

2<sup>a</sup> verifica 16 giugno 2008  
Meccanica del punto materiale (Laurea in Matematica).

**Problema 1**

Due punti materiali di massa,  $m_1 = 2.00$  kg e  $m_2 = 1.00$  kg seguono le loro rispettive leggi orarie:

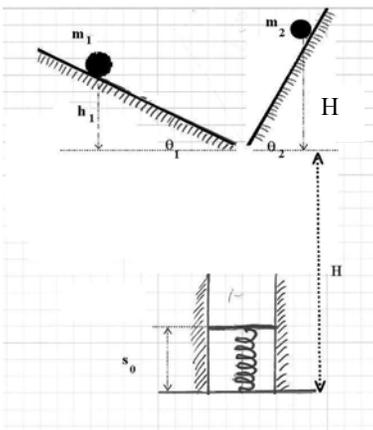
$$\mathbf{r}_1 = -1.50 \cdot t \hat{i} - 1.50 \cdot t^2 \hat{j} - 3.00 \cdot t^2 \hat{k} \text{ [m]}, \quad \mathbf{r}_2 = -6.00 \cdot t \hat{i} + 12.0 \cdot t \hat{j} + 3.00 \cdot t \hat{k} \text{ [m]}.$$

- Ricavare la legge oraria del centro di massa  $\mathbf{r}_{cdm} = \mathbf{r}_{cdm}(t)$ .
- Disegnare la traiettoria del centro di massa (cdm) nello spazio mediante una terna antioraria cartesiana  $O(x,y,z)$  per gli istanti  $t=1.00$ ,  $2.00$ , e  $3.00$  secondi.
- Trovare l'istante  $t_{extr}$  in cui  $y_{cdm}$  risulta estremo e dire se è un massimo o un minimo per  $y_{cdm}$ .
- Rappresentare  $O(x,y,z)$  il vettore posizione  $\mathbf{r}_{cdm}(t_{extr})$  all'istante  $t_{extr}$ , fornire le coordinate polari sferiche del vettore  $\mathbf{r}_{cdm}(t_{extr})$  ed indicarle sul sistema di assi cartesiani.
- Trovare  $\mathbf{v}_{cdm} = \mathbf{v}_{cdm}(t)$ , calcolarla all'istante  $t_{extr}$ , indicare graficamente  $\mathbf{v}_{cdm}(t_{extr})$  in  $O(x, y, z)$ .
- Trovare  $\mathbf{a}_{cdm} = \mathbf{a}_{cdm}(t)$ , calcolarla all'istante  $t_{extr}$ , indicare graficamente  $\mathbf{a}_{cdm}(t_{extr})$  in  $O(x, y, z)$ .
- Rappresentare  $\mathbf{a}_{cdm}(t_{extr})$  in modo intrinseco rispetto all'ascissa curvilinea e ricavare  $\omega_{cdm}(t_{extr})$ .
- Ricavare la forza netta  $\mathbf{F}_{net}$  che agisce sul centro di massa.
- Calcolare il lavoro fatto dalla forza netta dall'istante  $t=1.00$  s all'istante  $t=3.00$  s.
- Calcolare la variazione di energia cinetica per gli stessi istanti.

**Facoltativi:**

- Ricavare il momento angolare orbitale del c.d.m.  $\mathbf{L}_{cdm}(t) = \mathbf{r}_{cdm}(t) \wedge \mathbf{p}_{cdm}(t)$  ed il vettore momento della forza  $\mathbf{M}_{cdm}(t) = \mathbf{r}_{cdm}(t) \wedge \mathbf{F}_{net}(t)$  rispetto all'origine  $O$  della terna  $O\{x, y, z\}$ .
- Verificare la relazione tra  $\mathbf{L}(t)$  ed  $\mathbf{M}(t)$ .

**Problema 2**



Due palline di creta cadono da due piani inclinati e da quote differenti (campo gravitazionale  $g=9.81$  m/s<sup>2</sup>).

