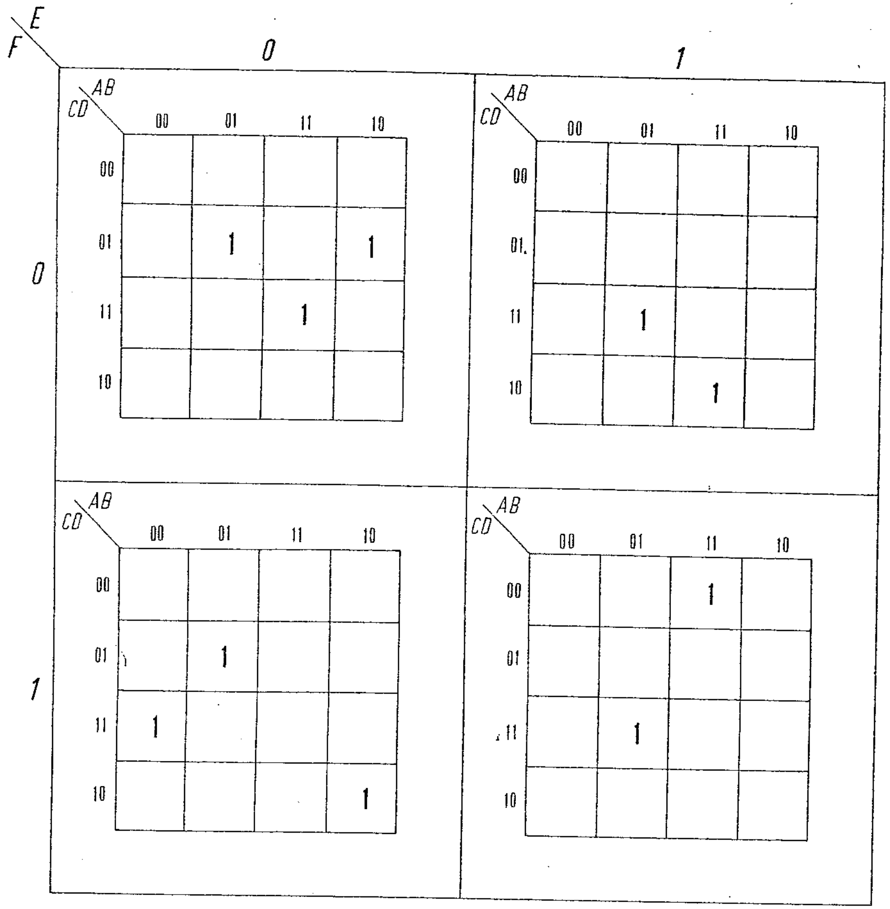
Soluzione

La funzione rappresentata dalla mappa è:

$$X = \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D\overline{E} + \overline{A}BCD\overline{E} + ABCD\overline{E} + ABC\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}E +$$

$$+ \overline{A}B\overline{C}DE + ABCDE + A\overline{B}\,\overline{C}DE\,.$$

4 — *Determinare la funzione Y rappresentata dalla mappa seguente:*



Soluzione

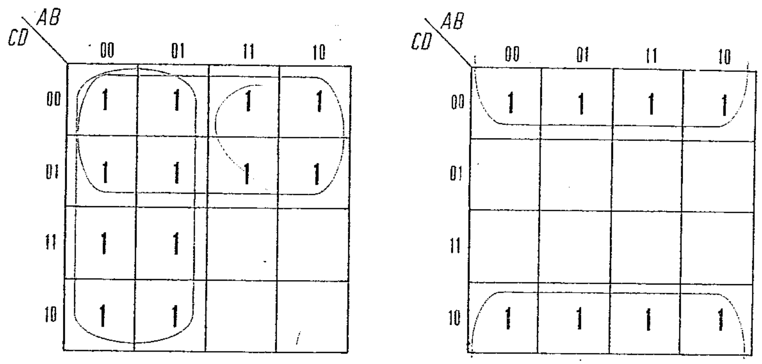
La funzione richiesta è:

$$Y = \bar{A}B\bar{C}D\bar{E}\bar{F} + ABCD\bar{E}\bar{F} + A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F} + \bar{A}BCDE\bar{F} + ABC\bar{D}E\bar{F} +$$

$$+ \bar{A}B\bar{C}D\bar{E}F + \bar{A}\bar{B}CD\bar{E}F + A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}F + \bar{A}BCDEF + AB\bar{C}\bar{D}EF\,.$$

