Sistemi di assi coordinati

Un problema che presenti una simmetria cilindrica, o sferica, può essere espresso, e risolto, nel familiare sistema cartesiano ortogonale. La soluzione non conserverebbe però la simmetria e sarebbe inutilmente complessa. Percui spesso nei problemi si utilizzano anche coordinate polari cilindriche o sferiche a seconda della simmetria del problema. Vediamo tutti e tre i sistemi insieme nella figura 1.

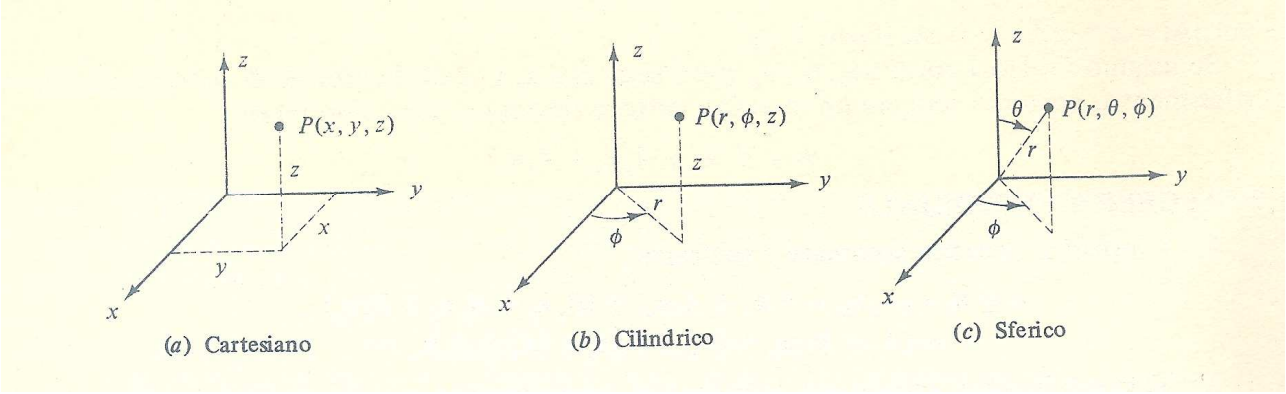

Figura 1. Sistemi di assi coordinati: a) Cartesiano, b) Cilindrico e c) Sferico, con le rispettive coordinate.

Un punto *P* nello spazio viene descritto da tre coordinate sia nel sistema cartesiano (*x*, *y*, *z*), che in quello cilindrico (*r*, *φ*, *z*), nonché in quello sferico (*r*, *θ*, *φ*).

L'ordine di presentazione è rigoroso e va rispettato. L'angolo *φ* è lo stesso, sia nel sistema cilindrico, che in quello sferico. Però nel primo appare in seconda posizione (*r*, *φ*, *z*), nel secondo in terza (*r*, *θ*, *φ*). Il simbolo *r* è usato sia nelle coordinate cilindriche che in quelle sferiche, nella presentazione didattica in classe, per distinguerli, si è utilizzato *ρ*, ma di solito sono indicati entrambi con *r*, sebbene abbiano significato diverso. Nelle coordinate cilindriche *r* (ρ a lezione) misura la distanza dall'asse delle *z* in un piano normale a *z*; nelle coordinate sferiche, invece, esso dà la distanza tra il punto e l'origine.

Un punto viene anche definito dall'intersezione di tre superfici ortogonali come riportato in figura 2.