La pallina 1 di massa  $m_1$  cade da una quota  $h_1$  lungo un piano inclinato che forma un angolo  $\theta_1$  con l'orizzontale. La pallina 2 di massa  $m_2$  invece cade da una quota  $h_2$  su piano inclinato di un angolo  $\theta_2$ . Il coefficiente di attrito dinamico tra la pallina 1 ed il piano inclinato è  $\mu_1$ , mentre per la pallina 2 ed il relativo piano inclinato è  $\mu_2$ .

Per i valori relativi alla pallina 1 si ha  $m_1 = 500$ g,  $\theta_1 = 40.0^\circ$ ,  $h_1 = 25.0$  cm e  $\mu_1 = 0.200$ , per quelli relativi alla pallina 2 si ha  $m_2 = 250$ g,  $\theta_2 = 75.0^\circ$ ,  $h_2 = 50.0$  cm e  $\mu_2 = 0.150$ .

- Con quali velocità arrivano le due palline nel punto dove si urtano?

Le due palline di creta nell'urto si fondono in una sola palla che cade verticalmente.

- Qual è la velocità dopo l'urto della palla risultante (la componente orizzontale della quantità di moto viene assorbita completamente dalle pareti dei piani inclinati)?

L'altezza dal punto in cui avviene l'urto ed il suolo è  $H=1.00$  m.

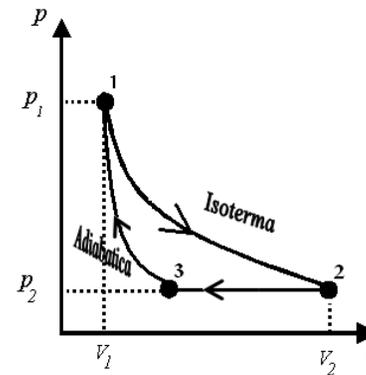
- Con quale velocità arriva questa pallina sul piattello della molla (molla a riposo  $s_0 = 25.0$  cm dal suolo)?
- Per ricavare la costante elastica della molla ( $k$ ), si ha che con la palla di creta si comprime di soli  $6.00$  mm.
- Di quanto si comprime la molla per la caduta della palla dopo l'urto, tenendo che tra il piattello e la sua guida si ha una forza di attrito  $f_{km} = 2.00$  N?
- La palla di creta rimane appiccicata al piattello, a quale quota in alto ritorna il piattello (e palla)?

**Facoltativo**

- Calcolare quanto spazio percorre il piattello-palla prima di fermarsi.

CONTINUA

**Problema 3**



Una mole di gas perfetto monoatomico segue il ciclo di trasformazioni ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ) rappresentato nel diagramma  $p$ - $V$  a lato. Sono note  $p$  e  $T$  nel vertice 1,  $p_1 = 2.40 \cdot 10^5$  Pa,  $T_1 = 880$  K ed il rapporto  $V_2 / V_1 = 8.00$ . Si assuma la costante dei gas  $R = 8.31$  J / (mole K).

- Ricavare per ogni vertice le grandezze  $p$ ,  $V$  e  $T$  in funzione di valori del punto 1 e calcolare anche i relativi valori numerici.
- Ricavare il calore  $Q$ , il lavoro  $L$  e la variazione di energia interna  $\Delta E_{int}$  per ogni trasformazione in funzione del prodotto  $p_1 V_1$ .
- Ricavare la variazione di entropia  $\Delta S$  per ogni trasformazione in funzione della costante  $R$ .
- Ricavare e calcolare il rendimento e confrontarlo con una macchina termica di Carnot.

**Facoltativo**

- Riassumere in una tabella le grandezze  $Q$ ,  $L$  e  $\Delta E_{int}$  in funzione di  $p_1$  e  $V_1$ , nonché  $\Delta S$  in funzione di  $R$  per ogni trasformazione e per il ciclo completo.