---

5 — *Semplificare le funzioni X e Y, rispettivamente rappresentate dalle seguenti mappe nelle quali sono già praticati gli anelli di semplificazione.*



X **Y**

Soluzione

Dai raggruppamenti indicati nelle mappe si ricavano le seguenti funzioni semplificate:

$$X = \bar{A} + \bar{C} \qquad \text{e} \qquad Y = \bar{D}$$

---

6 — *Semplificare, mediante le mappe di Karnaugh, l'espressione, già semplificata col metodo di Quine Mc Kluskey* (pag. 103 paragrafo 5-2):

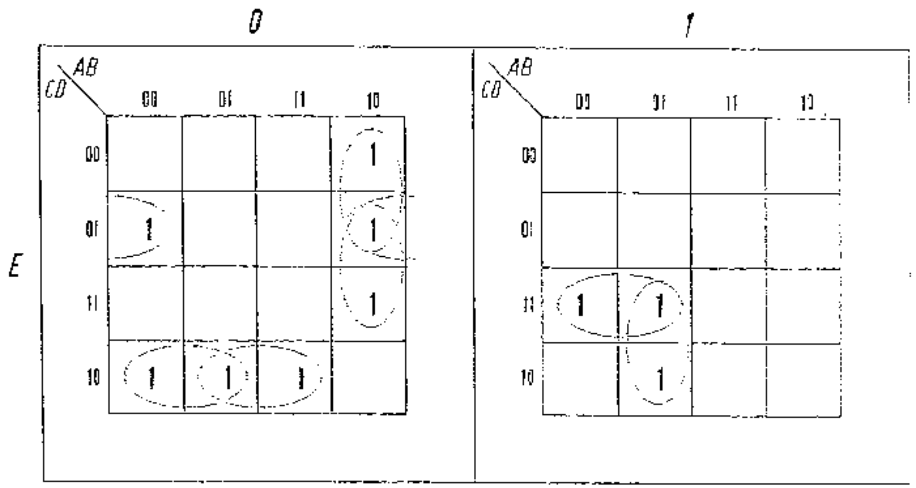
$$Y = \bar{A}\bar{B}CDE + A\bar{B}CD\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + A\bar{B}\bar{C}D\bar{E} +$$

$$+ \bar{A}BC\bar{D}E + ABC\bar{D}\bar{E} + \bar{A}BCDE + \bar{A}BC\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$$

Soluzione

Dalla mappa della figura riportata nella pagina seguente, dove si riporta l'espressione indicata, ricaviamo:

$$Y = \bar{A}C\bar{D}\bar{E} + A\bar{B}D\bar{E} + \bar{A}CDE + \bar{A}BCE + A\bar{B}\bar{C}\bar{E} + BC\bar{D}\bar{E} + \bar{B}\bar{C}D\bar{E}$$



7 — *Semplificare mediante le mappe di Karnaugh la seguente espressione:*

$$Y = \bar{A}B(C + D + E) + \overline{\bar{A} + B + C + \bar{D}} + D[\bar{B}C + E(A + B)] +$$

$$+ \overline{(A + D + E)(B + C + \bar{E})} + A\bar{B}\bar{E} + \overline{A + B + \bar{E}}\,.$$

Soluzione

Si svolgono le parentesi, applicando nello stesso tempo il teorema di De Morgan alle parti invertite dell'espressione. Abbiamo quindi:

$$Y = \bar{A}BC + \bar{A}BD + \bar{A}BE + \overline{\bar{A} + B + C + \bar{D}} + D(\bar{B}C + AE + BE) +$$

