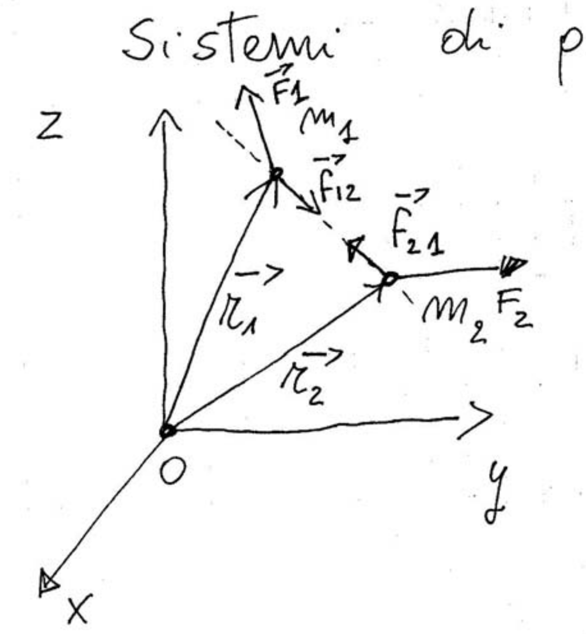
Sistemi di punti materiali



Dati due punti materiali m_1 ed m_2, sui quali agiscono due forze esterne $\vec{F_1}$ ed $\vec{F_2}$, nonché per la 3ª legge di Newton 2 forze interne

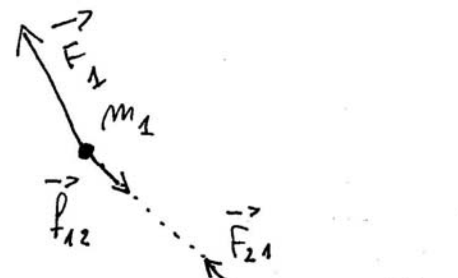
$\vec{f_{12}}$ (forza su m_1 dovuta all'interazione con m_2)

$\vec{f_{21}}$ (forza su m_2 dovuta all'interazione con m_1),

applichiamo la 2ª legge di Newton sulla

massa m_1 : $\quad \vec{F_1} + \vec{F_{12}} = m_1 \cdot \vec{a}_1 \qquad (1)$

e su m_2 $\quad \vec{F_2} + \vec{f_{21}} = m_2 \cdot \vec{a}_2 \qquad (2)$



Le forze di interazione (interne) per la 3ª legge di Newton:

$$\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$$

sono in modulo e direzione uguali, ma di verso opposto. Quindi la loro somma è il vettore nullo.

Possiamo scrivere

$$(3) \quad \vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

$\vec{a}_1 = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \qquad \vec{a}_2 = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$

Introducendo le seguenti variabili

$$m = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_{cdm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m}$$

dato che

$$\frac{d\vec{r}_{cdm}}{dt} = \vec{v}_{cdm} = \frac{1}{m}\left(m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) =$$

$$= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m}$$

e

$$\vec{a}_{cdm} = \frac{d^2\vec{r}_{cdm}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_{cdm}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v_{cdm}) =$$

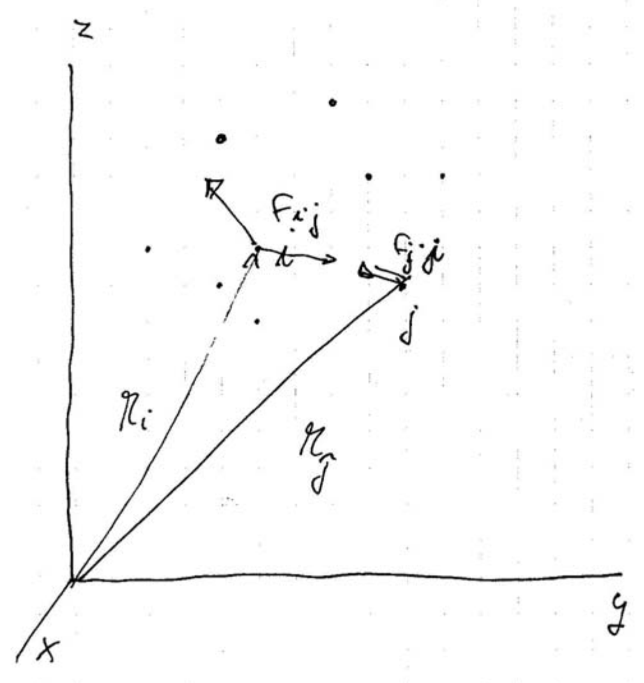
$$= \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m}$$

E quindi $\quad m\,\vec{a}_{cdm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 \qquad (4)$

Sostituendo (4) nella (3) si ha

$$\boxed{\vec{F}_{net} = m\,\vec{a}_{cdm}}$$

Il sistema di punti materiali può essere descritto dall'equazione della 2ª legge di Newton di un punto materiale di massa $m = m_1 + m_2$ e $\vec{F}_{net}$ la somma delle forze esterne che avrà un'accelerazione $\vec{a}_{cdm}$



Si può estendere la descrizione precedente a n punti materiali.

$$\vec{F}_i + \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

Tenendo conto che $\vec{F}_i =$ ~~forza~~ vettore somma delle forze interne agenti sul punto materiale i

$$\vec{f}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Se denotiamo $\vec{F}_{net}$ il vettore somma delle forze esterne $\vec{F}_{net} = \sum_i \vec{F}_i$

possiamo rappresentare la situazione globale del nostro sistema di punti materiali come segue:

$$\sum_{i1}^{n} \vec{F}_i + \sum_i \vec{f}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i \qquad (1')$$

Vediamo il vettore somma delle forze interne

$$\cancel{III} \quad \begin{cases} \vec{F}_{ij} = 0 & \text{per } i = j \\ \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} & \text{per } i \neq j \end{cases} \Rightarrow \sum_{i1}^{n} \sum_{j1}^{n} \vec{f}_{ij} = 0$$

La (1') diventa

$$\vec{F}_{net} = \sum_{i1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

Ponendo

$$\begin{cases} m = \sum_i m_i \\ \vec{r}_{cdm} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} \end{cases}$$

si ottiene

$$\vec{F}_{net} = m \, \vec{a}_{cdm}$$

O dato che $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum m_i \cdot \vec{a}_i = \cancel{a_{cdm}}$$

$$= \vec{a}_{cdm} \cdot m$$

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}_{cdm}}{dt}$$

$\vec{P}_{cdm}$ viene solitamente definita quantità di moto del sistema di punti e si sottintende cdm

$$\vec{P}_{cdm} \equiv \vec{P}_{TOT}$$