

Teorema delle forze vive o
anche detto dell'energia cinetica.

1 di 2

Se su un corpo puntuale di massa m agisce
una forza netta $\vec{F}$ si ha che il
lavoro fatto dalla forza nello spostamento
della posizione iniziale (i) a quella finale
fornisce la variazione di energia cinetica

$$L_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = K_f - K_i.$$

Dimostrazione 1^a

Il $dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ è il lavoro infinitesimale delle
forze $\vec{F}$ per un spostamento $d\vec{s}$.

Esprimiamo $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$:

$$dL = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \quad (*)$$

la variazione $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}$ può essere descritta come

$$d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Osserviamo che $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$
il differenziale $d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v})$

$$\begin{aligned} \text{Calcoliamo } d(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = \\ &= 2 \vec{v} \cdot d\vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{Pertanto } \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$$

La (*) diventa quindi:

$$dL = \frac{m}{2} d(v^2) = d\left(\frac{m}{2} v^2\right) = dK$$

Quindi integrando si ottiene

$$L_{if} = \int_i^f dL = \int_i^f dK = K_f - K_i$$

Dimostrazione 2^a

2 di 2

Dimostrare $dL = dK$

$$L_{if} = K_f - K_i$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \vec{a} \cdot d\vec{s} \quad (*)_2$$

L'accelerazione $\vec{a}$ possiamo esprimerla in modo intrinseco rispetto all'oscina curvilinea

$$\vec{a} = \ddot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n$$

ovvero come accelerazione tangenziale $\vec{a}_t$ e accelerazione normale $\vec{a}_n$.

$$(*)_2 \text{ diventa } dL = m \left(\ddot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n \right) \cdot d\vec{s} \quad (*)_3$$

$d\vec{s}$ è lo spostamento infinitesimale lungo la traiettoria pertanto

$$d\vec{s} = \vec{v} dt$$

ed esprimendo la velocità in modo intrinseco

$$\vec{v} = \dot{s} \hat{u}_t = v_s \hat{u}_t$$

$$(*)_3 \text{ diventa } dL = m \left(\ddot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n \right) \cdot \dot{s} \hat{u}_t dt$$

$$\hat{u}_t \cdot \hat{u}_t = 1 \quad \hat{u}_t \cdot \hat{u}_n = 0$$

$$dL = m \dot{s} \ddot{s} dt$$

Osserviamo che $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{s}^2 \right) = \frac{m}{2} 2 \dot{s} \ddot{s} = m \dot{s} \ddot{s}$

pertanto

$$dL = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{s}^2 \right) dt$$

quindi integrando dalle posizioni i e col f

$$L_{if} = \int_i^f dL = \int_i^f \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{s}^2 \right) dt = K_f - K_i$$

C. v. ol.