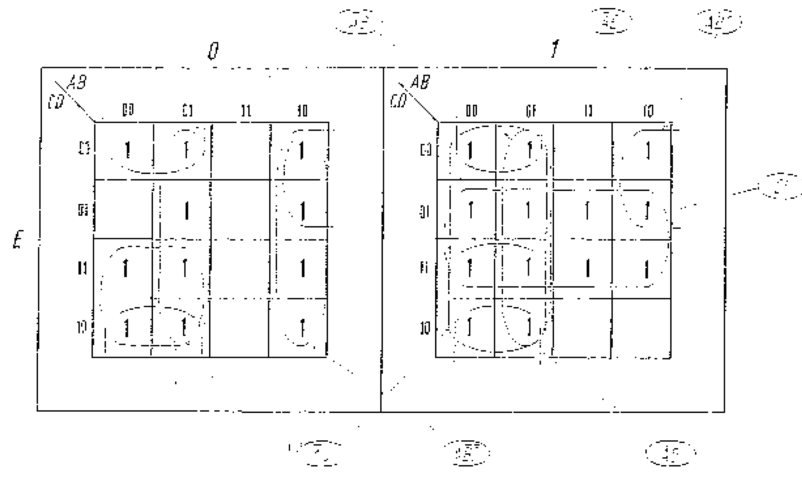
$$+ \overline{A + D + E} + \overline{B + C + \bar{E}} + A\bar{B}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{\bar{E}} =$$

$$= \bar{A}BC + \bar{A}BD + \bar{A}BE + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{B}CD + ADE + BDE +$$

$$+ \bar{A}\bar{D}\bar{E} + \bar{B}\bar{C}E + A\bar{B}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}E\,.$$

Si riporta l'espressione nella tavola seguente, dalla quale, dopo aver formato gli opportuni anelli di semplificazione, si ricava l'espressione:

$$Y = \bar{A}C + \bar{A}B + \bar{A}E + \bar{A}\bar{D} + DE + A\bar{B}\bar{E} + A\bar{B}C$$



8 — *Semplificare con le mappe di Karnaugh le seguenti espressioni:*

a) $X = A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

b) $Y = A[BC(D + \bar{E}) + D(B\bar{C}\bar{D} + \overline{\bar{B}C})] + \bar{B}[C(\overline{A + D + \bar{E}} + ADE) +$

$+ \overline{\overline{(\bar{A}C + D)(C + \bar{\bar{D}}E)}}]$

Soluzione

a)

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1		1

$$X = \bar{A}\bar{D} + B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C$$

b)

$$Y = A\,[BC\,(D + \bar{E}) + D\,(B\bar{C}\bar{D} + \overline{\bar{B}C})] + \bar{B}\,[C\,(\overline{A + D + \bar{E}} + ADE) +$$

$$+ \overline{(\overline{AC} + D)\ (C + \bar{\bar{D}}E)}] =$$

$$= A\,[BCD + BC\bar{E} + D\,(B\bar{C}\bar{D} + B + \bar{C})] + \bar{B}\,[C\,(\bar{A}\bar{D}\bar{E} + ADE) +$$

$$+ \overline{\overline{AC} + D} + \overline{C + \bar{\bar{D}}E}] =$$

$$= A\,[BCD + BC\bar{E} + BD + \bar{C}D] + \bar{B}\,[\bar{A}C\bar{D}\bar{E} + ACDE + AC\bar{D} + \bar{C}\bar{D}E] =$$

$$= ABCD + ABC\bar{E} + ABD + A\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E} + A\bar{B}CDE + A\bar{B}C\bar{D} +$$

$$+ \bar{B}\bar{C}\bar{D}E =$$

$$= ABD + ABC\bar{E} + A\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E} + A\bar{B}CDE + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{B}\bar{C}\bar{D}E\,.$$

Riportiamo l'espressione su una mappa di Karnaugh per 5 variabili:

E = 0

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01			1	1
11			1	
10			1	1

E = 1

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			1
01			1	1
11			1	1
10	1			1

Risulta: $Y = ABC\bar{E} + AC\bar{D}\bar{E} + A\bar{C}D + ADE + \bar{B}\bar{D}E\,.$

---

9 — *Per poter sorteggiare dei premi si mettono in un bussolotto* 10 *palline (di cui 5 bianche e 5 nere). Vengono premiati i concorrenti che in 5 tentativi riescono ad estrarre due palline nere consecutive. Disegnare il circuito* minimizzato, *a blocchi logici, capace di simulare il sorteggio.*