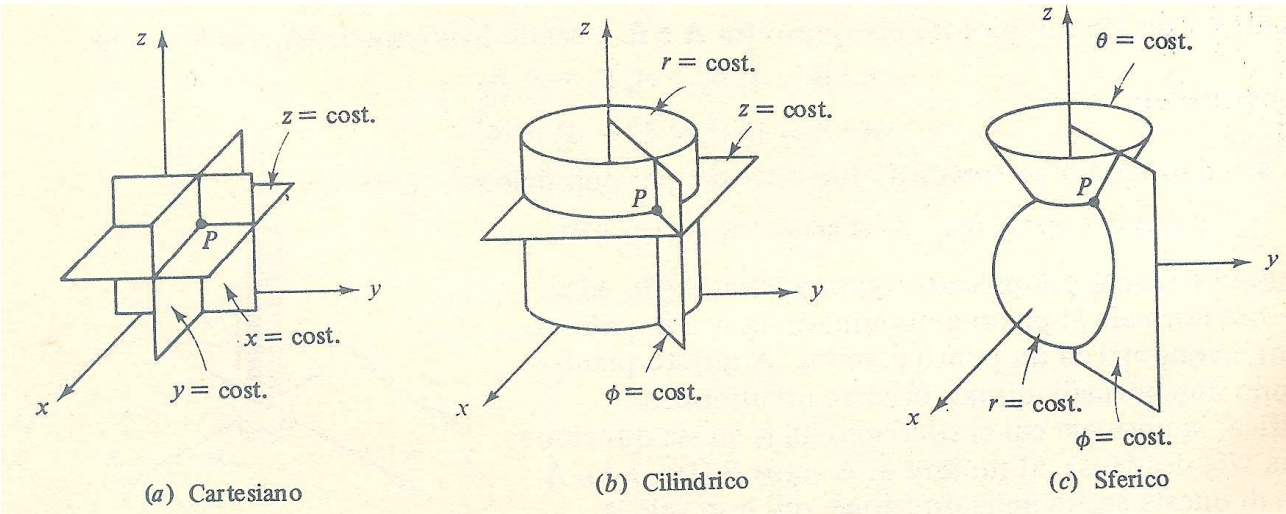

Figura 2. Punto *P* nei vari sistemi di assi cartesiani, individuato dall'intersezione di tre superfici, individuate dai valori costanti delle rispettive coordinate.

In coordinate cartesiane sono i piani infiniti *x*=costante (cost.), *y*=cost. e *z*=cost..

In coordinate cilindriche *z* =cost. è lo stesso piano delle coordinate cartesiane, *φ* = cost. è un semipiano, il cui bordo coincide con l'asse *z*; *r* = cost. è un cilindro circolare retto. Queste tre superfici sono ortogonali e la loro intersezione individua il punto *P*.

Per le coordinate sferiche φ= cost. è lo stesso semipiano delle coordinate cilindriche, r = cost. è una superficie sferica con centro nell'orgine; θ = cost. è un cono circolare retto con asse coincidente con l'asse z e vertice nell'origine. Notare che θ è limitato all'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Possiamo quindi individuare i versori relativi ad ogni sistema di assi coordinati come indicato in Fig. 3.

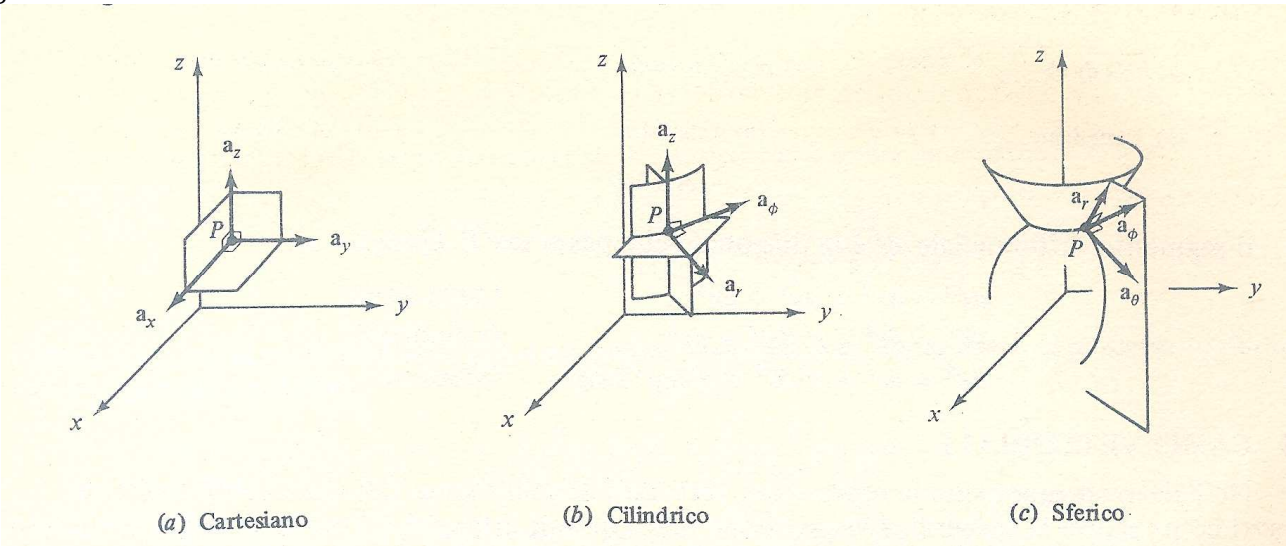

Figura 3. Versori dei vari sistemi di assi coordinati.