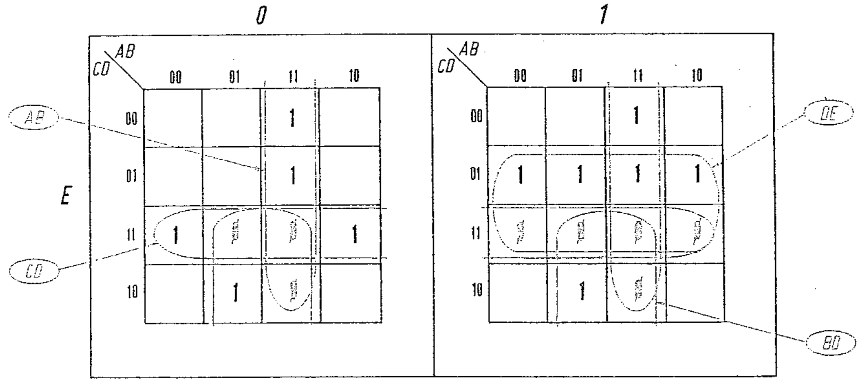
Soluzione

Indichiamo con L la lampada che rappresenta il premio; con *1* le palline nere; con *0* le palline bianche; con $A, B, C, D, E,$ rispettivamente i 5 tentativi.

La funzione che permette l'accensione della lampada sarà formata da tutti i termini che contengono due, o più bit *1*, consecutivi. Ovviamente i termini contenenti più di due bit *1* consecutivi sono da considerarsi superflui.

Avremo quindi:

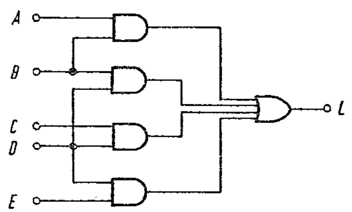
$$L = 00011 + 00110 + 00111 + 01011 + 01100 +$$
$$+ 01101 + 01110 + 01111 + 10011 + 10110 +$$
$$+ 10111 + 11000 + 11001 + 11010 + 11011 +$$
$$+ 11100 + 11101 + 11110 + 11111$$



Riportiamo la funzione su una mappa a cinque variabili, allo scopo di realizzare eventuali semplificazioni. E infatti, con l'ausilio di tutti i termini indifferenti, otteniamo i raggruppamenti indicati nella suddetta mappa i quali ci forniscono la funzione semplificata:

$$L = AB + BD + CD + DE$$

Il relativo circuito a blocchi è illustrato nella figura seguente:



---

10 — *Un giocatore, manovrando una leva ha la possibilità di scodellare contemporaneamente cinque monetine poste in altrettanti contenitori. Egli vince la posta in gioco ogni volta che riesce a ottenere tre teste o tre* croci *consecutive. Realizzare un circuito a blocchi logici capace di simulare il giuoco descritto.*

Soluzione

Indichiamo con A, B, C, D, E e $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}$ rispettivamente le *teste* e le *croci* delle cinque monetine; con Y indichiamo una lampada, che si accende

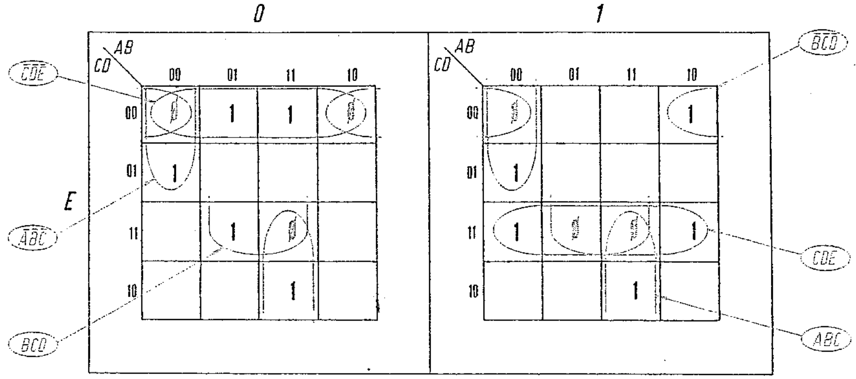
tutte le volte che il giocatore vince. La funzione della lampada sarà composta da tutte le combinazioni binarie, a cinque variabili, nelle quali compaiono tre bit *1* oppure tre bit *0* consecutivi. A questi si aggiungono i termini contenenti quattro o cinque bit uguali consecutivi, che risultano essere *indifferenti*. Sarà quindi:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}DE + \bar{A}\bar{B}CDE + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}\bar{E} +$$

$$+ \bar{A}BCD\bar{E} + \bar{A}BCDE + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + A\bar{B}CDE + AB\bar{C}\bar{D}\bar{E} +$$

$$+ ABC\bar{D}\bar{E} + ABC\bar{D}E + ABCD\bar{E} + ABCDE\,.$$

Riportiamo su una mappa di Karnaugh tale espressione, sfruttando i termini indifferenti segnati in rosso, allo scopo di ottenere una eventuale semplificazione.

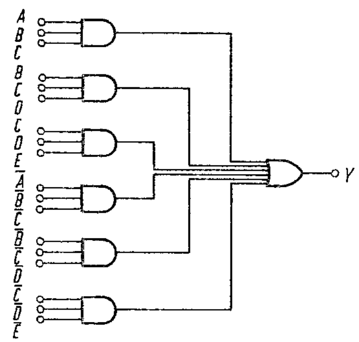


Si ottiene infatti:

$$Y = ABC + BCD + CDE + \bar{A}\bar{B}\bar{C} +$$

$$+ \bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{C}\bar{D}\bar{E}$$

Il circuito richiesto è pertanto il seguente:



---

11 — *Disegnare gli schemi a blocchi logici, relativi alle seguenti espressioni, dopo averle opportunamente semplificate:*

$$X = \overline{(\bar{A} + C)}\,[\overline{(\bar{\bar{B}} + \bar{D})\,(B + \bar{\bar{D}})}] + \overline{(A + \bar{C}) + [(\bar{B} + \bar{D})\,(B + \bar{D})\,(B + D)]}\ ;$$

$$Y = \overline{(A + \bar{\bar{B}}) + [(C + \bar{D})\,(C + D)\,(\bar{C} + \bar{\bar{D}})]} +$$

$$+ \overline{(C + \bar{\bar{D}})} \cdot [\overline{(\bar{\bar{A}} + \bar{B})\,(\bar{A} + B)\,(A + B)}]\ ;$$

$$Z = \overline{\{(A + \bar{D}) + [(\bar{B} + C)\,(B + C)\,(B + \bar{C})]\}} \cdot \overline{\overline{\overline{\{(A + \bar{B}) + [(C + D)\,(\bar{C} + \bar{D})]\}}}}\,(A + B + \bar{C} + D)\,.$$

Soluzione

Cominciamo a semplificare la prima espressione, applicando, in successive fasi, il teorema di De Morgan. Abbiamo quindi:

$$X = \overline{(\bar{A} + C)}\,[\overline{(\bar{\bar{B}} + \bar{D})\,(B + \bar{\bar{D}})}] + \overline{(A + \bar{C}) + [(\bar{B} + \bar{D})\,(B + \bar{D})\,(B + D)]} =$$

$$= A\bar{C}\,(\overline{\bar{\bar{B}} + \bar{D}} + \overline{B + \bar{\bar{D}}}) + \bar{A}C\,(\overline{\bar{B} + \bar{D}} + \overline{B + \bar{D}} + \overline{B + D}) =$$

$$= A\bar{C}\,(BD + \bar{B}D) + \bar{A}C\,(BD + \bar{B}D + \bar{B}\bar{D})$$

$$= AB\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\,.$$

Analogamente semplifichiamo le rimanenti espressioni, ossia:

$$Y = \overline{(A + \bar{\bar{B}}) + [(C + \bar{D})\,(C + D)\,(\bar{C} + \bar{\bar{D}})]} +$$

$$+ \overline{(C + \bar{\bar{D}})}\,[\overline{(\bar{\bar{A}} + \bar{B})\,(\bar{A} + B)\,(A + B)}] =$$

$$= \bar{A}B\,(\overline{C + \bar{D}} + \overline{C + D} + \overline{\bar{C} + \bar{\bar{D}}}) + \bar{C}D\,(\overline{\bar{\bar{A}} + \bar{B}} + \overline{\bar{A} + B} + \overline{A + B}) =$$

$$= \bar{A}B\,(\bar{C}D + \bar{C}\bar{D} + CD) + \bar{C}D\,(AB + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}) =$$

$$= \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD + AB\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D\,.$$

$$Z = \overline{\{(A + \bar{D}) + [(\bar{B} + C)\,(B + C)\,(B + \bar{C})]\}} \cdot \overline{\overline{\overline{\{(A + \bar{B}) + [(C + D)\,(\bar{C} + \bar{D})]\}}}}\,(A + B + \bar{C} + D) =$$