Nel sistema cartesiano i tre versori hanno direzioni fisse indipendenti dalla collocazione di *P*.

Invece per le coordinate cilindriche questo non vale (i versori dipendono dalla posizione di *P*, per questo sono detti anche *sistemi locali*).

Per tutti e tre i sistemi ogni versore è normale alla sua superficie coordinata, ed è nella direzione in cui la coordinata aumenta, inoltre:

$$\boldsymbol{a}_x \wedge \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_z;\ \boldsymbol{a}_r \wedge \boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{a}_z;\ \boldsymbol{a}_r \wedge \boldsymbol{a}_\theta = \boldsymbol{a}_\varphi\ ;$$

ovvero tutti i sistemi destrorsi.

I versori cartesiani sono anche indicati rispettivamente $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$, o $\boldsymbol{u}_x$, $\boldsymbol{u}_y$ e $\boldsymbol{u}_z$. Così anche per $\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{u}_\phi$ e $\boldsymbol{u}_z$, e $\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{u}_\theta$ e $\boldsymbol{u}_\phi$, dove $\boldsymbol{u}$ sta per vettore di modulo uno (versore).

Volumi, superfici e segmenti differenziali

Se aumentiamo le coordinate del punto *P*: ($x + dx$, $y + dy$, $z + dz$), oppure ($r + dr$, $\varphi + d\varphi$, $z + dz$), oppure ($r + dr$, $\theta + d\theta$, $\varphi + d\varphi$), formiamo un volumetto differenziale, dv. Gli elementi differenziali di volume sono riportati in Fig. 4 per ogni tipo di sistema di assi.

Si possono così calcolare volume di geometrie differenti utilizzando le opportune coordinate a seconda della semmetria.

Dalla stessa figura possiamo ricavare le areole, che delimitano il volume differenziale.

In coordinate sferiche per esempio l'elemento di superficie differenziale, perpendicolare a $\boldsymbol{a}_r$ è

$$dS=(rd\theta)(rsin\theta d\varphi),$$

dal quale, integrando, si potrebbe ricavare la superficie di porzioni di aree sferiche.

Il segmento differenziale è la diagonale che passa per *P*:

$$dl^2=dx^2+dy^2+dz^2 \text{ (cartesiano);}$$
$$dl^2=dr^2+ r^2d\varphi^2 +dz^2 \text{ (polare cilindrico)}$$
$$dl^2=dr^2+ r^2d\theta^2 +r^2sin^2\theta\ d\varphi^2\text{(polare sferico).}$$

Nel caso del calcolo di un integrale di linea per esempio per il lavoro $dL=\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{ds}$, si osserva che in coordinate cartesiane il vettore spostamento infinitesimale $d\boldsymbol{s}$ è deducibile dal segmento differenziale, per il **sistema cartesiano**:

$$d\boldsymbol{s} = dx\ \boldsymbol{a}_x + dy\ \boldsymbol{a}_y + dz\ \boldsymbol{a}_z;$$

dove abbiamo indicato i versori del sistema cartesiano come nel grafico, possiamo anche indicarli rispettivamente $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ed avremmo quindi $d\boldsymbol{s}=dx\,\boldsymbol{i}+dy\,\boldsymbol{j}+dz\,\boldsymbol{k}$ come sul Halliday, Resnick Walker, o anche, $d\boldsymbol{s}=dx\,\boldsymbol{u}_x+dy\,\boldsymbol{u}_y+dz\,\boldsymbol{u}_z$ come sul Mazzoldi, Nigro, Voci.

Potete pensarlo come una variazione infinitesimale lungo le tre direzioni, che risulta quindi il vettore lungo la diagonale del volumetto individuato da *dx*, *dy* e *dz*.

Con questa considerazione si osservi che per il **sistema cilindrico:**

$$d\boldsymbol{s}=dr\,\boldsymbol{a}_r+r d\varphi\,\boldsymbol{a}_\varphi+dz\,\boldsymbol{a}_z$$

Mentre **per il sistema cartesiano:**

$$d\boldsymbol{s}=dr\,\boldsymbol{a}_r+r d\theta\,\boldsymbol{a}_\theta+r\sin\theta d\varphi\,\boldsymbol{a}\varphi.$$

Per calcolare il lavoro di una forza centrale (simmetria sferica) meglio utilizzare un sistema di coordinate sferiche.

I sistemi di riferimento polari saranno di notevole aiuto nel campo dell'elettromagnetismo, perché, a seconda della geometria del problema, risulterà più pratico utilizzare sistemi appropriati.