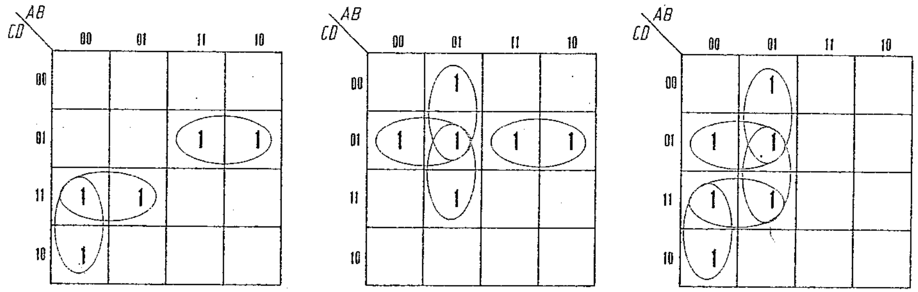
$$= \{\bar{A}D\,(\overline{\bar{B} + C} + \overline{B + C} + \overline{B + \bar{C}})\} + \{\bar{A}B\,(\overline{C + D} + \overline{\bar{C} + \bar{D}})\} +$$

$$+ \bar{A}\bar{B}C\bar{D} =$$

$$= \bar{A}D\,(B\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + \bar{B}C) + \bar{A}B\,(\bar{C}\bar{D} + CD) + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} =$$

$$= \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\,.$$

Riportiamo le tre funzioni X, Y, Z, su altrettante mappe, allo scopo di poterle semplificare, e, nello stesso tempo, individuare gli eventuali termini comuni.



$X = A\bar{C}D + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{B}C$ $\quad$ $Y = \bar{A}\bar{C}D + A\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD$ $\quad$ $Z = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{C}D$

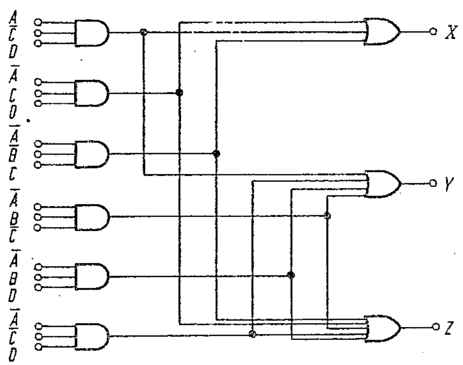
Si ottengono così, le seguenti funzioni semplificate:

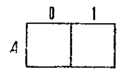
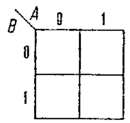
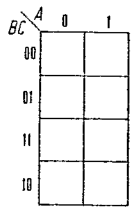
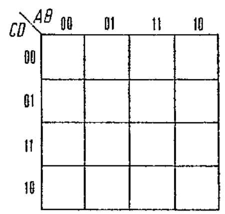
$X = A\bar{C}D + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{B}C$;

$Y = \bar{A}\bar{C}D + A\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD$;

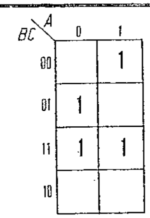
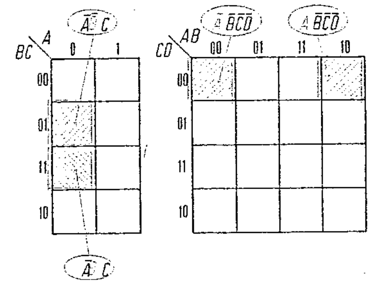
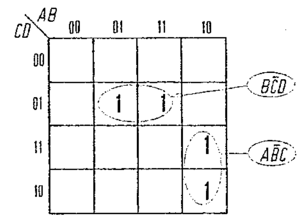
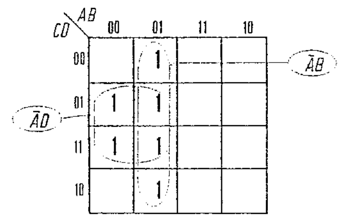
$Z = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BD + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{C}D$.

Tenendo conto dei termini comuni si può realizzare il circuito seguente:

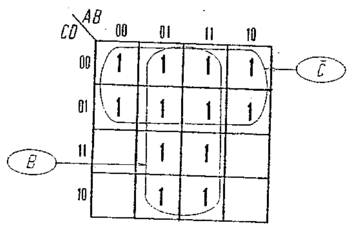
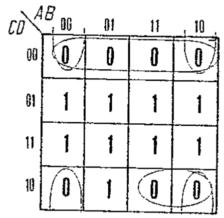
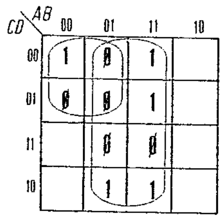
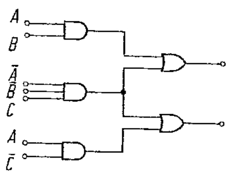


MINIMIZZAZIONE	
Metodo algebrico: è il metodo che permette la semplificazione delle funzioni booleane con l'applicazione dei teoremi esaminati.	
Metodo di Quine-Mc Kluskey: è un metodo di semplificazione dove si applica ripetutamente il noto teorema $AB + A\overline{B} = A$. Questo metodo conviene adoperarlo quando le funzioni da semplificare contengono più di quattro variabili.	
Rete dei termini irriducibili: è un diagramma che permette di individuare eventuali termini superflui che col metodo di Quine-Mc Kluskey non è stato possibile eliminare.	
Mappe di Karnaugh: sono dei diagrammi che praticamente derivano dai diagrammi di Venn. Esse consentono di rappresentare e nello stesso tempo semplificare le funzioni booleane.	
Mappa a una variabile.	
Mappa a due variabili.	
Mappa a tre variabili.	
Mappa a quattro variabili.	

(segue)

La rappresentazione di una funzione con le mappe di Karnaugh, avviene collocando un bit 1 nelle caselle corrispondenti ai termini che formano l'espressione.	 Questa mappa rappresenta la funzione: $Y = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$
Caselle adiacenti: sono caselle i cui termini corrispondenti differiscono tra loro di una variabile.	 Esempi di caselle adiacenti.
Anelli di semplificazione: sono degli anelli che racchiudono i bit *1* delle caselle adiacenti, con lo scopo di semplificare i termini corrispondenti, eliminando la variabile di cui differiscono.	 Esempio di semplificazione con l'ausilio degli anelli.
Caselle adiacenti a due a due.	

(segue)

Caselle adiacenti a quattro a quattro.	
La semplificazione delle funzioni inverse, mediante le mappe di Karnaugh, avviene raggruppando con gli anelli di semplificazione le caselle non contenenti i bit *1*.	 $\bar{Y}=\bar{C}\bar{D}+\bar{B}\bar{D}+AC\bar{D}$
Termini indifferenti. ($\varnothing$); possono assumere in una funzione sia valore *1* che valore *0*, indifferentemente. Essi vengono sfruttati per semplificare la stessa funzione.	 $Y=B+\bar{A}\bar{C}$
Circuiti con più uscite: sono circuiti aventi in comune qualche blocco logico.	 $X=AB+\bar{A}\bar{B}C$ $Y=A\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$ Esempio di circuito a due uscite.

CAPITOLO VI

CIRCUITI LOGICI A TRANSISTORI

In questo capitolo accenneremo ai circuiti logici a transistori più frequentemente usati. Tra essi sono inclusi alcuni circuiti a diodi già esaminati nei capitoli precedenti, quali *OR*, *AND*, *OR ESCLUSIVO*. Prima di iniziare la trattazione è opportuno definire alcuni tipi di logica ai quali si farà riferimento in seguito.

Si definisce *logica positiva*, la logica in cui allo *stato 1* corrisponde il potenziale elettrico più alto e allo *stato 0* il potenziale elettrico più basso. Viceversa, si definisce *logica negativa* la logica in cui allo *stato 1* e allo *stato 0* corrispondono i potenziali rispettivamente opposti a quelli della logica positiva.

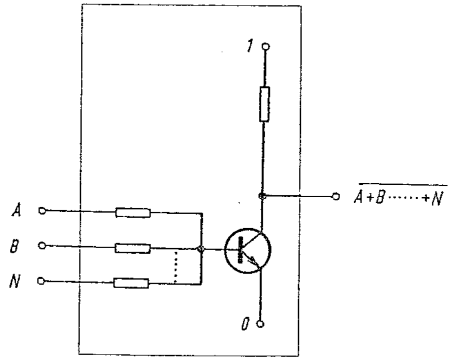


Fig. 6.1 - Circuito logico NOR.